ГЛАВА I

ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ. ТЕОРИЯ СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ

Теория электронов, которую я буду иметь честь вам излагать, представляет собой в настоящее время такую обширную область, что разобрать ее полностью представится для меня невозможным. Даже в том случае, если я ограничусь общим обзором этой самой молодой ветви учения об электричестве и остановлюсь только на самых важных ее применениях в области света и лучистой теплоты и на тех ее затруднениях, которые пока что остаются неустраненными, я должен буду вести изложение возможно более сжато; только в таком случае я смогу использовать предоставленное в наше распоряжение время с надлежащей эффективностью.

Как здесь, так и в любой другой области теоретической физики мы должны отличать, с одной стороны, общие идеи и гипотезы физического характера, а с другой — ряд математических формул и вычислений, при помощи которых эти идеи и гипотезы могут быть выражены и разработаны. Я постараюсь осветить первую часть нашего предмета, оставляя вторую до некоторой степени в тени и опуская все длинные вычисления, которые лучше могут быть изложены в книге, чем на лекциях[1]).

1. Что касается физических основ, теория электронов ведет свое начало от великой теории электричества, с которой навсегда будут связаны имена Фарадея и Максвелла.

---

[1]) В этой книге вычисления, на которые я лишь коротко указал в тексте, приведены полностью в примечаниях в конце.

Вы все знаете теорию Максвелла, которую мы можем назвать общей теорией электромагнитного поля. Существенным в этой теории является то, что мы в ней обращаем главное внимание на состояние материи или среды, заполняющей поле. Упомянув об этом состоянии, я должен немедленно обратить ваше внимание на следующий любопытный факт. Хотя мы все время интересуемся этим «состоянием», нам вовсе не надо пытаться как-нибудь его себе наглядно представлять; и действительно, мы не можем сказать о нем слишком много. Правда, мы можем вообразить себе существование внутренних напряжений в среде, окружающей наэлектризованное тело или магнит; мы можем, далее, представлять себе электричество как некоторую субстанцию или жидкость, которая в проводнике перемещается свободно, а в диэлектрике связана с положением равновесия; мы можем, наконец, считать, что магнитное поле является носителем некоторых невидимых движений, например вращений вокруг линий сил. Все это и было проделано многими физиками, и сам Максвелл положил этому начало. Однако реальной необходимости в этом нет; мы можем широко развить теорию и выяснить целый ряд явлений, не прибегая к умозрительным представлениям такого рода. И действительно, ввиду тех трудностей, к которым приводят эти представления, в последние годы появилась тенденция избегать их вовсе и строить теорию на небольшом числе предположений более общего характера.

Первое из этих предположений заключается в том, что в электрическом поле имеется особое состояние, которое дает начало силе, действующей на наэлектризованное тело, и потому может быть символически представлено силой, действующей на единицу заряда такого тела. Это и есть то, что мы называем *электрической силой*, которую мы принимаем за символ для этого особого состояния среды; о природе этого состояния мы не будем высказывать какие-либо более определенные и рискованные суждения. Второе предположение касается магнитного поля. Не прибегая к скрытым вращениям, о которых я только что упоминал, мы можем определить его посредством так называемой *магнитной силы*, т. е. силы, действующей на полюс с массой, равной единице [1].

Введя эти две основные величины, мы пытаемся выразить их взаимные соотношения посредством системы уравнений, которые, как оказывается, могут быть применены к весьма большому числу разнообразнейших явлений. Таким образом, математические соотношения приобретают исключительное значение; Герц утверждал даже, что *теорию* Максвелла лучше всего определить как систему *уравнений* Максвелла.

Мы будем пользоваться этими уравнениями не в той несколько сложной форме, в которой они даны в «Трактате» Максвелла, но в том более ясном и концентрированном виде, который им придали Хивизайд и Герц. В целях наибольшего упрощения я введу в дальнейшем единицы¹) такого рода, чтобы избавиться в большинстве случаев от множителей типа 4π или $\sqrt{4\pi}$, которыми формулы первоначально были сильно загромождены. Как вам, конечно, известно, Хивизайд особенно ратовал за изгнание этих лишних множителей, и, я думаю, будет правильно, если мы последуем его совету. Поэтому наша единица электричества будет в $\sqrt{4\pi}$ раз меньше, чем обычная электростатическая единица. Сделав этот выбор, мы тем самым фиксируем для каждого случая то число, которым выражается электрическая сила. Что касается магнитной силы, то здесь мы попрежнему будем понимать под этим словом силу, действующую на единицу северного магнетизма; эта последняя, впрочем, тоже в $\sqrt{4\pi}$ раз меньше, чем обычно употребляемая единица.

2. Прежде чем переходить к электромагнитным уравнениям, я считаю необходимым сказать несколько слов о выборе осей координат и о наших математических обозначениях. Во-первых, мы всегда будем обозначать линию через s, поверхность через σ, объем через S и будем

---

¹) Единицы и обозначения в этих лекциях (за исключением букв, служащих для обозначений векторов) — те же, что в моих статьях по теории Максвелла и по теории электронов в «Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften», т. V, 13 и 14.

писать ds, $d\sigma$, dS для элементов линии, поверхности и объема. При рассмотрении поверхностей часто придется иметь дело с нормалью к поверхности; мы будем ее обозначать через n. Она должна быть всегда проведена в определенную сторону, и мы условимся проводить ее всегда наружу, если будем иметь дело с замкнутой поверхностью.

Нормалью можно пользоваться для определения направления вращения на поверхности. Мы будем говорить, что направление вращения в плоскости и нормаль к плоскости соответствуют друг другу, если обыкновенный или правый винт, завинчиваемый по направлению вращения, продвигается в направлении нормали. Согласившись на этом, мы можем добавить, что оси координат должны быть выбраны таким образом, чтобы ось OZ соответствовала вращению на 90° от оси OX к оси OY.

В дальнейшем будет удобно пользоваться простым векторным анализом и различать векторные и скалярные величины, обозначая одни и другие разными буквами. Следуя обычным обозначениям, я буду пользоваться для скаляров обыкновенными латинскими или греческими буквами. Что касается векторов, то в некоторых предыдущих статьях я пользовался для их обозначения готическими буквами. Но в данном случае, мне кажется, следует предпочесть латинские буквы жирного шрифта, прописные или строчные, например $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{c}$. Я буду обозначать через $\boldsymbol{A}_h$ составляющую вектора $\boldsymbol{A}$ в направлении h, через $\boldsymbol{A}_x$, $\boldsymbol{A}_y$, $\boldsymbol{A}_z$ — его составляющие по осям координат, через $\boldsymbol{A}_s$ — составляющую по направлению линии s и, наконец, через $\boldsymbol{A}_n$ — составляющую по нормали к поверхности.

Величину вектора $\boldsymbol{A}$ будем обозначать $|\boldsymbol{A}|$. Для квадрата, впрочем, будем писать просто $\boldsymbol{A}^2$.

Я должен буду напомнить вам некоторые понятия векторного анализа: понятие суммы и разности векторов, а также *скалярного* и *векторного произведений* векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Первое из этих «произведений», которое обозначается символом $(\boldsymbol{AB})$, есть величина скалярная, определяемая формулой

$$(\boldsymbol{AB}) = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}| \cos(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z.$$

Векторное произведение, которое мы будем изображать

$$[AB],$$

есть вектор, нормальный к плоскости, проведенной через A и B; его направление соответствует вращению на угол, меньший 180°, в направлении от A к B, а величина дается площадью параллелограмма, построенного на A и B. Составляющими его являются:

$$[AB]_x = A_y B_z - A_z B_y, \quad [AB]_y = A_z B_x - A_x B_z,$$
$$[AB]_z = A_x B_y - A_y B_x.$$

Во многих случаях нам приходится рассматривать скалярную величину φ или вектор A, заданные в каждой точке некоторого пространства. Если φ является непрерывной функцией координат, мы можем ввести вектор с составляющими

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Легко можно показать, что он будет нормален к поверхности

$$\varphi = \text{const}.$$

Мы можем называть его *градиентом* φ, и в наших формулах будем сокращенно писать «grad φ».

Пространство, в каждой точке которого вектор A имеет определенное направление и определенную величину, можно назвать векторным полем, и линии, которые в каждой точке указывают направление A, могут быть определены как линии данного вектора или линии направления. В таком векторном поле, если A_x, A_y, A_z являются непрерывными функциями координат, мы можем для каждой точки ввести некоторую скалярную величину и некоторый новый вектор, которые оба зависят от того, каким образом A изменяется от точки к точке, и не зависят от выбора осей координат. Указанная скалярная величина называется *дивергенцией* A и определяется формулой

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Вектор называется *ротацией* или *кэрлем* (вихрем) $\boldsymbol{A}$; его составляющие даются выражениями

$$\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}, \qquad \frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y},$$

а сам он может быть представлен символом

«$\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$».

Если дивергенция вектора равна нулю во всех точках, говорят о *соленоидальном* распределении этого вектора по пространству. С другой стороны, если во всех точках мы имеем $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=0$, мы будем говорить о *безвихревом* распределении.

Чтобы кончить с нашими обозначениями, я должен буду добавить только, что символ Δ является сокращением для выражения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

и что можно дифференцировать по координатам или по времени не только скалярные, но и векторные величины. Так, например, $\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x}$ обозначает вектор, составляющими которого являются:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_z}{\partial x},$$

и $\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ имеет подобное же значение. Дифференцирование по времени t мы будем во многих случаях обозначать точкой, повторное дифференцирование — двумя точками и т. д.

3. Теперь мы приготовлены к тому, чтобы написать основные уравнения электромагнитного поля в той форме, какую они принимают для эфира. Будем обозначать через $\boldsymbol{d}$ электрическую силу; тем же символом будем пользоваться для диэлектрического смещения, так как в эфире эти две величины имеют одинаковое направление и, в силу выбора наших единиц, одинаковое численное значение. Далее будем обозначать через $\boldsymbol{h}$ магнитную силу и через c — постоянную, зависящую от свойств эфира. Третий вектор — это ток $\boldsymbol{c}$, который теперь состоит только из тока смещения

Максвелла. Он имеется там, где диэлектрическое смещение $\boldsymbol{d}$ есть функция времени, и дается формулой

$$\boldsymbol{c}=\dot{\boldsymbol{d}}. \tag{1}$$

Формулы электромагнитного поля могут быть теперь выражены в форме дифференциальных уравнений следующим образом:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{d}=0, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{h}=0, \tag{3}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{h}=\frac{1}{c}\,\boldsymbol{c}=\frac{1}{c}\,\dot{\boldsymbol{d}}, \tag{4}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{d}=-\frac{1}{c}\,\dot{\boldsymbol{h}}. \tag{5}$$

Четвертое уравнение совместно с третьим определяет магнитное поле, которое получается при данном распределении тока $\boldsymbol{c}$. Что касается последнего уравнения, оно выражает закон, по которому проявляются электрические силы в системе с переменным магнитным полем — иначе говоря, это есть закон так называемой электромагнитной индукции. Формулы (1), (4) и (5) являются векторными уравнениями; каждое из них может быть заменено тремя скалярными уравнениями, отнесенными к трем осям координат.

Так, (1) эквивалентно системе

$$\boldsymbol{c}_x=\frac{\partial \boldsymbol{d}_x}{\partial t}, \quad \boldsymbol{c}_y=\frac{\partial \boldsymbol{d}_y}{\partial t}, \quad \boldsymbol{c}_z=\frac{\partial \boldsymbol{d}_z}{\partial t},$$

а (4) эквивалентно системе

$$\frac{\partial \boldsymbol{h}_z}{\partial y}-\frac{\partial \boldsymbol{h}_y}{\partial z}=\frac{1}{c}\,\frac{\partial \boldsymbol{d}_x}{\partial t} \quad \text{и т. д.}$$

Наши основные уравнения имеют тот физический смысл, что изображаемое ими состояние распространяется со скоростью c. Действительно, из шести величин $\boldsymbol{d}_x$, $\boldsymbol{d}_y$, $\boldsymbol{d}_z$, $\boldsymbol{h}_x$, $\boldsymbol{h}_y$, $\boldsymbol{h}_z$ мы можем исключить пять [1]), а для остающейся

[1]) См. примечание 1.

одной величины ψ можем найти уравнение вида

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \tag{6}$$

Это — типичное дифференциальное уравнение для распространяющегося возмущения равновесного состояния; скорость этого распространения равна c.

Хотя все решения наших уравнений обладают этим основным свойством, самые решения могут быть весьма разнообразны. Простейшее из них соответствует системе поляризованных плоских волн. Для таких волн мы имеем, например:

$$\boldsymbol{d}_y = a\cos n\left(t - \frac{x}{c}\right), \qquad \boldsymbol{h}_z = a\cos n\left(t - \frac{x}{c}\right), \tag{7}$$

причем все другие составляющие $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{h}$ равны нулю.

Мне нет необходимости подробно излагать вам, что выражается этими формулами; основной смысл их таков: если для определенного значения t в какой-нибудь точке с координатой x электрическая и магнитная силы имеют значения $\boldsymbol{d}_y$ и $\boldsymbol{h}_z$, то по прошествии некоторого промежутка времени δt они будут иметь это же значение в точке с координатой $x + c\,\delta t$. Постоянная a есть амплитуда, n есть частота, т. е. число колебаний за время 2π. Если n достаточно велико, мы имеем дело с пучком плоскополяризованного света, в котором, как вы знаете, электрические и магнитные колебания перпендикулярны к лучу и друг к другу.

Подобными же, хотя, может быть, более сложными, формулами можно представить распространение волн Герца или любых излучений, которые обязательно исходят из всякой электромагнитной системы, не находящейся в стационарном состоянии. Если мы прибавим соответственные граничные условия, то подобным же образом сможем подвести под нашу систему уравнений такие явления, как диффракция света через малые отверстия или рассеяние от мелких частичек.

Формулы для эфира составляют наиболее прочно установленную часть электромагнитной теории. Самый способ их вывода, может быть, и изменится в последующем, но трудно представить себе, чтобы изменились самые уравнения. Неточности и сомнения начинаются только тогда, когда мы подходим к рассмотрению явлений в весомых телах.

4. При изучении этих явлений есть один путь, который представляется сравнительно надежным и для наших целей вполне удовлетворительным. Следуя ему, мы просто исходим из некоторых соотношений, которые можно считать за краткие выражения наиболее важных результатов электромагнитных опытов. Мы должны ввести теперь *четыре* вектора: электрическую силу $\boldsymbol{E}$, магнитную силу $\boldsymbol{H}$, электрический ток $\boldsymbol{C}$ и магнитную индукцию $\boldsymbol{B}$. Эти величины связаны следующими основными уравнениями:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{C} = 0, \tag{8}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{9}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c} \boldsymbol{C}, \tag{10}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \dot{\boldsymbol{B}}, \tag{11}$$

имеющими ту же форму, что и вышеприведенные уравнения для эфира.

Но теперь мы должны прибавить сюда соотношения между $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{C}$, с одной стороны, и между $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{B}$ — с другой. Ограничиваясь изотропными телами, мы во многих случаях можем описывать явления с достаточной точностью, если для диэлектрического смещения будем писать векторное уравнение

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \tag{12}$$

которое говорит, что смещение имеет направление электрической силы и ей пропорционально. Ток в этом случае равен опять-таки току смещения Максвелла

$$\boldsymbol{C} = \dot{\boldsymbol{D}}. \tag{13}$$

С другой стороны, в проводящих телах мы имеем дело с током проводимости, который дается выражением

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}, \tag{14}$$

где σ есть новая постоянная. Если тело обладает свойствами только проводника, этот вектор представляет собой весь ток и является, следовательно, тождественным с тем, что мы назвали C. В некоторых случаях, однако, приходится рассматривать тела, обладающие свойствами как проводников, так и диэлектриков. Если мы допустим, что в такой среде электрическая сила вызывает как диэлектрическое смещение, так и ток проводимости, мы можем одновременно приложить оба уравнения (12) и (14) и написать для полного тока

$$C = \dot{D} + J = \varepsilon\dot{E} + \sigma E. \tag{15}$$

Наконец, самое простое предположение, которое мы можем сделать относительно связи между магнитной силой и магнитной индукцией, можно выразить формулой

$$B = \mu H, \tag{16}$$

где μ является новой постоянной.

5. Хотя уравнения (12), (14) и (16) оказываются полезными при рассмотрении многих задач, нельзя сказать, что их можно применять во всех без исключения случаях. Если бы даже это и имело место, наша теория перестала бы нас удовлетворять при попытке заглянуть глубже в природу явлений: действительно, ведь в этой общей теории мы, чтобы выразить особенные свойства различных весомых тел, просто приписываем каждому из них специальные значения диэлектрической постоянной ε, проводимости σ и магнитной проницаемости μ. Если мы хотим понять, каким образом электрические и магнитные свойства зависят от температуры, плотности, химического строения или кристаллического состояния вещества, то мы не можем удовлетвориться простым введением для каждого вещества этих коэффициентов, значения которых должны определяться из опыта; мы будем принуждены обратиться к какой-нибудь гипотезе относительно механизма, лежащего в основе всех этих явлений.

Эта необходимость и привела к представлению об *электронах* [2], т. е. крайне малых электрически заряженных частичках, которые в громадном количестве присутствуют во всех весомых телах; их распределением и движением мы и намерены объяснить все электрические и оптические явления, которые происходят не в свободном эфире. Моей задачей будет подробно разобрать некоторые из этих явлений, но я должен указать теперь же, что, по нашим новейшим воззрениям, электроны в проводнике (по крайней мере некоторая их часть) находятся в свободном состоянии, так что могут подчиняться электрической силе, которая перемещает положительные частицы в одну сторону, а отрицательные электроны — в противоположную. В случае непроводника мы будем, наоборот, предполагать, что электроны связаны с некоторым положением равновесия. Если в металлической проволоке электроны одного рода, например отрицательные, движутся в одном направлении и, возможно, электроны другого знака — в противоположном, мы имеем дело с током проводимости; такой ток может привести к состоянию, при котором тело, соединенное с одним концом проводника, получает избыток или положительных, или отрицательных электронов. Этот избыток, заряд тела в целом, может быть обнаружен, и если электричество находится в равновесии и тело состоит из проводящего вещества, то он сосредоточен в весьма тонком слое на поверхности тела.

В весомом диэлектрике тоже может происходить движение электронов. В самом деле, хотя мы и будем приписывать каждому из них определенное положение равновесия, мы не должны думать, что они вполне неподвижны. Они могут быть смещены электрической силой, возникающей в эфире; мы принимаем, что последний проникает всю весомую материю, — к этому вопросу нам скоро придется вернуться. Это смещение, однако, немедленно вызовет новую силу, которая будет стремиться вернуть частичку в ее первоначальное положение и которую поэтому уместно будет назвать *силой упругости*. В непроводящих телах, какими являются, например, стекло и сера, движение электронов, удерживаемых силой упругости в известных границах, и дает совместно с изменением диэлектрического смещения в самом эфире то, что Максвелл назвал током смещения. Вещество, в котором электроны смещены в новые положения, можно назвать электрически поляризованным.

Далее, под влиянием упругих сил электроны могут колебаться около положения своего равновесия. В силу этого, а также, вероятно, под влиянием других, более неправильных движений они становятся центрами волн, которые выходят в окружающий эфир и могут быть наблюдаемы как свет, если частота достаточно велика. Так мы можем истолковать тепловое или световое излучение. Что касается обратного явления, поглощения, его можно объяснить, рассматривая колебания электронов, вызываемые периодическими силами, которые имеются в пучке падающего света. Если движение электронов, приведенных таким образом в колебание возмущается и тем или иным путем превращается в движение неправильное, которое мы называем тепловым, то ясно, что часть падающей энергии будет накопляться в теле — другими словами, будет наблюдаться некоторое поглощение. Вынужденным движением электронов может быть объяснено не одно только поглощение. Оптический резонанс — так можно называть во многих случаях это явление — может сказываться и в том случае, если нет никакого сопротивления, так что тело совершенно прозрачно. В этом случае электроны, содержащиеся внутри молекул, тоже будут приводиться в движение, и хотя и не произойдет никакой потери колебательной энергии, колеблющиеся частички будут влиять на скорость, с которой колебания распространяются по телу. Принимая во внимание эту реакцию электронов, мы можем вывести электромагнитную теорию преломления света в зависимости от длины волны и состояния вещества и представить себе картину великолепных и разнообразных явлений двойного лучепреломления и круговой поляризации.

С другой стороны, значительное развитие получила теория движения электронов в металлических телах. Хотя здесь тоже многое еще остается сделать, так как по мере того, как мы двигаемся дальше, возникают новые вопросы, мы в настоящий момент уже можем отметить значительные результаты, полученные Рике, Друде и Дж. Дж. Томсоком[1]). Основная идея современной теории тепловых и электрических свойств металлов заключается в том, что свободные электроны в этих телах принимают участие в тепловом движении молекул вещества, двигаясь по всем направлениям с такими скоростями, что средняя кинетическая энергия каждого из них равна энергии молекулы газа, находящегося при той же температуре. Если мы допустим, далее, что электроны непрерывно сталкиваются с атомами металла, описывая при этом неправильные зигзагообразные траектории, то для нас станет ясной причина, по которой металлы являются одновременно хорошими проводниками как тепла, так и электричества и по которой, как общее правило, в ряду металлов отношение коэффициентов теплопроводности и электропроводности есть величина приблизительно постоянная. Чем больше число свободных электронов и чем больше промежуток времени между двумя последовательными столкновениями, тем больше будет проводимость как тепловая, так и электрическая.

6. Этого краткого обзора достаточно, чтобы показать, что электронную теорию следует рассматривать как распространение на область электричества молекулярной и атомной теорий, которые уже вполне оправдали себя во многих отраслях физики и химии [8]. Как вся атомистика, так, в частности, и электронная теория естественно встречают неблагоприятное отношение со стороны некоторых физиков, которые предпочитают прокладывать свой путь через новые и неисследованные области, следуя широким, торным научным путям в виде законов термодинамики, или

---

[1]) E. Riecke, Zur Theorie des Galvanismus und der Wärme, Ann. Phys. Chem. **66** (1898), стр. 353, 545, 1199; Über das Verhältnis der Leitfähigkeiten der Metalle für Wärme und für Elektrizität, Ann. Phys. **2** (1900), стр. 835. P. Drude, Zur Elektronentheorie der Metalle, Ann. Phys. **1** (1900), стр. 566; **3** (1900), стр. 369. J. J. Thomson, Indications relatives à la constitution de la matière fournies par les recherches récentes sur le passage de l'électricité à travers les gaz, Rapports au Congrès de physique de 1900, Paris, **3**, стр. 138. См. также H. A. Lorentz, The motion of electrons in metallic bodies, Amsterdam Proc. 1904—1905, стр. 438, 588, 684.

приходят к важным и красивым результатам, ограничиваясь простым описанием явлений и их взаимных соотношений при помощи системы подходящих уравнений. Никто не может отрицать, что эти методы имеют свою прелесть и что, следуя им, мы все время чувствуем под собой твердую почву, тогда как в молекулярных теориях слишком предприимчивый физик часто рискует потерять дорогу или отклониться от нее в погоне за каким-нибудь обманчивым призраком успеха.

Мы не должны забывать, однако, что эти молекулярные гипотезы могут гордиться некоторыми такими результатами, которых никогда нельзя было бы достигнуть методами чистой термодинамики или при помощи уравнений электромагнитного поля в их самой общей форме, — эти результаты хорошо известны всем изучавшим кинетическую теорию газов, теорию слабых растворов, электролитическую теорию и теорию возникновения электрического тока путем переноса ионов. Равным образом плодотворности этих гипотез не может отрицать тот, кто следил за великолепными исследованиями Дж. Дж. Томсона[1]) и его сотрудников в области электрической проводимости газов.

7. Теперь я должен познакомить вас с уравнениями, лежащими в основе математической теории электронов. Позвольте мне, прежде чем их вводить, сделать несколько предварительных замечаний.

Во-первых, мы будем приписывать каждому электрону определенные конечные размеры, как бы малы они ни были, и будем исследовать не только внешнее поле, но и внутренность электрона: можно говорить об отдельных объемных элементах и внутри электронов, и там состояние может изменяться от одной точки к другой. Относительно этого состояния мы предположим, что оно имеет тот же характер, как и во внешних точках. Действительно, одно из важнейших наших основных предположений будет заключаться в том, что эфир не только занимает все пространство между молекулами, атомами и электронами, но

---

[1]) J. J. Thomson, Conduction of electricity through gases. Cambridge, 1903.

что он и проникает все эти частички. Мы добавим гипотезу, что, хотя бы частички и находились в движении, *эфир всегда остается в покое* [4]. Мы можем примириться с этим, на первый взгляд поразительным, представлением, если будем мыслить частички материи как некоторые местные изменения в состоянии эфира. Эти изменения могут, конечно, очень хорошо продвигаться вперед, в то время как элементы объема среды, в которой они наблюдаются, остаются в покое.

Но если внутри электрона имеется эфир, там может существовать и электромагнитное поле, и все, что нам остается сделать, — это установить систему уравнений, которая бы была приложима как к тем частям эфира, в которых есть электрический заряд, т. е. к электронам, так и к тем, где заряда нет. Что касается распределения заряда, то здесь мы вольны делать какие угодно предположения. Для удобства рассуждений мы предположим, что он распределен по некоторому объему, — скажем, по всему объему, занятому электроном, и будем считать, что объемная плотность ρ есть непрерывная функция координат, так что у заряженной частички нет резкой границы; напротив, она окружена тонким слоем, в котором плотность непрерывно падает от того значения, которое она имеет внутри электрона, до нуля. Благодаря этой гипотезе непрерывности ρ, которую мы распространим на все другие величины, встречающиеся в наших уравнениях, нам не придется беспокоиться о поверхностях разрыва и загромождать теорию отдельными уравнениями для этих поверхностей. Мало того, если мы предположим, что различие между свойствами эфира внутри и вне электронов вызывается — во всяком случае в той мере, в какой это имеет значение для нас, — только присутствием объемной плотности внутри электронов, уравнения для внешнего поля могут быть получены из уравнений для внутреннего поля, если мы приравняем ρ нулю, так что мы должны написать только *одну* систему дифференциальных уравнений.

Очевидно, они должны быть выведены из уравнений (2) — (5), которые были установлены нами для свободного, т. е. лишенного зарядов, эфира, путем введения в них соответствующих изменений, выражающих влияние заряда. Было найдено, что мы можем прийти к цели при помощи самого простого изменения и представить себе следующую систему:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{d} = \rho, \tag{17}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{h} = 0, \tag{18}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{h} = \frac{1}{c} \boldsymbol{c} = \frac{1}{c} (\dot{\boldsymbol{d}} + \rho \boldsymbol{v}), \tag{19}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{d} = -\frac{1}{c} \dot{\boldsymbol{h}}, \tag{20}$$

в которой изменены только первая и третья формулы.

Чтобы оправдать эти изменения, я должен в первую очередь напомнить вам общее соотношение максвелловской теории, связывающее диэлектрическое смещение через замкнутую поверхность и величину заряда e, содержащуюся внутри нее. Это соотношение выражается уравнением

$$\int \boldsymbol{d}_n \, d\sigma = e, \tag{21}$$

в котором интеграл взят по замкнутой поверхности, причем каждый ее элемент $d\sigma$ умножается на составляющую $\boldsymbol{d}$ по нормали n, которая, как мы ранее установили, направлена наружу. Применяя обычные рассуждения и сравнивая данное состояние с таким, при котором не было бы вообще никакого диэлектрического смещения, мы придем к заключению, что общее количество электричества, смещенное через поверхность (при этом то количесто электричества, которое смещено в направлении наружу, мы считаем за положительное), равно заряду e. Теперь, если мы приложим это рассуждение к элементу объема $dx\,dy\,dz$, взятому в точке, где объемная плотность равна ρ, имеем:

$$e = \rho \, dx \, dy \, dz,$$

и так как интеграл в (21) сводится к

$$\operatorname{div} \boldsymbol{d} \, dx \, dy \, dz,$$

мы сразу получаем формулу (17).

Во-вторых, мы должны заметить, что движущийся заряд образует то, что мы называем конвекционным током, и вызывает те же магнитные действия, что и обыкновенный ток проводимости; это было впервые показано в прославленном и общеизвестном опыте Роулэнда [6]. Если теперь $\boldsymbol{v}$ есть скорость заряда, естественно для тока конвекции написать $\rho\boldsymbol{v}$; в самом деле, три составляющие ρv_x, ρv_y, ρv_z представляют количества электричества, перенесенные в единицу времени через единицу площади поверхности, нормальной к осям координат. С другой стороны, если внутри электрона имеется электромагнитное поле, там будет иметь место также ток смещения $\dot{\boldsymbol{d}}$. Поэтому мы принимаем для полного тока следующее выражение:

$$\boldsymbol{c} = \dot{\boldsymbol{d}} + \rho\boldsymbol{v}. \tag{22}$$

Для определения магнитного поля нам придется пользоваться уравнением (19). Конечно, это опять-таки векторное уравнение. При пользовании им в отдельных вопросах часто бывает удобно заменить его тремя скалярными дифференциальными уравнениями:

$$\frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial d_x}{\partial t} + \rho v_x\right), \quad \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial d_y}{\partial t} + \rho v_y\right),$$

$$\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial d_z}{\partial t} + \rho v_z\right).$$

Вы видите, что, полагая $\rho = 0$ в формулах (17) и (19), мы возвращаемся к первоначальным уравнениям (2) и (4).

8. Необходимо добавить сюда еще одно уравнение, которое по своему значению не уступает уравнениям (17)—(20). Следует отметить, что я тщательно избегал говорить что-нибудь о природе электрического заряда, представленного буквой ρ. Никакие умозрительные представления в этой области, никакие попытки свести идею заряда к идеям другого свойства не имеют места в настоящей теории; мы будем утверждать только одно, что ρ есть величина, относящаяся к известной точке эфира и уравнением (17) связанная с распределением диэлектрического смещения по соседству с этой точкой. Мы можем сказать, что в эфире может наблюдаться известное состояние, определяемое вектором $\boldsymbol{d}$, который мы называем диэлектрическим смещением, и что, вообще говоря, этот вектор распределен соленоидально, но что имеются некоторые места, представляющие исключение из этого правила, — места, где дивергенция $\boldsymbol{d}$ принимает некоторое значение ρ, отличное от нуля. В этом случае мы говорим об электрическом заряде и понимаем под его плотностью величину $\operatorname{div} \boldsymbol{d}$.

Что касается утверждения, что заряды могут перемещаться сквозь эфир, причем сама среда остается в покое, то в самой простой его форме оно значит только то, что значение $\operatorname{div} \boldsymbol{d}$, которое в какой-нибудь момент существует в точке $\boldsymbol{P}$, в следующий момент будет обнаружено в другой точке $\boldsymbol{P}'$.

Но, чтобы объяснить электромагнитные явления, мы вынуждены пойти несколько дальше. Не вполне достаточно рассматривать ρ просто как символ некоторого состояния эфира. Наоборот, мы должны в известной степени наделить заряды субстанциальностью, — по крайней мере в той степени, чтобы мы могли признать возможность *сил*, действующих на них и вызывающих или изменяющих их движение. Слово «сила» употребляется в обычном смысле, какой оно имеет в динамике, и мы легко привыкнем к мысли о силах, действующих на заряды, если мы представим себе, что эти последние неразрывно связаны с тем, что мы привыкли называть материей, или являются свойством этой материи. Это и есть мысль, лежащая в основе выражения «заряженная частичка», которым мы уже пользовались и которым будем пользоваться в дальнейшем для обозначения электрона. В дальнейшем мы увидим, что, по крайней мере в некоторых случаях, является весьма сомнительным, насколько удачно мы выбрали этот термин.

Как бы то ни было, но нам придется говорить о силах, действующих на заряд или на электрон, на заряженную материю — как вы предпочитаете. В соответствии с основными принципами теории Максвелла мы будем считать, что эта сила вызывается состоянием эфира, или, так как эта среда проникает в электроны, что она представляет собой действие эфира на внутренние точки тех частиц, на которых имеется заряд. Если мы разделим весь электрон на элементы объема, мы будем иметь силу, действующую на каждый элемент и определяемую состоянием эфира именно внутри этого элемента. Мы допустим, что эта сила пропорциональна заряду элемента, так что нам остается узнать только силу, действующую на единицу заряда. Это — та сила, которую мы теперь можем назвать *электрической силой* в тесном смысле слова. Будем обозначать ее через $\boldsymbol{f}$. Определяющее ее выражение, которое нам остается добавить к уравнениям (17) и (20), имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{d} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{vh}]. \tag{23}$$

Подобно нашим предыдущим уравнениям, оно получено путем обобщения результатов электромагнитных опытов. Первый член выражает силу, действующую на электрон в электростатическом поле. Действительно, в этом случае сила, действующая на единицу заряда, должна вполне определяться диэлектрическим смещением. С другой стороны, часть силы, даваемая вторым членом, может быть выведена из закона, по которому магнитное поле действует на элемент тока с силой, перпендикулярной к току и к линиям сил; это действие в наших единицах может быть выражено в векторной форме следующим образом [6]:

$$\boldsymbol{F} = \frac{s}{c}[\boldsymbol{ih}],$$

где $\boldsymbol{i}$ есть сила тока, рассматриваемого как вектор, а s — длина элемента тока. По электронной теории $\boldsymbol{F}$ слагается из всех сил, с которыми поле $\boldsymbol{h}$ действует на отдельные электроны, движущиеся по проводнику. Для упрощения вопроса мы предположим, что мы имеем дело с электронами только одного рода, движущимися с общей скоростью $\boldsymbol{v}$ и имеющими один и тот же заряд e; тогда можно написать:

$$s\boldsymbol{i} = Ne\boldsymbol{v},$$

где N есть (целое) число этих частичек в элементе s. Отсюда

$$\boldsymbol{F} = \frac{Ne}{c}[\boldsymbol{vh}],$$

так что, деля на Ne, получаем для силы, действующей на единицу заряда:

$$\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{h}].$$

Интересное и простое применение этого результата мы найдем в объяснении при его помощи индукционного тока, который получается в проводнике, пересекающем магнитные линии сил. Два рода электронов, имеющих скорости проводника $\boldsymbol{v}$, перемещаются в данном случае под действием сил, определяемых нашей формулой, в противоположных направлениях.

9. Итак, в одном случае мы пришли к необходимости ввести силу $\boldsymbol{d}$, а в другом — силу $\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{h}]$; мы теперь соединим обе силы так, как это сделано в уравнении (23); при этом, вводя предположение, что в общем случае обе силы существуют одновременно, мы выходим за пределы прямых опытов. Если бы, например, электрон двигался в пространстве, пронизываемом волнами Герца, мы могли бы вычислить действие поля при помощи значений $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{h}$, наблюдаемых в той точке поля, которая занята частичкой.

Конечно, в случаях, подобных только что рассмотренному, при вычислении силы, вызываемой внешним полем, нам нет нужды различать направление и величину силы $\boldsymbol{f}$ в различных точках электрона, если только частица не вращается; скорость $\boldsymbol{v}$ будет одна и та же во всех ее точках, и внешнее поле можно считать однородным, принимая во внимание малые размеры электрона. Но, когда электрон находится в состоянии переменного движения и нам нужно вычислить силу, зависящую от его собственного поля, наш анализ необходимо несколько продолжить. Теперь поле далеко не однородно, и, разделив нашу частичку на элементы объема, мы должны определить действие поля на каждый из них. В конце концов, если мы будем рассматривать электрон как твердое тело, мы без труда вычислим обычным способом результирующую силу и результирующую пару.

10. Я так смело говорю о том, что происходит внутри электрона, как будто я сумел заглянуть внутрь этих малых частичек, и боюсь, что кто-нибудь подумает, что лучше было бы мне и не пытаться входить во все эти детали. Мое оправдание заключается в том, что, если нам нужно иметь вполне определенную систему уравнений, нельзя поступать иначе; мало того, как мы увидим дальше, опыт действительно может дать кое-какие указания о размерах электронов. Во-вторых, следует заметить, что в тех случаях, когда начинает себя проявлять внутреннее состояние электронов, рассуждения, подобные вышеприведенному, являются во всяком случае интересными, независимо от их верности; в то же время их нужно считать безобидными, раз мы признаем, что внутреннее состояние электронов есть вопрос неважный по существу.

Следует также отметить, что наши основные предположения ни в коем случае не исключают возможности и таких распределений зарядов, о которых мы до сих пор не говорили. Бесконечно уменьшая толщину переходного слоя, в котором ρ изменяется от конечного значения до нуля, мы можем получить и предельный случай электрона с резкой границей. Мы можем также представить себе, что заряд сосредоточен не во всем объеме частички, а только в некотором поверхностном слое, толщина которого может быть как угодно мала, так что мы можем говорить о поверхностном заряде. В некоторых формулах мы действительно будем иметь в виду этот случай.

11. Так как наши уравнения являются краеугольным камнем того здания, которое мы собираемся построить, будет полезно рассмотреть их несколько подробнее, чтобы быть уверенными в том, что они совместимы друг с другом. Легко показать, что это действительно так, если только заряд каждого элемента объема остается постоянным во все время движения[1]). Если рассматривать электроны как твердые тела (а так мы и будем поступать почти всегда), то, конечно, ρ постоянно в каждой точке частички. Мы можем, впрочем, также предположить, что электроны изменят форму и объем; в этом случае нужно только

---

[1]) Примечание 2.

принять, что величина ρ для элемента объема изменяется обратно пропорционально величине элемента.

Важно также отметить, что наши формулы применимы к системе, в которой заряды не сосредоточены в определенных малых частичках, а распределены каким угодно способом в больших объемах. Мы можем даже пойти дальше и представить себе любое число зарядов с плотностями ρ_1, ρ_2 и т. д., которые обладают способностью взаимной проницаемости, занимая одну и ту же часть пространства, и которые в то же время двигаются каждый со своей скоростью. Это приведет нас к замене членов ρ и $\rho\boldsymbol{v}$ в (17) и (19) через $\rho_1+\rho_2+\ldots$ и $\rho_1\boldsymbol{v}_1+\rho_2\boldsymbol{v}_2+\ldots$, где векторы $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ... являются скоростями отдельных зарядов. Такого рода предположение, сколь искусственным оно бы нам ни представлялось, окажется полезным в одной из задач, которые нам придется рассматривать.

12. Я теперь должен обратить ваше внимание на некоторые прекрасные результаты, которые могут быть выведены из наших основных уравнений, и в первую очередь на способ вычисления электромагнитного поля по формулам (17)—(20) при заданном распределении и движении зарядов. Возможность такого определения обусловливается, во-первых, тем, что совершенно таким же способом, как в случае уравнений для свободного эфира, мы можем здесь исключить пять величин из шести: d_x, d_y, d_z, h_x, h_y, h_z, а во-вторых, замечательной формой, в которой представляется окончательное уравнение[1]). Так, например, для составляющих $\boldsymbol{d}$ мы имеем три уравнения, которые мы можем соединить в одну векторную формулу:

$$\Delta\boldsymbol{d}-\frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{d}}=\operatorname{grad}\rho+\frac{1}{c^2}\frac{\partial(\rho\boldsymbol{v})}{\partial t}; \tag{24}$$

подобное же условие имеем и для магнитной силы:

$$\Delta\boldsymbol{h}-\frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{h}}=-\frac{1}{c}\operatorname{rot}(\rho\boldsymbol{v}). \tag{25}$$

---

1) Примечание 3.

Нет нужды выписывать шесть скалярных уравнений для отдельных составляющих; мы можем ограничиться формулами для $\boldsymbol{d}_x$ и $\boldsymbol{h}_x$, т. е.

$$\Delta \boldsymbol{d}_x - \frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{d}}_x = \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial(\rho \boldsymbol{v}_x)}{\partial t}, \tag{26}$$

$$\Delta \boldsymbol{h}_x - \frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{h}}_x = -\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial(\rho \boldsymbol{v}_z)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho \boldsymbol{v}_y)}{\partial z}\right\}. \tag{27}$$

Для большей ясности будет целесообразно ввести специальное обозначение для левых частей этих уравнений. Результат операции Δ, примененной к величине ψ, являющейся функцией x, y, z, называется оператором Лапласа. Подобным же образом результат операции $\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ может быть назван оператором Даламбера в память того, что математик Даламбер первый решил некоторое уравнение в частных производных, которое встречается в теории колебания струны и в котором имеется эта операция — вернее операция $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, являющаяся ее частным случаем.

Так как можно дифференцировать по времени и пространству и векторные величины, мы можем, конечно, говорить об операторах Даламбера для векторных величин с тем же правом, как и для скалярных. А так как для данного распределения и движения зарядов правые части наших последних уравнений являются известными функциями x, y, z и t, мы видим, что векторы $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{h}$, равно как и их составляющие, определяются значениями соответственных операторов Даламбера. Поэтому мы должны разобрать вопрос, каково должно быть значение величины ψ, для которой оператор Даламбера имеет заданное значение ω. Эта задача допускает простое решение. В обыкновенной теории потенциала доказывается, что функция ψ, для которой оператор Лапласа имеет заданное значение ω, может быть определена по формуле

$$\psi = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\omega}{r}\,dS, \tag{28}$$

где r — расстояние от элемента объема dS до точки P, для которой мы хотим вычислить ψ, а ω — значение оператора Лапласа для этого элемента; интегрирование производится по всему пространству, где ω отлично от нуля.

Так вот, весьма замечательно, что функцию ψ, удовлетворяющую уравнению

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi = \omega, \tag{29}$$

можно вычислить по методу, сильно напоминающему метод формулы (28)[1]. Единственное различие заключается в том, что если нам нужно определить значение ψ в точке P для момента времени t, мы должны для ω брать значение этой функции в элементе dS в момент времени $t - \frac{r}{c}$ [7]. В дальнейшем величины, значения которых следует брать не для момента времени t, а для более раннего момента $t - \frac{r}{c}$, мы будем заключать в квадратные скобки. Пользуясь этим обозначением, мы можем утверждать, что решением дифференциального уравнения (29) является функция

$$\psi = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{[\omega]}{r}\,dS. \tag{30}$$

Следует заметить, что это имеет место также и тогда, когда ω — величина векторная; в этом случае векторами являются и $[\omega]$ и $\frac{[\omega]}{r}dS$, и интегрирование в (30) следует понимать как суммирование бесконечного числа бесконечно малых векторов. Когда требуется произвести самое вычисление, векторное уравнение опять можно разложить на три скалярных уравнения, содержащих составляющие ω и дающих составляющие ψ.

13. Вышеприведенный метод вычисления можно применить к уравнениям (24) и (25) или (26) и (27). Так как, однако, вторые члены этих формул отличаются некоторой сложностью, мы предпочитаем не определять непосредственно $\mathbf{d}$ и $\mathbf{h}$, а вычислить в первую очередь некоторые

---

1) Примечание 4.

вспомогательные функции, которые называются *потенциалами* и через которые можно будет выражать электрические и магнитные силы. Первая из этих функций есть скалярная величина, которую мы будем обозначать через φ, а вторая является вектором, который будем обозначать через $\boldsymbol{a}$.

Если потенциалы удовлетворяют соотношениям

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\ddot{\varphi} = -\rho \tag{31}$$

и

$$\Delta\boldsymbol{a} - \frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{a}} = -\frac{1}{c}\rho\boldsymbol{v}, \tag{32}$$

то можно показать[1]), пользуясь уравнениями (17)—(20), что диэлектрическое смещение дается выражением

$$\boldsymbol{d} = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{a}} - \operatorname{grad}\varphi, \tag{33}$$

а магнитная сила — выражением

$$\boldsymbol{h} = \operatorname{rot}\boldsymbol{a}. \tag{34}$$

Вы видите, что уравнения (31) и (32) имеют ту же форму, как и (29), так что оба потенциала определяются тем условием, что для них операторы Даламбера должны иметь простые значения $-\rho$ и $-\frac{1}{c}\rho\boldsymbol{v}$. Поэтому, принимая во внимание (30), мы можем написать:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}[\rho]\,dS \tag{35}$$

и

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{4\pi c}\int \frac{1}{r}[\rho\boldsymbol{v}]\,dS. \tag{36}$$

Эти уравнения совместно с уравнениями (33) и (34) решают нашу задачу. Они показывают, что для вычисления поля мы должны поступать следующим образом. Пусть P будет та точка, для которой мы хотим определить значения потенциалов для момента времени t. Мы должны разделить

---

[1]) Примечание 5.

все окружающее пространство на элементы объема; какой-нибудь из них пусть будет dS. Пусть он находится при точке Q; расстояние QP обозначим через r. В этом элементе объема в определенный момент времени или имеется какая-нибудь часть электрона, или нет. Нас интересует только то, имеется ли там какой-нибудь заряд в момент времени $t-\frac{r}{c}$. В самом деле, квадратные скобки должны нам напоминать, что мы должны понимать под ρ плотность, имеющуюся в объеме dS в определенный момент времени $t-\frac{r}{c}$, а под $\rho\mathfrak{v}$ — произведение из плотности на скорость заряда внутри dS в тот же самый момент. Эти значения $[\rho]$ и $[\rho\mathfrak{v}]$ надо умножить на dS и разделить на r. Далее, мы должны со всеми элементами поступить так же, как мы поступили с одним элементом dS, и, наконец, все результаты сложить. Конечно, будет много элементов, которые в интеграле не дадут ничего; это будут все те элементы, в которых в момент времени $t-\frac{r}{c}$ не содержится заряда.

14. По поводу вышеизложенного следует сделать несколько дальнейших замечаний. Во-первых, вы видите, что множитель $\frac{1}{4\pi}$, от которого мы так заботливо хотели избавиться, все же появился на сцену. Мы никак не можем предотвратить его появления, но, к счастью, он теперь будет встречаться только в небольшом числе наших уравнений. Во-вторых, особенно важно заметить, что значения ρ и $\rho\mathfrak{v}$, которые для какой-нибудь точки Q наблюдаются в момент времени $t-\frac{r}{c}$, в точке P проявляют себя не в этот момент $t-\frac{r}{c}$, а в более поздний момент t. Вот почему мы можем говорить о распространении со скоростью c. Части φ и $\mathfrak{a}$, обусловленные различными элементами dS, отвечают состояниям внутри этих элементов в различные моменты времени — моменты тем более отдаленные, чем больше расстояние этих элементов от рассматриваемой точки P.

Ввиду этого специального характера нашего результата потенциалы φ и $\boldsymbol{a}$, даваемые выражениями (35) и (36), часто называются *запаздывающими потенциалами*.

Я должен добавить, что функция (30) не является наиболее общим решением (29) и что по этой причине значения (33) и (34), выведенные из (35) и (36), не являются единственными, удовлетворяющими основным уравнениям. Нам нет, однако, нужды говорить о других решениях, если мы примем, что единственной причиной, вызывающей электромагнитное поле, является наличие электронов и их движений[1]).

15. Хороший пример для применения наших общих формул дает случай одного электрона. Предположим, во-первых, что частичка никогда не двигалась и не будет двигаться. Тогда $\boldsymbol{a}=0$, и так как ρ имеет одно и то же значение для всех моментов времени, скалярный потенциал дается выражением

$$\varphi=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\rho}{r}\,dS.$$

Так как уравнения (33) и (34) приобретают вид

$$\boldsymbol{d}=-\operatorname{grad}\varphi,$$

$$\boldsymbol{h}=0,$$

мы возвращаемся к обычным формулам электростатики.

Рассмотрим, далее, электрон, который движется поступательно (от $t=-\infty$ до $t=+\infty$) с постоянной скоростью w по некоторой прямой. Пусть P и P' будут две точки, расположенные таким образом, что прямая PP' совпадает с направлением движения частички. Легко видеть, что если мы хотим вычислить φ, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{h}$ сначала для точки P в момент времени t, а затем для точки P' в момент времени $t+\frac{PP'}{w}$, мы должны повторить в точности одни и те же вычисления. Если, например, dS есть элемент объема, входящий в интегралы (35) и (36) в первой задаче, то соответствующие интегралы во второй задаче

---

1) Примечание 6.

должны будут содержать элемент dS', который можно получить, перемещая dS в направлении движения на расстояние, равное PP'.

Отсюда вытекает, что электрон все время окружен одним и тем же полем, так что можно сказать, что он его несет с собой. Что касается природы этого поля, то из (33)—(36) легко вывести, что в случае сферического электрона с зарядом, распределенным симметрично вокруг центра, путь которого есть s, линии электрических сил суть кривые, расположенные в плоскостях, проходящих через s, а магнитные линии суть круги, имеющие s осью [1]. Это поле отличается от поля неподвижного электрона не только присутствием магнитной силы, но также и измененным распределением диэлектрического смещения.

Наконец, рассмотрим несколько более сложный случай. Допустим, что от $t = -\infty$ до некоторого момента времени t_1 электрон находится в покое в некоторой точке A и что за короткий промежуток времени, начиная от t_1, он приобретает скорость w, которая остается постоянной (по величине и направлению) до того момента, когда движение в течение короткого промежутка времени (кончающегося в момент t_2) прекращается. Пусть B будет конечное положение, в котором электрон после остановки останется навсегда.

Если P — какая-нибудь точка окружающего эфира, мы можем рассмотреть два расстояния l_1 и l_2, причем первое является кратчайшим расстоянием от P до точек электрона, находящегося в положении A, второе — наибольшим расстоянием от P до электрона, находящегося в положении B. Допустим, что интервал $t_2 - t_1$ настолько велик, что

$$t_2 + \frac{l_2}{c} > t_1 + \frac{l_1}{c}.$$

Ясно, что если мы вычислим φ и a для точки P и для момента времени, предшествующего $t_1 + \frac{l_1}{c}$, мы получим результат, совершенно не зависящий от движения элек-

1) Примечание 7.

рона. Это движение никоим образом не может сказаться в P в течение первого периода, который поэтому будет характеризоваться полем неподвижного электрона. Подобное же поле будет существовать в P после момента $t_2+\frac{l_2}{c}$, так как влияние, оказываемое движущейся частицей, уже опередило в своем поступательном движении рассматриваемую точку.

В промежутке времени между $t_1+\frac{l_1}{c}$ и $t_2+\frac{l_2}{c}$ поле в P будет вызываться движущимся электроном. Если мы допустим, что размеры частички весьма малы по сравнению с расстояниями l_1, l_2 и что скорость w приобретается и теряется за интервалы времени много меньшие, чем t_2-t_1, то мы можем быть уверены, что за бо̀льшую часть промежутка времени между $t_1+\frac{l_1}{c}$ и $t_2+\frac{l_2}{c}$ поле в P будет таким, каким оно было бы, если бы все время существовала постоянная скорость w. Конечно, в моменты времени непосредственно после $t_1+\frac{l_1}{c}$ и перед $t_2+\frac{l_2}{c}$ положение будет иное; там будет постепенный переход от одного состояния к другому. Ясно также, что эти периоды перехода для различных точек P не будут совпадать друг с другом. Если S_1, S_2, S_3 суть части пространства, лежащие на различных расстояниях от линии AB, причем S_1 лежит дальше всего, а S_3 ближе всего, может легко случиться, что в некоторый момент времени S_1 будет занято полем электрона, находящегося в покое в точке A, S_2 — полем движущегося электрона, а S_3 — окончательным полем.

16. До сих пор мы пользовались только уравнениями (17) — (20). Прибавляя к этим уравнениям выражение (23) для электрической силы и предполагая, что силы другого характера, которые могли бы действовать на электрон, являются заданными, мы получаем возможность определить не только поле, но и движение зарядов. Нам, однако, не нужно вникать здесь в специальные задачи такого рода. Мы сосредоточим наше внимание на одной или двух общих

теоремах, имеющих место для любой системы движущихся электронов.

Во-первых, надлежащие преобразования основной формулы приводят к уравнению, выражающему закон сохранения энергии[1]). Ограничимся частью системы, лежащей внутри некоторой замкнутой поверхности; тогда это уравнение приобретает вид

$$\int \rho(\boldsymbol{f}\boldsymbol{v})\,dS + \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int(\boldsymbol{d}^2 + \boldsymbol{h}^2)\,dS\right] + \\ + c\int[\boldsymbol{d}\boldsymbol{h}]_n\,d\sigma = 0. \qquad (37)$$

Попробуем его разъяснить. Так как $\boldsymbol{f}$ есть сила, с которой эфир действует на единицу заряда, сила, действующая на заряд элемента dS, будет $\rho\boldsymbol{f}\,dS$ и

$$(\rho\,dS\boldsymbol{f}\boldsymbol{v}) = \rho(\boldsymbol{f}\boldsymbol{v})\,dS$$

будет ее работа за единицу времени. Таким образом, первый интеграл в (37) дает работу, произведенную за единицу времени силами эфира, действующими на электроны. Этот член совместно с работой других сил, которые могут действовать на электроны, позволит нам поэтому вычислить изменение кинетической энергии электронов.

Конечно, раз эфир отдает электронам некоторую работу, он должен терять эквивалентное количество энергии; это количество энергии может быть возмещено притоком энергии из частей системы, лежащих вне поверхности σ, т. е. явление должно сопровождаться переносом энергии к этому месту. Мы должны поэтому рассматривать

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{d}^2 + \boldsymbol{h}^2)\,dS \qquad (38)$$

как выражение энергии, содержащейся внутри элемента объема эфира, а

$$c\int[\boldsymbol{d}\boldsymbol{h}]_n\,d\sigma \qquad (39)$$

---

[1]) Примечание 8.

— как выражение для количества энергии, потерянного системой внутри поверхности и приобретенного окружающим эфиром.

Те две части, на которые может быть разделено выражение (38), можно лучше всего назвать электрической и магнитной энергией эфира. Отнесенные к единице объема, оба эти выражения приобретают вид

$$w_e = \frac{1}{2} \boldsymbol{d}^2 \tag{40}$$

и

$$w_m = \frac{1}{2} \boldsymbol{h}^2. \tag{41}$$

Эти выражения эквивалентны тем, которые в свое время были даны Максвеллом. То, что коэффициенты равны $\frac{1}{2}$, а не 2π или чему-нибудь в этом роде, вызывается выбором наших новых единиц и, конечно, лучше всего оправдывает этот выбор.

Что касается переноса энергии, даваемого выражением (39), то он необходимо должен иметь место в точках на самой поверхности σ, так как в нашей теории нет места ни для какого действия на расстоянии. Далее, мы естественным образом приходим к предположению, что действия, при помощи которых этот перенос имеет место, таковы, что для каждого элемента $d\sigma$ величина $c\,[\boldsymbol{dh}]_n\,d\sigma$ выражает количество энергии, переносимой через этот элемент. Таким путем мы переходим к представлению о *потоке энергии*, впервые формулированному Пойнтингом [1]) [8]. Он определяется векторным произведением $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{h}$, умноженным на постоянную c, так что мы можем написать:

$$\boldsymbol{s} = c\,[\boldsymbol{dh}]. \tag{42}$$

Смысл этого выражения таков, что для любого элемента $d\sigma$ количество энергии, проходящей через единицу его площади в единицу времени, определяется составляющей $\boldsymbol{s}_n$ вектора $\boldsymbol{s}$ по нормали к элементу.

---

[1]) J. H. Poynting, On the transfer of energy in the electromagnetic field, London Trans. **175** (1884), стр. 343.

17. Интересно применить вышеприведенные результаты к пучку поляризованного света, представляемого нашими уравнениями (7). Для энергии, содержащейся в единице объема, получаем:

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{d}^2+\boldsymbol{h}^2)=a^2\cos^2 n\left(t-\frac{x}{c}\right),$$

а для потока энергии через площадку, нормальную к оси OX,

$$c\boldsymbol{d}_y\boldsymbol{h}_z=ca^2\cos^2 n\left(t-\frac{x}{c}\right).$$

Средние значения этих выражений за полный период таковы:

$$\frac{1}{2}a^2 \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}ca^2,$$

так как по известной теореме среднее значение $\cos^2 n\left(t-\frac{x}{c}\right)$ равно $\frac{1}{2}$.

Легко видеть, что выражением $\frac{1}{2}ca^2$ можно пользоваться также для вычисления потока энергии за любой промежуток времени, весьма большой по сравнению с одним периодом.

Если пучок света ограничен по бокам цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны OX, как это бывает в том случае, когда мы пренебрегаем явлениями диффракции, и если нормальное сечение имеет площадь Σ, поток энергии через сечение дается выражением $\frac{1}{2}ca^2\Sigma$. Для любых двух сечений имеем одно и то же выражение, как это и должно быть, так как количество энергии в части пучка, лежащей между сечениями, остается постоянным.

Случай одного электрона, движущегося равномерно и поступательно, тоже дает хорошую иллюстрацию того, что было сказано про поток энергии. Определив внутреннее и внешнее поле при помощи формул (33)—(36), мы можем вывести полную электромагнитную энергию из (40) и (41). С этой величиной мне придется иметь дело в дальнейшем. Сейчас я ограничусь указанием на то, что из общего вида электрических и магнитных силовых линий, пересекающих друг друга под прямым углом, мы должны заключить о присутствии потока энергии, общее направление которого совпадает с перемещением электрона. Этого и следовало ожидать, так как движущийся электрон все время окружен одним и тем же полем. Можно сказать, что энергия этого поля сопровождает частичку в ее движении.

На ряде других примеров можно показать подобным же образом, как теорема Пойнтинга часто проливает свет на запутанные вопросы. Значение ее действительно не может быть преувеличено, и теперь трудно представить себе состояние электромагнитной теории каких-нибудь тридцать лет назад, когда нам приходилось обходиться без этой прекрасной теоремы.

18. Прежде чем покончить с этим вопросом, разрешите мне обратить ваше внимание на вопрос, насколько точным можно считать представление о потоке энергии. Как мне кажется, следует признать, что раз мы знаем взаимодействие между двумя частичками или двумя элементами объема, мы будем в состоянии сказать нечто определенное и об энергии, переходящей от одного элемента к другому. Всякая теория, которая объясняет вещи при помощи определенных предположений относительно взаимодействий между частями системы, должна в то же самое время признать возможность переноса энергии; относительно интенсивности последнего не возникает никаких сомнений. Но легко видеть, что даже и при этом условии невозможно, вообще говоря, определить пути частей или элементов энергии в том смысле, в каком мы имеем возможность проследить пути мельчайших частичек, из которых состоит вещество.

Чтобы показать это, я обозначу через P частичку или элемент объема и через A, B, C, ..., A', B', C', ... — некоторое число других частичек или элементов, которые взаимодействуют с элементом P. Это взаимодействие имеет следствием перенос энергии; в соответствии с вышеизложенным мы будем думать, что оно известно достаточно хорошо, и мы можем установить совершенно определенно, каким количеством энергии обменялись любые две частички. Пусть, например, P получит от A, B, C, ... количества энергии a, b, c, ... и пусть она передаст A', B', C', ... количества a', b', c', ..., причем у нее останется избыток энергии p. Тогда мы будем иметь уравнение

$$a+b+c+\dots=p+a'+b'+c'+\dots$$

Ясно, что если даже в нашем воображаемом случае будет известен каждый член этого уравнения, у нас все же не будет возможности узнать, каким путем количества энергии, содержащиеся в a, b, c, ..., — скажем, индивидуальные порции энергии, — распределятся между p, a', b', c', ... Если, например, в каждой части уравнения имеется только по два члена одного и того же рода, так что оно приобретает вид

$$a+b=a'+b',$$

мы не можем заключить, что a' есть та же самая энергия, которая заключалась в a, и b' — в b, или же, наоборот, что a' идентично с b, а b' с a. У нас нет никаких средств решить между этими двумя возможностями, равно как и между многими другими, которые бы могли представиться.

По этой причине поток энергии никогда не может, по моему мнению, иметь такой же четкий смысл, как «поток материальных частиц», в котором мы можем, по крайней мере мысленно, различать каждую отдельную частицу и проследить ее движение. Можно даже поставить вопрос, действительно ли в электромагнитных явлениях перенос энергии осуществляется тем путем, который указывается законом Пойнтинга; действительно ли, например, тепло, выделяемое волоском лампы накаливания, приносится потоком энергии, которую он получил от окружающей среды, как утверждает теорема Пойнтинга, и не есть ли это поток энергии вдоль самого волоска. В действительности все зависит от тех гипотез, которые мы примем относительно внутренних сил в системе, и очень легко может оказаться, что какое-нибудь изменение в этих гипотезах существенным образом изменит и наши представления относительно того пути, по которому энергия переносится из одной части системы в другую. Следует отметить, однако, что всякие сомнения должны будут отпасть, как только мы примем, что явления, происходящие в какой-нибудь части эфира, *полностью* определяются электрическими и магнитными силами, имеющимися налицо в этой части эфира. Никто не будет отрицать, что в пучке света имеется поток энергии; следовательно, если все зависит от электрической и магнитной силы, должен быть поток энергии и у поверхности проводника, по которому идет ток, так как и здесь, как и в световом пучке, существуют одновременно обе силы, и притом они взаимно перпендикулярны.

19. Рассмотрим результирующую всех сил, с которыми эфир действует на электроны какой-нибудь системы; тогда можно прийти к результатам, не менее важным, чем уравнение энергии, и имеющим такой же общий характер. За такую систему мы можем взять весомое тело, которое находится в особом, электромагнитном состоянии, т. е. в котором происходят электромагнитные явления. По нашей теории пондеромоторная сила, действующая на заряженный проводник, на магнит или на провод, по которому идет ток, составляется из всех сил, с которыми эфир действует на электроны тела.

Пусть σ опять будет замкнутая поверхность, а $\boldsymbol{F}$ — результирующая сила, действующая на электроны, находящиеся внутри поверхности. Тогда в силу (23) мы можем написать:

$$\boldsymbol{F} = \int \rho \left\{ \boldsymbol{d} + \frac{1}{c} [\boldsymbol{vh}] \right\} dS, \tag{43}$$

где интеграл распространяется на все электроны или на весь объем S, так как в пространстве между частичками ρ равно нулю. Но, пользуясь уравнениями (17)—(20) [1], можно показать, что эта сила $\boldsymbol{F}$ равна сумме двух векторов

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2, \tag{44}$$

которые определяются уравнениями

$$\mathbf{F}_{1x} = \frac{1}{2}\int \{2\mathbf{d}_x\mathbf{d}_n - \mathbf{d}^2\cos(n,\ x)\}\, d\sigma + \\ + \frac{1}{2}\int \{2\mathbf{h}_x\mathbf{h}_n - \mathbf{h}^2\cos(n,\ x)\}\, d\sigma \text{ и т. д.} \tag{45}$$

и

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{1}{c^2}\int \dot{\mathbf{s}}\, dS. \tag{46}$$

Первая часть выражается интегралом, взятым по поверхности σ, причем его составляющие, из которых здесь приведена только одна, определяются значениями $\mathbf{d}_x$, $\mathbf{d}_y$, $\mathbf{d}_z$, $\mathbf{h}_x$ и т. д. на поверхности. Вторая часть силы, напротив, представляется как интеграл по объему S и не только по тем частям его, где имеются электрические заряды, но также и по тем частям, где зарядов нет.

20. Рассматривая вышеприведенный результат, мы должны различать несколько отдельных случаев.

а) Во всех явлениях, в которых система находится в стационарном состоянии, сила $\mathbf{F}_2$, для которой можем написать выражение

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int \mathbf{s}\, dS, \tag{47}$$

пропадает, и вся сила $\mathbf{F}$ сводится к интегралу по поверхности σ. Другими словами, пондеромоторное действие можно рассматривать как сумму некоторых бесконечно малых частей, каждая из которых относится к одному из элементов поверхности $d\sigma$ и зависит от состояния, в котором находится именно этот элемент. Весьма естественный путь для интерпретации этого положения заключается в том, чтобы каждую из таких частей называть *натяжением* в эфире, действующим на рассматриваемый элемент.

Натяжение зависит от ориентации элемента. Если он определяется нормалью n и если, пользуясь обычными обозначениями, мы напишем X_n, Y_n, Z_n для составляющих силы, действующей на единицу площади и производимой частью среды, лежащей на положительной стороне поверхности, на ту часть среды, которая расположена по отрицательную сторону поверхности, мы получим:

$$X_n = \frac{1}{2}\{2d_x d_n - d^2 \cos(n, x)\} + \\ + \frac{1}{2}\{2h_x h_n - h^2 \cos(n, x)\} \text{ и т. д.} \tag{48}$$

Из этих формул мы легко можем вывести составляющие X_x, Y_x, Z_x, X_y и т. д. натяжений, действующих на элементы, нормаль к которым параллельна одной из осей координат. Находим:

$$X_x = \frac{1}{2}(d_x^2 - d_y^2 - d_z^2) + \frac{1}{2}(h_x^2 - h_y^2 - h_z^2) \text{ и т. д.,} \tag{49}$$

$$X_y = Y_x = d_x d_y + h_x h_y \text{ и т. д.,} \tag{50}$$

т. е. в точности те же значения для натяжений, которыми Максвелл уже давно объяснял пондеромоторные силы, наблюдаемые в электрических и магнитных полях [9].

Такой метод вычисления результирующей силы часто является весьма удобным, в особенности потому, что за σ мы можем взять любую поверхность, окружающую тело, для которого мы должны решить задачу.

б) К подобным же выводам мы приходим, если будем рассматривать систему, являющуюся носителем периодических явлений, ограничивая себя средним значением силы, взятой за полный период времени T. Так как среднее значение дается выражением

$$\frac{1}{T}\int_0^T F\,dt,$$

последний член в (44) пропадает. Действительно, по (47) интеграл по времени от F_2 равен разности значений

$$-\frac{1}{c^2}\int s\,dS$$

для $t=0$ и $t=T$, а эти значения равны друг другу в силу периодичности изменений.

Следовательно, и в этом случае результирующая сила сводится к интегралу по поверхности, или, как мы можем сказать, к натяжениям в эфире.

Легко можно показать, что среднее значение F (и вообще всяких периодически изменяющихся величин) за любой промежуток времени, который много больше периода T, равно среднему значению за период, даже если рассматриваемый интервал не является точным кратным T.

21. Интересный пример мы имеем в давлении излучения. Пусть (рис. 1) AB будет плоский диск, на который в нормальном направлении падает пучок света L; мы можем его представить формулой (7), если за ось OX примем направление, показанное на рисунке. За σ примем поверхность плоского цилиндрического ящика $CDFE$, плоские стороны которого лежат перед диском и за ним и параллельны ему. Тогда, если пластинка совершенно непрозрачна, мы должны рассмотреть натяжение только на CD. Если мы, кроме того, предположим, что диск является идеально черным, так что отраженного света нет, то останется только то электромагнитное поле, которое представлено уравнениями (7). А так как нормаль к плоскости CD, проведенная наружу ящика $CDFE$, направлена в сторону, противоположную OX, то сила, действующая на поглощающее тело в направлении OX на единицу площади, дается выражением

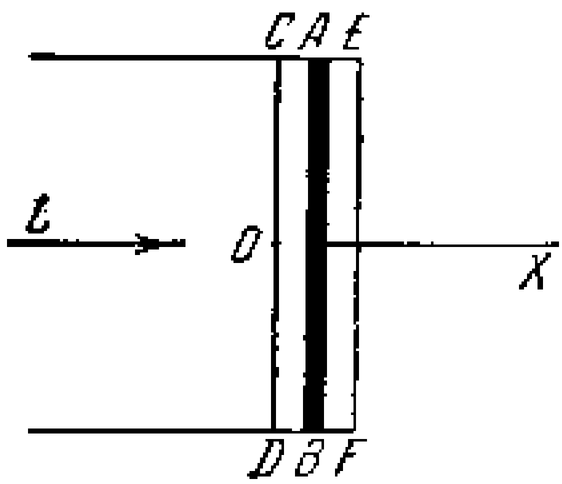

Рис. 1.

$$-X_x = \frac{1}{2}(d_y^2 + h_z^2),$$

и среднее ее значение равно

$$\frac{1}{2}a^2.$$

Сравнивая это значение со значением энергии и учитывая направление силы, мы заключаем, что пучок света производит на поглощающее тело нормальное давление, причем величина силы, действующей на единицу поверхности, численно равна электромагнитной энергии, содержащейся в единице объема светового пучка.

Такой же метод можно применить к телу, которое пропускает и отражает некоторое количество света, и к диску, на который свет падает наклонно. Во всех случаях, в которых за диском не оказывается света, силой в направлении нормали будет давление — X_x на освещенной стороне, если ось OX направлена так, как принято выше.

Мы применим эти рассуждения к излучению, распределенному равномерно и изотропно в некотором объеме, ограниченном идеально отражающими стенками. Под равномерным и изотропным распределением мы подразумеваем такое, когда наш объем пронизывается тепловыми или световыми лучами во всех направлениях, причем во всех его точках и во всех направлениях интенсивность излучения одна и та же, и в последнем одинаково представлены все направления $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{h}$. Легко показать, что в этом случае элемент $d\sigma$ стенки не испытывает тангенциальных натяжений. Что касается нормального давления, которое выражается членом $-X_x$, то, если ось OX совместить с нормалью, можно написать:

$$p = \frac{1}{2}\left(\overline{\boldsymbol{d}_y^2} + \overline{\boldsymbol{d}_z^2} - \overline{\boldsymbol{d}_x^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\overline{\boldsymbol{h}_y^2} + \overline{\boldsymbol{h}_z^2} - \overline{\boldsymbol{h}_x^2}\right),$$

где горизонтальные черточки должны обозначать средние значения различных членов по рассматриваемому объему[1]). Но, принимая во внимание наши предположения относительно характера излучения, можно написать:

$$\overline{\boldsymbol{d}_x^2} = \overline{\boldsymbol{d}_y^2} = \overline{\boldsymbol{d}_z^2}.$$

Каждая из этих величин равна, следовательно, трети их суммы, т. е. $\frac{1}{3}\overline{\boldsymbol{d}^2}$. Подобным же образом

$$\overline{\boldsymbol{h}_x^2} = \overline{\boldsymbol{h}_y^2} = \overline{\boldsymbol{h}_z^2} = \frac{1}{3}\overline{\boldsymbol{h}^2},$$

Следовательно, если вспомнить формулы (40) и (41):

$$p = \frac{1}{6}(\overline{d^2} + \overline{h^2}) = \frac{1}{3}(w_e + w_m).$$

В этом случае давление на стенки на единицу поверхности равно трети электромагнитной энергии, содержащейся в единице объема.

Несколько позже задача о давлении излучения будет разобрана другим методом.

22. До сих пор мы упрощали уравнение (44), предполагая, что последний член пропадает. В общем случае, однако, этот член опущен быть не может, и силу $\boldsymbol{F}$ нельзя свести к системе натяжений, действующих на поверхность σ.

Это заключение принимает замечательный вид, если предположить, что внутри поверхности σ совсем нет электронов. Общая сила $\boldsymbol{F}$, конечно, должна в этом случае равняться нулю, как это можно видеть по первоначальному выражению (43). Тем не менее сила, вызываемая натяжениями, в общем случае не равна нулю, а имеет значение

$$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2 = \frac{1}{c^2}\int \dot{\boldsymbol{s}}\, dS. \tag{51}$$

Следует отметить, что это последнее выражение совершенно не зависит от теории электронов, а является следствием основных уравнений для случая $\rho = 0$, т. е. уравнений для свободного эфира. И в самом деле, оно известно уже давно[1]).

Ни Максвелл, ни прочие многочисленные авторы, работавшие в этой области, не сомневались, повидимому, в реальном существовании натяжений в эфире, определяемых формулами (49) и (50). С этой точки зрения уравнение (51) говорит, что в общем случае результирующая $\boldsymbol{F}_1$ всех натяжений, действующих на какую-нибудь часть эфира, не равна нулю. Это было впервые отмечено Гельмгольцем[2]). Он вывел отсюда, что эфир не может оставаться

---

[1]) Примечание **11**.

[2]) Helmholtz, Folgerungen aus Maxwell's Theorie über die Bewegungen des reinen Äthers, Ann. Phys. Chem. **53** (1894), стр. 135.

в покое, и установил систему уравнений, при помощи которых можно определить его движение. Я не буду их касаться, так как никакой опыт никогда не мог обнаружить ни следа движения эфира в электромагнитном поле.

Резюмируя, мы можем сказать, что теория, которая признает существование натяжений Максвелла, приводит к следующим заключениям:

1. Участок эфира не находится в равновесии под влиянием натяжений, действующих на его поверхности.

2. Натяжения, действующие на элементы поверхности, окружающей весомые тела, вызывают в общем случае результирующую силу, отличную от силы, действующей на электроны тела согласно нашей теории.

23. Начиная отсюда, мы можем далее итти двумя различными путями. Во-первых, имея в виду, что эфир, несомненно, существенно отличается от всякого обычного вещества, мы можем сделать предположение, что эта среда, которая является носителем электромагнитной энергии и переносчиком многих — вероятно, всех — сил, действующих на весомую материю, по самой своей природе никогда не приводится в движение, что она не обладает ни скоростью, ни ускорением, так что у нас нет основания говорить об ее массе или о силах, к ней приложенных. С этой точки зрения следует считать, что действие на электрон в первую очередь определяется состоянием эфира внутри каждого элемента объема электрона, и уравнение (43) является прямым и непосредственным выражением этого положения. Нет совершенно никаких оснований считать, что сила должна вызываться давлениями или натяжениями в универсальной среде. Если мы исключим идею о силах, действующих на эфир, мы даже не можем говорить об этих натяжениях, так как они ведь суть силы, с которыми одна часть эфира действует на другую.

Я должен добавить, что, отрицая, таким образом, реальное существование натяжений в эфире, мы можем все же воспользоваться всеми математическими преобразованиями, которые могут облегчить применение формулы (43). Сведение силы к интегралу по поверхности может быть весьма полезно, и для удобства мы будем продолжать называть натяжениями величины, входящие в этот интеграл. Мы должны только помнить, что это — натяжения воображаемые, т. е. чисто вспомогательные математические величины.

Возможно, что все то, что тут было сказано про абсолютную неподвижность эфира и про отсутствие натяжений, может показаться несколько странным. Тот, кто не может примириться с этим представлением, может обратиться к другому представлению, о котором я упоминал. Если присоединиться к нему, придется признать реальное существование внутренних сил Максвелла и считать эфир неподвижным только *приближенно*.

Примем, что между двумя смежными частями эфира имеется взаимодействие, определяемое уравнениями (48), так что элемент объема свободного эфира испытывает силу

$$\frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{s}}\,dS,$$

и предположим, что среда движется таким образом, что количество движения ее равно

$$\frac{1}{c^2}\mathbf{s}\,dS, \tag{52}$$

или $\frac{1}{c^2}\mathbf{s}$ на единицу объема. Представим себе далее, что плотность эфира настолько велика, что количество движения (52) наблюдается при очень малой скорости — настолько малой, что ее нельзя обнаружить никакими имеющимися в нашем распоряжении средствами. Тогда формула (51), которая в применении к элементу эфира принимает вид

$$F_1 = \frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{s}}\,dS,$$

говорит нам, что предположенное нами состояние движения действительно может существовать. Это ясно, потому что для весьма малых скоростей результирующая сила, действующая на эфир, который содержится в *данном* элементе объема, может быть приравнена скорости изменения количества движения, содержащегося *внутри* этого элемента[1]).

[1]) Примечание 12.

С другой стороны, в случае, если элемент dS занят зарядом, формулу

$$F = F_1 - \frac{1}{c^2}\dot{s}\,dS$$

можно истолковать следующим образом. На эфир внутри элемента действует сила F_1, вызываемая натяжениями на поверхности. Часть этой силы

$$\frac{1}{c^2}\dot{s}\,dS$$

идет на изменение количества движения эфира; остающаяся часть F передается заряду.

Вы легко увидите, что в конце концов различие между двумя упомянутыми точками зрения заключается главным образом в различном толковании одних и тех же уравнений.

24. Каково бы ни было наше мнение по поводу только что затронутых вопросов, наш разбор показывает нам важность вектора

$$\frac{1}{c^2}s\,dS,$$

который имеет определенное направление и величину для каждого элемента объема, и вектора

$$G = \frac{1}{c^2}\int s\,dS, \tag{53}$$

который можно получить из него путем интегрирования. Геттингенский ученый Абрагам[1]) назвал эти величины *электромагнитным количеством движения*. Мы можем сохранить это понятие даже в том случае, если не будем соглашаться с мыслью, что эти величины представляют собой реальные количества движения, как это вытекало бы из второго пути, которому мы следовали.

Способ, которым можно использовать представление об электромагнитном количестве движения для разъяснения

---

[1]) M. Abraham, Prinzipien der Dynamik des Elektrons, Ann. Phys. 10 (1903), стр. 105.

электромагнитных явлений, выступает особенно ясно в том случае, когда, имея дело с системами конечных размеров, каковыми действительно и являются системы в наших опытах, мы отодвигаем замыкающую поверхность σ во все стороны на бесконечное расстояние. Можно показать, что интегралы по поверхности в уравнении (45) тогда обращаются в нуль, так что, если интегрирование распространить на все пространство, мы получим:

$$F = -\frac{dG}{dt}, \tag{54}$$

или, иначе говоря, сила, с которой эфир действует на систему электронов, или, как можно сказать, на весомую материю, содержащую эти электроны, равна по величине и противоположна по направлению изменению в единицу времени электромагнитного количества движения. Это действие стремится вызвать изменение в количестве движения (в обыкновенном смысле этого слова) весомой материи, равное самой силе; можно видеть, что сумма двух количеств движения — обычного и электромагнитного — не будет изменяться под влиянием сил, оказываемых эфиром.

Прежде чем перейти к одному-двум применениям, я должен обратить ваше внимание на глубокую связь между количеством движения и потоком энергии s. Уравнение (53) показывает нам сразу, что каждый участок пространства, в котором имеется поток энергии, дает свою часть в векторе G; следовательно, чтобы составить себе представление об этом векторе и его изменениях, мы должны в первую очередь фиксировать наше внимание на лучистой энергии, имеющейся налицо в различных частях пространства. Если с течением времени поток энергии дойдет до новых частей пространства или уйдет из тех частей, где он был прежде, это поведет к тому, что вектор G будет изменять свое значение от одного момента к другому.

Следует также иметь в виду, что уравнение (53) есть векторное уравнение и что уравнение (54) можно разложить на три формулы, дающие нам составляющие F_x, F_y, F_z результирующей силы.

25. Весьма интересные иллюстрации к вышеприведенной теории можно получить в явлениях давления излучения, к которым я поэтому на короткое время вернусь. Рассмотрим, например, источник света, посылающий лучи в одном направлении, что может быть осуществлено при помощи соответствующих приспособлений, и предположим, что эти лучи он начал испускать в определенный момент, так что мы можем говорить о *первой* волне или о *фронте* серии излученных волн. Этот фронт представляет собой плоскость, расположенную под прямым углом к лучам и продвигающуюся вперед со скоростью c. Следовательно, если Σ есть нормальное сечение пучка, объем, занятый излучением, увеличивается за единицу времени на $c\Sigma$. Как мы уже видели, направление потока энергии совпадает с направлением пучка. В последующем вычислении мы будем рассуждать так, как будто в каждой точке поток все время равен среднему значению потока $\overline{s}$, взятому за полный период. Если величина этого среднего потока, который относится к единице площади, есть $|\overline{s}|$, мы тотчас же найдем величину электромагнитного количества движения, направление которого тоже совпадает с направлением пучка, если мы умножим $\frac{1}{c^2}|\overline{s}|$ на объем, занимаемый светом. Отсюда получается, что изменение G за единицу времени равно

$$|\dot{G}| = \frac{1}{c}|\overline{s}|\Sigma.$$

Так как этот вектор имеет направление лучей, то, следовательно, источник света будет испытывать силу, равную по величине и противоположную по направлению тому, в котором испускаются лучи. Эту силу отдачи, которая, впрочем, чрезвычайно мала, можно сравнить с реакцией, которая наблюдалась бы в том случае, если бы лучи света представляли собой поток материальных частиц. Рассуждая подобным же образом, мы можем определить давление на черный диск, которое мы рассматривали ранее. Но в этом случае лучше представить себе, что в определенный момент времени излучение *прекращается*, так что получается плоскость, которую можно назвать *тылом* движущихся волн. Он приближается к черному диску со скоростью c, и если Σ и $|\bar{s}|$ имеют то же значение, как и прежде, величина электромагнитного количества движения уменьшится в единицу времени на величину

$$\frac{1}{c}|\bar{s}|\Sigma.$$

Следовательно, на диск будет действовать нормальное давление такой же интенсивности. Этот результат совпадает с тем, который мы получили, рассматривая натяжения в эфире, причем величина $|\bar{s}|$ связана с амплитудой a уравнением

$$|\bar{s}| = \frac{1}{2}ca^2.$$

Легко распространить эти результаты на более общий случай. Пусть на плоский диск падает в каком угодно направлении пучок параллельных лучей и пусть часть их отражается, другая поглощается, а остающаяся часть проходит насквозь. Пусть векторы s, s' и s'' представляют собой значения потока энергии через единицу площади для лучей падающего, отраженного и проходящего, $\bar{s}, \bar{s}', \bar{s}''$ — средние значения соответствующего потока за полный период, а Σ, Σ' и Σ'' — нормальные сечения пучков. Далее представим себе, что пространство, занятое светом, ограничено двумя фронтами, один из которых лежит в отраженном, а другой — в проходящем пучке, и тыловой поверхностью падающего пучка, причем все эти плоскости продвигаются вперед со скоростью c; тогда изменение электромагнитного количества движения будет дано векторным выражением

$$\frac{1}{c}(\Sigma'\bar{s}' + \Sigma''\bar{s}'' - \Sigma\bar{s}),$$

а сила, действующая на пластинку, будет:

$$\frac{1}{c}(\Sigma\bar{s} - \Sigma'\bar{s}' - \Sigma''\bar{s}'').$$

Здесь следует отметить, что давление лучей было экспериментально обнаружено Лебедевым[1]) и Никольсом и Хэллом[2]) и что теоретические предсказания, касающиеся его величины, были проверены последними из упомянутых физиков с точностью до одного процента [10].

26. Теория электромагнитного количества движения, которая, как мы видели, оказалась столь полезной при рассмотрении пучков света, испускаемых, отражаемых или поглощаемых каким-либо телом, применима также к совершенно отличному случаю движущегося электрона. Мы можем поэтому, не опасаясь слишком резкого перехода, вернуться еще раз к некоторым вопросам, относящимся к тому, что мы называем динамикой электрона, и касающимся поля, вызываемого частичкой, и сил, которые эта частичка испытывает со стороны эфира. Таким путем мы приходим к важному вопросу об *электромагнитной массе* электронов.

Для начала я скажу несколько слов о поле системы электронов или зарядов, распределенных каким-либо образом в пространстве; пусть скорость их поступательного движения, направленная, скажем, по оси x, имеет величину w, меньшую скорости света c. Введем оси координат, движущиеся с системой; для упрощения введем обозначение

$$\frac{w}{c} = \beta. \tag{55}$$

Но мы уже видели, что поле переносится вместе с системой. То же самое можно сказать про потенциалы φ и $\mathbf{a}$, которые служат для определения поля; отсюда можно легко заключить[3]), что значения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \text{ и } \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}$$

[1]) P. Lebedew, Untersuchungen über die Druckkräfte des Lichtes, Ann. d. Phys. **6** (1901), стр. 433.

[2]) E. F. Nichols and G. F. Hull, The pressure due to radiation, Astrophys. Journ. **17** (1903), стр. 315 и Ann. Phys. **12** (1903), стр. 225.

[3]) Примечание **13**.

в определенной точке пространства даются выражениями

$$-w\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \qquad -w\frac{\partial a}{\partial x}.$$

Подобным же образом

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=w^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 a}{\partial t^2}=w^2\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}.$$

Таким образом, уравнение (31) (стр. 43) принимает вид

$$(1-\beta^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-\rho, \tag{56}$$

а вместо (32) можно написать:

$$(1-\beta^2)\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}=-\beta\rho, \tag{57}$$

причем составляющие a_y и a_z обе равны нулю, что непосредственно видно из (36).

Сравнивая (56) и (57), заключаем, что

$$a_x=\beta\varphi,$$

так что нам нужно определить только скалярный потенциал.

Это можно сделать подходящей заменой независимых переменных. Определим новую переменную x' уравнением

$$x'=(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}x; \tag{58}$$

тогда уравнение (56) приобретает вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-\rho, \tag{59}$$

т. е. превращается в известное уравнение Пуассона. Так как это уравнение появляется при определении поля покоящихся зарядов, задача тем самым сводится к обыкновенной электростатической. Отличием нашей задачи является только то, что значение φ в движущейся системе S не совпадает с потенциалом той же самой системы, когда она находится в покое; для его определения надо искать потенциал покоящейся системы, в которой все координаты, параллельные OX, изменились в отношении (58) [1]).

Этот результат можно выразить следующим образом. Пусть S' есть система, находящаяся в покое, — такая, которую мы получаем, увеличивая размеры S в направлении OX в отношении 1 к $(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$. Будем говорить, что точка с координатами x, y, z в S и точка с координатами x', y, z в S' «соответствуют» друг другу; при этом предполагается, что заряды «соответствующих» элементов объема равны друг другу; тогда, если φ' есть потенциал в S', то скалярный потенциал в движущейся системе дается выражением

$$\varphi = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\varphi'. \tag{60}$$

Пусть теперь наша движущаяся система состоит только из одного электрона; предположим, что он имеет форму шара радиуса R и что заряд e равномерно распределен по его поверхности. Соответствующая система S' есть удлиненный эллипсоид вращения, и заряд его, как оказывается, распределен соответственно закону распределения заряда на проводнике такой формы. Следовательно, поле движущейся сферической частички и всех величин, связанных с нею, можно найти при помощи обыкновенной теории заряженного эллипсоида, которая приводится во многих курсах. Я приведу здесь только те результаты, которые можно получить для наиболее важных величин.

Полная электрическая энергия дается выражением

$$U = \frac{e^2}{32\pi R}\left[\frac{3-\beta^2}{\beta}\log\frac{1+\beta}{1-\beta} - 2\right], \tag{61}$$

и магнитная энергия

$$T = \frac{e^2}{32\pi R}\left[\frac{1+\beta^2}{\beta}\log\frac{1+\beta}{1-\beta} - 2\right]. \tag{62}$$

Что касается электромагнитного количества движения, направление его совпадает с направлением движения; это

[1]) Примечание 14.

легко вывести из (53), так как мы уже знаем, что общее направление потока энергии совпадает с направлением движения частички. Формула для величины электромагнитного количества движения, выведенная впервые Абрагамом, имеет вид

$$|G| = \frac{e^2}{16\pi Rc}\left[\frac{1+\beta^2}{\beta^2}\log\frac{1+\beta}{1-\beta} - \frac{2}{\beta}\right]. \tag{63}$$

Все эти величины — U, T, $|G|$ — увеличиваются с увеличением скорости. Они обращаются в бесконечность для $\beta = 1$, т. е. тогда, когда скорость электрона делается равной скорости света [1]).

27. По нашим основным предположениям, каждый элемент объема электрона испытывает силу, вызываемую полем самой частички; при этом возникает вопрос, будем ли мы иметь какую-нибудь результирующую силу, действующую на электрон как на целое. Рассмотрение электромагнитного количества движения поможет нам выяснить этот вопрос.

Если скорость w постоянна по величине и направлению, как мы предполагали в предыдущем, вектор G тоже будет постоянным и результирующая сила будет равна нулю. Это — очень важное обстоятельство; оно показывает, что если на электрон не действуют никакие внешние силы, он будет — совершенно так же, как материальная точка — двигаться с постоянной скоростью, несмотря на присутствие окружающего эфира. Во всех других случаях, однако, скажется некоторое действие этой среды.

Необходимо заметить, что в случае переменной скорости вышеприведенные формулы для U, T и $|G|$, строго говоря, не имеют места. Впрочем, если изменение состояния среды настолько мало, что можно пренебречь им за промежуток времени $\frac{R}{c}$, можно к каждому моменту времени применить формулу (63) и пользоваться ею для определения изменения G — количества движения в единицу времени [2]). Так как результат зависит от ускорения элек-

---

1) Примечание **15**.

2) См. § 37.

трона, сила, с которой действует эфир, тоже определяется ускорением.

Рассмотрим сначала случай прямолинейного перемещения с переменной скоростью w. Направление вектора $\dot{G}$ совпадает с направлением движения, и величина его дается выражением

$$\frac{d\,|G|}{dt}=\frac{d\,|G|}{dw}\,\dot{w}=\frac{1}{c}\,\frac{d\,|G|}{d\beta}\,\dot{w}.$$

Полагая

$$\frac{d\,|G|}{dw}=\frac{1}{c}\,\frac{d\,|G|}{d\beta}=m', \tag{64}$$

мы заключаем, что возникает действующая на электрон сила, направление которой противоположно направлению его ускорения, а величина равна произведению ускорения на коэффициент m'.

Рассмотрим, далее, электрон, имеющий скорость $\boldsymbol{w}$, постоянную по величине, но переменную по направлению. Ускорение тогда нормально к траектории; здесь удобно пользоваться векторными уравнениями. Пусть $\boldsymbol{w}$ будет скорость, $\dot{\boldsymbol{w}}$ — ускорение; примем во внимание, что в этом случае величины $|G|$ и $|\boldsymbol{w}|$ находятся в постоянном отношении:

$$\frac{|G|}{|\boldsymbol{w}|}=\frac{|G|}{c\beta}=m''. \tag{65}$$

Имеем также:

$$G=m''\boldsymbol{w},$$

и сила, с которой действует эфир, равна

$$-\dot{G}=-m''\dot{\boldsymbol{w}}.$$

По направлению она противоположна нормальному ускорению $\dot{\boldsymbol{w}}$, а по величине равна произведению этого ускорения на коэффициент m''.

В наиболее общем случае ускорение j направлено не по траектории и не нормально к ней. Если мы разложим его на две составляющие, одна из которых, j', совпадает по направлению с направлением движения, а другая, j'', направлена под прямым углом к нему, мы получим для той силы, которую электрон испытывает со стороны собственного электромагнитного поля, следующее выражение (в векторных обозначениях)[1]:

$$-m'\boldsymbol{j}'-m''\boldsymbol{j}''. \tag{66}$$

28. Обычный способ истолкования этих формул станет для нас понятным, если мы предположим, что электрон имеет некоторую массу m_0 в обычном смысле этого слова, и что на него действует не только та сила, которая вызывается его собственным полем, но еще сила $\boldsymbol{K}$ другого рода. Общая сила равна

$$\boldsymbol{K}-m'\boldsymbol{j}'-m''\boldsymbol{j}'';$$

уравнение движения в векторном обозначении принимает вид

$$\boldsymbol{K}-m'\boldsymbol{j}'-m''\boldsymbol{j}''=m_0(\boldsymbol{j}'+\boldsymbol{j}''). \tag{67}$$

Вместо этого мы можем написать:

$$\boldsymbol{K}=(m_0+m')\,\boldsymbol{j}'+(m_0+m'')\,\boldsymbol{j}'',$$

откуда вытекает, что электрон движется так, как будто у него было *две* различные массы: m_0+m' и m_0+m'', причем первая из них появляется, когда мы имеем дело с ускорением по направлению движения, а вторая — когда мы рассматриваем нормальное ускорение. Измеряя силу $\boldsymbol{K}$ и ускорения $\boldsymbol{j}'$ и $\boldsymbol{j}''$ в различных случаях, мы можем определить оба эти коэффициента. Мы будем их называть ***эффективными*** массами, m_0 — ***материальной*** массой, а m' и m'' — ***электромагнитными*** массами. Чтобы отличить друг от друга коэффициенты m' и m'', мы будем первый называть ***продольной*** электромагнитной массой, а второй — ***поперечной*** электромагнитной массой[2].

---

1) Примечание **16**.

2) Понятие о (продольной) электромагнитной массе было впервые введено Дж. Дж. Томсоном в статье «On the electric and magnetic effects produced by the motion of electrified bodies», Phil. Mag. (5), 11 (1881), стр. 227. Результаты его вычислений, впрочем, несколько отличаются от тех, к которым приводит современная электронная теория.

На основании вышесказанного можно найти следующие формулы для m' и m'':

$$m' = \frac{e^2}{8\pi R\beta^3c^2}\left[\frac{2\beta}{1-\beta^2} - \log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right], \tag{68}$$

$$m'' = \frac{e^2}{16\pi R\beta^3c^2}\left[-2\beta + (1+\beta^2)\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right], \tag{69}$$

или, если эти выражения развернуть в ряд:

$$m' = \frac{e^2}{4\pi Rc^2}\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\beta^2 + \frac{6}{7}\beta^4 + \ldots\right), \tag{70}$$

$$m'' = \frac{e^2}{8\pi Rc^2}\left[\left(1+\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\beta^2 + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)\beta^4 + \ldots\right]. \tag{71}$$

Для малых скоростей обе массы имеют одно и то же значение:

$$m' = m'' = \frac{e^2}{6\pi Rc^2}, \tag{72}$$

тогда как для больших скоростей продольная масса всегда больше поперечной. Обе массы увеличиваются с увеличением β; для $\beta = 1$, т. е. для скорости, равной скорости света, они обе обращаются в бесконечность.

Если мы временно ограничимся прямолинейным движением электрона, понятие электромагнитной массы можно будет вывести из понятия об электромагнитной энергии. В самом деле, эта энергия больше для движущегося электрона, чем для неподвижного. Следовательно, если при помощи силы K мы приведем частичку в движение, мы должны сообщить ей не только кинетическую энергию $\frac{1}{2}m_0w^2$, но и добавочно еще ту часть электромагнитной энергии, которая обусловлена скоростью. Влияние поля скажется, следовательно, в том, что в данном случае потребуется больше энергии, чем если бы мы имели дело с обыкновенной материальной частичкой m_0; результат будет такой же, как если бы масса ее была больше, чем m_0.

Рассуждая подобным образом, мы легко можем проверить формулу (68). Если скорость изменяется очень мало, мы можем в каждый момент применять формулы (61) и (62). Так как общая энергия $T+U$ есть функция скорости w, скорость ее изменения дается выражением

$$\frac{d(T+U)}{dw}\dot{w}=\frac{d(T+U)}{d\beta}\frac{1}{c}\dot{w}. \tag{73}$$

Эта величина должна быть равна работе, произведенной в единицу времени движущей силой, или, вернее, той ее частью, которая требуется в связи с присутствием электромагнитного поля. Следовательно, деля (73) на w, мы получим величину этой части, и если затем мы разделим ее на ускорение $\dot{w}$, мы должны получить в результате продольную электромагнитную массу. Если при помощи формул (61) и (62) вычислить выражение

$$m'=\frac{1}{cw}\frac{d(T+U)}{d\beta}=\frac{1}{\beta c^2}\frac{d(T+U)}{d\beta},$$

в результате получится как раз значение (68).

29. Близкую аналогию с вопросом об электромагнитной массе представляет простая гидродинамическая проблема. Твердый, совершенно гладкий шар, движущийся со скоростью $\boldsymbol{w}$ в несжимаемой идеальной жидкости, которая простирается во все стороны на бесконечное расстояние, вызывает в этой жидкости состояние движения, характеризующееся кинетической энергией, для которой можно написать:

$$T=\frac{1}{2}\alpha\boldsymbol{w}^2;$$

здесь α — постоянная, зависящая от радиуса шара и от плотности жидкости. Под влиянием внешней силы, приложенной к шару в направлении движения, его скорость изменится так, как будто, кроме его истинной массы m_0, он обладал еще кажущейся массой m', значение которой дается выражением

$$m'=\frac{1}{|\boldsymbol{w}|}\frac{dT}{d|\boldsymbol{w}|}=\alpha.$$

Мы видим, что эта формула соответствует последнему уравнению § 28.

Мы получили бы тот же результат, если бы сначала вычислили количество движения жидкости. Мы нашли бы:

$$G = \alpha \boldsymbol{w};$$

из этого выражения мы можем также заключить, что поперечная кажущаяся масса имеет то же значение α, что и продольная. Это видно из уравнения

$$m'' = \frac{|G|}{|\boldsymbol{w}|}.$$

30. Пусть мы имеем шар, движущийся в идеальной жидкости; если бы мы принуждены были ограничиваться в наших опытах измерением внешних сил, приложенных к телу, и вызываемых ими ускорений, мы могли бы определить эффективную массу $m_0 + m'$ (или $m_0 + m''$), но не могли бы найти значений m_0 и m' (или m'') в отдельности. Весьма важно, что при экспериментальном исследовании движения электрона мы, наоборот, можем пойти несколько далее. Этим мы обязаны тому факту, что электромагнитная масса не есть величина постоянная, а увеличивается со скоростью.

Предположим, что мы можем экспериментировать с двумя различными скоростями электрона и что таким путем мы можем найти отношение k между теми эффективными поперечными массами, которые получаются в этих двух случаях. Пусть $\varkappa$ — отношение между электромагнитными поперечными массами, которое мы вычислим по формуле (69). Сделать это, конечно, возможно. Тогда, обозначая индексами I и II величины, относящиеся к первому и второму случаям, получим формулы

$$\frac{m_0 + m''_{\mathrm{I}}}{m_0 + m''_{\mathrm{II}}} = k, \qquad \frac{m''_{\mathrm{I}}}{m''_{\mathrm{II}}} = \varkappa;$$

и отношение между истинной массой m_0 и электромагнитной массой m''_{I} будет дано выражением

$$\frac{m''_{\mathrm{I}}}{m_0} = \frac{\varkappa(k-1)}{\varkappa - k}.$$

Если бы k, полученное опытным путем, оказалось весьма мало отличным от отношения x, полученного по формуле (69), мы получили бы для m_0 гораздо меньшее значение, чем для m''_1; при k, в *точности* равном x, мы должны были бы даже положить $m_0 = 0$ [11].

Я говорил здесь о поперечной электромагнитной массе, так как только с ней мы будем иметь дело в тех опытах, на которых я сейчас остановлюсь.

31. Вы все знаете, что катодные лучи и β-лучи радиоактивных тел являются потоками отрицательных электронов и что каналовые лучи Гольдштейна и α-лучи являются подобными же потоками положительно заряженных частичек. Во всех этих случаях оказалось возможным определить отношение между численными значениями заряда частички и ее поперечной эффективной массы. Главный метод, при помощи которого это было осуществлено, основывается на измерении отклонения от прямолинейного распространения, которое испытывают одни и те же лучи под влиянием известных внешних электрических и магнитных сил.

Теория метода весьма проста. Если, во-первых, электрон с зарядом e и кажущейся массой m движется в электрическом поле $\mathbf{d}$ со скоростью $\mathfrak{w}$, перпендикулярной к линиям сил, ускорение дается выражением $\frac{e\mathbf{d}}{m}$; отсюда, если r есть радиус кривизны пути,

$$\frac{\mathfrak{w}^2}{r} = \frac{e\,|\mathbf{d}|}{m},$$

так что, если измерить $|\mathbf{d}|$ и r, мы можем вычислить значение

$$\frac{e}{m\mathfrak{w}^2}. \tag{74}$$

Во-вторых, рассмотрим электрон, движущийся в магнитном поле $\mathbf{h}$, и предположим, что скорость $\mathfrak{w}$ перпендикулярна к магнитной силе. Тогда поле будет действовать на частичку с силой $\frac{e\mathfrak{w}\,|\mathbf{h}|}{c}$, как это видно из последнего члена в (23). Так как эта сила перпендикулярна к скорости, мы получим, обозначая через r' радиус кривизны пути:

$$\frac{w^2}{r'} = \frac{ew\,|\mathbf{h}|}{cm}.$$

Поэтому, если мы определим $|\mathbf{h}|$ и r', мы можем найти величину

$$\frac{e}{mw};$$

комбинируя это значение с (74), мы получим возможность найти как w, так и $\frac{e}{m}$.

32. Я не буду говорить о многочисленных определениях подобного рода, которые были проделаны различными физиками; скажу только несколько слов относительно важной работы Кауфмана [1]), касающейся β-лучей радия. Оказывается, что в этих лучах содержатся отрицательные электроны весьма различных скоростей, и поэтому представляется возможным исследовать вопрос, является ли $\frac{e}{m}$ функцией скорости или величиной постоянной. Опыты Кауфмана были поставлены таким образом, что можно было измерять электрическое и магнитное отклонения одних и тех же электронов, что давало возможность вычислить как w, так и $\frac{e}{m}$. При этом оказалось, что когда скорость w достигает значения от 0,5 до 0,9 скорости света и более, $\frac{e}{m}$ значительно уменьшается. Если мы предположим, что заряд одинаков для всех отрицательных электронов, образующих лучи, это уменьшение $\frac{e}{m}$ должно вызываться увеличением массы m. Это показывает, что, во всяком случае, влияние, оказываемое электромагнитной массой, весьма заметно. Оно должно даже в сильной степени превалировать. Действительно, числа Кауфмана не показывают ни следа влияния материальной массы m_0, так

[1]) W. Kaufmann, Über die Konstitution des Elektrons, Ann. Phys. 19 (1906), стр. 487.

как его отношение k кажущихся масс для двух различных скоростей (это отношение есть величина, обратная отношению соответствующих значений $\frac{e}{m}$) совпадает в пределах точности опытов с отношением $\varkappa$ электромагнитных масс, выведенным из формулы Абрагама (69) [12].

Конечно, при желании мы свободны приписать каждому электрону весьма малую материальную массу, например равную одной сотой доле электромагнитной массы, но в целях простоты будет лучше принять заключение—или, если мы предпочитаем другое выражение, гипотезу Кауфмана, — что у отрицательных электронов совсем нет никакой массы, кроме электромагнитной.

Это, несомненно, один из наиболее важных результатов современной физики; поэтому да будет мне позволено остановиться на нем еще некоторое время и указать два других толкования, которые можно ему дать. Мы можем сказать, что в случае движущегося отрицательного электрона энергия в обычной форме $\frac{1}{2} m_0 w^2$ отсутствует, а есть только электромагнитная энергия $T+U$, которую можно вычислить по формулам (61) и (62). Для больших скоростей эта энергия представляется весьма сложной функцией скорости, и только для скоростей, весьма малых по сравнению со скоростью света, та часть ее, которая зависит от движения, может быть выражена формулой $\frac{1}{2} m' w^2$, где значение m' дается формулой (72). Этот результат можно получить, разлагая $T+U$ в ряд, подобный (70) и (71).

Мы получим наш результат в другом замечательном виде, если в уравнении движения (67), которое для $m_0=0$ сводится к

$$K - m'j' - m''j'' = 0,$$

мы придадим обоим последним членам их первоначальный смысл сил, вызываемых эфиром. Уравнение говорит нам, что *полная* сила, действующая на частичку, всегда равна нулю. Так, например, электрон, который помещен во внешнем электромагнитном поле, обладая некоторой начальной скоростью, будет двигаться таким образом, что сила, вызываемая внешним полем, будет в точности уравновешиваться силой, которая вызывается собственным полем электрона. Это равносильно утверждению, что сила, вызываемая результирующим полем, всегда равна нулю.

В конечном счете, благодаря нашему отрицанию у электрона материальной массы он много потерял в своей субстанциальности. Мы должны сохранить ее за ним как раз в такой мере, чтобы можно было говорить о силах, действующих на различные части электрона, и приписывать ему определенную форму и размеры. Все это следует считать за присущие ему свойства, в силу которых отдельные части электрона не могут быть оторваны друг от друга действующими на них электрическими силами (или, иначе говоря, их взаимными отталкиваниями).

33. В наших предыдущих рассуждениях мы приняли, что все выделяемые солями радия отрицательные электроны, которыми пользовался в своих опытах Кауфман, несут на себе один и тот же заряд. Теперь мы перейдем к широкому обобщению этой гипотезы.

Как известно, по закону электролиза Фарадея все одновалентные электролитические ионы несут на себе в точности один и тот же заряд; если его обозначить через e, то заряды двухвалентных, трехвалентных и т. д. ионов будут $2e$, $3e$ и т. д. Таким образом, возникло представление, что это e — скажем, заряд иона водорода — является наименьшим количеством электричества, находимым в физических явлениях, — атомом электричества, если можно так выразиться, который может встречаться только в целочисленных количествах. Экспериментальные исследования Дж. Дж. Томсона[1]) над зарядами, переносимыми ионами в проводящих газах, и некоторые теоретические выкладки относительно электронов, колеблющихся в теле, через которое проходит пучок света, сделали весьма вероятным предположение, что в этих случаях проявляется этот же самый заряд e, который и оказывается, так сказать, реальной

---

[1]) См. J. J. Thomson, Conduction of electricity through gases, а также The corpuscular theory of matter, London, 1907.

естественной единицей электричества, и что все заряженные частички, все электроны и ионы несут на себе один или несколько таких зарядов. Отрицательные электроны, которые образуют β-лучи и катодные лучи, являются, несомненно, простейшим типом таких заряженных частичек; есть серьезные основания предполагать, что их заряд равен одной единице электричества, т. е. заряду водородного иона[1]).

Оставляя в стороне вопрос о кратных зарядах и приписывая всем электронам и ионам, положительным или отрицательным, одно и то же количество электричества, мы можем сказать, что массы m различных частичек обратно пропорциональны значениям, найденным для $\frac{e}{m}$.

Для отрицательных электронов катодных лучей и β-лучей это значение (для малых скоростей) равно приближенно[2]) [13]:

$$1{,}77 \cdot 10^7 \, c\sqrt{4\pi}.$$

Для иона водорода соответствующее число может быть получено из электрохимического эквивалента этого газа. Таким путем найдено значение

$$9650 \cdot c\sqrt{4\pi},$$

которое приблизительно в 1800 раз меньше значения для свободного отрицательного электрона. Значит, масса отрицательного электрона должна составлять приблизительно $^1/_{1800}$ массы атома водорода.

---

1) Примечание **16***.

2) Я пишу это выражение в таком виде, чтобы показать, что число равно $1{,}77 \cdot 10^7$, если пользоваться обыкновенными электромагнитными единицами. Следует отметить, что измерения Симона на катодных лучах [Ann. Phys. Chem. **69** (1899), стр. 589] привели к значению $1{,}878 \cdot 10^7$ и что Кауфман, вычисляя свои результаты по формуле Абрагама, получил $1{,}823 \cdot 10^7$. Более поздние измерения Бестельмейера [Ann. Phys. **22** (1907), стр. 429] дали, однако, число $1{,}72 \cdot 10^7$. Число, приведенное в тексте, взято у Бухерера, который нашел 1,763 [Ann. Phys. **28** (1909), стр. 513], и Вольца, результат которого равен 1,767 [Ann. Phys. **30** (1909), стр. 273].

Особенно следует отметить, что значения для $\frac{e}{m}$, полученные для различных отрицательных электронов, приблизительно равны друг другу. Это является существенным подтверждением того взгляда, что все отрицательные электроны одинаковы. Напротив, наблюдаются большие различия между положительными электронами, каковы, например, электроны в каналовых лучах и в α-частичках радиоактивных веществ. Значения $\frac{e}{m}$ для этих лучей изменяются в широких пределах. Впрочем, все они того же порядка величины, как и значения для электролитических ионов. Следовательно, массы положительных электронов должны быть сравнимы с массами химических атомов. Мы можем поэтому представить себе, что электроны являются продуктом распада атомов, разделения атома на частички, заряженные положительно и отрицательно, причем первые обладают почти всей массой атома, а вторые — только весьма малой ее частью.

34. В последнее время неоднократно ставился такой вопрос. Раз мы пришли к представлению, что не существует никакой материальной массы, а есть только масса электромагнитная (для случая отрицательных электронов эта идея получила серьезную поддержку в опытах Кауфмана), нельзя ли распространить это представление и на положительные электроны и вообще на всю материю.

По этому вопросу об электромагнитной теории материи мы должны заметить следующее: если предположить, что атомы содержат отрицательные электроны, из которых один или несколько могут быть при известных обстоятельствах вырваны из атома (как это в действительности и бывает), и если часть атома, остающуюся после потери отрицательной частички, назвать положительным электроном, тогда, конечно, можно было бы сказать, что материя состоит из электронов. Но это были бы просто слова. Что нам в действительности надо знать, это то, можно ли вычислить массу положительного электрона из распределения его заряда таким же путем, каким мы определяем массу отрицательной частички. Я полагаю, что этот вопрос остается открытым; мы поступим правильно, если будем говорить о нем с некоторой осторожностью.

В более общем смысле я лично охотно готов принять электромагнитную теорию материи и сил, действующих между материальными частичками. Очень много доводов приводит к заключению, что мельчайшие частички материи всегда несут на себе электрические заряды и что эти последние не являются каким-то привходящим элементом, а имеют существенное значение. Мы придем, по моему мнению, к ненужному дуализму, если будем рассматривать, с одной стороны, эти заряды и, с другой стороны, все остальное в атоме как нечто совершенно различное по природе.

С другой стороны, я думаю, каждый физик склоняется к взгляду, что все силы, с которыми одни частички действуют на другие, все молекулярные взаимодействия и самое тяготение передаются каким-нибудь образом через эфир, так что и натяжение растянутой веревки и упругость стального стержня должны найти свое объяснение в том, что происходит в эфире между молекулами. И так как нам трудно было бы представить себе, чтобы одна и та же среда способна была передавать два или несколько видов действия при помощи совершенно различных механизмов, то можно считать, что все силы связаны более или менее тесно с теми силами, которые мы изучаем в электромагнетизме [14].

В настоящий момент, однако, природа этой связи нам совершенно не известна; мы должны продолжать говорить о силах разного рода, не будучи в состоянии объяснить их происхождение. Мы будем принуждены считать даже отрицательные электроны подверженными некоторым силам, способ действия которых для нас темен. Таковыми являются, например, силы, которые возвращают электроны весомого диэлектрика обратно в их положения равновесия, и силы, которые выступают на сцену, когда электрон, движущийся в куске металла, меняет направление своего движения при столкновении с атомом металла.

35. Универсальная единица электричества, о которой мы говорили, может быть вычислена, раз мы составим себе представление о массе химических атомов. Это было проделано вполне удовлетворительно и притом различными путями; мы не будем далеки от истины, если мы примем

$$1{,}5 \cdot 10^{-24}\ г$$

для массы атома водорода. Комбинируя это число с электрохимическим эквивалентом этого элемента, который в наших единицах равен $\frac{0{,}0001036}{c\sqrt{4\pi}}$, мы найдем для заряда иона водорода

$$1{,}5 \cdot 10^{-20}\, c\sqrt{4\pi}.$$

Это число должно также изображать заряд отрицательного электрона. Следовательно, так как значение $\frac{e}{m}$ (для малых скоростей) равно

$$1{,}77 \cdot 10^{7}\, c\sqrt{4\pi},$$

получаем:

$$m = 7 \cdot 10^{-28}\ г.$$

Но ведь это есть масса, даваемая формулой (72). Подставляя также значение e, получаем следующее значение для радиуса электрона:

$$R = 1{,}5 \cdot 10^{-13}\ см.$$

Мы можем сравнить это значение с теми приближенными величинами, которые даются в кинетической теории газов. Расстояние между соседними молекулами воздуха при атмосферном давлении, вероятно, порядка

$$3 \cdot 10^{-7}\ см,$$

для диаметра молекулы водорода можно принять

$$2 \cdot 10^{-8}\ см.$$

Вы видите, что, по сравнению с этими длинами, электрон имеет совершенно микроскопические размеры. Вероятно, он много меньше даже отдельного атома, и если этот последний содержит некоторое число отрицательных электронов, их можно уподобить шарикам, расположенным друг от друга на расстояниях, во много раз превышающих их диаметры.

36. Прежде чем закончить наше рассуждение об электромагнитной массе, я должен остановить ваше внимание на вопросе, будет ли в системе, состоящей из известного числа электронов, электромагнитная масса равна сумме электромагнитных масс отдельных частичек; другими словами, если система движется с общей поступательной скоростью, может ли электромагнитная энергия, поскольку она зависит от движения, быть разделена на отдельные части, каждая из которых относится к одному электрону, так что для малых скоростей вся энергия изображается суммой

$$\sum \frac{1}{2} m' v^2.$$

Это, конечно, будет иметь место в том случае, когда электроны расположены друг от друга так далеко, что их поля, можно сказать, друг на друга не накладываются. Если, наоборот, два электрона привести в непосредственное соприкосновение, общую энергию нельзя уже находить обычным сложением, по той простой причине, что энергия, получающаяся при наложении двух полей, будучи квадратичной функцией от $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{h}$, не равна сумме энергий, которые имели бы место в каждом поле, взятом в отдельности.

Но мы должны помнить об исключительно малых размерах электронов. Ясно, что бо́льшая часть электромагнитной энергии, принадлежащей частичке, обнаруживается в весьма малой части поля, лежащей в непосредственной близости от нее, на таком расстоянии от центра, которое является небольшим кратным радиуса. Поэтому очень легко представить себе, что данное число электронов будет рассеяно по такому обширному пространству, что эффективные части их полей будут лежать одна совершенно вне другой. В этом случае можно сказать, что система имеет электромагнитную массу, равную сумме масс отдельных электронов.

Приходится, однако, сталкиваться с такими важными случаями, когда мы не гарантированы в правильности этого утверждения. Чтобы пояснить это, я назову через F_1 часть поля электрона, которая лежит в непосредственной близости к частичке, и через F_2 ту часть поля, которая лежит дальше, причем границей раздела является сферическая поверхность, радиус которой довольно велик по сравнению с радиусом электрона. Тогда, если взять этот электрон отдельно от других, часть энергии E_1, содержащаяся в F_1, во много раз превышает энергию E_2, содержащуюся в F_2. Далее, если мы имеем N электронов, расположенных на таких расстояниях друг от друга, что их поля F_1 не накладываются друг на друга, мы должны будем сложить друг с другом количества энергии E_1. Количества E_2, напротив, нельзя просто складывать, так как более отдаленные части поля F_2 будут, конечно, покрывать, хотя бы отчасти, одни и те же части пространства S. Если в этом пространстве диэлектрические смещения или магнитные силы, вызываемые отдельными электронами, направлены так, что образуют друг с другом достаточно малые углы, поля F_2, все вместе, как бы слабы они ни были, легко могут вызвать результирующее поле заметной энергии. Такой пример мы имеем в электрическом поле заряженного проводника и в магнитном поле, окружающем проводник с током. Можно показать, что энергия этого магнитного поля во многих обычных случаях значительно больше, чем сумма всех количеств энергии, которую мы назвали E_1, — по крайней мере поскольку они зависят от движения электронов. Возможность этого легко уяснить, если представить себе крайний случай, когда в какой-нибудь точке пространства S магнитные силы, вызываемые всеми электронами, имеют в точности одно и то же направление. Тогда, если каждая из этих сил имеет величину $|\boldsymbol{h}|$, результирующая магнитная сила имеет величину $N|\boldsymbol{h}|$, так что магнитная энергия единицы объема делается равной $\frac{1}{2}N^2\boldsymbol{h}^2$. Эта величина пропорциональна квадрату числа N; мы предположим, что это число очень велико. С другой стороны, можно принять, что сумма величин E_1 пропорциональна только первой степени N.

Это отступление было необходимо, чтобы подчеркнуть связь между электромагнитной массой электронов и явлениями самоиндукции. При последних мы имеем дело с магнитной энергией, вызываемой взаимным перекрыванием слабых полей F_2. В явлении индукции можно с полным правом говорить об электромагнитной инерции тока, или об электромагнитной массе электронов, движущихся в нем, но должно помнить, что эта масса во много раз больше, чем сумма масс, которые мы приписываем отдельным частичкам. Эта большая величина вызывается (как и все явления тока) совместным действием бесчисленного количества электронов одного рода, движущихся в одном и том же направлении [1].

37. Рассматривая электромагнитную массу электронов, мы исходили из выражения (66) для силы, с которой действует на электрон его собственное поле. Это выражение, однако, не вполне точно. Оно основывается на утверждении, что уравнение (63) применимо и к случаю неравномерного движения, а мы уже указывали, что это можно делать только в том случае, когда состояние движения изменяется весьма мало за то время, в течение которого электромагнитное возмущение пройдет расстояние, равное размерам электрона. Это равносильно тому, как если бы мы сказали, что если l есть одно из измерений электрона и τ — время, в продолжение которого состояние движения заметно изменится, величина

$$\frac{l}{c\tau} \tag{75}$$

должна быть весьма мала.

В действительности сила (66) является только первым членом ряда, в котором каждый член, по сравнению с предыдущим, — порядка величины (75).

В некоторых явлениях дает себя чувствовать и следующий член ряда; поэтому необходимо указать его значение. Довольно утомительные вычисления приводят к выражению

$$\frac{e^2}{6\pi c^3}\ddot{\mathfrak{v}}, \tag{76}$$

---

[1]) Примечание **17**.

где вектор $\boldsymbol{v}$ дважды дифференцирован по времени. Я могу указать между прочим, что эта формула имеет место для любого распределения электрического заряда e [1]).

Во многих случаях новую силу, представленную (76), можно назвать *сопротивлением* движению. Это станет видно, если вычислить работу силы за промежуток времени от $t=t_1$ до $t=t_2$. В результате имеем:

$$\frac{e^2}{6\pi c^3}\int_{t_1}^{t_2}(\boldsymbol{v}\ddot{\boldsymbol{v}})\,dt=\frac{e^2}{6\pi c^3}\left|(\boldsymbol{v}\dot{\boldsymbol{v}})\right|_{t_1}^{t_2}-\frac{e^2}{6\pi c^3}\int_{t_1}^{t_2}\dot{\boldsymbol{v}}^2\,dt.$$

Здесь первый член пропадает, если для случая периодического движения интегрирование распространить на целый период, а также и в том случае, когда в моменты t_1 и t_2 или скорость, или ускорение обращаются в нуль. Примеры последнего случая мы можем найти в тех явлениях, в которых электрон ударяется в весомое тело и от него отскакивает.

В тех случаях, когда вышеприведенная формула сводится к последнему члену, работа силы становится отрицательной, так что название «сопротивление» является как раз подходящим. Это подтверждается также той формой, которую наша формула принимает для электрона, находящегося в простом гармоническом движении. Так как скорость дается выражением

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{b}\cos nt,$$

где n есть величина постоянная, мы можем написать

$$\ddot{\boldsymbol{v}}=-n^2\boldsymbol{v}$$

и вместо (76)

$$-\frac{n^2e^2}{6\pi c^3}\boldsymbol{v}, \tag{77}$$

так что в этом частном случае сила по направлению противоположна скорости и ей пропорциональна.

---

1) Примечание 18.

Работа (77) за полный период времени T равна

$$-\frac{n^2e^2}{6\pi c^3}\int\limits_{t_1}^{t_1+T} \boldsymbol{v}^2\,dt = -\frac{n^2e^2}{12\pi c^3}\,b^2T. \tag{78}$$

38. Во всех случаях, в которых работа силы (76) отрицательна, энергия электрона (если только она не поддерживается при определенном значении действием какой-нибудь другой причины) должна уменьшаться, а энергия эфира должна увеличиваться. Это означает, что происходит постоянное *излучение* от частички во внешнее пространство — излучение, которое не может существовать, когда скорость постоянна и электрон просто несет с собой свое поле.

Чтобы составить себе ясное представление об излучении, будет полезно рассмотреть поле на весьма большом расстоянии от частички. Мы увидим, что если расстояние достаточно велико, поле излучения отпочковывается, если можно так выразиться, от рассмотренного нами ранее поля, которое движущаяся частичка переносит с собой.

Чтобы определить поле на большом расстоянии, мы можем воспользоваться нижеследующими формулами для скалярного и векторного потенциалов, справедливыми для всех точек, расстояние которых от электрона весьма велико по сравнению с его размерами:

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\left[r\left(1-\frac{\boldsymbol{v}_r}{c}\right)\right]}, \qquad \boldsymbol{a} = \frac{e\,[\boldsymbol{v}]}{4\pi c\left[r\left(1-\frac{\boldsymbol{v}_r}{c}\right)\right]}. \tag{79}$$

Здесь квадратные скобки имеют значение, аналогичное тому, которое мы им придавали в общих уравнениях (35) и (36). Если нужно определить потенциал в точке P для времени t, нужно сначала найти положение M электрона, которое удовлетворяет тому условию, что, если оно будет достигнуто в момент времени t_0, более ранний, чем t, то

$$MP = c\,(t - t_0).$$

Расстояние MP обозначается через r; $[\boldsymbol{v}]$ означает скорость в положении M, а $\boldsymbol{v}_r$ — составляющую в направлении MP.

Эти формулы были выведены из (35) и (36); множитель $1-\frac{v_r}{c}$ в знаменателе показывает, впрочем, что задача не так проста, как это кажется на первый взгляд. Усложнение вызывается тем обстоятельством, что мы должны брать интеграл не по тому пространству, которое занимает электрон в тот *определенный момент времени, который мы обозначили через* t_0. Напротив, согласно смыслу (35) и (36), мы должны фиксировать наше внимание на различных частях электрона и выбрать для каждого из них, среди всех его последовательных положений, одно положение M', которое определяется условием, что если это положение достигнуто в момент времени t_0', то

$$M'P = c(t-t_0').$$

Время t_0' слегка отличается для различных точек электрона, и поэтому нельзя сказать, что пространство, по которому мы должны интегрировать (и которое содержит все точки M'), совпадает с пространством, занятым электроном в какой-нибудь определенный момент времени[1]).

39. Оставляя в стороне эти довольно сложные вычисления, я перехожу к определению поля на весьма больших расстояниях. Формулы (33) и (34), которыми мы должны пользоваться для этой цели, потребуют от нас дифференцирования φ и $\mathbf{a}$. При этом дифференцировании я опущу все члены, в которых встречаются в знаменателе квадраты и высшие степени расстояния r. Я буду поэтому считать, что множитель r в знаменателях (79) является величиной постоянной, так что в выражении для φ подлежит дифференцированию только $\mathbf{v}_r$, а во второй формуле только $[\mathbf{v}]$, если мы также пренебрежем членами, в которых составляющая скорости умножается на составляющую ускорения. Произведя все операции и обозначая через x, y, z координаты P (при этом точка M принята за начало

[1]) Примечание **19**.

координат) и через $\boldsymbol{j}$ ускорение электрона в положении M, я получаю [1]):

$$d_x = \frac{e}{4\pi c^2 r}\left\{-j_x + \frac{x}{r} j_r\right\} \text{ и т. д.,} \tag{80}$$

$$h_x = \frac{e}{4\pi c^2 r}\left\{j_y \frac{z}{r} - j_z \frac{y}{r}\right\} \text{ и т. д.} \tag{81}$$

Три формулы для $\boldsymbol{d}$ могут быть истолкованы следующим образом. Если ускорение $\boldsymbol{j}$ разложить на j_r в направлении MP и j_p в направлении, ему перпендикулярном, диэлектрическое смещение в P параллельно j_p, и его величина дается выражением

$$-\frac{e}{4\pi c^2 r} j_p.$$

Чтобы увидеть, что означают уравнения для $\boldsymbol{h}$, мы можем ввести вектор $\boldsymbol{k}$ единичной длины в направлении от M к P. Так как составляющие этого вектора равны $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$, имеем:

$$\boldsymbol{h} = \frac{e}{4\pi c^2 r}[\boldsymbol{jk}].$$

Величина $\boldsymbol{h}$ равна поэтому

$$\frac{e}{4\pi c^2 r} j_p$$

и по абсолютному значению совпадает с диэлектрическим смещением.

Далее, видно, что магнитная сила перпендикулярна как к прямой MP, так и к диэлектрическому смещению. Следовательно, вдоль MP имеется поток энергии. Легко видеть, что этот поток направлен от электрона и что его мощность дается выражением

$$\frac{e^2}{16\pi^2 c^3 r^2} j_p^2 = \frac{e^2}{16\pi^2 c^3 r^2} j^2 \sin^2\vartheta,$$

где ϑ есть угол между MP и ускорением $\boldsymbol{j}$ [2]).

---

[1]) Примечание **20**.

[2]) Примечание **21**.

Этот результат можно применить к любой точке сферической поверхности, описанной вокруг точки M, как центра, радиусом r. Общий поток энергии, направленный наружу через эту сферическую поверхность, дается выражением

$$\frac{e^2}{16\pi^2 c^3 r^2} \dot{j}^2 \int \sin^2 \vartheta \, d\sigma = \frac{e^2}{6\pi c^3} \dot{j}^2. \tag{82}$$

Основанием для моего прежнего утверждения, что на весьма больших расстояниях от электрона поле излучения превалирует над полем, рассмотренным в § 26, служит тот факт, что в последнем случае $\mathbf{d}$ и $\mathbf{h}$ уменьшаются пропорционально $\frac{1}{r^2}$, а поле излучения — только как $\frac{1}{r}$.

Мы можем резюмировать предыдущие рассуждения в виде следующего положения: электрон не излучает энергии, пока он находится в состоянии равномерного прямолинейного движения, но начинает излучать, как только его скорость изменяется или по величине, или по направлению [15].

40.* Теория возникновения лучей Рентгена, впервые предложенная Вихертом и Стоксом и разработанная Дж. Дж. Томсоном [1]), представляет весьма интересный пример применения наших результатов. Согласно указанной теории эти лучи представляют собою быстрый и нерегулярный ряд резких электромагнитных импульсов; каждый из этих импульсов вызывается изменением скорости, которое электроны катодных лучей испытывают при столкновении с антикатодом [2]). Я не могу, однако, останавливаться на этом вопросе, так как мне нужно посвятить очень много времени рассмотрению излучения световых колебаний, с которыми мы будем иметь дело очень часто.

---

[1]) E. Wiechert, Die Theorie der Elektrodynamik und die Röntgen'sche Entdeckung, Abh. d. Phys.-ökon. Ges. zu Königsberg i. Pr. (1896), стр. 1; Über die Grundlagen der Elektrodynamik, Ann. Phys. Chem. **59** (1896), стр. 283; G. G. Stokes, On the nature of the Röntgen rays, Manch. Memoirs **4** (1897), Mem. 15; J. J. Thomson, A theory of the connexion between cathode and Röntgen rays, Phil. Mag. (5), **45** (1898), стр. 172.

[2]) Примечание **21***.

Если электрон находится в простом гармоническом движении, его скорость непрерывно изменяется, и, на основании вышесказанного, должно происходить непрерывное излучение энергии. Ясно также, что в каждой точке окружающего поля состояние меняется периодически, синхронно с самим электроном, так что мы получим излучение однородного света. Прежде чем входить в некоторые дальнейшие детали, я рассмотрю сначала общее количество энергии, излучаемое за полный период.

Возьмем за начало координат положение равновесия и положим, что колебание происходит вдоль оси OX, причем смещение в момент времени t дается выражением

$$x = a\cos(nt + p).$$

Тогда для ускорения имеем выражение

$$-an^2\cos(nt + p).$$

Если амплитуда a весьма мала, можно считать, что центр сферической поверхности, о которой мы говорили в предыдущем параграфе, лежит не в M, одном из положений электрона, а в начале координат O; под j мы можем понимать ускорение электрона в момент времени $t - \frac{r}{c}$, где r есть расстояние до O. Поэтому, на основании (82), поток энергии через сферическую поверхность в единицу времени будет

$$\frac{e^2}{6\pi c^3}a^2n^4\cos^2\left\{n\left(t - \frac{r}{c}\right) + p\right\}.$$

Интегрируя это выражение за целый период T, получаем

$$\frac{e^2}{12\pi c^3}a^2n^4T. \tag{83}$$

При этом, если амплитуда остается постоянной, на электрон должна действовать внешняя сила, равная по величине и противоположная по направлению сопротивлению (77). Работа этой силы, с обратным знаком, дается выражением (78). Так как амплитуда скорости равна амплитуде a элонгации, умноженной на n, работа силы в точности соответствует количеству излучаемой энергии (83)[1].

41. В целях дальнейшего изучения поля электрона, совершающего простое гармоническое движение, мы должны вернуться к формуле (79). Сначала допустим только одно, что движение электрона не выходит из некоторого весьма малого объема S, одну из точек которого выберем за начало координат. Пусть $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ будут координаты электрона, $\dot{\boldsymbol{x}}$, $\dot{\boldsymbol{y}}$, $\dot{\boldsymbol{z}}$ — составляющие его скорости и $\ddot{\boldsymbol{x}}$, $\ddot{\boldsymbol{y}}$, $\ddot{\boldsymbol{z}}$ — составляющие его ускорения. Мы будем далее считать, что все эти величины являются бесконечно малыми первого порядка, и будем пренебрегать всеми членами, содержащими произведение каких-нибудь двух из них. Обозначим далее через x, y, z координаты точки P, для которой мы хотим определить поле, и через r_0 — ее расстояние от начала координат. Если теперь M есть положение электрона, которое мы имели в виду при нашем объяснении уравнений (79), расстояние $MP = r$ будет бесконечно мало отличаться от расстояния r_0, а время t_0 — бесконечно мало отличаться от времени $t - \frac{r_0}{c}$. Так как изменения положения и скорости электрона являются бесконечно малыми второго порядка, то мы можем считать, что M есть положение в момент времени $t - \frac{r_0}{c}$, а $\boldsymbol{v}$ есть скорость в этот момент. Далее

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r_0}\right)[\boldsymbol{x}] - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r_0}\right)[\boldsymbol{y}] - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r_0}\right)[\boldsymbol{z}],$$

потому что, как легко видеть, изменение расстояния между O и P, вызываемое смещением первой из этих точек по направлению к M, равно тому изменению, которое имело бы место, если бы O оставалось на месте, а точка P сместилась на расстояние $-\boldsymbol{x}$, $-\boldsymbol{y}$, $-\boldsymbol{z}$. Квадратные скобки теперь показывают, что значения величин относятся к моменту времени $t - \frac{r_0}{c}$; этот смысл сохраняется во всех дальнейших формулах.

---

[1] Примечание **22**.

Подставляя вышеприведенное значение $\frac{1}{r}$ и принимая, что

$$\frac{1}{1-\frac{[v_r]}{c}} = 1 + \frac{[v_r]}{c},$$

где v_r можно рассматривать как составляющую по направлению OP, получаем для скалярного потенциала выражение

$$\varphi = \frac{e}{4\pi}\left\{\frac{1}{r_0} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r_0}\right)[x] - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r_0}\right)[y] - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r_0}\right)[z] + \frac{[v_r]}{cr_0}\right\}.$$

Во всем дальнейшем мы можем в наших рассуждениях опускать значок $_0$, так что r впредь будет означать расстояние от начала координат O до точки с координатами x, y, z. Что касается последнего члена, мы можем воспользоваться преобразованием

$$\frac{[v_r]}{c} = \frac{1}{c}\,\frac{x}{r}\,[v_x] + \frac{1}{c}\,\frac{y}{r}\,[v_y] + \frac{1}{c}\,\frac{z}{r}\,[v_z] =$$

$$= \frac{1}{c}\,\frac{x[\dot{x}] + y[\dot{y}] + z[\dot{z}]}{r} = -\left(\frac{\partial[x]}{\partial x} + \frac{\partial[y]}{\partial y} + \frac{\partial[z]}{\partial z}\right);$$

последний шаг этого преобразования будет ясен, если мы будем иметь в виду смысл выражения $\frac{\partial[x]}{\partial x}$ и т. д. Символ $[x]$ обозначает, что величина x берется в момент времени $t - \frac{r}{c}$, который мы будем временно обозначать через t'. Это время t' в свою очередь зависит от расстояния r, а последнее является функцией координат x, y, z внешней точки. Отсюда

$$\frac{\partial[x]}{\partial x} = \frac{\partial[x]}{\partial t'}\,\frac{\partial t'}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial x} = -[\dot{x}]\,\frac{1}{c}\,\frac{x}{r} \quad \text{и т. д.}$$

Окончательное выражение для скалярного потенциала получает вид

$$\varphi = \frac{e}{4\pi}\left\{\frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{[x]}{r} - \frac{\partial}{\partial y}\,\frac{[y]}{r} - \frac{\partial}{\partial z}\,\frac{[z]}{r}\right\}. \qquad (84)$$

Выражение для векторного потенциала имеет еще более простой вид, а именно

$$a = \frac{e\,[\mathfrak{v}]}{4\pi c r}. \tag{85}$$

Поле излучения, которое на больших расстояниях играет первенствующую роль и в котором мы находили выше поток энергии, определяется тремя последними членами выражения для φ и векторным потенциалом. На меньших расстояниях оно налагается на поле, которое определяется первым членом φ, — это как раз то поле, которое окружало бы электрон, если бы он был в покое.

42. Слегка изменяя условия, мы можем окончательно освободиться от электростатического поля. Допустим, что электрон совершает колебания внутри атома или молекулы материи, которую мы теперь будем называть *частичкой* и которая занимает небольшой объем S. Если частичка, как целое, не заряжена, она должна содержать, кроме нашего подвижного электрона, еще заряд $-e$ или в форме одного или нескольких электронов или распределенный каким-нибудь другим способом. Мы предположим, что этот добавочный заряд остается в покое и что если бы электрон e тоже был закреплен в определенном положении, которое мы примем за начало координат, внешнее поле вообще бы отсутствовало, по крайней мере на таких расстояниях, которые весьма велики по сравнению с размерами S. При таких допущениях неподвижный заряд $-e$ должен вызывать скалярный потенциал, равный по величине и противоположный по направлению первому члену в (84), так что, если мы рассмотрим поле всей частички, этот член зачеркнется. Наше допущение сводится к тому, что заряд $-e$ эквивалентен одному электрону в точке O, так что, если координаты электрона $+e$ суть x, y, z, все будет происходить так, как если бы у нас было два равных и противоположных заряда на небольшом расстоянии друг от друга. Иначе говоря, частичка электрически поляризована, и ее электрический момент определяется уравнением

$$p = e r, \tag{86}$$

где $\boldsymbol{r}$ есть вектор, проведенный от O к положению, занимаемому подвижным электроном. Составляющие $\boldsymbol{p}$ суть

$$\boldsymbol{p}_x = ex, \qquad \boldsymbol{p}_y = ey, \qquad \boldsymbol{p}_z = ez, \tag{87}$$

и из (84) и (85) мы находим следующие выражения для потенциалов поля, окружающего поляризованную частичку:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{[\boldsymbol{p}_x]}{r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{[\boldsymbol{p}_y]}{r} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{[\boldsymbol{p}_z]}{r}\right\}, \tag{88}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{[\dot{\boldsymbol{p}}]}{4\pi c r}. \tag{89}$$

Эти соотношения имеют место и в том случае, если поляризованная частичка представляет собою более сложную систему. Представим себе, что она содержит известное количество электронов, некоторая часть которых пусть будет подвижна. Мы можем найти потенциалы, если вычислим (84) и (85) для отдельных электронов и результаты сложим. Пользуясь для этой последней операции символом $\sum$ и помня, что

$$\sum e = 0, \tag{90}$$

мы опять придем к формулам (88) и (89), если определим момент частички формулой

$$\boldsymbol{p} = \sum e\boldsymbol{r}, \tag{91}$$

а его составляющие — выражениями

$$\boldsymbol{p}_x = \sum ex, \qquad \boldsymbol{p}_y = \sum ey, \qquad \boldsymbol{p}_z = \sum ez. \tag{92}$$

Нет даже необходимости в том, чтобы заряды были сосредоточены в отдельных электронах. Мы можем с таким же успехом считать, что они распределены непрерывно, но, конечно, так или иначе способны к движению или к флюктуации. Тогда суммы в последних формулах должны быть заменены интегралами. Мы будем иметь:

$$\int \rho\, dS = 0, \tag{93}$$

а для составляющих момента получаем

$$\mathbf{p}_x = \int \rho x\, dS, \qquad \mathbf{p}_y = \int \rho y\, dS, \qquad \mathbf{p}_z = \int \rho z\, dS, \tag{94}$$

причем интегрирование распространяется по всему об'ему S, занятому частичкой. Следует отметить, что в силу (90) и (93) векторы (91) и (94) не зависят от выбора точки O.

43. Формулы (88) и (89) показывают, что, когда момент $\mathbf{p}$ претерпевает изменения, частичка является центром излучения, и что она испускает правильные колебания, если $\mathbf{p}$ является периодической функцией времени.

Предположим для примера, что

$$\mathbf{p}_x = b\cos(nt+p), \quad \mathbf{p}_y = 0, \quad \mathbf{p}_z = 0,$$

где b, n и p суть постоянные величины. Тогда имеем

$$\frac{[\mathbf{p}_x]}{r} = \frac{b}{r}\cos\left\{n\left(t-\frac{r}{c}\right)+p\right\},$$

и поле легко определяется при помощи формул (88) и (89).

Я не буду выписывать общих формул, напишу только те, которые имеют место для значений r, весьма больших по сравнению с длиной волны; они получаются, если опустить все члены порядка $\frac{1}{r^2}$. Эти формулы имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{d}_x &= \frac{n^2 b}{4\pi c^2 r}\cdot\frac{r^2-x^2}{r^2}\cos\left\{n\left(t-\frac{r}{c}\right)+p\right\},\\
\mathbf{d}_y &= -\frac{n^2 b}{4\pi c^2 r}\cdot\frac{xy}{r^2}\cos\left\{n\left(t-\frac{r}{c}\right)+p\right\},\\
\mathbf{d}_z &= -\frac{n^2 b}{4\pi c^2 r}\cdot\frac{xz}{r^2}\cos\left\{n\left(t-\frac{r}{c}\right)+p\right\},\\
\mathbf{h}_x &= 0,\\
\mathbf{h}_y &= \frac{n^2 b}{4\pi c^2 r}\cdot\frac{z}{r}\cos\left\{n\left(t-\frac{r}{c}\right)+p\right\},\\
\mathbf{h}_z &= -\frac{n^2 b}{4\pi c^2 r}\cdot\frac{y}{r}\cos\left\{n\left(t-\frac{r}{c}\right)+p\right\};
\end{aligned}\right\} \tag{95}$$

они отвечают уравнениям (80) и (81) [1]).

[1]) Примечание **23**.

Я должен добавить, что наши формулы для поля, окружающего частичку, поляризация которой изменяется периодически, совпадают с формулами Герца, дающими состояние поля около герцевского вибратора [1]).

44. Перейдем теперь к некоторым уравнениям, которыми придется пользоваться при рассмотрении влияния поступательного движения Земли на оптические явления. Они относятся к электромагнитным явлениям в системе тел, имеющих общее равномерное движение, скорость которого будем обозначать через $\boldsymbol{w}$; они выводятся из наших первоначальных уравнений путем замены переменных. В самом деле, весьма естественно относить явления в движущейся системе не к неподвижной системе координат, но к такой, которая связана с системой и перемещается вместе с нею; эти новые координаты обозначим через x', y', z'. Они даются выражениями:

$$x' = x - w_x t, \qquad y' = y - w_y t, \qquad z' = z - w_z t. \tag{96}$$

Будет также полезно остановить наше внимание на скорости зарядов $\boldsymbol{u}$ относительно движущихся осей, так что в наших основных уравнениях мы должны положить

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{u}.$$

Оказывается, однако, что в тех случаях, когда скорость перемещения $\boldsymbol{w}$ настолько мала, что можно пренебречь ее квадратом w^2, вернее, величиной $\frac{w^2}{c^2}$, дифференциальные уравнения, отнесенные к движущейся системе координат, принимают почти ту же самую форму, как и первоначальные формулы, если вместо t ввести новую независимую переменную t' и если в то же самое время заменить диэлектрическое смещение и магнитную силу некоторыми другими векторами, которые мы будем обозначать $\boldsymbol{d}'$ и $\boldsymbol{h}'$.

Переменная t' определяется уравнением

$$t' = t - \frac{1}{c^2}(w_x x' + w_y y' + w_z z'), \tag{97}$$

[1]) H. Hertz, Die Kräfte elektrischer Schwingungen, behandelt nach der Maxwell'schen Theorie, Ann. Phys. Chem. **36** (1888), стр. 1; Werke, т. II.

а векторы $\boldsymbol{d}'$ и $\boldsymbol{h}'$ — уравнениями:

$$\boldsymbol{d}' = \boldsymbol{d} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{w}\boldsymbol{h}], \tag{98}$$

$$\boldsymbol{h}' = \boldsymbol{h} - \frac{1}{c}[\boldsymbol{w}\boldsymbol{d}]. \tag{99}$$

Мы можем считать, что время t' отличается от t тем, что оно отсчитывается от момента

$$\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{w}_x x' + \boldsymbol{w}_y y' + \boldsymbol{w}_z z');$$

последний изменяется от точки к точке. Для этой переменной поэтому весьма подходит название *местное* время, в отличие от *универсального* времени t.

Что касается векторов $\boldsymbol{d}'$ и $\boldsymbol{h}'$, они мало отличаются от $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{h}$, так как дробь $\frac{|\boldsymbol{w}|}{c}$ весьма мала. Даже для движения Земли значение $|\boldsymbol{w}|$ составляет всего одну десятитысячную долю скорости света.

Пренебрегая, как только что было сказано, членами, содержащими квадрат $\frac{|\boldsymbol{w}|}{c}$, мы получаем следующую систему преобразованных уравнений:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{d}' = \left\{1 - \frac{(\boldsymbol{w}\boldsymbol{u})}{c^2}\right\}\rho, \tag{100}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{h}' = 0, \tag{101}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{h}' = \frac{1}{c}(\dot{\boldsymbol{d}}' + \rho \boldsymbol{u}), \tag{102}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{d}' = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{h}}'. \tag{103}$$

Штрих означает, что дифференцирование производится по t', а символы div и rot (а в следующем параграфе и grad) обозначают дифференцирование по x', y', z' совершенно так же, как раньше они обозначали дифференцирование по x, y, z. Так, например, $\operatorname{rot} \boldsymbol{h}'$ теперь представляет собою вектор с составляющими

$$\frac{\partial h'_z}{\partial y'} - \frac{\partial h'_y}{\partial z'}, \qquad \frac{\partial h'_x}{\partial z'} - \frac{\partial h'_z}{\partial x'}, \qquad \frac{\partial h'_y}{\partial x'} - \frac{\partial h'_x}{\partial y'}.$$

Вы видите, что эти формулы имеют почти — но не совсем — ту же форму, как и уравнения (17) — (20), причем они различаются в первом уравнении на член $\frac{(\boldsymbol{w}\boldsymbol{u})}{c^2}$ [1]) [16].

45. Исходя из новой системы уравнений, мы можем теперь повторить многое из того, что было сказано по поводу первоначальной системы. Для данного распределения и движения зарядов поле является вполне определенным, и здесь опять задача значительно упрощается путем введения двух потенциалов, скалярного и векторного. Они даются уравнениями:

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} [\rho] \, dS \tag{104}$$

и

$$\boldsymbol{a}' = \frac{1}{4\pi c} \int \frac{1}{r} [\rho \boldsymbol{u}] \, dS. \tag{105}$$

Символы $[\rho]$ и $[\rho\boldsymbol{u}]$ требуют, однако, некоторых дополнительных объяснений. Если мы хотим вычислить значения φ' и $\boldsymbol{a}'$ для точки P и для момента, в который местное время для этой точки имеет определенное значение t', мы должны для каждого элемента dS, расположенного на расстоянии r от P, брать такие значения для ρ и $\rho\boldsymbol{u}$, какие они имеют в тот момент, когда местное время элемента равно

$$t' - \frac{r}{c}.$$

В конце концов мы получаем следующие формулы для определения поля посредством потенциалов [2]):

$$\boldsymbol{d}' = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{a}}' - \operatorname{grad}\varphi' + \frac{1}{c}\operatorname{grad}(\boldsymbol{w}\boldsymbol{a}'), \tag{106}$$

$$\boldsymbol{h}' = \operatorname{rot}\boldsymbol{a}'. \tag{107}$$

Здесь опять замечается небольшое отличие по сравнению с (33) и (34). В (33) нет члена, соответствующего последнему члену в (106) [3]).

---

1) Примечание **24**. См. также примечание **72***.

2) Примечание **25**.

3) См., впрочем, примечание **72***.

Несмотря на два отмеченных отличия, имеется много разнообразных случаев, когда положение дела в неподвижной системе оказывается вполне аналогичным положению дела в той же самой системе, находящейся в поступательном движении. Я приведу два примера, представляющих некоторый интерес.

Прежде всего значения $\mathbf{d}'$ и $\mathbf{h}'$, обусловливаемые частичкой, движущейся со скоростью $\mathbf{w}$ и имеющей переменный электрический момент, даются формулами, подобными тем, которые мы нашли ранее для излучения неподвижной частички и которые я поэтому не считаю нужным выписывать.

Если момент частички, помещенной в начале координат, представляется выражениями:

$$\mathbf{p}_x = b\cos(nt' + p), \quad \mathbf{p}_y = 0, \quad \mathbf{p}_z = 0, \tag{108}$$

все, что нам нужно сделать, сводится к замене в (95) $\mathbf{d}$, $\mathbf{h}$, x, y, z, t через $\mathbf{d}'$, $\mathbf{h}'$, x', y', z', t' [1]).

Чтобы выяснить смысл этого результата, я рассмотрю поле в точке, расположенной на положительной оси y'. Оно определяется выражениями:

$$\mathbf{d}'_x = \frac{n^2 b}{4\pi c^2 r}\cos\left\{n\left(t' - \frac{y'}{c}\right) + p\right\},$$

$$\mathbf{h}'_z = -\frac{n^2 b}{4\pi c^2 r}\cos\left\{n\left(t' - \frac{y'}{c}\right) + p\right\},$$

причем все остальные составляющие равны нулю. Так как, пренебрегая членами второго порядка, мы можем написать

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}' - \frac{1}{c}[\mathbf{w}\mathbf{h}'],$$

то вместо (98) имеем:

$$\mathbf{d}_x = \mathbf{d}'_x - \frac{\mathbf{w}_y}{c}\mathbf{h}'_z,$$

---

[1]) Примечание 26.

откуда ясно, что диэлектрическое смещение принимает вид

$$d_x = \alpha \cos\left\{n\left(t' - \frac{y'}{c}\right) + p\right\},$$

где α есть некоторая постоянная величина.

Подставляя значения местного времени и заменяя y' выражением (96), получаем отсюда:

$$d_x = \alpha \cos\left\{n\left(1 + \frac{w_y}{c}\right)\left(t - \frac{y}{c}\right) + p\right\}.$$

Итак, мы видим, что в определенной точке пространства, т. е. для определенного значения y, частота колебаний дается выражением:

$$n\left(1 + \frac{w_y}{c}\right).$$

Если излучающая частичка имеет положительную скорость w_y, т. е. такую, которая направлена к рассматриваемой точке, частота больше, чем частота самой частички, которая, по (108), имеет прежнее значение n. Это — известное изменение частоты, которое, по принципу Допплера, вызывается движением источника света.

46. Наш второй пример относится к отражению света идеальным зеркалом, например изготовленным из совершенного проводника. Предположим, что лучи падают нормально, и начнем со случая неподвижного зеркала; в таком случае мы можем пользоваться первоначальными уравнениями. Пусть пучок света представлен уравнением (7), и пусть поверхность зеркала совпадает с плоскостью YOZ. Тогда отраженный пучок, который мы будем отличать значком (r), дается выражениями:

$$d_{y\,(r)} = -a\cos n\left(t + \frac{x}{c}\right), \quad h_{z\,(r)} = a\cos n\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

В самом деле, эти значения удовлетворяют условию, что на поверхности зеркала диэлектрического смещения нет. Если мы положим $x = 0$, мы находим, действительно:

$$d_y + d_{y\,(r)} = 0.$$

Случай отражения от зеркала, движущегося со скоростью $\boldsymbol{w}_x$ в направлении оси OX, т. е. в направлении нормали, может быть разобран при помощи тех же самых формул, с одной только заменой величин x, t, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{h}$ на x', t', $\boldsymbol{d}'$, $\boldsymbol{h}'$ [1]). Поэтому, если падающий пучок представляется теперь выражением

$$\boldsymbol{d}'_y = a\cos n\left(t' - \frac{x'}{c}\right), \qquad \boldsymbol{h}'_z = a\cos n\left(t' - \frac{x'}{c}\right),$$

для отраженного пучка получим:

$$\boldsymbol{d}'_{y\,(r)} = -a\cos n\left(t' + \frac{x'}{c}\right), \qquad \boldsymbol{h}'_{z\,(r)} = a\cos n\left(t' + \frac{x'}{c}\right).$$

Рассмотрим значения $\boldsymbol{d}_y$, $\boldsymbol{h}_z$, $\boldsymbol{d}_{y\,(r)}$ и $\boldsymbol{h}_{z\,(r)}$ для этого случая. Так как единственная составляющая $\boldsymbol{w}$ есть $\boldsymbol{w}_x$, получаем:

$$\boldsymbol{d}_y = \boldsymbol{d}'_y + \frac{1}{c}\boldsymbol{w}_x\boldsymbol{h}'_z, \qquad \boldsymbol{h}_z = \boldsymbol{h}'_z + \frac{1}{c}\boldsymbol{w}_x\boldsymbol{d}'_y,$$

так что падающие лучи определяются выражениями:

$$\boldsymbol{d}_y = a\left(1 + \frac{\boldsymbol{w}_x}{c}\right)\cos n\left(t' - \frac{x'}{c}\right),$$

$$\boldsymbol{h}_z = a\left(1 + \frac{\boldsymbol{w}_x}{c}\right)\cos n\left(t' - \frac{x'}{c}\right),$$

а для отраженных лучей имеем:

$$\boldsymbol{d}_{y\,(r)} = -a\left(1 - \frac{\boldsymbol{w}_x}{c}\right)\cos n\left(t' + \frac{x'}{c}\right),$$

$$\boldsymbol{h}_{z\,(r)} = a\left(1 - \frac{\boldsymbol{w}_x}{c}\right)\cos n\left(t' + \frac{x'}{c}\right).$$

Выразим теперь в этих формулах t' и x' через t и x. Значение местного времени

$$t' = t - \frac{\boldsymbol{w}_x x'}{c^2},$$

и

$$x' = x - \boldsymbol{w}_x t.$$

---

[1]) Примечание 27.

Отсюда

$$t' - \frac{x'}{c} = \left(1 + \frac{w_x}{c}\right)\left(t - \frac{x}{c}\right),$$

$$t' + \frac{x'}{c} = \left(1 - \frac{w_x}{c}\right)\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

Формулы упрощаются, если положить

$$a\left(1 + \frac{w_x}{c}\right) = \mathrm{a}, \quad n\left(1 + \frac{w_x}{c}\right) = \mathrm{n}.$$

Продолжая пренебрегать квадратом $\frac{w_x}{c}$, получаем отсюда:

$$a\left(1 - \frac{w_x}{c}\right) = \mathrm{a}\left(1 - \frac{2w_x}{c}\right), \qquad n\left(1 - \frac{w_x}{c}\right) = \mathrm{n}\left(1 - \frac{2w_x}{c}\right),$$

так что окончательные формулы для падающих лучей принимают вид

$$\boldsymbol{d}_y = \mathrm{a}\cos\mathrm{n}\left(t - \frac{x}{c}\right), \ \boldsymbol{h}_z = \mathrm{a}\cos\mathrm{n}\left(t - \frac{x}{c}\right),$$

а для отраженных лучей

$$\boldsymbol{d}_{y\,(r)} = -\mathrm{a}\left(1 - \frac{2w_x}{c}\right)\cos\mathrm{n}\left(1 - \frac{2w_x}{c}\right)\left(t + \frac{x}{c}\right),$$

$$\boldsymbol{h}_{z\,(r)} = \mathrm{a}\left(1 - \frac{2w_x}{c}\right)\cos\mathrm{n}\left(1 - \frac{2w_x}{c}\right)\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

Эти уравнения показывают, что при движении зеркала изменяются как частота, так и амплитуда отраженных лучей. Частота теперь имеет значение $\mathrm{n}\left(1 - \frac{2w_x}{c}\right)$, и она меньше, чем n, если зеркало удаляется от источника света. Эти изменения можно было бы предсказать на основании принципа Допплера. Что касается амплитуды, она изменяется совершенно в том же отношении, как и частота, так что интенсивность отраженного света уменьшается при движении зеркала в одном направлении и увеличивается при движении в другом.

Интересно проверить эти результаты, рассматривая энергию системы. Это легко сделать, если мы остановим наше внимание не на изменениях электромагнитной энергии, а на ее среднем значении, так что в каждой точке пучка w_e и w_m (§ 16) нужно рассматривать как постоянные. Пусть лучи занимают цилиндрический объем, образующие которого параллельны OX и нормальное сечение которого есть Σ. Пусть P будет плоскость, нормальная к OX и неподвижно закрепленная в эфире на некотором расстоянии перед зеркалом. Если $\mathfrak{w}_x$ положительно, так что зеркало удаляется, пространство между зеркалом и плоскостью P увеличивается на $\mathfrak{w}_x \Sigma$ в единицу времени, так что энергия, заключенная в этом пространстве, увеличивается на

$$(w_e + w_m)\, \mathfrak{w}_x \Sigma.$$

Далее, если p есть давление на зеркало, работа, произведенная полем, будет равна

$$p \mathfrak{w}_x \Sigma.$$

Следовательно, если S есть поток энергии по направлению к зеркалу через единицу площади плоскости P, мы должны иметь:

$$S \Sigma = (w_e + w_m)\, \mathfrak{w}_x \Sigma + p \mathfrak{w}_x \Sigma; \tag{109}$$

величины, входящие в это уравнение, можно легко вычислить.

В падающем пучке имеется поток энергии (§ 17)

$$\frac{1}{2}\, \mathrm{a}^2 c$$

по направлению к зеркалу, а в отраженном пучке — поток

$$\frac{1}{2}\, \mathrm{a}^2 \left(1 - \frac{2\mathfrak{w}_x}{c}\right)^2 c = \frac{1}{2}\, \mathrm{a}^2 \left(1 - \frac{4\mathfrak{w}_x}{c}\right) c$$

в противоположном направлении, так что

$$S = 2\mathrm{a}^2 \mathfrak{w}_x. \tag{110}$$

Что касается w_e, w_m и p, мы можем взять для них те значения, которые имели бы место, если бы зеркало было в покое, так как эти величины нужно умножить на $\mathfrak{w}_x$. Так как величина $w_e + w_m$ состоит из двух равных частей, одна из которых относится к падающему, а другая к отраженному свету [1]), то

$$w_e + w_m = a^2. \tag{111}$$

Окончательно, на основании сказанного в § 25,

$$p = a^2. \tag{112}$$

Значения (110), (111) и (112) действительно удовлетворяют условию (109).

47. Я закончу эту главу кратким обзором применений теории электронов к движению электричества в металлических телах. Во введении я уже упоминал об исследованиях Рике, Друде и Дж. Дж. Томсона. Теперь я хочу обратить ваше внимание главным образом на взгляды, высказанные вторым из названных физиков.

По его теории каждый металл содержит большое число свободных электронов; допускается, что они принимают участие в тепловом движении обыкновенных атомов и молекул. Далее, известная теорема кинетической теории материи, по которой при данной температуре средняя кинетическая энергия для частичек разного рода имеет одно и то же значение, приводит к заключению, что средняя кинетическая энергия электрона равна энергии молекулы газа, взятого при той же температуре. Хотя скорость, необходимая для этого, должна иметь довольно большое значение, все же электроны не могут за короткий промежуток времени уйти на далекое расстояние от своего первоначального положения. Им препятствуют столкновения с атомами самого металла.

Для простоты мы примем только один род свободных электронов, предполагая, что электроны другого знака связаны с весомой материей. Если теперь на металл не действует никакая электрическая сила, частички движутся во все стороны одинаково; переноса электричества в какой-нибудь определенном направлении не происходит. Все это изменяется, как только мы приложим какую-нибудь электрическую силу. Скорости электронов в одну сторону увеличиваются, в другую уменьшаются, так что возникает

---

[1]) Примечание 28.

электрический ток, силу которого можно вычислить на основании теоретических соображений. Формула, к которой мы таким образом приходим, содержит, конечно, электрическую силу, число N электронов в единице объема, заряд e и массу m каждого из них. Прежде всего можно найти силу, действующую на электрон; для этого электрическую силу нужно умножить на e. Затем, деля на m, получаем скорость, которую электрон приобретает в единицу времени. Скорости, приобретенные электронами, будут, далее, зависеть от того промежутка времени, в течение которого эти электроны без помехи подвергались действию электрической силы; за этот промежуток мы примем промежуток времени между двумя последовательными столкновениями с атомом металла. Если l есть расстояние, пробегаемое электроном между двумя столкновениями, u — скорость электрона, то величина этого промежутка времени будет $\frac{l}{u}$; электрическая сила за это время произведет некоторую скорость, которая, как мы можем принять, теряется при следующем столкновении.

Этих соображений достаточно для объяснения формулы

$$\sigma = \frac{e^2Nl}{2mu}, \tag{113}$$

которую Друде вывел для электропроводности металла; мы должны в ней понимать под u среднюю скорость электронов в их неправильном тепловом движении, а под l — среднюю длину их свободного пути. Но, как я уже говорил, мы предполагаем, что средняя кинетическая энергия электрона, для которой мы можем написать $\frac{1}{2}mu^2$, равна средней кинетической энергии молекулы газа. Эта последняя пропорциональна абсолютной температуре T и может поэтому быть дана выражением

$$\alpha T,$$

где α есть универсальная постоянная. При этих обозначениях (113) принимает вид

$$\sigma = \frac{e^2Nlu}{4\alpha T}. \tag{114}$$

48. Чтобы показать вам всю красоту теории Друде, я должен сказать несколько слов также и о теплопроводности. Ее можно вычислить по способу, весьма напоминающему тот, при помощи которого она вычисляется в кинетической теории газов. В самом деле, металлический стержень, концы которого поддерживаются при различной температуре, можно уподобить столбу газа, находящемуся, например, в вертикальном положении и нагретому сверху сильнее, чем снизу. Процесс, посредством которого газ проводит тепло, заключается, как вы знаете, в том, что происходит нечто вроде диффузии между верхней частью столба, где мы имеем бо́льшие скорости молекул, и нижней, где скорости меньше; величина этой диффузии и интенсивность потока тепла, который возникает в результате, зависит от среднего расстояния, на которое молекула может продвинуться в промежутке между двумя столкновениями. В теории металлов Друде перенос тепла осуществляется точно таким же способом. Переносчиками тепла от более горячих к менее горячим частям тела являются тут свободные электроны, и длина их свободного пути ограничена не взаимными столкновениями, как в случае газа, а столкновениями с атомами металла, которые мы, в силу их большой массы, можем считать неподвижными. Развивая эти идеи, Друде находит для коэффициента теплопроводности:

$$k = \frac{1}{3}\alpha N l u. \tag{115}$$

49. Представляется весьма интересным сравнить эти две проводимости, тепловую и электрическую. Деля (115) на (114), получаем:

$$\frac{k}{\sigma} = \frac{4}{3}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^2 T. \tag{116}$$

Это выражение показывает, что искомое отношение должно быть одинаковым для всех металлов. В первом приближении это действительно имеет место.

Итак, мы видим, что Друде сумел объяснить тот важный факт, что, как правило, металлы, обладающие большей теплопроводностью, являются в то же время лучшими проводниками электричества.

Углубляясь несколько более в детали, я могу указать два важных способа проверки уравнения (116).

Во-первых, измерения Егера и Диссельгорста[1]) показали, что отношение двух проводимостей $\frac{k}{\sigma}$ изменяется приблизительно пропорционально абсолютной температуре, причем отношение между значениями $\frac{k}{\sigma}$ для температур 0° и 18° для различных металлов изменяется от 1,25 1,12, тогда как отношение между абсолютными температурами равно 1,28.

Во-вторых, правую часть равенства (116) можно вычить при помощи числовых данных, взятых из других ений[2]). Чтобы в этом убедиться, возьмем количество орода, равное его электрохимическому эквиваленту, и дположим, что это количество занимает, при темпера- е T, объем в один кубический сантиметр. Соответствую- е давление, которое мы обозначим через p, может быть ко вычислено.

Мы уже видели, что заряд e, который входит в фор- у (116), можно считать равным заряду атома водорода ектролитическом растворе. Поэтому число атомов в одном ктрохимическом эквиваленте водорода равно $\frac{1}{e}$. Так как екулы газа двухатомны, число молекул равно $\frac{1}{2e}$, и ная кинетическая энергия их поступательного движения на

$$\frac{\alpha T}{2e}$$

кубический сантиметр.

По основным формулам кинетической теории газов да- ние на единицу площади численно равно двум третям

---

[1]) W. Jaeger und H. Diesselhorst, Wärmeleitung, Elektrizitätsleitung, Wärmekapazität und Thermokraft einiger Metalle, ngsber. Berlin, 1899, стр. 719.

[2]) См. M. Reinganum, Theoretische Bestimmung des Ver- nisses von Wärme- und Elektrizitätsleitung der Metalle aus der eschen Elektronentheorie, Ann. Phys. 2 (1900), стр. 398.

этой величины, так что

$$p = \frac{aT}{3c}.$$

Уравнение (116) поэтому принимает вид

$$\frac{k}{\sigma} = 12\frac{p^2}{T},$$

или

$$p = \sqrt{\frac{1}{12}\frac{k}{\sigma}T}. \tag{117}$$

Это соотношение между проводимостями металла и другими величинами, выведенное из явлений, которые на первый взгляд не имеют ничего общего ни с теплопроводностью, ни с электропроводностью, оказалось в весьма удовлетворительном согласии с произведенными измерениями.

Так как электрохимический эквивалент водорода равен в наших единицах

$$\frac{0{,}000104}{c\sqrt{4\pi}},$$

а масса кубического сантиметра этого газа при 0° и давлении 76 *см* равна 0,0000896 *г*, для температуры 18° ($T = 273 + 18°$) находим:

$$p = \frac{12{,}5 \cdot 10^5}{c\sqrt{4\pi}}. \tag{118}$$

С другой стороны, выражая σ в обычных электромагнитных единицах, Егер и Диссельгорст нашли для серебра при 18°

$$\frac{k}{\sigma} = 686 \cdot 10^8.$$

В наших единицах это выражение равно

$$\frac{k}{\sigma} = \frac{686 \cdot 10^8}{4\pi c^2};$$

подставляя его в правую часть уравнения (117), получаем

$$\frac{12{,}9 \cdot 10^5}{c\sqrt{4\pi}},$$

о весьма близко согласуется с только что полученным ением для p.

50. Я должен добавить, однако, что численное совпа-ние становится несколько хуже, если мы вместо формул уде для проводимостей возьмем уравнения, к которым пришел путем вычислений, по моему мнению, несколько ее строгих, чем его вычисления. Принимая во внима-е, что электроны в куске металла имеют неодинаковые орости, и основываясь на законе Максвелла для распре-ления скоростей между частичками, я получаю вместо (114) (115)[1]:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{3\pi}}\,\frac{e^2 l N u}{\alpha T} \tag{119}$$

$$k = \frac{8}{9}\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\,\alpha N l u. \tag{120}$$

этих уравнениях u есть такая величина, что ее квадрат вен средней величине квадратов скоростей, которыми ктроны обладают в своем тепловом движении, а l пред-авляет некоторую среднюю длину свободного пути.

Отношение проводимостей теперь приобретает вид

$$\frac{k}{\sigma} = \frac{8}{9}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^2 T;$$

о попрежнему пропорционально абсолютной температуре, составляет только две трети друдевского значения. силу этого мы должны заменить (117) уравнением

$$p = \sqrt{\frac{1}{8}\,\frac{k}{\sigma}\,T},$$

авая часть которого, в примере § 49, имеет значение

$$\frac{15{,}8 \cdot 10^5}{c\sqrt{4\pi}}\,.$$

о чувствительно отличается от (118).

Если формулам (114) и (115) предпочесть формулы (119) (120), как, по моему мнению, мы и обязаны поступить,

[1] Примечание 29.

точное совпадение предыдущего параграфа должно приписать простой случайности. Несмотря на это, даже найденная нами степень согласия позволяет с уверенностью утверждать, что в теории Друде положено хорошее начало в деле уразумения электрических и термических свойств металлов [1]). Особенно важно отметить, что в наших вычислениях мы все время основываемся на представлении, что заряды свободных электронов в металле равны зарядам ионов водорода [17].

---

[1]) Но не более, чем именно «начало». Эта теория должна быть значительно развита, чтобы объяснить изменения в электропроводности при низких температурах, которые были обнаружены Каммерлинг-Оннесом.

Другой важный вопрос — это вопрос о той доле, которую свободные электроны вносят в удельную теплоту металлов (1915).

ГЛАВА II

ИСПУСКАНИЕ И ПОГЛОЩЕНИЕ ТЕПЛА

51. Содержанием моих ближайших двух лекций будет испускание и поглощение тепла и, в особенности, лучеиспускание так называемого абсолютно черного тела, рассматриваемое с точки зрения зависимости этих явлений от температуры и длины волны. Сначала я напомню вам важные теоретические законы, найденные Кирхгофом, Больцманом и Вином в результате приложения принципов термодинамики. После этого нам предстоит разобрать, в какой степени теория электронов может дать нам ключ к пониманию механизма этих явлений.

Мы должны начать с точного определения понятий: «поглощательная» и «испускательная» способность тела.

Пусть ω и ω' будут две бесконечно малые площадки, нормальные к прямой r, соединяющей их центры, и пусть M будет тело при температуре T, расположенное так, что на него может падать пучок лучей, идущих через ω' и ω. Допустим, что этот пучок состоит из однородных лучей с длиной волны λ, плоско поляризованных, причем электрические колебания пусть имеют определенное направление h, перпендикулярное к прямой r. Часть падающих лучей будет отражаться от передней поверхности тела, часть из них проникнет внутрь тела, и из этих лучей часть опять-таки выйдет из тела — или прямо, или после одного, а то и нескольких внутренних отражений. Во всяком случае, если тело M не является вполне прозрачным, оно задержит в себе некоторое количество энергии; эта энергия обратится в тепло, так как мы исключаем из нашего рассмотрения все другие возможные изменения.

Коэффициент поглощения A определяется как дробь, показывающая, какая часть падающей энергии превращается внутри тела M в тепло.

С другой стороны, известная часть всего излучения, испускаемого M, пройдет наружу через вышеупомянутые два элемента ω и ω'. Мы разложим это излучение на лучи различной длины волны и остановим наше внимание на тех длинах волн, которые лежат в пределах от λ до $\lambda + d\lambda$, бесконечно близких друг к другу. Далее, мы разложим электрические колебания этих лучей на составляющую вдоль прямой h, о которой я только что говорил, и на вторую составляющую, перпендикулярную как к ней, так и к направлению самого луча. Легко показать, что количество энергии, испускаемое телом в единицу времени через два элемента поверхности, — поскольку оно относится к вышеуказанному интервалу длин волн и к колебаниям, происходящим в направлении h, — пропорционально ω, ω', $d\lambda$ и обратно пропорционально квадрату r. Его можно поэтому представить выражением

$$\frac{E\omega\omega'\,d\lambda}{r^2}. \tag{121}$$

Коэффициент E называется *испускательной способностью* тела M. Это есть величина, зависящая от природы тела M, от его положения по отношению к прямой r, длины волны λ, температуры T и направления h, которое мы выбрали для колебаний.

Исходя из термодинамического принципа, что в системе тел, имеющих одну и ту же температуру, взаимные излучения не нарушают равновесия, и пользуясь рассуждением, которое я здесь повторять не буду, Кирхгоф[1]) находит, что отношение

$$\frac{E}{A}$$

---

[1]) G. Kirchhoff, Über das Verhältnis zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme und Licht, Ann. Phys. Chem. **109** (1860), стр. 275.

испускательной и поглощательной способностей тела не зависит ни от направления, которое мы выбрали для h, ни от положения и особенностей тела M. Оно не изменится, если тело M переменит свое положение или если мы его заменим совершенно другим телом той же температуры. Отношение между испускательной и поглощательной способностями есть функция только температуры и длины волны.

52. Я укажу вам теперь два других толкования этой функции. Во-первых, следуя Кирхгофу, мы можем представить себе *абсолютно черное* тело, или, как мы будем говорить, просто *черное* тело, т. е. такое, которое способно задерживать внутри себя всю падающую на него энергию. Коэффициент поглощения такого тела равен поэтому 1; если обозначить его испускательную способность через E_b, причем символы A и E относятся к любому другому телу, получим:

$$\frac{E}{A}=E_b. \tag{122}$$

Мы можем отметить попутно, что по закону Кирхгофа все черные тела, какова бы ни была их природа, обладают одной и той же испускательной способностью.

Уравнение (122) выражает первое из тех двух толкований функции $\frac{E}{A}$, о которых я упоминал. Нам станет ясным другое толкование, если мы обратим наше внимание на состояние, которое существует в эфире по соседству с излучающими телами.

Рассмотрим некоторый объем, свободный от всякой весомой материи и окруженный со всех сторон абсолютно черной оболочкой, которая поддерживается при определенной температуре T. Эфир внутри этого объема во всех направлениях пронизывается тепловыми лучами. Пусть ω будет элементарная площадка, расположенная в некоторой точке P объема и ориентированная как угодно. Рассмотрим количество энергии, которое проходит через этот элемент в единицу времени в направлении нормали n к элементу, или, вернее, в направлениях, лежащих внутри бесконечно малого конуса с телесным углом ε, причем ось конуса совпадает с нормалью n. Мы всегда будем говорить только о длинах волн, лежащих между λ и $\lambda + d\lambda$, и об электрических колебаниях, происходящих в определенном направлении h. Последнее означает, что все колебания лучей, лежащих внутри конуса, разлагаются на составляющие по прямым h и k, перпендикулярным как друг к другу, так и к оси конуса, и что мы будем рассматривать только те составляющие, которые соответствуют первому из этих направлений.

Пусть P' будет точка нормали n, лежащая на расстоянии r от точки P, и пусть в P' помещен нормально к r элемент поверхности, величина которого дается выражением

$$\omega' = r^2\varepsilon. \tag{123}$$

Ясно, что вместо того, чтобы говорить о лучах, направление которых лежит внутри конуса ε, мы можем с таким же правом говорить о лучах, распространяющихся через элементы ω и ω'.

Таким образом величина, которую мы хотим определить, есть поток энергии через две малые площадки, исходящий из части оболочки позади ω. В силу формулы (121) он дается выражением

$$\frac{E_b \omega\omega' \, d\lambda}{r^2},$$

которое мы можем, по формуле (123), заменить следующим:

$$E_b \omega\varepsilon \, d\lambda. \tag{124}$$

Теперь уже нам не нужно больше рассматривать элемент ω'; нам надлежит думать только об элементе ω и конусе ε.

Самое замечательное в нашем результате — это то, что он совершенно не зависит от положения точки P, направления элемента ω и направлений h и k, на которые мы разложили колебания. Поле излучения внутри эфира поистине изотропно, т. е. колебания распространяются во все стороны совершенно одинаково и электрические колебания происходят с одинаковой интенсивностью во всех возможных направлениях.

Вычислим теперь количество энергии в единице объема этого поля излучения. Для пучка лучей определенного направления количество энергии, переносимое в единицу времени через площадку ω, нормальную к лучам, равно тому количеству энергии, которое в тот же самый момент времени заключено в цилиндре, образующая которого параллельна лучам и основание которого есть ω, а высота равна скорости света c; это количество энергии равно энергии единицы объема, взятой $c\omega$ раз. Отсюда энергию единицы объема, относящуюся к лучам, для которых имеет место уравнение (124), можно найти, разделив это выражение на $c\omega$; получаем:

$$\frac{E_b}{c} \varepsilon \, d\lambda.$$

Мы должны помнить, что все время рассматривали только те лучи, направления которых лежат внутри конуса ε, и только такие составляющие их колебаний, которые имеют направление h. Если мы хотим включить в наше рассмотрение все лучи, каково бы ни было их собственное направление и направление их колебаний, мы должны произвести следующие два изменения. Во-первых, мы должны это выражение умножить на 2, так как колебания направления k имеют ту же интенсивность, что и те колебания, которые мы только что рассматривали; во-вторых, мы должны ε заменить через 4π, так как лучи, направления которых лежат внутри всевозможных конусов с равными телесными углами, обладают одинаковой энергией. В конце концов получаем для количества энергии, имеющегося в единице объема нашего поля излучения, или для «плотности» энергии (поскольку она относится к лучам длины волны, лежащей в пределах λ и $\lambda + d\lambda$), следующее выражение:

$$\frac{8\pi}{c} E_b \, d\lambda.$$

Напишем это в таком виде:

$$F(\lambda, T) \, d\lambda;$$

тогда, если мы примем во внимание также соотношение (122), получаем:

$$F(\lambda, T) = \frac{8\pi}{c} E_b = \frac{8\pi}{c} \frac{E}{A}. \tag{125}$$

Это уравнение, которое дает связь между $\frac{E}{A}$ и плотностью энергии, раскрывает нам смысл того второго толкования, которое может быть придано выражению $\frac{E}{A}$.

53. Можно сказать еще несколько слов относительно состояния излучения, характеризуемого функцией $F(\lambda, T)$. Для такого состояния вовсе не необходимо, чтобы стенки оболочки были абсолютно черными. С таким же правом можно предположить, что они с внутренней стороны являются абсолютно отражающими и что источник излучения помещен где-то между ними. И он тоже может не быть абсолютно черным. Какова бы ни была природа тела, если только оно будет поддерживаться при раз навсегда выбранной температуре T, оно всегда может быть в равновесии с состоянием излучения, при котором каждый элемент объема содержит именно такое количество энергии, для которого мы только что вывели выражение (125). Мы можем добавить, что оно не только будет в равновесии с этим состоянием, но само будет его вызывать, при единственном условии, что тело обладает хоть какою-нибудь испускательной способностью, — как бы мала она ни была, — для всех лучей, длины волн которых входят в излучение черного тела при той же температуре. Если это условие выполнено, излучение в эфире не будет зависеть от природы вещества, которое это излучение вызывает, — оно будет функцией одной только температуры.

54. Уже Кирхгоф обратил особое внимание на важное значение функции $F(\lambda, T)$, которая должна быть независимой от специфических особенностей тела. И действительно, задача определения этой функции представляет в современной теоретической физике выдающийся интерес.

Больцман [1]) и Вин [2]) подошли к решению этого вопроса настолько, насколько это можно сделать, основываясь на одних только принципах термодинамики в сочетании с самыми общими результатами электромагнитной теории и оставляя в стороне всякие теоретические представления о природе излучающей и поглощающей материи.

Закон Больцмана говорит, каким образом приходящаяся на единицу объема полная энергия излучения, о которой мы говорили, — я имею в виду энергию для лучей всех длин волн, вместе взятых, — каким образом эта энергия зависит от температуры. Она пропорциональна четвертой степени *абсолютной* температуры; этот результат был, как эмпирическое правило, установлен уже Стефаном.

В своем доказательстве Больцман опирается на факт, что давление излучения равно той величине, которую мы вычислили ранее.

Рассмотрим замкнутую оболочку, абсолютно отражающую внутри и содержащую тело *M*, которое тем или иным способом получает или отдает тепло. Остальная часть объема содержит только эфир; предполагается, что стенки подвижны, так что заключенный в оболочке объем можно подвергать изменению.

Система, которую мы получили таким путем, во многих отношениях напоминает газ, заключенный в сосуде переменной емкости. Она является носителем определенной энергии; подобно газу, она производит давление на стенки; только в этом случае мы имеем дело не со столкновениями движущихся молекул, а с давлением излучения. Если стенки раздвигаются, система затрачивает на это движение некоторую работу. Если температура должна при этом оставаться постоянной, необходим приток тепла; температура понижается при расширении, если процесс

---

[1]) L. Boltzmann, Ableitung des Stefan'schen Gesetzes, betreffend die Abhängigkeit der Wärmestrahlung von der Temperatur aus der elektromagnetischen Lichttheorie, Ann. Phys. Chem. 22 (1884), стр. 291.

[2]) W. Wien, Eine neue Beziehung der Strahlung schwarzer Körper zum zweiten Hauptsatz des Wärmetheorie, Berlin. Sitzungsber. 1893, стр. 55.

адиабатен. Вы легко можете видеть, что можно заставить систему проделать цикл процессов, два из которых являются изотермическими, а два — адиабатными; к ним можно приложить хорошо известный закон Карно.

Я не буду придумывать такого цикла, но произведу небольшое вычисление, которое приведет нас к тому же результату. Во всех случаях, когда состояние системы определяется температурой T и объемом v и когда единственная сила, вызываемая системой, есть нормальное давление p, равномерно распределенное по поверхности, существует простое термодинамическое соотношение, при помощи которого мы можем кое-что узнать о внутренней энергии ε. Если мы возьмем за независимые переменные v и T, уравнение принимает вид

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} = T\,\frac{\partial p}{\partial T} - p. \tag{126}$$

Его можно применить к нашей оболочке, заполненной лучами, так же, как к газу; в некотором отношении случай излучения является даже более простым. Причина этого заключается в том, что плотность энергии зависит только от температуры, так что при изотермическом расширении новая часть, которая добавляется к объему, немедленно заполняется количеством энергии, пропорциональным этому объему. Энергия, содержащаяся в объеме, который уже был занят излучением, остается без изменения; то же самое можно сказать и про энергию, содержащуюся внутри тела M. Чтобы убедиться в этом, мы должны иметь в виду, что, согласно § 21, давление равно одной трети электромагнитной энергии на единицу объема, так что на тело все время действует одно и то же давление, и так как температура тоже остается постоянной, тело вообще не претерпевает никаких изменений.

Обозначим через K электромагнитную энергию на единицу объема; эту энергию можно представить следующим образом (так как мы должны брать энергию для всех длин волн):

$$K = \int\limits_0^\infty F(\lambda,\ T)\, d\lambda.$$

Тогда мы будем иметь

$$p = \frac{1}{3} K$$

и

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} = K,$$

так как, если объем увеличивается на dv, энергия увеличивается на $K dv$. Подставляя в формулу (126), получаем:

$$K = \frac{1}{3} T \frac{dK}{dT} - \frac{1}{3} K,$$

$$4K = T \frac{dK}{dT},$$

$$\frac{dK}{K} = 4 \frac{dT}{T},$$

откуда интегрированием получаем:

$$K = CT^4,$$

где C есть некоторая постоянная. Полная энергия единицы объема, или, как мы можем сказать на основании (125), полная испускательная способность черного тела, должна быть пропорциональна четвертой степени температуры.

55. Переходя теперь к закону Вина, я прежде всего покажу, в каком виде он может быть представлен, если мы будем пользоваться законом Больцмана. Вину не удалось определить вид функции $F(\lambda, T)$; этого действительно нельзя сделать при помощи одних только термодинамических рассуждений и электромагнитных принципов; но он показал нам, каким образом, если вид функции известен для какой-нибудь одной температуры, его можно отсюда определить для всякой другой температуры.

Это можно выразить следующим образом. Если T и T' суть две различные температуры, λ и λ' — две длины волны, такие, что

$$\lambda : \lambda' = T' : T, \tag{127}$$

мы получим

$$F(\lambda, T) : F(\lambda', T') = \lambda'^5 : \lambda^5. \tag{128}$$

Если мы представим этот результат в виде

$$F(\lambda', T') = \frac{T'^5}{T^5} F\left(\frac{T'}{T}\lambda', T\right),$$

мы увидим, что действительно $F(\lambda', T')$ может быть определена для всех значений λ', если мы знаем $F(\lambda, T)$ для всех значений λ.

Из (127) и (128) можно также вывести, что если, меняя λ и T, мы будем оставлять произведение λT постоянным, функция $\lambda^5 F(\lambda, T)$ тоже должна оставаться неизменной. Поэтому это последнее выражение должно быть какой-то функцией $f(\lambda T)$ от произведения длины волны и температуры, так что наша первоначальная функция должна иметь вид

$$F(\lambda, T) = \frac{1}{\lambda^5} f(\lambda T). \tag{129}$$

Соотношение между видами функции $F(\lambda, T)$ для различных температур выводится чрезвычайно изящно. Если для определенной температуры T мы изобразим значения $F(\lambda, T)$ графически, откладывая по оси абсцисс λ, а по оси ординат F, мы получим некоторую кривую, которую можно считать кривой распределения энергии в спектре черного тела температуры T. Из нее мы можем получить соответствующую кривую для температуры T', изменяя все абсциссы в отношении T' к T, а ординаты — в отношении T^5 к T'^5.

Вид этой кривой был определен с достаточной степенью точности измерениями Луммера и Прингсгейма [1]). Представление о ней можно получить по рис. 2. На этой кривой видно, что, как и следовало ожидать, интенсивность мала для очень длинных и для очень коротких волн, достигая максимума для определенной длины волны, которая на рисунке изображается отрезком OA и которую мы назовем λ_m. Пусть теперь кривая будет претерпевать

---

[1]) O. Lummer u. E. Pringsheim, Die Strahlung eines schwarzen Körpers zwischen 100 und 1300° C, Ann. Phys. Chem. **63** (1897), стр. 395; Die Verteilung der Energie im Spektrum des schwarzen Körpers, Verh. d. deutschen phys. Ges. **1** (1899), стр. 23.

изменения того вида, о котором я только что говорил; тогда этот максимум будет сдвинут направо, если T' меньше, чем T, и налево в противоположном случае, так как значение λ_m согласно (127) обратно пропорционально температуре. По этой причине закон Вина часто называют законом смещения (Verschiebungsgesetz).

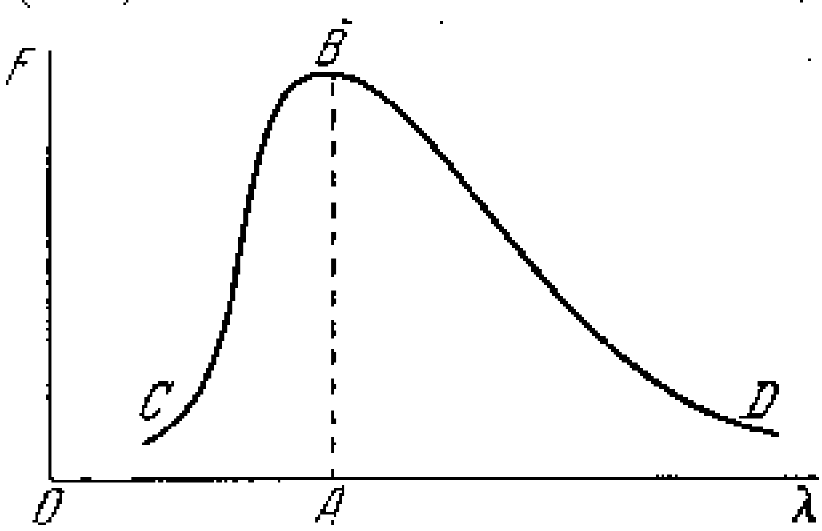

Рис. 2.

Этой кривой можно также воспользоваться, чтобы показать, что закон Больцмана включен в формулы (127) и (128). Значение K дается полной площадью, заключенной между кривой и осью абсцисс, и эта площадь изменяется в отношении T^4 к T'^4, когда абсциссы и ординаты изменяются так, как это было указано выше.

56. Подробное рассмотрение теоретических выводов, при помощи которых Вин пришел к своему закону, отняло бы у нас слишком много времени. Так же как и в рассуждениях Больцмана, мы можем и здесь отличать две части, одна из которых основывается на уравнениях электромагнитного поля, а другая имеет чисто термодинамический характер.

Мы видели выше, что для каждой температуры T имеется некоторое вполне определенное состояние излучения в эфире, которое обладает свойством быть в равновесии с весомыми телами температуры T. Для краткости я буду называть это состояние *естественным состоянием* излучения для температуры T. Оно характеризуется определенным количеством энергии в единице объема K, пропорциональным T^4. Этим количеством можно поэтому пользоваться вместо самого T для определения состояния эфира. Когда мы впредь будем говорить о естественном состоянии излучения с плотностью энергии K, мы будем в точности знать, что эти слова означают.

Полная энергия распределена в этом естественном состоянии по различным длинам волн определенным образом;

это распределение выражается функцией $F(\lambda, T)$. Мы можем, конечно, представить себе другие состояния с той же плотностью энергии K, но с иным распределением энергии по длинам волн, чем в естественном состоянии; так, например, энергия длинных волн может быть несколько меньше, а энергия коротких волн несколько больше, чем это имело бы место в естественном состоянии.

Вин рассматривает случай замкнутой оболочки, абсолютно отражающей внутри и содержащей только эфир. Он предполагает, что этот эфир является носителем естественного состояния излучения A, с плотностью энергии K. Это излучение могло быть образовано телом температуры T, временно помещенным внутри оболочки и затем каким-нибудь образом оттуда удаленным. Конечно, такая операция потребовала бы сверхчеловеческой экспериментальной ловкости и исключительной быстроты, но мы все же можем предположить, что она была проведена успешно. Если мы затем предоставим сосуд самому себе, излучение, заключенное в нем, будет существовать вечно, так как лучи будут все вновь и вновь отражаться от стенок, без изменения длины волны и интенсивности.

Теперь Вин производит мысленный эксперимент, который может изменить положение вещей. Этот эксперимент заключается в том, что стенки приводятся в слабое движение, в результате которого внутренний объем увеличивается или уменьшается. Мы уже видели (§ 46), что отодвигание зеркала, на которое нормально падает пучок лучей, сказывается на отраженных лучах двояким образом: понижается их частота, так что длина волны увеличивается, и уменьшается амплитуда. То же самое будет иметь место, хотя и в меньшей степени, если лучи падают не нормально, но под углом; легко вычислить эффект и в этом случае.

Чтобы остановиться на каком-нибудь определенном случае, предположим, что стенки нашего сосуда раздвигаются. Тогда, при каждом отражении луча света, уменьшается его амплитуда и увеличивается длина волны, так что по истечении некоторого промежутка времени мы получим новое состояние излучения B, отличающееся от первоначального энергией в единице объема и распределением энергии по длинам волн. Значение плотности энергии будет некоторое K', — меньшее, чем первоначальное значение K, — и распределение по длинам волн будет несколько изменено в пользу более длинных волн.

Конечно, K' может принимать различные значения, так как расширение, при помощи которого получено новое состояние, может быть разной величины. Так как, однако, изменение амплитуд тесно связано с соответствующим изменением длины волны, ясно, что распределение энергии по длинам волн должно быть совершенно определенным, если известно K', так что Вин мог его вычислить. Его результат может быть выражен следующим образом[1]. Если

$$\varphi(\lambda)\, d\lambda \tag{130}$$

есть та часть первоначальной энергии единицы объема, которая принадлежит лучам с длинами волн между λ и $\lambda + d\lambda$, то количество энергии, соответствующее тому же самому интервалу в новом состоянии B, дается выражением

$$\sqrt[4]{\left(\frac{K'}{K}\right)^5} \cdot \varphi\left(\sqrt[4]{\frac{K'}{K}} \cdot \lambda\right) d\lambda. \tag{131}$$

57. Я думаю, что мне удалось дать вам достаточно ясную картину одной части доказательства закона Вина. Что касается второй части, термодинамической, ее целью является показать, что новое состояние B, которому соответствует плотность энергии K', не может отличаться от *естественного* состояния излучения с тем же самым K', что оно само должно быть поэтому естественным состоянием. Если бы это было не так, мы могли бы поместить наш сосуд с состоянием B рядом с другим сосудом, содержащим излучение, в естественном состоянии A' с той же самой плотностью K', причем оба состояния вначале должны быть разделены друг от друга стенками обоих сосудов. Затем мы могли бы проделать в этих стенках отверстие и немедленно его закрыть очень тонкой пластинкой какого-

---

[1]) Примечание **30**.

нибудь прозрачного вещества. Такая пластинка пропустит часть падающих на нее лучей, причем, в силу общеизвестных явлений интерференции, коэффициент пропускания для лучей различной длины волны будет различен. Допустим, что он будет для длинных волн несколько больше, чем для коротких; допустим также, что в состоянии B по сравнению с состоянием A' имеется больше длинных волн и меньше коротких. Тогда легко видеть, что в первые моменты после того, как установлено сообщение между обоими сосудами, от B к A' перейдет больше энергии, чем в обратном направлении, так что количества энергии в обоих состояниях уже не будут равны друг другу. Можно показать, что это противоречит второму закону термодинамики.

Мы должны поэтому заключить, что при помощи выражения (131) можно вычислить распределение энергии в *естественном* состоянии, характеризуемом K', если из (130) известно распределение для естественного состояния, характеризуемого K. Так как оба состояния естественны, мы получим, если соответствующие им температуры обозначим через T и T', выражение

$$K : K' = T^4 : T'^4.$$

Поэтому (131) преобразуется в

$$\frac{T'^5}{T^5}\varphi\left(\frac{T'}{T}\lambda\right)d\lambda,$$

что и приводит к закону Вина в той форме, в которой я его вам дал выше.

58. Хотя Больцман и Вин добились крупных успехов в определении функции $F(\lambda, T)$, точная форма кривой рис. 2 все еще остается неизвестной, и так как средства термодинамики уже исчерпаны, мы можем надеяться достигнуть результата только в том случае, если нам удастся составить себе некоторое правильное мысленное представление о тех процессах, которые проявляются в явлениях излучения и поглощения.

Важное значение этой задачи будет понятно из следующих соображений. Для определения кривой рис. 2

необходимо по меньшей мере две постоянных. Если через λ_m обозначить абсциссу OA, которой соответствует максимальная ордината, по закону Вина получаем:

$$\lambda_m = \frac{a}{T},$$

и если, как и прежде, K обозначает полную площадь, заключенную между кривой и осью абсцисс, будем иметь:

$$K = bT^4.$$

Первая из этих постоянных (a) определяет, для данной температуры T, положение точки A, а вторая (b) относится к значениям ординат, так как, чем они больше, тем больше будет и площадь K. Так вот, если состояние излучения вызывается весомым телом, значения этих постоянных должны определяться чем-то связанным с самим строением этого тела, и эти величины могут иметь то общее значение, о котором мы говорили, только в том случае, если что-то общее есть у всех весомых тел. Если мы хотим вполне разобраться в форме и размерах кривой, мы должны открыть эти общие черты в строении всей весомой материи.

59. Я буду говорить о трех теориях, при помощи которых задача была решена по крайней мере частично, и начну с той, которая идет дальше всего. Она была разработана Планком[1]) и приводит к определенной формуле для функции $F(\lambda, T)$ в (129), а именно:

$$F(\lambda, T) = \frac{8\pi ch}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\frac{ch}{k\lambda T}} - 1}, \tag{132}$$

где ε есть основание натуральных логарифмов, а h и k являются двумя универсальными физическими константами.

Теория Планка основана на предположении, что в каждом весомом теле содержится громадное число электромаг-

[1]) M. Planck, Über irreversible Strahlungsvorgänge, Ann. Phys. 1 (1900), стр. 69; Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum, Ann. Phys. 4 (1901), стр. 553; Über die Elementarquanta der Materie und der Elektrizität, там же, стр 564. См. также его книгу: Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung, Leipzig, 1906.

нитных вибраторов, или, как он их называет, «резонаторов», каждый из которых обладает собственным периодом. Если какое-нибудь тело заключено в абсолютно отражающую оболочку, о которой мы так часто говорили, то будет существовать некоторое состояние равновесия, с одной стороны, между резонаторами и излучением в эфире, а с другой стороны, между резонаторами и обыкновенным тепловым движением молекул и атомов, из которых состоит весомая материя. Первое из этих состояний равновесия можно рассмотреть при помощи электромагнитных уравнений; чтобы понять второе, можно попытаться набросать картину обмена энергии между резонаторами и обыкновенными частичками. Планк, впрочем, не следовал этому пути, который привел бы нас к весьма серьезным трудностям; он пришел к своей формуле путем рассуждений совершенно другого рода.

В одной из своих статей он выводит эту формулу, рассматривая, какое распределение энергии между двумя родами частичек — молекулами и резонаторами — следует считать наиболее вероятным. Конечно, нужно точно установить смысл полученного им выражения, прежде чем класть его в основу теории. Я должен воздержаться от объяснения того смысла, который ему придавал Планк. Есть, впрочем, в его теории один пункт, на котором я должен на короткое время остановиться. Планк принужден допустить, что поглощение и отдача энергии резонаторами происходит не плавно, бесконечно малыми количествами, а, наоборот, некоторыми порциями определенной конечной величины. Для резонаторов различной частоты принимаются порции различной величины. Величина порций энергии, которые мы должны мысленно представлять себе, когда говорим о резонаторе частоты n, определяется выражением

$$\frac{hn}{2\pi}.$$

Таким именно путем вводится в уравнения постоянная h.

Что касается постоянной k, она имеет весьма простое физическое значение. По кинетической теории газов средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы одинакова для всех газов, взятых при одной температуре. Эта средняя энергия пропорциональна T, и если мы ее выразим через $\frac{3}{2}kT$, величина k будет как раз той постоянной, которая появляется в формуле (132).

Закон Планка находится в прекрасном согласии с экспериментальными результатами Луммера и Прингсгейма, а это очень важно, так как благодаря этому мы получаем возможность вывести из измерений излучения среднюю кинетическую энергию молекулы, которая в свою очередь приводит нас к величине массы атомов в абсолютной мере. Так как числа, полученные таким путем [1]), оказываются того же порядка величины, как полученные другими способами, ясно, что в этой теории, несомненно, заключается значительная доля истины. Конечно, она ни в какой мере не послужила для того, чтобы раскрыть механизм явлений; следует также признать, что весьма трудно найти оправдание для такого представления о распределении энергии порциями конечной величины, которые даже не равны друг другу, но меняются от резонатора к резонатору [2]) [18].

60. Я остановлюсь несколько дольше на второй теории [3]), так как она является применением теории электронов и потому непосредственно относится к моему предмету. До известной степени, по моему мнению, ее можно считать удовлетворительной, но она обладает одним большим недостатком — тем, что ограничивается областью длинных волн. Прошу разрешить мне рассказать вам в качестве введения, путем каких рассуждений я пришел к этой теории.

Известно, что оптические свойства весомых тел, вообще говоря, нельзя вывести из их электрических свойств количественно с достаточной точностью. Правда, например,

---

[1]) Примечание **31**.

[2]) После того как это было написано, «квантовая» теория Планка получила широкое развитие. Она теперь занимает выдающееся место во многих отделах теоретической физики (1915).

[3]) Lorentz, On the emission and absorption by metals of rays of heat of great wave-lengths, Amsterdam Proc., 1902—1903, стр. 666.

теоретическое указание Максвелла (оно имеется уже в его «Трактате»), что хорошие проводники электричества должны быть непрозрачными для света, подтверждается тем фактом, что металлы пропускают свет весьма мало; но если мы сравним оптические константы какого-нибудь металла — одной из таких констант является коэффициент поглощения металла — с формулами электромагнитной теории света и если при этом для проводимости примем обычные значения, которые получаются при измерениях с электрическим током, мы получим весьма большое несогласие. Как это несогласие, так и расхождение между показателем преломления диэлектриков и корнем квадратным из их диэлектрической постоянной показывают, что для весьма быстрых световых колебаний начинают играть роль такие обстоятельства, которые не оказывают влияния в наших опытах с постоянными токами или переменными токами малой частоты.

Если эта мысль правильна, то можно надеяться, что совпадение будет лучше, если рассматривать эти «оптические» свойства, как мы попрежнему будем их называть, не для световых лучей, а для инфракрасных лучей наибольших известных нам длин волн.

И вот классические измерения поглощения, произведенные Гагеном и Рубенсом [1]), блестяще подтвердили это предположение. Эти физики показали, что поглощение лучей длины волны между 8 и 25 микронами можно вычислить со значительной степенью точности из данных об их проводимости [2]). Отсюда мы можем сделать такое заключение: для того чтобы получить теорию поглощения в случае этих длинных волн, нужно только понять природу обыкновенного тока проводимости. Мало того, если таким путем нам удастся составить себе картину поглощения, мы получим при этом также возможность заглянуть глубже внутрь того механизма, посредством которого происходит испускание металлом лучей. Действительно, универсальность закона Кирхгофа ясно показывает, что те причины, которые

---

[1]) E. Hagen u. H. Rubens, Über Beziehungen des Reflexions und Emissionsvermögens der Metalle zu ihrem elektrischen Leitvermögen, Ann. Phys. **11** (1903), стр. 873.

[2]) Примечание **32**.

вызывают поглощение тепла, и те, которые вызывают его излучение, должны находиться в тесной связи друг с другом. Поэтому, раз мы составим себе правильное представление об обыкновенном токе проводимости, то можно надеяться, что нам удастся объяснить поглощение и испускательную способность металла и вычислить отношение между этими величинами, т. е. нашу универсальную функцию $F(\lambda, T)$. Впрочем, мы можем надеяться на успех только в том случае, если ограничимся длинными волнами.

Но мы уже видели, что весьма удовлетворительное представление о природе тока проводимости было разработано Друде. Мы должны поэтому постараться получить такую теорию поглощения и излучения металлов, которая основывается на установленных им общих принципах и в которой просто предполагается, что металл содержит весьма большое число свободных электронов, движущихся с такими скоростями, что их средняя кинетическая энергия равна αT.

61. При этом мы, насколько возможно, упростим все условия задачи. Мы будем рассматривать металлическую пластинку, толщина которой Δ весьма мала, так что можно принять поглощение пропорциональным этой толщине и пренебрегать при исследовании испускания тем поглощением, которое лучи, исходящие из задней части пластинки, испытывают, проходя через слой, лежащий на ее передней стороне. Мы ограничимся также лучами, направление которых нормально к пластинке или образует с нормалью бесконечно малый угол. Эти предположения значительно упростят наши вычисления, не умаляя общности окончательного результата. Если закон Кирхгофа справедлив, то значение, которое мы получим для отношения поглощательной и испускательной способностей, должно иметь место для всех тел и для всех направлений лучей.

Вычисление поглощения производится весьма простым способом. На основании обычных формул электромагнитного поля находим для коэффициента поглощения [1])

$$A = \frac{\sigma}{c}\Delta,$$

[1]) Примечание 33.

и здесь нам остается только подставить значение σ из теории Друде. Пользуясь формулой (119), находим:

$$A=\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\cdot\frac{e^2lNu}{\alpha cT}\Delta. \qquad (133)$$

62. Возникает вопрос, каким образом кусок металла, в котором свободные электроны движутся во всевозможных направлениях, может быть источником излучения. Ответ заключается в выводах одной из предыдущих лекций. Мы знаем, что электрон может стать центром испускания энергии только в том случае, когда изменяется его скорость. Причину излучения следует искать поэтому в столкновениях электрона с атомами металла, причем электрон отскакивает в новом направлении; таким образом испускание тепловых лучей в рассматриваемом нами случае весьма напоминает возникновение лучей Рентгена, как его объясняют теории Вихерта и Дж. Дж. Томсона.

Математические выкладки, необходимые для определения эффектов столкновений электронов с атомами, довольно сложны, в особенности потому, что мы должны разлагать полное излучение на отдельные части, соответствующие различным длинам волн. Я дам поэтому только общее понятие о ходе вычислений.

Я должен заметить с самого начала, что разложение, о котором я только что говорил, должно быть произведено на основании теоремы Фурье и что продолжительность столкновения следует считать бесконечно малой по сравнению с периодом колебания рассматриваемых лучей. То же самое допущение мы сделаем также по отношению ко всему промежутку времени между двумя последовательными ударами электрона. Правильность этого допущения подтверждена опытами Гагена и Рубенса. Легко видеть, что проводимость металла может быть выражена формулой (119) только в том случае, если электрическая сила действует на тело или непрерывно, или по крайней мере в течение такого промежутка времени, за который электрон может испытать весьма большое число столкновений. Поэтому результат, полученный Гагеном и Рубенсом, а именно, что поглощение соответствует величине прово-