Две статьи Анри Пуанкаре о математической физике

Следующие страницы не могут дать хоть сколько-нибудь полного представления о том, чем теоретическая физика обязана Пуанкаре. Я был бы счастлив начертать такую общую картину и тем почтить его память, но я отступил перед подобной задачей, которую нельзя хорошо выполнить без длительных и серьезных исследований, — для этого времени мне не хватило. Поэтому я ограничился лишь двумя статьями: работой о динамике электрона, написанной в 1905 г. и опубликованной в следующем году в «Rendiconti del Circolo matematico di Palermo», и исследованием о теории квантов, появившемся в «Journal de physique» в начале 1912 г.

Чтобы правильно оценили первую из этих работ, мне придется осветить некоторые детали тех идей, развитие которых привело к принципу относительности. Поскольку приходится касаться и моего собственного участия в развитии этих идей, я должен прежде всего сказать, что меня весьма ободрил благосклонный интерес, который неизменно проявлял Пуанкаре к моим исследованиям. Впрочем, вскоре будет видно, насколько он меня превзошел.

Известно, что Френель объяснял астрономическую аберрацию гипотезой неподвижного эфира, через который небесные тела проходят, не увлекая его. Известна также его знаменитая теорема, неизбежно вытекающая из этой фундаментальной гипотезы, о частичном увлечении световых волн движущейся материей. Поступательно движущееся прозрачное тело сообщает световым лучам лишь долю собственной скорости, определяемую «коэффициентом Френеля» $1 - 1/n^2$, где n — коэффициент преломления среды.

Когда благодаря работам Клерка Максвелла глубоко изменились наши взгляды на природу света, стало естественным попытаться вывести этот коэффициент из принципов электромагнитной теории. Я поставил себе эту цель, которой удалось достигнуть без особых трудностей в теории электронов.

Большинство явлений, связанных с аберрацией, и в особенности отсутствие влияния движения Земли во всех экспериментах, в которых вся совокупность приборов покоится относительно нашей планеты, объяснялись теперь удовлетворительным образом. Однако надо было оговориться, что рассматриваемые эффекты должны быть первого порядка величины относительно частного отделения скорости Земли на скорость света, ибо члены второго порядка в расчетах не учитывались.

Но в 1881 г. Майкельсону удалось добиться интерференции двух световых лучей, исходящих из одной точки и возвращающихся к ней после прохождения прямолинейных взаимно перпендикулярных путей одинаковой длины. Он нашел, что наблюдаемые явления опять нечувствительны к движению Земли; интерференционные полосы сохраняли свое положение, независимо от направлений плеч прибора.

На этот раз речь шла об эффекте второго порядка и было легко видеть, что гипотеза неподвижного эфира не может одна объяснить отрицательный результат. Я был вынужден допустить новую гипотезу, равносильную тому, что движение тела сквозь эфир вызывает небольшое сокращение тела в направлении движения. Это была единственно возможная гипотеза; она была придумана также Фицджеральдом и получила одобрение Пуанкаре, хотя последний и не скрывал, что теории, в которых придумывают все новые гипотезы специально для частных явлений, мало его удовлетворяют. Эта критика послужила для меня дополнительным доводом для создания общей теории, самые принципы которой приводили бы к объяснению эксперимента Майкельсона и всех дальнейших экспериментов, которые можно было бы сделать для выявления эффектов второго порядка. В теории, которую я искал, отсутствие явлений, обязанных движению всей системы, должно было быть доказано для любой скорости системы, меньшей скорости света.

Было ясно, какой методики следует придерживаться. Очевидно, надо было показать, что явления, имеющие место в материальной системе, могут быть описаны уравнениями одинаковой формы, независимо от того, находится ли система в покое или движется равномерно-поступательно; эта одинаковость формы должна быть достигнута надлежащей подстановкой новых переменных. Речь шла о нахождении формул преобразования, подходящих как для независимых переменных (координаты x, y, z и время t), так и для различных физических величин (скорости, силы и т. д.), и доказательства инвариантности уравнений относительно этих преобразований.

Формулы, которые я тогда установил для координат и времени, могут быть записаны в виде [1]

$$\begin{aligned} &x' = kl\,(x + \varepsilon t), \quad y' = ly, \quad z' = lz, \\ &t' = kl\,(t + \varepsilon x), \end{aligned} \qquad (1)$$

где ε, k, l — постоянные, сводящиеся, однако, к одной. Сразу видно, что для начала новых координат ($x' = 0$) имеем

$$x = -\varepsilon t;$$

итак, эта точка перемещается в системе x, y, z, t, со скоростью ε в направлении оси x. Коэффициент k определяется равенством

$$k = (1 - \varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}},$$

где l — функция от ε, имеющая значение 1 при $\varepsilon = 0$. Вначале я ее не определил, но по ходу своих вычислений нашел, что для инвариантности, которую я преследовал, нужно положить $l = 1$.

Эти соображения, опубликованные мною в 1904 г., побудили Пуанкаре написать свою статью о динамике электрона, где он дал мое имя преобразованию, о котором я только что говорил. По этому поводу должен заметить, что это преобразование встречается уже в одной статье Фойгта, опубликованной в 1887 г., и что я не извлек из этого преобразования все возможное. В самом деле, для некоторых действительных величин, встречающихся в формулах, я не указал наиболее подходящего преобразования. Это было сделано Пуанкаре, а затем Эйнштейном и Минковским.

Чтобы найти «релятивистские преобразования», как я их теперь назову, достаточно в некоторых случаях

[1] Я здесь придерживаюсь обозначений Пуанкаре и выбираю единицы длины и времени так, чтобы скорость света равнялась 1.

описать явления в системе x', y', z', t' точно таким же образом, как это делается в системе x, y, z, t. Рассмотрим, например, движение точки. Если за время dt координаты x, y, z претерпевают изменения dx, dy, dz, имеем компоненты скорости

$$\xi = \frac{dx}{dt}, \quad \eta = \frac{dy}{dt}, \quad \xi = \frac{dz}{dt}.$$

Но в силу отношений (1) изменения dx, dy, dz влекут изменения

$$dx' = kl\,(dx + \varepsilon dt), \quad dy' = l dy, \quad dz' = \\ = l dz, \quad dt' = kl\,(dt + \varepsilon dx) \tag{2}$$

новых переменных. Естественно определить компоненты скорости в новой системе формулами

$$\xi' = \frac{dx'}{dt'}, \quad \eta' = \frac{dy'}{dt'}, \quad \zeta' = \frac{dz'}{dt'}, \tag{3}$$

что дает

$$\xi' = \frac{\xi + \varepsilon}{1 + \varepsilon\xi}, \quad \eta' = \frac{\eta}{k\,(1 + \varepsilon\xi)}, \quad \zeta' = \frac{\xi}{k\,(1 + \varepsilon\xi)}. \tag{4}$$

В качестве другого примера можно представить себе большое число движущихся точек, скорости которых являются непрерывными функциями координат и времени. Пусть $d\tau$ — элемент объема в точке x, y, z; обратим внимание на точки системы в этом элементе в определенный момент t. Пусть t'_0 — специальное значение t', соответствующее x, y, z, t в силу отношений (1), и рассмотрим для различных точек значения x', y', z', соответствующие этому определенному значению $t' = t'_0$; иначе говоря, рассмотрим положения точек в новой системе при одном и том же значении «времени» t'. Можно спросить, какова величина элемента τ' пространства x', y', z', в котором находятся в этот момент t'_0 выбранные точки, находящиеся в момент t в $d\tau$. Простое вычисление, которое можно здесь опустить, ведет к отношению

$$d\tau' = \frac{l^3}{k}\,\frac{1}{1 + \varepsilon\xi}\,d\tau. \tag{5}$$

Предположим, наконец, что точки, о которых идет речь, заряжены равными электрическими зарядами, и примем, что в обеих системах x, y, z, t и x', y', z', t' этим зарядам приписывают одинаковые числовые значения. Если точки достаточно близки друг от друга, получается непрерывное распределение электричества, и ясно, что заряд, содержащийся в элементе $d\tau$ в момент времени t, равен тому, который содержится в $d\tau'$ в момент t'. Следовательно, если ρ и ρ' — плотности этих зарядов, то

$$\rho d\tau = \rho' d\tau' \tag{6}$$

и, в силу (5),

$$\rho' = \frac{k}{e^3}(1 + \varepsilon\xi)\rho. \tag{7}$$

Из этой формулы, сочетая ее с (4), выводится

$$\rho'\xi' = \frac{k}{l^3}\rho(\xi + \varepsilon), \quad \rho'\eta' = \frac{1}{l^3}\rho\eta, \quad \rho'\zeta' = \frac{1}{l^3}\rho\zeta.$$

Это формулы преобразования для конвекционного тока.

Для других физических величин, как-то: электрические и магнитные силы — надо идти менее прямым путем; надо искать, может быть несколько ощупью, формулы преобразования, способные обеспечить инвариантность электромагнитных уравнений.

Формулы (4) и (7) не содержатся в моей статье 1904 г. Это потому, что я не подумал о прямом пути, ведущем к ним, так как я полагал, что между системами x, y, z, t и x', y', z', t' имеется существенная разница. В одной использованы — таков был ход моих рассуждений — оси координат, имеющие определенное положение в эфире, и то, что можно было назвать «истинное» время; в другой системе, наоборот, мы имеем дело просто со вспомогательными величинами, введенными лишь как математическое ухищрение. В частности, переменную t' нельзя было бы назвать «временем» в том же смысле, как переменную t.

При таком ходе идей я не думал описывать явления в системе x', y', z', t' *точно таким же образом*, как в системе x, y, z, t, и я не определил уравнениями (3) и (7) величины ξ', η', ζ', ρ', соответствующие ξ, η, ζ, ρ. Вероятнее всего, свои формулы преобразования я нашел ощупью; с помощью нынешних обозначений их можно выразить в виде

$$\xi' = k^2(\xi + \varepsilon), \quad \eta' = k\eta, \quad \zeta' = k\zeta, \quad \rho' = \frac{1}{kl^3}\rho.$$

Формулы преобразования я стремился выбрать так, чтобы получить в новой системе наиболее простые уравнения. Позже я увидел из статьи Пуанкаре, что, действуя более систематически, я мог бы достигнуть еще большего упрощения. Не заметив этого, я не смог достигнуть полной инвариантности уравнений; мои формулы оставались загроможденными лишними членами, которые должны были бы исчезнуть. Эти члены были слишком малы, чтобы оказать заметное влияние на явления, и этим я мог объяснить обнаруженную наблюдениями независимость их от движения Земли, но я не установил принципа относительности как строгую и универсальную истину.

Наоборот, Пуанкаре получил полную инвариантность уравнений электродинамики и сформулировал «постулат относительности» — термин, впервые введенный им. В самом деле, исходя из точки зрения, которую я упустил, он вывел формулы (4) и (7). Добавим, что, исправляя таким образом недостатки моей работы, он никогда в них меня не упрекнул.

Я не могу здесь привести все прекрасные результаты, полученные Пуанкаре. Все же подчеркнем некоторые из них. Прежде всего, он не ограничился показом того, что релятивистские преобразования оставляют неизменной форму электромагнитных уравнений. Он объясняет успех подстановок тем, что эти уравнения могут быть представлены в форме принципа наименьшего действия и что фундаментальное уравнение, выражающее этот принцип, а также операции, с помощью которых выводятся уравнения поля, одинаковы в системах x, y, z, t и x', y', z', t'.

Во-вторых, в соответствии с заглавием своей статьи Пуанкаре рассматривает, в частности, как происходит деформация движущегося электрона по сравнению с деформацией плеч прибора Майкельсона, требуемой постулатом относительности. По этому поводу предлагались две различные гипотезы. По обеим электрон, предполагаемый сферическим в состоянии покоя, становится при поступательном движении сплющенным эллипсоидом вращения, ось симметрии которого совпадает с направлением движения, а отношение этой оси к экваториальному диаметру равно $\sqrt{1-v^2}$, где v — скорость. Но гипотезы различаются между собою в том, что касается длины осей и, следовательно, объема. Тогда как я пришел к допущению, что экваториальный радиус остается равным радиусу первоначальной сферы, Бухерер и Ланжевен предпочли приписать постоянную величину объему. Первой гипотезе соответствует $l=1$, второй $kl^3=1$. Добавим сразу, что первое значение единственное, совместимое с постулатом относительности.

Чтобы дать себе отчет об устойчивости электрона и равновесии зарядов в нем, используя обычные понятия механики, недостаточно, очевидно, учитывать лишь электродинамические действия. Частица, которую здесь рассматривают как сферу, несущую поверхностный заряд, немедленно взорвалась бы из-за взаимного отталкивания или, что то же самое, из-за максвелловских напряжений на ее поверхности. Итак, следует ввести еще что-то, и Пуанкаре различает здесь «связи» и «дополнительные силы». Сначала он предполагает лишь связь, выраженную уравнением

$$r=b\theta^m,$$

где r — полуось электрона, $r\theta$ — экваториальный радиус, b и m — величины, остающиеся постоянными, когда r и θ (или одна из них) изменяются с поступательной скоростью v. Тогда для любого значения v будут известны размеры электрона, ибо известно, что $\theta=(1-v^2)^{-1/2}$ и можно вычислить, пользуясь обычными формулами электромагнитного поля, энергию, количество движения и функцию Лагранжа. Между этими величинами, рассматриваемыми как функции от v, должны иметь место хорошо известные соотношения. Пуанкаре доказывает, что они удовлетворяются лишь при $m=-2/3$, что приводит нас к постоянству объема, т. е. к гипотезе Бухерера и Ланжевена. Но мы уже знаем, что не эта гипотеза, а лишь гипотеза постоянного экваториального радиуса согласуется с постулатом относительности. Необходимо, таким образом, обратиться к «дополнительным силам». Предполагая, что они зависят от потенциала вида

$$Ar^{\alpha}\theta^{\beta},$$

где A, α и β — постоянные. Пуанкаре находит, что постоянство экваториального радиуса удовлетворяется при $\alpha=3$, $\beta=2$, т. е. что данный потенциал должен быть пропорциональным объему. Из этого следует, что искомые дополнительные силы эквивалентны нормальному давлению или напряжению, действующему на поверхность, величина которого на единицу поверхности остается постоянной, независимо от скорости поступательного движения. Сразу видно, что подходит лишь напряжение, направленное внутрь; его величину определяют из условия, что для покоящегося электрона, имеющего, следовательно, форму сферы, это напряжение должно уравновесить электростатическое отталкивание. Если затем привести частицу в движение, то напряжение Пуанкаре совместно с электромагнитным действием неизбежно вызовет сплющивание, требуемое принципом относительности.

Найдя «дополнительную силу», Пуанкаре показывает, что релятивистские преобразования оставляют неизменным вид членов, входящих в ее выражение; таким образом, он доказывает, что *любые* движения системы электронов могут происходить совершенно одинаковым способом в системе x, y, z, t и в системе x', y', z', t'.

Я уже говорил о необходимости положить $l=1$ (постоянство экваториального радиуса электрона). Я не буду повторять здесь доказательство, данное Пуанкаре, и скажу только, что он указал математическое происхождение этого условия. Можно рассматривать все преобразования, выраженные формулами (1), при различных значениях скорости ε и соответствующих значениях k и l (эти последние коэффициенты рассматриваются как функции от ε); можно сюда прибавить другие подобные преобразования, выводимые из (1) изменением направления осей и, наконец, любыми их поворотами. Постулат относительности требует, чтобы все эти преобразования образовывали группу, а это возможно, лишь если l имеет постоянное значение 1.

«Группа относительности», получаемая таким образом, состоит из линейных подстановок, не нарушающих квадратичную форму

$$x^2+y^2+z^2-t^2.$$

Статья заканчивается применением постулата относительности к гравитационным явлениям. Речь идет о том, чтобы найти закон распространения гравитации и формулы, выражающие компоненты силы как функцию координат и скорости как притягиваемого тела, так и притягивающего. Рассматривая эти вопросы, Пуанкаре начинает с поиска инвариантов группы относительности; действительно, ясно, что должна существовать возможность описания явлений уравнениями, содержащими лишь эти инварианты. Однако задача является неопределенной. Естественно предположить, что скорость распространения одинакова со скоростью света и что отклонения от закона Ньютона должны быть второго порядка величины относительно скоростей. Но даже при этом ограничении сохраняется возможность выбора между несколькими гипотезами, из которых Пуанкаре обращает особое внимание на две.

В этой последней части статьи встречаются некоторые новые понятия; их я должен отметить особо. Пуанкаре замечает, например, что при рассмотрении x, y, z и $t\sqrt{-1}$ как координат точки в четырехмерном пространстве релятивистские преобразования сводятся к вращениям в этом пространстве. Ему также пришла мысль добавить к трем компонентам X, Y, Z силы величину

$$T = X\xi + Y\eta + Z\zeta,$$

которая представляет собой не что иное, как работу силы в единицу времени, и которую можно в некотором роде рассматривать как четвертую компоненту силы. Когда речь идет о силе, действующей на единицу объема тела, релятивистские преобразования меняют величины X, Y, Z, $T\sqrt{-1}$ таким же образом, как и величины x, y, z, $t\sqrt{-1}$.

Напоминаю об этих идеях Пуанкаре потому, что они близки к тем методам, которыми пользовались позже Минковский и другие ученые для облегчения математических действий, встречающихся в теории относительности.

Перейдем теперь к статье о теории квантов. Примерно в конце 1911 г. Пуанкаре присутствовал на физическом конгрессе, созванном в Брюсселе Сольве, на котором занимались главным образом явлениями теплового излучения и придуманной Планком для их объяснения гипотезой элементов, или квантов, энергии. В дискуссиях Пуанкаре проявил всю живость и проницательность своего ума и вызвал восхищение той легкостью, с которой он подходил к наиболее трудным физическим проблемам, даже к тем, которые были для него новыми. Возвратившись в Париж, он не перестал заниматься проблемой, важность которой ясно себе представлял. Если гипотеза Планка верна, то «физические явления перестают подчиняться законам, которые можно выразить дифференциальными уравнениями, что было бы, несомненно, наиболее крупным и наиболее глубоким переворотом из всех, которые претерпела философия природы со времени Ньютона».

Но действительно ли неизбежны эти новые взгляды и не существует способа прийти к закону излучения, не вводя эти дискретности, прямо противоречащие понятиям классической механики? Вот вопрос, который ставит себе Пуанкаре в своей статье и на который он дает ответ. Позволю себе вкратце изложить этот ответ.

Рассмотрим систему, состоящую из n резонаторов Планка и p молекул, причем n и p очень большие числа; предположим, что все резонаторы одинаковы и все молекулы также одинаковы. Обозначим через $\xi_1, \ldots, \xi_p$ энергии молекул и через $\eta_1, \ldots, \eta_n$ энергии резонаторов; каждая из этих переменных может принимать любые положительные значения.

Пуанкаре прежде всего доказывает следующее положение: вероятность того, что значения энергий находятся в пределах ξ_1 и $\xi_1 + d\xi_1, \ldots, \xi_p$ и $\xi_p + d\xi_p$, η_1 и $\eta_1 + d\eta_1, \ldots, \eta_n$ и $\eta_n + d\eta_n$, может быть представлена выражением

$$w(\eta_1) \ldots w(\eta_n)\, d\eta_1 \ldots d\eta_n d\xi_1 \ldots d\xi_p,$$

где w — функция, о которой можно выдвинуть различные предположения.

Как только будет известна эта функция, можно будет сказать, каким образом некоторое количество энергии h распределяется между молекулами и резонаторами. Для этого можно себе представить в $(p+n)$-мерном пространстве $\xi_1 \ldots \xi_p, \eta_1 \ldots \eta_n$ бесконечно тонкий слой S, в котором полная энергия

$$\xi_1 + \ldots + \xi_p + \eta_1 + \ldots + \eta_n$$

заключена между h и бесконечно близким значением $h+dh$. Вычисляя три интеграла

$$I = \int w(\eta_1) \ldots w(\eta_n)\, d\eta_1 \ldots d\eta_n d\xi_1 \ldots d\xi_p,$$

$$I' = \int x w(\eta_1) \ldots w(\eta_n)\, d\eta_1 \ldots d\eta_n d\xi_1 \ldots d\xi_p,$$

$$I'' = \int (h-x)\, w(\eta_1) \ldots w(\eta_n)\, d\eta_1 \ldots d\eta_n d\xi_1 \ldots d\xi_p,$$

$$(x = \eta_1 + \ldots + \eta_n)$$

по слою S, получим I'/I для энергии резонаторов и I''/I для энергии совокупности молекул. Следовательно, если Y — средняя энергия резонатора и X — средняя энергия молекулы, то

$$nYI = I',\ pXI = I''.$$

Чтобы вычислить интеграл I, можно сначала фиксировать переменные $\eta_1, \ldots, \eta_n$, а следовательно их сумму x, и распространить интегрирование по ξ на все положительные значения этих переменных, для которых сумма $\xi_1 + \ldots + \xi_p$ заключена между $h-x$ и $h-x+dh$. Это дает

$$\int d\xi_1 \ldots d\xi_p = \frac{1}{(p-1)!}(h-x)^{p-1}dh.$$

Затем можно вычислить интеграл

$$\int w(\eta_1) \ldots w(\eta_n)\, d\eta_1 \ldots d\eta_n,$$

распространенный на положительные значения η, причем $\eta_1 + \ldots + \eta_n$ находится между x и $x+dx$. Положим

$$\int w(\eta_1) \ldots w(\eta_n)\, d\eta_1 \ldots d\eta_n = \varphi(x)\, dx,$$

где φ — функция, зависящая от функции w, и мы получим

$$I = \frac{dh}{(p-1)!}\int\limits_0^h (h-x)^{p-1}\varphi(x)\, dx.$$

I' и I'' вычисляются тем же способом; следует лишь ввести под знак интеграла множитель x или $h-x$. В конечном счете, можно написать

$$nY = C\int\limits_0^h x(h-x)^{p-1}\varphi(x)\, dx, \tag{9}$$

$$pX = C\int\limits_0^h (h-x)^p\varphi(x)\, dx, \tag{10}$$

где множитель C одинаков в обоих случаях. Он нас не интересует, ибо достаточно определить отношение X к Y.

Теперь получают формулу Планка, которую можно считать отражением действительности, если сделать о функции w следующую гипотезу, согласующуюся с теорией квантов.

Пусть ε — величина кванта энергии, свойственного рассматриваемым резонаторам; обозначим через δ бесконечно малую величину [1]. Функция w будет равна нулю повсюду, за исключением интервалов

$$k\varepsilon < \eta < k\varepsilon + \delta \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots),$$

и для каждого из этих интервалов интеграл

$$\int\limits_{k\varepsilon}^{k\varepsilon+\delta} w d\eta$$

будет иметь значение 1.

Этих данных достаточно для определения функции φ и отношения Y/X, для которого находят, как я уже сказал, значение, данное теорией Планка. Я не останавливаюсь на этих вычислениях и перехожу сразу к основному вопросу: неизбежно ли допущение дискретностей, которые я только что указал.

Я воспроизведу рассуждение Пуанкаре, но сначала скажу, что в формулах, с которыми мы встретимся, α означает комплексную переменную, действительная часть которой α_r всегда положительна. В графическом изображении мы ограничимся половиной плоскости α, для которой $\alpha_r > 0$, и в интегрированиях по α будем следовать по прямой линии L, перпендикулярной оси действительных α и продолженной до бесконечности в обе стороны. Значения интегралов не будут зависеть от величины расстояния α_r, от этой прямой — до начала α.

Пуанкаре вводит вспомогательную функцию, определяемую уравнением

$$\Phi(\alpha) = \int\limits_0^\infty w(\eta)\, e^{-\alpha\eta} d\eta, \tag{11}$$

и доказывает, что функция w и выводимая из нее функция φ могут быть выражены с помощью Φ.

[1] Здесь речь идет о *первой* теории Планка, в которой принимают, что энергия резонатора может иметь лишь одно из значений 0, ε, 2ε, 3ε и т. д.

Прежде всего инверсией (11) получаем

$$w(\eta)=\frac{1}{2i\pi}\int_{(L)}\Phi(\alpha)\,e^{\alpha\eta}d\alpha. \tag{12}$$

Чтобы получить аналогичную формулу для $\varphi(x)$, заметим, что в уравнении (11) можно заметить η любой из переменных $\eta_1, \ldots, \eta_n$. Перемножая полученные таким образом n уравнения, имеем

$$[\Phi(\alpha)]^n=\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty w(\eta_1)\ldots w(\eta_n)\,e^{-\alpha x}d\eta_1\ldots d\eta_n$$

или, в силу (8),

$$[\Phi(\alpha)]^n=\int_0^\infty \varphi(x)\,e^{-\alpha x}dx$$

и после инверсии

$$\varphi(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_{(L)}[\Phi(\alpha)]^n e^{\alpha x}d\alpha.$$

Формулы (9) и (10) теперь принимают вид

$$nY=\frac{C}{2i\pi}\int_0^h\int_{(L)} x(h-x)^{p-1}[\Phi(\alpha)]^n e^{\alpha x}dx\,d\alpha,$$

$$pX=\frac{C}{2i\pi}\int_0^h\int_{(L)} (h-x)^p[\Phi(\alpha)]^n e^{\alpha x}dx\,d\alpha,$$

и Пуанкаре преобразует их еще подстановкам

$$x=n\omega,\quad h=n\beta,\quad p=nk,$$

что дает

$$nY=\frac{Cn^{p+1}}{2i\pi}\int_0^\beta\int_{(L)}\frac{\omega}{\beta-\omega}\,\Theta^n d\omega\,d\alpha,$$

$$pX=\frac{Cn^{p+1}}{2i\pi}\int_0^\beta\int_{(L)}\Theta^n d\omega\,d\alpha,$$

где

$$\Theta=\Phi(\alpha)\,e^{\alpha\omega}(\beta-\omega)^k.$$

Отметим, что ω — не что иное, как средняя энергия единичного резонатора в случае, когда

$$\eta_1 + \ldots + \eta_n = x,$$

и что β — это значение, которое принимало бы ω, если бы вся имеющаяся энергия h оказалась сосредоточенной в резонаторах; k есть отношение числа молекул к числу резонаторов.

Когда ищут наиболее вероятное состояние системы, применяя теорию вероятностей к молекулярным теориям, то из-за огромного числа молекул всегда находят, что максимум настолько острый, что можно пренебречь всеми состояниями, заметно отличающимися от наиболее вероятного. В интересующем нас случае имеется нечто аналогичное.

Допустим вместе с Пуанкаре, что для данных значений h и β функция Θ имеет максимум при $\alpha = \alpha_0$ и $\omega = \omega_0$, и проведем через точку α_0 соответствующую максимуму прямую L, расстояние α_r которой до начала координат может быть выбрано произвольно. Так как показатель степени n весьма велик, то максимум Θ^n чрезвычайно острый, и необходимо учитывать лишь те элементы интегралов, которые находятся в непосредственной близости от α_0 и ω_0. Это нам сразу дает для искомого отношения

$$\frac{nY}{pX} = \frac{\omega_0}{\beta - \omega_0}$$

и, силу уравнения

$$nY + pX = h = n\beta,$$

$$Y = \omega_0, \tag{13}$$

$$X = \frac{\beta - \omega_0}{k}. \tag{14}$$

Для определения значений α_0 и ω_0 можно воспользоваться уравнениями

$$\frac{\partial \log \Theta}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \log \Theta}{\partial \omega} = 0,$$

откуда выводят

$$\frac{\Phi'(\alpha_0)}{\Phi(\alpha_0)} + \omega_0 = 0 \tag{15}$$

и

$$\alpha_0 - \frac{k}{\beta - \omega_0} = 0. \tag{16}$$

Из этих формул видно, что α_0 и ω_0 зависят от величины β, т. е. от полной энергии h, сообщенной системе; этого результата следовало ожидать. Уравнение (16) сверх того нам показывает, что α_0 всегда действительное. Эта величина сразу определяет среднюю энергию молекулы, ибо из (14) и (16) следует

$$X = \frac{1}{\alpha_0}.$$

Но мы знаем, что средняя энергия молекулы пропорциональна абсолютной температуре T. Итак, можно написать

$$\alpha_0 = \frac{c}{T},$$

где c — известная постоянная, и уравнение

$$Y = -\frac{\Phi'(\alpha_0)}{(\alpha_0)\,\Phi}, \tag{17}$$

которое выводится из (13) и (15), дает нам среднюю энергию резонатора как функцию от температуры. Как видим, этот результат независим от соотношения чисел n и p.

Предположим теперь, что нам известна средняя энергия резонатора при всех температурах. Тогда из (17) мы будем знать для всех положительных значений α производную

$$\frac{d \log \Phi(\alpha)}{d\alpha};$$

из нее можно вывести $\Phi(\alpha)$ с точностью до постоянного множителя. Разумеется, эти заключения сначала ограничиваются действительными значениями α, но функция $\Phi(\alpha)$ предполагается такой, что она определена на всей упомянутой полуплоскости α, когда она задана во всех точках действительной и положительной полуосей.

Наконец, формула (12) даст нам функцию вероятности w для любого положительного значения η. Правда, в w опять окажется неопределенный множитель функции $\Phi(\alpha)$, но подобный множитель не имеет никакого значения.

Таким образом, можно сказать, что вероятность w полностью определена, как только известно распределение энергии *для всех* температур. Имеется лишь *одна* функция w для распределения, заданного как функция температуры. Следовательно, гипотезы, сделанные нами о w и приводящие к закону Планка, единственно допустимые.

Вот рассуждение, которым Пуанкаре обосновал *необходимость* гипотезы квантов.

Как видим, заключение зависит от гипотезы, что формула Планка является точной картиной реальности. Но если это подвергнуть сомнению, то формула будет лишь приближенной. Именно по этой причине Пуанкаре вновь исследует проблему, отказавшись от закона Планка и исходя лишь из отношения, найденного этим физиком, между энергией резонатора и энергией черного излучения. Это новое рассмотрение ведет к заключению, что полная энергия излучения будет бесконечной, если интеграл

$$\int_0^{\eta_0} w d\eta$$

не стремится к нулю вместе с η_0. Итак, функция w должна иметь по меньшей мере *одну* разрывность (при $\eta=0$), аналогичную тем, которые дает теория квантов [1].