Г. А. ЛОРЕНЦ.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В СИСТЕМЕ, ДВИЖУЩЕЙСЯ С ЛЮБОЙ СКОРОСТЬЮ, МЕНЬШЕЙ СКОРОСТИ СВЕТА[1]).

1. Стараясь на основании теоретических соображений определить влияние, которое может оказать поступательное движение (например, поступательное движение, испытываемое всеми системами вследствие годового движения земли) на электрические и оптические явления, мы сравнительно просто достигаем цели в тех случаях, когда рассматриваются только величины, пропорциональные первой степени отношения скорости поступательного движения w к скорости света c.

Случаи же, в которых могут быть обнаружены величины второго порядка, следовательно, порядка $\frac{w^2}{c^2}$, представляют более значительные трудности. Первым примером явлений этого рода является известный интерференционный опыт Майкельсона, отрицательный результат которого привел Фицджеральда и меня к заключению, что размеры твердых тел немного изменяются вследствие их движения через эфир.

Недавно были опубликованы некоторые новые опыты, в которых отыскивались эффекты второго порядка.

1) „Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light", Proc. Acad. Sc., Amsterdam, 6, 809, 1904.

Рэлей[1]) и Брэс[2]) исследовали, не становится ли тело от движения земли двоякопреломляющим; можно было на первый взгляд ожидать этого эффекта, если принять только что упомянутое изменение размеров. Оба физика пришли, однако, к отрицательному результату.

Затем Трутон и Нобль[3]) пытались обнаружить момент количества движения, действующий на заряженный конденсатор, пластины которого образуют некоторый угол с направлением поступательного движения. Если не изменять электронной теории введением новой гипотезы, то она, без сомнения, требует существования такого момента количества движения. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть конденсатор с эфиром в качестве диэлектрика. Можно показать, что в каждой электростатической системе, движущейся со скоростью $\mathbf{w}$, существует определенное „электромагнитное количество движения". Если мы обозначим его величину и направление через вектор $\mathbf{G}$, то упомянутый момент количества движения определится как следующее векторное произведение[4]):

$$[\mathbf{G}\cdot\mathbf{w}]. \tag{1}$$

Если ось z выбрана перпендикулярно к пластинам конденсатора, скорость $\mathbf{w}$ имеет любое направление, а U есть энергия конденсатора, вычисленная обычным образом, то компоненты вектора $\mathbf{G}$ с точностью до

1) Rayleigh, Phil. Mag. (6) 4, 678, 1902.

2) Brace, Phil. Mag. (6) 7, 317, 1904.

3) Trouton and Noble, London Roy. Soc. Trans. A. 202, 165, 1903.

4) Ср. мою статью: „Weiterbildung der Maxwellschen Theorie. Elektronentheorie", Mathematische Encyklopädie, V 14, § 21a. (Эта статья цитируется ниже только двумя буквами: M. E.)

величин первого порядка даются следующими формулами[1]):

$$\mathbf{G}_x = \frac{2U}{c^2}\,\mathbf{w}_x\,,\quad \mathbf{G}_y = \frac{2U}{c^2}\,\mathbf{w}_y\,,\quad \mathbf{G}_z = 0.$$

Подставив эти значения в (1), мы получим для компонент момента количества движения с точностью до величин второго порядка следующие выражения:

$$\frac{2U}{c^2}\,\mathbf{w}_y\mathbf{w}_z\,,\quad -\frac{2U}{c^2}\,\mathbf{w}_x\mathbf{w}_z\,,\quad 0.$$

Эти выражения показывают, что ось момента количества движения лежит в плоскости пластин перпендикулярно к поступательному движению. Если α есть угол между скоростью и нормалью к пластинам, то момент количества движения равен

$$\frac{U}{c^2}\,w^2 \sin 2\alpha\,;$$

он стремится повернуть конденсатор так, чтобы пластины расположились параллельно направлению движения земли.

В аппарате Трутона и Нобля конденсатор висел на коромысле крутильных весов, чувствительности достаточной для того, чтобы отклониться под действием момента количества движения указанного порядка величины. Однако ничего подобного не было наблюдено.

2. Описанные опыты не являются единственным основанием желательности новой обработки проблем, связанных с движением земли. Пуанкаре[2]), возражая против прежней теории оптических и электрических явлений в движущихся телах, указывал, что для объяснения отрицательного результата опыта Майкельсона оказалось нужным ввести новую гипотезу, и что в этом может встретиться необходимость каждый раз, когд станут известны новые факты. Подобному введению особых гипотез для каждого нового опытного результата присуща, конечно, некоторая искусственность. Положение вещей было бы удовлетворительнее, если бы можно было с помощью определенных основных допущений показать, что многие электромагнитные явления строго, т. е. без какого-либо пренебрежения членами высших порядков, не зависят от движения системы. Несколько лет тому назад я уже сделал попытку создать подобную теорию[1]). Теперь я надеюсь рассмотреть этот вопрос с бóльшим успехом. На скорость налагается только то ограничение, что она должна быть меньше скорости света.

3. Я исхожу из основных уравнений электронной теории[2]). Пусть $\mathbf{d}$ — диэлектрическое смещение в эфире, $\mathbf{h}$ — магнитная сила, ρ — объемная плотность заряда электрона, $\mathbf{v}$ — скорость некоторой точки этой частицы и $\mathbf{f}$ — электрическая сила, т. е. сила, с которой эфир действует на элемент объема электрона, рассчитанная на единицу заряда. Пользуясь неподвижной координатной системой, имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{d} &= \rho, \quad \operatorname{div}\mathbf{h} = 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{h} &= \frac{1}{c}(\dot{\mathbf{d}} + \rho\mathbf{v}), \\ \operatorname{rot}\mathbf{d} &= -\frac{1}{c}\,\dot{\mathbf{h}}, \qquad (2) \\ \mathbf{f} &= \mathbf{d} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\cdot\mathbf{h}], \end{aligned}$$

[1]) M. E. § 56 c.
[2]) Poincaré, Rapports du Congrès de physique de 1900, Paris, 1, стр. 22, 23.

[1]) Lorentz, Zittingsverlag, Akad. Wet. 7 (1899), 507; Amsterdam Proc. 1898—99, 427.
[2]) M. E. § 2.

Я принимаю теперь, что система, как целое, движется по направлению оси x с постоянной скоростью w, и обозначаю через $\mathbf{u}$ скорость, которую пусть сверх того имеет какая-нибудь точка электрона; тогда

$$\mathbf{v}_x = w + \mathbf{u}_x, \quad \mathbf{v}_y = \mathbf{u}_z, \quad \mathbf{v}_z = \mathbf{u}_z.$$

Если в то же время уравнения (2) отнести к осям, которые двигаются вместе с системой, то получается

$$\operatorname{div} \mathbf{d} = \rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{h} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{h}_y}{\partial z} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{d}_x + \frac{1}{c}\rho(w + \mathbf{u}_x),$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{h}_z}{\partial x} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{d}_y + \frac{1}{c}\rho\mathbf{u}_y,$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial y} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{d}_z + \frac{1}{c}\rho\mathbf{u}_z,$$

$$\frac{\partial \mathbf{d}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{d}_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{h}_x,$$

$$\frac{\partial \mathbf{d}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{d}_z}{\partial x} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{h}_y,$$

$$\frac{\partial \mathbf{d}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{d}_x}{\partial y} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{h}_z,$$

$$\mathbf{f}_x = \mathbf{d}_x + \frac{1}{c}(\mathbf{u}_y\mathbf{h}_z - \mathbf{u}_z\mathbf{h}_y),$$

$$\mathbf{f}_y = \mathbf{d}_y - \frac{1}{c}w\mathbf{h}_z + \frac{1}{c}(\mathbf{u}_z\mathbf{h}_x - \mathbf{u}_x\mathbf{h}_z),$$

$$\mathbf{f}_z = \mathbf{d}_z + \frac{1}{c}w\mathbf{h}_y + \frac{1}{c}(\mathbf{u}_x\mathbf{h}_y - \mathbf{u}_y\mathbf{h}_x).$$

4. Мы преобразуем эти формулы введением новых переменных. Положим

$$\frac{c^2}{c^2 - w^2} = k^2 \tag{3}$$

и обозначим через l новую величину, значение которой будет дано ниже. Я беру в качестве независимых переменных:

$$x' = klx, \quad y' = ly, \quad z' = lz, \tag{4}$$

$$t' = \frac{l}{k}t - kl\frac{w}{c^2}x, \tag{5}$$

и определяю два новых вектора $\mathbf{d}'$ и $\mathbf{h}'$ посредством формул

$$\mathbf{d}_x' = \frac{1}{l^2}\mathbf{d}_x, \qquad \mathbf{d}_y' = \frac{k}{l^2}\left(\mathbf{d}_y - \frac{w}{c}\mathbf{h}_z\right),$$

$$\mathbf{d}_z' = \frac{k}{l^2}\left(\mathbf{d}_z + \frac{w}{c}\mathbf{h}_y\right), \qquad \mathbf{h}_x' = \frac{1}{l^2}\mathbf{h}_x,$$

$$\mathbf{h}_y' = \frac{k}{l^2}\left(\mathbf{h}_y + \frac{w}{c}\mathbf{d}_z\right), \qquad \mathbf{h}_z' = \frac{k}{l^2}\left(\mathbf{h}_z - \frac{w}{c}\mathbf{d}_y\right).$$

Вместо этого мы можем в силу (3) написать:

$$\left.\begin{cases} \mathbf{d}_x = l^2\mathbf{d}_x', & \mathbf{d}_y = kl^2\left(\mathbf{d}_y' + \frac{w}{c}\mathbf{h}_z'\right), \\ \mathbf{d}_z = kl^2\left(\mathbf{d}_z' - \frac{w}{c}\mathbf{h}_y'\right), & \mathbf{h}_x = l^2\mathbf{h}_x', \\ \mathbf{h}_y = kl^2\left(\mathbf{h}_y' - \frac{w}{c}\mathbf{d}_z'\right), & \mathbf{h}_z = kl^2\left(\mathbf{h}_z' + \frac{w}{c}\mathbf{d}_y'\right). \end{cases}\right\} \tag{6}$$

Пусть коэффициент l есть такая функция от w, которая при $w = 0$ принимает значение 1, а при малых значениях w отличается от 1 только на величины второго порядка.

Пусть переменная t' называется „местным временем“; в самом деле, при $k = 1$ и $l = 1$ она тождественна с величиной, которую я так называл прежде. Если мы наконец положим

$$\frac{1}{kl^3}\rho = \rho', \tag{7}$$

$$k^2\mathbf{u}_x = \mathbf{u}_x', \quad k\mathbf{u}_y = \mathbf{u}_y', \quad k\mathbf{u}_z = \mathbf{u}_z' \tag{8}$$

и будем толковать последние три величины как компоненты нового вектора $\mathbf{u}'$, то уравнения примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{div}'\mathbf{d}'=\left(1-\frac{w\mathbf{u}_x'}{c^2}\right)\rho', \qquad \operatorname{div}'\mathbf{h}'=0,\\
&\operatorname{rot}'\mathbf{h}'=\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\mathbf{d}'}{\partial t'}+\rho'\mathbf{u}'\right),\\
&\operatorname{rot}'\mathbf{d}'=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{h}'}{\partial t'}
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{f}_x&=l^2\mathbf{d}_x'+l^2\frac{1}{c}(\mathbf{u}_y'\mathbf{h}_z'-\mathbf{u}_z'\mathbf{h}_y')+\\
&\quad+l^2\frac{w}{c^2}(\mathbf{u}_y'\mathbf{d}_y'+\mathbf{u}_z'\mathbf{d}_z'),\\
\mathbf{f}_y&=\frac{l^2}{k}\mathbf{d}_y'+\frac{l^2}{k}\frac{1}{c}(\mathbf{u}_z'\mathbf{h}_x'-\mathbf{u}_x'\mathbf{h}_z')-\\
&\quad-\frac{l^2}{k}\frac{w}{c^2}\mathbf{u}_x'\mathbf{d}_y',\\
\mathbf{f}_z&=\frac{l^2}{k}\mathbf{d}_z'+\frac{l^2}{k}\frac{1}{c}(\mathbf{u}_x'\mathbf{h}_y'-\mathbf{u}_y'\mathbf{h}_x')-\\
&\quad-\frac{l^2}{k}\frac{w}{c^2}\mathbf{u}_x'\mathbf{d}_z'.
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Символы div′ и rot′ в (9) соответствуют div и rot в (2), только дифференцирования по x, y, z нужно заменить соответствующими дифференцированиями по x', y', z' [1]).

[1]) Можно заметить, что в этой статье мне не удалось в полной мере получить формулы преобразования теории относительности Эйнштейна. Ни равенство (7) ни формулы (8) не имеют того вида, который дан Эйнштейном, вследствие чего мне не удалось уничтожить член $-\frac{w\mathbf{u}_x'}{c^2}$ из первой формулы (9) и таким образом привести уравнения (9) точно к виду, справедливому для покоящейся системы. С этим обстоятельством связана беспомощность некоторых дальнейших рассуждений в этой работе.

Заслуга Эйнштейна состоит в том, что он первый высказал принцип относительности в виде всеобщего строго и точно действующего закона.

К этому я добавлю еще, что Фохт уже в 1887 г. (Göttinger Nachrichten, стр. 41) в работе „Über das Dopplersche Prinzip“ применил к формулам вида

$$\Delta\psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0$$

преобразование, которое эквивалентно преобразованию, содержащемуся в равенствах (4) и (5). [Примечание *Г. А. Лоренца*, 1912 г.]

5. Уравнения (9) приводят к заключению, что векторы $\mathbf{d}'$ и $\mathbf{h}'$ можно представить посредством скалярного потенциала φ' и векторного потенциала $\mathbf{a}'$. Эти потенциалы удовлетворяют уравнениям [1]):

$$\Delta'\varphi'-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t'^2}=-\rho', \tag{11}$$

$$\Delta'\mathbf{a}'-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{a}'}{\partial t'^2}=-\frac{1}{c^2}\rho'\mathbf{u}'. \tag{12}$$

Векторы $\mathbf{d}'$ и $\mathbf{h}'$ можно выразить через потенциалы следующим образом:

$$\mathbf{d}'=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{a}'}{\partial t'}-\operatorname{grad}'\varphi'+\frac{w}{c}\operatorname{grad}'\mathbf{a}'_x, \tag{13}$$

$$\mathbf{h}'=\operatorname{rot}'\mathbf{a}'. \tag{14}$$

Символ Δ' есть сокращенное обозначение операции

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2}{\partial z'^2},$$

а $\operatorname{grad}'\varphi'$ обозначает вектор с компонентами

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x'},\quad \frac{\partial\varphi'}{\partial y'},\quad \frac{\partial\varphi'}{\partial z'};$$

выражение $\operatorname{grad}'\mathbf{a}_x'$ имеет аналогичное значение.

[1]) M. E. §§ 4 и 10.

Чтобы получить решения уравнений (11) и (12) в простом виде, мы обозначаем через x', y', z' координаты точки P' в пространстве S' и сопоставляем этой точке для каждого значения t' значения ρ, $\mathbf{u}'$, φ', $\mathbf{a}'$, которые относятся к соответствующей точке $P(x, y, z)$ электромагнитной системы. Для некоторого определенного значения четвертой независимой переменной t' потенциалы φ' и $\mathbf{a}'$ в точке P нашей системы, или в соответствующей точке P' пространства S' даются формулами[1]):

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi}\int \frac{[\rho']}{r'}\, dS', \tag{15}$$

$$\mathbf{a}' = \frac{1}{4\pi c}\int \frac{[\rho'\mathbf{u}']}{r'}\, dS'. \tag{16}$$

Здесь dS' — элемент пространства в S', r' — его расстояние от P', скобки обозначают значения величины ρ' и вектора $\rho'\mathbf{u}'$ в элементе dS' при значении четвертой независимой переменной равном $t' - \frac{r'}{c}$.

Вместо (15) и (16) можно также, принимая во внимание (4) и (7), написать:

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi}\int \frac{[\rho]}{r'}\, dS, \tag{17}$$

$$\mathbf{a}' = \frac{1}{4\pi c}\int \frac{[\rho\mathbf{u}']}{r'}\, dS. \tag{18}$$

Интегрирования при этом нужно распространить по самой электромагнитной системе. Нужно, конечно, помнить, что в этих формулах r' не означает расстояния между элементом dS и точкой (x, y, z), для которой должно быть выполнено вычисление. Если элемент характеризуется точкой (x, y, z), то мы должны положить

$$r' = l\sqrt{k^2(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}.$$

[1]) М. Е. §§ 5 и 10.

Если мы желаем определить φ' и $\mathbf{a}'$ для момента времени, для которого местное время в точке P равно t', то мы должны придать ρ и $\rho\mathbf{u}'$ значения, которыми они обладают в элементе dS в момент местного времени $t' - \frac{r'}{c}$ этого элемента.

6. Для нашей цели достаточно рассмотреть два частных случая. Возьмем сначала случай электростатической системы, т. е. системы, в которой поступательное движение со скоростью w является единственным движением. В этом случае $\mathbf{u}'$ делается равным 0 и, следовательно, в силу (16), $\mathbf{a}' = 0$. Далее, φ' не зависит от t', так что равенства (11), (13) и (14) упрощаются и принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \Delta'\varphi' &= -\rho', \\ \mathbf{d}' &= -\operatorname{grad}'\varphi', \\ \mathbf{h}' &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Определив с помощью этих уравнений вектор $\mathbf{d}'$, мы узнаем и электрическую силу, которая действует на электроны нашей системы. Так как $\mathbf{u}' = 0$, то уравнения (10) определяющие эту силу, принимают следующий вид:

$$\mathbf{f}_x = l^2\mathbf{d}_x', \qquad \mathbf{f}_y = \frac{l^2}{k}\mathbf{d}_y', \qquad \mathbf{f}_z = \frac{l^2}{k}\mathbf{d}_z'. \tag{20}$$

Этот результат упрощается, если мы движущуюся систему $\sum$, о которой идет речь, сравним с покоящейся системой $\sum'$. Последняя система получается из $\sum$ путем умножения расстояний в направлении оси x на kl, а расстояний в направлении осей y и z на l. Эту деформацию обозначим для удобства символом (kl, l, l). Пусть эта новая система находится в вышеупомянутом пространстве S'; мы придаем в ней плотности ρ значение, определяемое формулой (7), так что в $\sum$ и $\sum'$ заряды соответствующих элементов объема и соответствующих электронов равны. Мы получим тогда силы, действующие на электроны движущейся системы $\sum$, определив сперва соответствующие силы в $\sum'$ и помножив потом их компоненты в направлении оси x на l^2, а перпендикулярные к этой оси компоненты на $\frac{l^2}{k}$. Этот результат нам будет удобно выразить следующей формулой

$$\mathbf{F}\left(\sum\right)=\left(l^2, \frac{l^2}{k}, \frac{l^2}{k}\right)\mathbf{F}\left(\sum'\right). \tag{21}$$

Следует еще заметить, что с помощью значения $\mathbf{d}'$, найденного из формулы (19), можно легко выразить электромагнитное количество движения в движущейся системе, или, скорее, его компоненты в направлении движения. В самом деле, уравнение

$$\mathbf{G}=\frac{1}{c}\int[\mathbf{d}\cdot\mathbf{h}]\,dS$$

показывает, что

$$\mathbf{G}_x=\frac{1}{c}\int(\mathbf{d}_y\mathbf{h}_z-\mathbf{d}_z\mathbf{h}_y)\,dS.$$

Следовательно, в силу (6) и так как $\mathbf{h}'=0$, имеем

$$\mathbf{G}_x=\frac{k^2l^4w}{c^2}\int\left(\mathbf{d}_y'^2+\mathbf{d}_z'^2\right)dS=\frac{klw}{c^2}\int\left(\mathbf{d}_y'^2+\mathbf{d}_z'^2\right)dS'. \tag{22}$$

7. Во втором частном случае мы рассмотрим частицу с электрическим моментом, т. е. небольшое пространство S с общим зарядом $\int\rho dS=0$, но с таким распределением плотности, что интегралы $\int\rho x dS$, $\int\rho y dS$, $\int\rho z dS$ имеют отличные от нуля значения.

Пусть X, Y, Z будут координатами, отсчитываемыми от некоторой определенной точки A этой частицы — назовем эту точку центром — и пусть электрический момент определяется как вектор $\mathbf{p}$ с компонентами

$$\mathbf{p}_x=\int\rho X dS,\quad \mathbf{p}_y=\int\rho Y dS,\quad \mathbf{p}_z=\int\rho Z dS. \tag{23}$$

Тогда мы имеем

$$\frac{d\mathbf{p}_x}{dt}=\int\rho\mathbf{u}_x dS,\quad \frac{d\mathbf{p}_y}{dt}=\int\rho\mathbf{u}_y dS,\quad \frac{d\mathbf{p}_z}{dt}=\int\rho\mathbf{u}_z dS. \tag{24}$$

Если X, Y, Z рассматриваются как бесконечно малые величины, то естественно, что и $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$, $\mathbf{u}_z$ будут тоже бесконечно малыми. Мы пренебрегаем квадратами и произведениями этих шести величин.

Воспользуемся формулой (17) чтобы определить скалярный потенциал φ' для некоторой внешней точки $P(x, y, z)$, находящейся на конечном расстоянии от поляризованной частицы, для того момента, в котором местное время этой точки имеет определенное значение t'. При этом мы придаем несколько иное значение символу $[\rho]$, который в формуле (17) относится к тому моменту времени, когда местное время в dS равно $t'-\frac{r'}{c}$. Мы обозначаем значение r' для центра A через r_0' и понимаем под $[\rho]$ значение плотности в точке (X, Y, Z) в тот момент времени t_0, когда местное время в A равно $t'-\frac{r_0'}{c}$.

Из уравнения (5) видно, что этот момент времени будет более ранним, чем момент, к которому относится числитель в (17), именно, на величину

$$k^2\frac{w}{c^2}X+\frac{k}{l}\frac{r_0'-r'}{c}=k^2\frac{w}{c^2}X+$$
$$+\frac{k}{l}\frac{1}{c}\left(X\frac{\partial r'}{\partial x}+Y\frac{\partial r'}{\partial y}+Z\frac{\partial r'}{\partial z}\right)$$

единиц времени. В это последнее выражение вместо производных мы можем подставить их значения в точке A.

Мы должны теперь в (17) заменить $[\rho]$ через

$$[\rho]+k^2\frac{w}{c^2}X\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]+\frac{k}{l}\frac{1}{c}\left(X\frac{\partial r'}{\partial x}+Y\frac{\partial r'}{\partial y}+Z\frac{\partial r'}{\partial z}\right)\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right], \quad (25)$$

при этом $\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]$ снова относится к времени t_0. Если выбрано значение t', для которого должны быть сделаны вычисления, то это время t_0 становится функцией координат x, y, z точки P. Вследствие этого значение $[\rho]$ зависит от этих координат, и легко видеть, что

$$\frac{\partial[\rho]}{\partial x}=-\frac{k}{l}\frac{1}{c}\frac{\partial r'}{\partial x}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right],$$

и т. д.

Поэтому (25) перепишется так:

$$[\rho]+k^2\frac{w}{c^2}X\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]-\left(X\frac{\partial[\rho]}{\partial x}+Y\frac{\partial[\rho]}{\partial y}+Z\frac{\partial[\rho]}{\partial z}\right).$$

Если мы указанную выше величину r_0' будем впредь обозначать через r', то множитель $\frac{1}{r'}$ нужно будет заменить следующим выражением:

$$\frac{1}{r'}-X\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r'}\right)-Y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r'}\right)-Z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r'}\right).$$

Тогда в итоге элемент dS в интеграле (17) умножится на

$$\frac{[\rho]}{r'}+k^2\frac{w}{c^2}\frac{X}{r'}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]-\frac{\partial}{\partial x}\frac{X[\rho]}{r'}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{Y[\rho]}{r'}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{Z[\rho]}{r'}.$$

Это проще, чем первоначальная форма того же выражения, потому что ни r', ни время, для которого должны быть взяты заключенные в скобки величины,

не зависят от X, Y, Z. Пользуясь (23) и принимая во внимание, что $\int\rho dS=0$, получаем:

$$\varphi'=k^2\frac{w}{4\pi c^2r'}\left[\frac{\partial\mathbf{p}_x}{\partial t}\right]-\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{[\mathbf{p}_x]}{r'}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{[\mathbf{p}_y]}{r'}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{[\varphi_z]}{r'}\right\}.$$

В этом уравнении все заключенные в скобки величины должны быть взяты для того момента, когда местное время центра частицы равно $t'-\frac{r'}{c}$.

Мы заканчиваем эти соображения введением нового вектора $\mathbf{p}'$, компоненты которого равны:

$$\mathbf{p}_x'=kl\mathbf{p}_x,\quad \mathbf{p}_y'=l\mathbf{p}_y,\quad \mathbf{p}_z'=l\mathbf{p}_z. \quad (26)$$

Одновременно мы переходим к x', y', z', t', как независимым переменным. Окончательный результат имеет вид:

$$\varphi'=\frac{w}{4\pi c^2r'}\frac{\partial[\mathbf{p}_x']}{\partial t'}-\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\frac{[\mathbf{p}_x']}{r'}+\frac{\partial}{\partial y'}\frac{[\mathbf{p}_y']}{r'}+\frac{\partial}{\partial z'}\frac{[\mathbf{p}_z']}{r'}\right\}.$$

Преобразование формулы (18) для векторного потенциала является менее трудным делом, потому что последний содержит бесконечно малый вектор $\mathbf{u}'$. Принимая во внимание (8), (24), (26) и (5), получаем

$$\mathbf{a}'=\frac{1}{4\pi cr'}\frac{\partial[\mathbf{p}']}{\partial t'}.$$

Поле, вызванное поляризованной частицей, теперь вполне определено. Формула (13) приводит к значению

$$\mathbf{d}'=-\frac{1}{4\pi c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\frac{[\mathbf{p}']}{r'}+\frac{1}{4\pi}\operatorname{grad}'\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\frac{[\mathbf{p}_x']}{r'}+\frac{\partial}{\partial y'}\frac{[\mathbf{p}_y']}{r'}+\frac{\partial}{\partial z'}\frac{[\mathbf{p}_z']}{r'}\right\}, \quad (27)$$

а вектор $\mathfrak{h}'$ дается формулой (14). Можно далее применить формулы (20) вместо первоначальных формул (10), если мы желаем рассмотреть силы, с которыми одна поляризованная частица действует на другую, находящуюся в некотором отдалении от первой. В самом деле, скорости $\mathfrak{u}$ для второй частицы могут считаться бесконечно малыми, как и для первой.

Следует заметить, что уравнения для покоящейся системы содержатся в выведенных формулах. Для такой системы величины со штрихами становятся тождественными с соответствующими величинами без штрихов; кроме того, k и l делаются равными единице. Компоненты (27) являются одновременно компонентами электрической силы, с которой одна поляризованная частица действует на другую.

8. До сих пор мы пользовались только основными уравнениями, не вводя новых предположений. Теперь я допущу, что *электроны, которые в состоянии покоя рассматриваются как шары радиуса R, изменяют свои размеры под влиянием поступательного движения, а именно: размеры в направлении движения уменьшаются в kl раз, а размеры в перпендикулярных к движению направлениях в l раз.*

При этой деформации, которую мы обозначим через $\left(\frac{1}{kl}, \frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)$, каждый элемент объема должен сохранить свой заряд.

Наше допущение ведет к тому, что в электростатической системе $\sum$, которая движется со скоростью w, все электроны преобразуются в эллипсоиды, малые оси которых лежат в направлении движения. Если мы теперь подвергнем систему деформации (kl, l, l) для того, чтобы иметь возможность применить теорему, изложенную в § 6, мы снова получим шаровые электроны радиуса R. Если мы, далее, изменим отно-

сительное положение электронных центров в $\sum$ посредством деформации (kl, l, l) и в полученные таким образом точки поместим центры покоящихся шаровидных электронов, то получим систему, которая будет тождественна воображаемой, описанной в § 6, системе $\sum'$. Силы в этих двух системах связаны друг с другом соотношением (21).

Во-вторых, я принимаю, что *силы, действующие между незаряженными частицами, так же, как и силы, действующие между незаряженными частицами и электронами, вследствие поступательного движения подвергаются изменению точно таким же образом, как электрические силы в электростатической системе.*

Иными словами: какова бы ни была природа частиц весомого тела, всегда — при условии, что частицы не двигаются друг относительно друга — силы, действующие в покоящейся системе $\sum'$ и в движущейся системе $\sum$, связаны друг с другом соотношением (21), если, в смысле взаимного положения частиц система $\sum'$ получается из $\sum$ посредством деформации (kl, l, l) и, следовательно, $\sum$ из $\sum'$ посредством деформации $\left(\frac{1}{kl}, \frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)$.

Поэтому, если в $\sum'$ результирующая сила для какой-нибудь частицы обращается в нуль, то это же самое должно иметь место для соответствующей частицы в $\sum$. Мы пренебрегаем влияниями молекулярного движения и полагаем, что силы притяжения и отталкивания, которые действуют со стороны окружающей среды, уравновешиваются на каждой частице твердого тела. Если мы еще допустим, что возможна только *одна* равновесная конфигурация, то мы сможем заключить, что система $\sum'$ *сама собой* переходит в систему $\sum$, если ей сообщить скорость w. Другими словами, поступательное движение *производит* деформацию $\left(\frac{1}{kl}, \frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)$.

Случай молекулярного движения рассматривается в § 12.

Легко видеть, что гипотеза, выдвинутая раньше в связи с опытом Майкельсона, содержится в высказанной теперь. Последняя гипотеза имеет, однако, более общий характер, потому что единственное ограничение движения заключается теперь в том, что скорость его должна быть меньше скорости света.

9. Мы теперь в состоянии вычислить электромагнитное количество движения одного электрона. С целью упрощения я полагаю, что заряд e равномерно распределен по поверхности, пока электрон находится в покое. Тогда распределение того же рода существует и в системе $\sum'$, с которой мы имеем дело в последнем из интегралов в (22).

Следовательно,

$$\int \left(\mathbf{d}_y'^2 + \mathbf{d}_z'^2\right) dS' = \frac{2}{3} \int \mathbf{d}'^2 dS' = \frac{e^2}{6\pi} \int\limits_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{e^2}{6\pi R}$$

и

$$\mathbf{G}_x = \frac{e^2}{6\pi c^2 R} klw.$$

Нужно принять во внимание, что произведение kl есть функция от w и что на основании симметрии вектор $\mathbf{G}$ имеет направление поступательного движения. Обозначив скорость этого движения через $\mathbf{w}$, имеем общее векторное уравнение

$$\mathbf{G} = \frac{e^2}{6\pi c^2 R} kl\mathbf{w}. \tag{28}$$

Но всякое изменение в движении системы влечет за собой соответствующее изменение в электромагнитном количестве движения и требует поэтому определенной силы, величина и направление которой дается формулой

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{G}}{dt}. \tag{29}$$

Уравнение (28) можно строго говоря применять только к случаю равномерного и прямолинейного поступательного движения. Вследствие этого теория быстро-переменных движений электрона очень трудна, хотя формула (29) всегда имеет место. Это обстоятельство усугубляется тем, что гипотеза § 8 включает требование, чтобы величина и направление деформации непрерывно изменялись. Едва ли вообще вероятно, чтобы форма электрона определялась одной только скоростью в рассматриваемый момент времени.

Несмотря на это, мы, при условии достаточно медленного изменения скорости, получаем удовлетворительное приближение, применяя (28) для каждого момента времени. Применение (29) к такому *квазистационарному* поступательному движению, как его назвал Абрагам [1], — очень просто. Пусть в определенный момент времени $\mathbf{j}_1$ есть ускорение в направлении траектории, а $\mathbf{j}_2$ — ускорение, перпендикулярное к ней. Тогда сила $\mathbf{F}$ состоит из двух компонент, которые имеют направление этих ускорений и выражаются в виде $\mathbf{F}_1 = m_1\mathbf{j}_1$ и $\mathbf{F}_2 = m_2\mathbf{j}_2$, где

$$m_1 = \frac{e^2}{6\pi c^2 R} \frac{d(klw)}{dw} \quad \text{и} \quad m_2 = \frac{e^2}{6\pi c^2 R} kl. \tag{30}$$

Следовательно, в процессах, при которых возникает ускорение в направлении движения, электрон ведет себя так, как будто он имеет массу m_1, а при ускорении в направлении, перпендикулярном к дви-

[1]) Abraham, Ann. d. Phys. **10**, 105, 1903.

жению, как будто он обладает массой m_2. Величинам m_1 и m_2 поэтому удобно дать названия: „продольной“ и „поперечной“ электромагнитных масс. Я полагаю, что *сверх этого нет никакой „действительной“ или „материальной“ массы.*

Так как k и l отличаются от единицы на величины порядка $\frac{w^2}{c^2}$, то при малых скоростях мы имеем

$$m_1 = m_2 = \frac{e^2}{6\pi c^2 R}.$$

Такова масса, с которой приходится проделывать расчеты, когда в системе без поступательного движения электроны совершают небольшие колебания. С другой стороны, если тело движется со скоростью w в направлении оси x и является местом подобных колебаний электронов, то мы должны вести вычисления с массой m_1 по формуле (30), когда мы рассматриваем колебания, параллельные оси x; напротив, для колебаний, параллельных осям y или z, нужно брать массу m_2.

Следовательно, кратко говоря, мы имеем:

$$m\left(\sum\right) = \left(\frac{d\,(klw)}{dw},\ kl,\ kl\right)\, m\left(\sum{}'\right), \tag{31}$$

где знак $\sum$ указывает движущуюся систему, а знак $\sum'$ — неподвижную систему.

10. Мы можем теперь перейти к исследованию влияния движения земли на оптические явления в системе прозрачных тел. При этом мы обратим наше внимание на переменные электрические моменты в частицах или „атомах“ системы. Мы можем применить к этим моментам рассуждения § 7. С целью упрощения мы полагаем, что в каждой частице заряд сосредоточен в определенном числе отдельных электронов. Пусть, далее, „упругие“ силы, которые действуют на какой-нибудь один из этих электронов и

совместно с электрическими силами определяют его движение, имеют свой исходный центр действия в точке, лежащей внутри границы *того же* атома.

Я покажу теперь, что каждому возможному состоянию движения в неподвижной системе можно сопоставить соответствующее, также возможное, состояние движения в системе, находящейся в поступательном движении, причем способ сопоставления характеризуется следующим образом.

а) Пусть A_1', A_2', A_3' и т. д. суть центры частиц в системе $\sum'$ без поступательного движения. Мы пренебрегаем молекулярными движениями и полагаем, что эти точки неподвижны. Система точек A_1, A_2, A_3 и т. д., образуемая центрами частиц в движущейся системе $\sum$, получается из A_1', A_2', A_3' и т. д. посредством деформации $\left(\frac{1}{kl}, \frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)$. Согласно сказанному в § 8, центры частиц сами собой принимают эти положения A_1', A_2', A_3' и т. д., если они первоначально, до приведения в поступательное движение, находились в A_1, A_2, A_3 и т. д.

Мы можем представить себе, что каждая точка P' в пространстве системы $\sum'$ благодаря упомянутой деформации переводится в определенную точку P системы $\sum$. Определяем теперь для двух соответствующих точек P' и P соответствующие моменты времени; первый будет относиться к P', второй — к P. Именно, мы устанавливаем, что истинное время в первый момент должно равняться местному времени во второй момент, определенному для точки P по формуле (5). Под соответствующими моментами времени для двух соответствующих *частиц* мы понимаем соответствующие моменты времени для *центров* A' и A этих частиц.

б) Что касается внутреннего состояния атомов, то мы принимаем, что конфигурация какой-нибудь частицы A в $\sum$ в определенный момент времени получается из конфигурации соответствующей частицы в $\sum'$ в соответствующий момент времени с помощью деформации $\left(\frac{1}{kl}, \frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)$. Поскольку это допущение касается формы самих электронов, оно уже содержится в первой гипотезе § 8.

Если мы исходим из некоторого действительно существующего состояния в системе $\sum'$, то, очевидно, что пользуясь положениями а) и б), мы вполне определяем некоторое состояние движущейся системы $\sum$. Вопрос о том, является ли это состояние также возможным, остается, однако, открытым.

Для того чтобы решить это, мы сначала заметим, что электрические моменты, которые по нашему допущению возникают в движущейся системе и которые будут обозначаться через $\mathbf{p}$, суть определенные функции координат x, y, z центров A частиц (или, как мы будем говорить, координат частиц) и времени t. Уравнения, которые выражают связь между $\mathbf{p}$, с одной стороны, и x, y, z, t, с другой, — могут быть заменены другими уравнениями, которые содержат вектор $\mathbf{p}'$, определяемый из формулы (26), и величины x', y', z', t', которые даются формулами (4) и (5).

Если в частице A движущейся системы, координаты которой суть x, y, z, в момент времени t или в момент местного времени t' имеется электрический момент $\mathbf{p}$, то, согласно допущениям а) и б) в другой системе в частице с координатами x', y', z' и в момент истинного времени t' будет существовать электрический момент, который как раз будет представлен вектором $\mathbf{p}'$, определяемым по формуле (26). Таким образом, отсюда видно, что уравнения, связывающие

$\mathbf{p}'$, x', y', z', t', будут одни и те же для обеих систем с тем единственным отличием, что для системы $\sum'$ без поступательного движения эти буквы означают электрический момент, координаты и истинное время, в то время как для движущейся системы они имеют другое значение. Ибо здесь $\mathbf{p}'$, x', y', z', t' связаны с электрическим моментом $\mathbf{p}$, с координатами x, y, z и с общим временем t соотношениями (26), (4) и (5).

Уже было отмечено, что уравнение (27) применимо к обеим системам. Следовательно, вектор $\mathbf{d}'$ в $\sum'$ и $\sum$ один и тот же при условии, что мы всегда сравниваем соответствующие положения и моменты времени. Однако, вектор этот не имеет одинакового значения в обоих случаях. В $\sum'$ он изображает электрическую силу, а в $\sum$ он связан с этой силой посредством (20). Отсюда мы можем заключить, что электрические силы, действующие в $\sum$ и $\sum'$ на соответствующие частицы и в соответствующие моменты времени, связаны друг с другом при помощи (21). Если мы воспользуемся нашим допущением б) в связи со второй гипотезой в § 8, то найдем, что между „упругими" силами действует то же соотношение. Следовательно, уравнение (21) можно рассматривать так же, как выражение соотношения между результирующими силами, действующими на соответствующие электроны в соответствующие моменты времени.

Очевидно, предполагавшееся в движущейся системе состояние только тогда действительно возможно, когда в $\sum$ и $\sum'$ произведения массы m на ускорение электрона находятся друг по отношению другу в том же отношении, что и силы, т. е. когда

$$m\mathbf{j}\left(\sum\right)=\left(l^2, \frac{l^2}{k}, \frac{l^2}{k}\right) m\mathbf{j}\left(\sum'\right). \qquad (32)$$

Но для ускорений имеет место уравнение

$$\mathbf{j}\left(\sum\right)=\left(\frac{l}{k^3},\ \frac{l}{k^2},\ \frac{l}{k^2}\right)\mathbf{j}\left(\sum'\right), \tag{33}$$

которое можно вывести из формул (4) и (5).

Если соединить этот результат с формулой (32), то для масс получается

$$m\left(\sum\right)=(k^3l,\ kl,\ kl)\,m\left(\sum'\right).$$

Сравнение с (31) показывает, что при любых значениях l это условие всегда выполняется в отношении масс, с которыми мы должны вести расчеты при колебаниях, перпендикулярных к направлению поступательного движения. Итак, мы должны подчинить l только одному условию:

$$\frac{d\,(klw)}{dw}=k^3l.$$

Но, в силу (3),

$$\frac{d\,(kw)}{dw}=k^3,$$

так что

$$\frac{dl}{dw}=0, \quad \text{т. е.} \quad l=\text{const}.$$

Константа должна иметь значение 1, потому что мы уже знаем, что при $w=0$ значение $l=1$.

Это ведет к предположению, что *влияние поступательного движения (как для отдельного электрона, так и весомого тела в целом) простирается только на размеры в направлении движения, а именно: последние делаются в k раз меньше по сравнению с состоянием покоя.*

Присоединив эту гипотезу к высказанным прежде, мы можем быть уверены в том, что возможны два состояния, одно — в движущейся системе, другое — в такой же но покоящейся системе, которые соответствуют друг другу указанным образом. Впрочем, это соответствие не ограничивается электрическими моментами частиц. В соответствующих точках, которые лежат либо в эфире между частицами, либо в эфире, окружающем весомые тела, мы находим для соответствующих моментов времени тот же вектор $\mathbf{d}'$ и, как легко показать, тот же вектор $\mathbf{h}'$. Резюмируя, можно сказать: когда в системе без поступательного движения возникает состояние движения, для которого в определенном месте компоненты векторов $\mathbf{p}$, $\mathbf{d}$ и $\mathbf{h}$ являются определенными функциями времени, тогда в той же системе, после того как она приведена в движение (и, следовательно, деформирована), может возникнуть состояние движения, при котором в соответствующем месте компоненты векторов $\mathbf{p}'$, $\mathbf{d}'$, $\mathbf{h}'$ будут теми же функциями местного времени.

Только один пункт нуждается еще в более детальном рассмотрении. Так как значения масс m_1 и m_2 выведены из теории квазистационарного движения, то возникает вопрос, можем ли мы пользоваться ими при вычислениях в случае быстрых световых колебаний. При более точном рассмотрении можно обнаружить, что движение электрона может быть рассматриваемо как квазистационарное, если оно мало изменяется в течение того промежутка времени, за который световая волна успевает продвинуться на длину диаметра электрона. Это имеет место в отношении оптических явлений, потому что диаметр электрона чрезвычайно мал по сравнению с длиной волны.

11. Нетрудно видеть, что изложенная теория объясняет большое число фактов.

Рассмотрим систему без поступательного движения, для которой в некоторых ее частях имеем постоянно $\mathbf{p}=0$, $\mathbf{d}=0$, $\mathbf{h}=0$. Тогда в соответствующем состоянии движущейся системы в соответствующих ее частях (или, как можно сказать, в тех же частях деформированной системы) имеем $\mathbf{p}' = 0$, $\mathbf{d}' = 0$, $\mathbf{h}' = 0$. Так как эти последние уравнения влекут за собой $\mathbf{p} = 0$, $\mathbf{d} = 0$, $\mathbf{h} = 0$, что следует из (26) и (6), то все части системы, которые были темными, когда система покоилась, очевидно, остаются также темными после того, как она приведена в движение. Поэтому невозможно обнаружить влияние движения земли на какие-нибудь оптические опыты, которые произведены с земными источниками света и в которых речь идет о наблюдении геометрического распределения света и темноты. Сюда относятся многие опыты, основанные на интерференции и преломлении.

Если, во-вторых, в двух точках системы лучи света, поляризованные в одной и той же плоскости, идут в одинаковом направлении, то можно показать, что отношение амплитуд в этих точках не изменяется от поступательного движения системы. Это замечание относится к таким опытам, в которых сравниваются интенсивности соседних частей поля зрения.

Только что сделанные выводы подтверждают прежние результаты, полученные с помощью соображений, в которых пренебрегалось величинами второго порядка. Эти же выводы содержат также объяснение отрицательного результаты опыта Майкельсона, причем более общее, и по форме несколько отличное от прежде данного. Они показывают далее, почему Рэлей и Брэс не могли наблюдать никаких признаков двойного лучепреломления, вызванного движением земли. Отрицательный результат опытов Трутона и Нобля делается тотчас же ясным, когда мы обратимся к гипотезам § 8. Эти гипотезы, а также наше последнее допущение (§ 10) позволяют заключить, что поступательное движение вызывает одно только сокращение всей системы электронов и других частиц, из которых построены заряженный конденсатор, коромысло и нить крутильных весов. Такое сокращение не дает, однако, никакого повода к заметному изменению направления.

Едва ли нужно отмечать, что я предлагаю эту теорию со всей осторожностью. Хотя она, по моему мнению, отвечает всем твердо установленным фактам, тем не менее эта теория приводит к некоторым следствиям, которые еще нельзя подкрепить опытом. Например, из теории следует, что результат опыта Майкельсона должен оставаться отрицательным, если пропустить интерферирующие лучи света через весомое прозрачное тело.

О нашей гипотезе сокращения электронов нельзя заранее утверждать ни того, что она правдоподобна, ни того, что она недопустима. Наше знание природы электронов еще весьма недостаточно, и единственным средством продвижения вперед является проверка гипотез, подобных предложенным мною здесь. Естественно, при этом возникают трудности, например, при рассмотрении вращения электронов. Может быть, мы должны будем допустить, что в тех явлениях, при которых в покоящейся системе шаровидные электроны вращаются вокруг одного из диаметров, в движущейся системе отдельные точки электронов описывают эллиптические орбиты, которые указанным в § 10 образом соответствуют круговым орбитам покоящегося случая.

12. Мы должны еще сказать несколько слов о молекулярном движении. Можно думать, что тела, у которых оно имеет заметное или даже преобладающее влияние, также подвержены тем же деформациям, что и системы с неизменным относительным положением частиц, о которых мы до сих пор говорили. В самом деле, мы можем вообразить себе в двух молекулярных системах $\sum'$ и $\sum$, из которых только

вторая находится в поступательном движении, такие соответствующие друг другу молекулярные движения, что когда какая-нибудь частица в $\sum'$ имеет определенное положение в определенный момент времени, частица в $\sum$ в соответствующий момент времени занимает соответствующее положение. Представив себе это, мы можем применять соотношение (33) между ускорениями во всех тех случаях, когда скорость молекулярного движения очень мала по сравнению с w. Тогда можно считать, что молекулярные силы определены относительным положением, независимо, от скоростей молекулярного движения. И, наконец если мы себе представим эти силы ограниченными столь малыми радиусами действия, что для действующих друг на друга частиц можно пренебречь разностью отсчетов местных времен, то данная частица вместе с теми, которые лежат в сфере ее притяжения или отталкивания, образует систему, претерпевающую неоднократно упомянутую деформацию. На основании второй гипотезы § 8 мы можем поэтому применить формулу (21) к результирующей молекулярной силе, приложенной к частице. Следовательно, правильное соотношение между силами и ускорениями будет иметь место в обоих случаях, если мы допустим, что *поступательное движение оказывает такое же воздействие на массы всех частиц, как и на электромагнитные массы электронов.*

13. Значения (30), которые я нашел для продольной и поперечной масс электрона, в функции скорости, не совпадают со значениями, полученными раньше Абрагамом. Причина расхождения заключается в том, что в теории Абрагама электроны рассматриваются как шарики неизменных размеров. Результаты Абрагама, касающиеся поперечной массы, подтвердились замечательным оброзом на измерениях отклонения

лучей радия в электрическом и магнитном поле, произведенных Кауфманом. Если я не хочу оставлять открытым очень серьезное возражение против моей теории, я должен показать здесь, что эти измерения не менее хорошо согласуются с моими значениями чем с результатами Абрагама.

Сначала я рассмотрю две серии измерений, которые Кауфман [1]) опубликовал в 1902 г. Из каждой серии он вывел две величины η и ζ, представляющие собой „приведенные“ электрические и магнитные отклонения; эти величины связаны с отношением $\beta = \frac{w}{c}$ следующим образом:

$$\beta = k_1 \frac{\zeta}{\eta}, \quad \psi(\beta) = \frac{\eta}{k_2 \zeta^2}. \tag{34}$$

Функция $\psi(\beta)$ имеет такое значение, что для поперечной массы получается

$$m_2 = \frac{3}{4} \frac{e^2}{6\pi c^2 R} \psi(\beta); \tag{35}$$

k_2 и k_1 суть константы для каждой серии.

Из второго уравнения (30) следует, что моя теория тоже приводит к уравнению вида (35); нужно только вместо функции Абрагама $\psi(\beta)$ взять

$$\frac{4}{3} k = \frac{4}{3} (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, моя теория требует, чтобы при подстановке этого значения функции $\psi(\beta)$ в уравнения (34) последние выполнялись. Мы можем, конечно, придать k_1 и k_2 другие значения, чем Кауфман, для того чтобы получить хорошее совпадение; далее, мы имеем право для каждого измерения подобрать подходящее значение скорости w, или отношения β. Если новые

[1]) Kaufmann, Phys. ZS. 4, 55, 1902.

значения этих трех величин будут sk_1, $\frac{3}{4}k'_2$ и β', то уравнения (34) можно будет написать в следующем виде:

$$\beta' = sk_1 \frac{\zeta}{\eta}, \tag{36}$$

и

$$(1-\beta'^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\eta}{k'_2\zeta^2}. \tag{37}$$

Чтобы проверить свои формулы, Кауфман выбирал такое значение для k_1, что, вычисляя с его помощью β и k_2 из (34), он получал для последнего числа в пределах точности постоянные значения в каждой серии. Это постоянство служило доказательством хорошего совпадения. Я применил аналогичный прием, причем воспользовался некоторыми числами, вычисленными Кауфманом. Я подсчитал для каждого измерения значение выражения

$$k'_2 = (1-\beta'^2)^{\frac{1}{2}}\,\psi(\beta)\,k_2, \tag{38}$$

которое получается из (37) и второй формулы (34) Значения для $\psi(\beta)$ и k_2 взяты из таблицы Кауфмана; для β' я взял произведение найденного им значения β на s. Коэффициент s я выбрал при этом таким образом, чтобы величина (38) сохраняла возможно лучше свое постоянство. Результаты помещены в следующих таблицах, которые соответствуют таблицам III и IV работы Кауфмана.

III. $s = 0{,}933$

β	$\psi(\beta)$	k_2	β'	k_2'
0,851	2,147	1,721	0,794	2,246
0,766	1,86	1,736	0,715	2,258
0,727	1,78	1,725	0,678	2,256
0,6615	1,66	1,727	0,617	2,256
0,6075	1,595	1,655	0,567	2,175

IV. $s = 0{,}954$

β	$\psi(\beta)$	k_2	β'	k_2'
0,963	3,23	8,12	0,919	10,36
0,949	2,86	7,99	0,905	9,70
0,933	2,73	7,46	0,890	9,28
0,883	2,31	8,32	0,842	10,36
0,860	2,195	8,09	0,820	10,15
0,830	2,06	8,13	0,792	10,23
0,801	1,96	8,18	0,764	10,28
0,777	1,89	8,04	0,741	10,20
0,752	1,83	8,02	0,717	10,22
0,732	1,785	7,97	0,698	10,18

Как видно, постоянство k_2' не менее удовлетворительно, чем постоянство k_2, тем более что в каждом случае s определялось только из двух измерений. Коэффициент выбран так, что для двух наблюдений, которые находятся в таблице III на первом и предпоследнем месте, а в таблице IV на первом и последнем месте, значения k_2' оказываются пропорциональными k_2.

Я беру теперь две серии измерений, которые взяты из одной позднейшей работы Кауфмана [1]), и которые Рунге [2]) обработал по методу наименьших квадратов. При этом коэффициенты k_1 и k_2 были определены так, что вычисленные из уравнений Кауфмана (34) значения η для каждого наблюдаемого ζ хорошо совпадали с наблюдаемыми η.

Из того же условия также методом наименьших квадратов я определил коэффициенты a и b уравнения $\eta^2 = a\zeta^2 + b\zeta^4$, которое может быть выведено из моих уравнений (36) и (37).

Зная a и b, я вычисляю β для каждого измерения с помощью соотношения $\beta = \sqrt{a}\,\frac{\zeta}{\eta}$.

[1]) Kaufmann, Gött. Nachr., Math.-phys. Klasse 1903. 90.
[2]) Runge, там же, 326.

Для двух пластинок, на которых Кауфман измерил электрическое и магнитное отклонения, получились следующие результаты (отклонения даны в *см*):

Пластинка № 15, $a = 0{,}06489$, $b = 0{,}3039$

ζ	η					β	
	Наблюдалось	Вычисл. по Рунге	Разность	Вычисл. по Лоренцу	Разность	Вычисл. по Рунге	Вычисл. по Лоренцу
0,1495	0,0388	0,0404	— 16	0,0400	— 12	0,987	0,951
0,199	0,0548	0,0550	— 2	0,0552	— 4	0,964	0,918
0,2475	0,0716	0,0710	+ 6	0,0715	+ 1	0,930	0,881
0,296	0,0896	0,0887	+ 9	0,0895	+ 1	0,889	0,812
0,3435	0,1080	0,1081	— 1	0,1090	— 10	0,847	0,803
0,391	0,1290	0,1297	— 7	0,1305	— 15	0,804	0,763
0,437	0,1524	0,1527	— 3	0,1532	— 8	0,763	0,727
0,5825	0,1788	0,1777	+ 11	0,1777	+ 11	0,724	0,692
0,5265	0,2033	0,2039	— 6	0,2033	— 0	0,688	0,660

Пластинка № 19, $a = 0{,}05867$, $b = 0{,}2591$

ζ	η					β	
	Наблюдалось	Вычисл. по Рунге	Разность	Вычисл. по Лоренцу	Разность	Вычисл. по Рунге	Вычисл. по Лоренцу
0,1495	0,0404	0,0388	+ 16	0,0379	+ 25	0,990	0,954
0,199	0,0529	0,0527	+ 2	0,0522	+ 7	0,969	0,923
0,247	0,0678	0,0675	+ 3	0,0674	+ 4	0,939	0,888
0,296	0,0834	0,0842	— 8	0,0844	— 10	0,902	0,849
0,3435	0,1019	0,1022	— 3	0,1026	— 7	0,862	0,811
0,391	0,1219	0,1222	— 3	0,1226	— 7	0,822	0,773
0,437	0,1429	0,1434	— 5	0,1437	— 8	0,782	0,736
0,4825	0,1660	0,1665	— 5	0,1664	— 4	0,744	0,702
0,5265	0,1916	0,1906	+ 10	0,1902	+ 14	0,709	0,671

Я не имел времени перечислять другие таблицы из работы Кауфмана. Так как последние, подобно таблицам для пластинки № 15, начинаются с довольно большой отрицательной разности между значениями η, выведенными из наблюдений, и теми, которые вычислил Рунге, — то мы можем ожидать, что и для них получится удовлетворительное совпадение с моими формулами.

14. Я пользуюсь этим случаем, чтобы упомянуть об одном эксперименте, проделанном Трутоном [1]) по предложению Фицджеральда, в котором он пытался обнаружить наличие внезапного импульса, действующего на конденсатор в момент зарядки или разрядки; для этой цели, конденсатор был подвешен на крутильных весах с пластинами параллельно движению земли. Для того, чтобы оценить величину ожидаемого эффекта, достаточно рассмотреть конденсатор с эфиром в качестве диэлектрика. Согласно § 1 мы будем иметь для заряженного прибора электромагнитный момент количества движения величины

$$\mathbf{G} = \frac{2U}{c^2}\mathbf{w}$$

при пренебрежении величинами третьего и высших порядков. Так как этот момент возникает при зарядке и исчезает при разрядке, то конденсатор должен испытывать в первом случае толчек $-\mathbf{G}$ и во втором толчек $+\mathbf{G}$. Трутон однако не смог обнаружить подобного эффекта. Я полагаю, что возможно показать, в противоположность подсчетам Трутона, что чувствительность прибора была далеко не достаточной для предположенных наблюдений.

Обозначая, как и выше, через U энергию заряженного конденсатора в покое и через $U + U'$ энергию в состоянии движения, мы находим по формулам настоящей статьи с точностью до величин второго

[1]) Trouton, Doublin Roy. Soc. Trans. (2) 7, 379, 1902. Эта работа напечатана также в собрании трудов Фицджеральда, изданных Лармором (The scientific writings of Fitz-Gerald, Dublin and London, 1902).

порядка $U' = \frac{2w^2}{c^2}U$; это совпадает по порядку с значением, которым пользовался Трутон для оценки эффекта. Интенсивность внезапного толчка или импульса будет, следовательно, $\frac{U'}{w}$. Допустив теперь, что прибор в начале находился в покое, мы можем сравнить отклонение α, произведенное этим импульсом, с отклонением α', которое испытывают крутильные весы под влиянием постоянной пары сил K, действующей в течение половины периода колебания. Мы можем также взять случай, когда колебательное движение уже началось; тогда импульс, приложенный в момент прохождения прибора через положение равновесия, изменит амплитуду на некоторую величину β; аналогичный же эффект β' может быть вызван парой сил K, действующей в течение всего колебания от одного крайнего положения до другого.

Пусть T будет периодом колебания и l расстоянием от конденсатора до нити крутильных весов. Тогда легко найти, что

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\pi U' l}{K T w}. \qquad (39)$$

Согласно Трутону значение U' достигает одного-двух эргов, и наименьшая пара сил, которая могла бы дать заметное отклонение, была оценена в 7,5 CGS единиц. Если мы подставим это значение для K и премем во внимание, что скорость земли равна $3 \cdot 10^6$ *см/сек*, мы увидим, что (39) должно быть весьма малой дробью.

(Заседание Академии Наук 23 апреля 1904 г. Напечатано 27 мая 1904 г.).

А. ПУАНКАРЕ