

ИСТОЧНИКИ ЗВЕЗДНОЙ ЭНЕРГИИ И ТЕОРИЯ ВНУТРЕННЕГО СТРОЕНИЯ ЗВЕЗД

Н.А. КОЗЫРЕВ

Настоящая работа представляет собой опыт индуктивного решения задачи о внутреннем строении звезд путем анализа закономерностей наблюдательной астрофизики. Условия состояния материи и энергии внутри звезд являются предметом исследования, а не предметом априорных предположений.

В первой части исследованы две основные закономерности, установленные наблюдениями: соотношение «масса–абсолютная яркость» и соотношение «период–средняя плотность Цефеид». Результаты, полученные из анализа этих закономерностей, оказались отличными от обычных представлений теории внутреннего строения звезд. Главнейшие из них следующие: 1) во всех звездах, включая даже сверхгиганты, лучевое давление не играет существенной роли, и им можно пренебрегать в сравнении с газовым давлением; 2) внутренние области звезд почти целиком состоят из водорода (средний молекулярный вес близок к 1/2); 3) поглощение света обусловлено томсоновским рассеянием света свободными электронами; 4) звезды имеют структуры, близкие к политропным класса 3/2.

Совокупность полученных результатов позволяет в первом приближении рассчитывать физические условия внутри звезд, исходя из наблюдаемых характеристик L , M , R . Например, для центра Солнца получается температура около 6 млн. град., видимо, не достаточная для термонуклеарных реакций.

ВВЕДЕНИЕ

Энергия, посылаемая в пространство Солнцем и звездами, поддерживается особыми источниками, которые должны обеспечить свечение звезд по крайней мере в течение нескольких миллиардов лет и должны зависеть от физических условий состояния материи, как это следует из соображений устойчивости звезд. За последние годы успехи атомной физики привели к открытию термонуклеарных реакций, которые могут являться источником энергии, удовлетворяющим указанным требованиям. Эти реакции между протонами и различными легкими ядрами, в результате которых происходит преобразование водорода в гелий, могут происходить при температурах, вероятных для внутренних областей звезд, – порядка двадцати миллионов градусов. Сравнительное изучение различных термонуклеарных реакций привело Бете (Bethe) к заключению, что энергия Солнца и звезд основной последовательности вырабатывается в результате циклических реакций, в которых главную роль играет захват протона ядрами азота и углерода с последующим образованием ядра гелия [1]. Эта теория Бете, получившая за последнее время широкое признание, до сих пор не имеет прямых астрофизических подтверждений. Звезды, вырабатывающие особенно много энергии, т.е. звезды последовательности гигантов, вероятно, имеют температуры, значительно более низкие, чем температура, необходимая для термонуклеарных реакций. Кроме того, наличие бурной конвекции в наружных слоях звезд, вспышки новых, особенный ультрафиолетовый спектр говорят за то, что выделение энергии происходит и в наружных слоях звезд и в ряде случаев имеет характер взрывов. Естественное желание видеть во всех этих явлениях общую причину заставляет относиться с осторожностью к теории термонуклеарных реакций. Можно без преувеличения сказать, что уже в течение ста лет, начиная с контракционной гипотезы Гельмгольца (Helmholtz), ни одно новое принципиальное открытие физики не проходило без попытки применения его к объяснению звездной энергии, причем каждый раз вопрос считался решенным, несмотря на отсутствие подтверждений астрофизическим материалом. По-видимому, мы имеем дело с механизмом выделения энергии совершенно особого рода, неизвестного земной лаборатории. Но это обстоятельство нельзя относить за счет наличия внутри звезд каких-то совершенно исключительных условий. Действительно, весьма вероятно, что для ряда звезд (например, инфракрасный спутник ϵ Aurigae) условия внутри них близки к тем, которые могут быть осуществлены в лаборатории. Причина того, что такой тип выделения

энергии не был обнаружен земным экспериментом, надо полагать, лежит в своеобразии необходимой постановки опыта, а также малости доступных на земле масштабов. Что касается физических теорий, которые столь часто позволяют далеко экстраполировать данные опыта, то их несостоятельность в данном вопросе связана, вероятно, с тем, что основные принципы теории взаимодействия материи и лучистой энергии нуждаются в дополнениях и дальнейшем развитии.

Многочисленные явления и эмпирические закономерности, открытые наблюдательной астрофизикой, связаны с вопросом происхождения звездной энергии, а потому и не имеют удовлетворительной интерпретации. В первую очередь это относится к вопросам поведения звезды в целом, т.е. к вопросам теории внутреннего строения звезд. Существующие теории строятся на основе априорных допущений относительно поведения материи и энергии в звезде, справедливость которых проверяется из сравнений результатов теоретического анализа с данными наблюдений. Это путь построения различных звездных моделей, широко используемый в настоящее время в теории внутреннего строения звезд. Такой метод исследования вряд ли может быть плодотворным, ибо законы природы часто столь неожиданны, что можно произвести многочисленные пробы и все же не найти единственно правильного решения. Поскольку эмпирические закономерности, относящиеся к звезде в целом, выявлены наиболее четко, в теории внутреннего строения звезд можно пытаться радикально изменить постановку задачи и формулировать ее следующим образом: рассматривая звездный мир как гигантскую лабораторию, в которой материя и лучистая энергия могут изучаться в грандиозном диапазоне состояний, исходя из анализа полученных в ней эмпирических закономерностей и не делая произвольных допущений, найти условия поведения материи и энергии в звездах как некоторые неизвестные в математически сформулированных равенствах. Такая задача может казаться безнадежно трудной из-за большого числа неизвестных. Действительно, нам неизвестны: 1) фазовое состояние материи (газ Больцмана (Boltzman), Ферми (Fermi) и др.); 2) характер переноса энергии – лучеиспусканием или конвекцией, возможной при соответствующем механизме выделения энергии; 3) роль лучевого давления внутри звезд и связанное с ней; 4) значение коэффициента поглощения; 5) химический состав звезд, т.е. среднее значение молекулярного веса газов внутри звезд, и, наконец, 6) механизм выделения звездной энергии. К счастью, основная закономерность астрофизики – соотношение между массой и абсолютной яркостью звезд, не давая никакого ответа на вопрос о природе звездной энергии, удовлетворительным образом дает представление о других неизвестных. Используя далее соотношение период–средняя плотность Цефеид, можно уточнить наши представления о структуре звезд. В результате получается возможность, еще не зная природы звездной энергии, в первом приближении рассчитывать физические условия внутри звезд, исходя из наблюдаемых характеристик: L , M и R . На этой основе возможна физическая интерпретация другой закономерности астрофизики – диаграммы Расселла–Гертцшпрунга (Russell–Hertzprung), т.е. соотношения между эффективными температурами и абсолютной яркостью звезд, которая почти исключительно зависит от нашего последнего неизвестного. Этот анализ приводит к определенным зависимостям, характеризующим те особые условия состояния материи и лучистой энергии, при которых и происходит выделение энергии. Полученные выражения оказываются совершенно неожиданными с точки зрения теоретической физики и столь характерными, что появляется возможность исследования физической сущности процесса выделения звездной энергии.

На этом пути индуктивного решения задачи о природе звездной энергии нам неизбежно придется пользоваться определенными физическими посылками, кажущаяся очевидность которых при дальнейших исследованиях может и не подтвердиться. Это обстоятельство, однако, не порочит принятого нами чисто астрофизического метода и лишь вызывает необходимость применения естественного приема последовательных приближений; излагаемые в первой части результаты следует рассматривать как первое приближение.

Вопрос о внутреннем строении звезд чрезвычайно сложен и запутан в многочисленных теоретических исследованиях. Поэтому в первую очередь необходимо внести в этот вопрос максимальную четкость, проведя его рассмотрение с самых основ. Наблюдения показывают, что звезда обычно находится в равновесном или квазиравновесном состоянии. Таким образом, поведение материи внутри звезд должно, хотя бы приближенно, удовлетворять условиям механического и теплового равновесия. Отсюда получаются два основных уравнения, при помощи которых и осуществляется математическая формулировка нашей задачи. В простейшей задаче мы будем пренебрегать эффектами вращения звезды и считать, что звезда обладает сферической симметрией.

Часть I

ГЛАВА I

ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ЗВЕЗД

§1. УРАВНЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Обозначим через P общее давление, т.е. сумму газового давления p и давления лучистой энергии B , на расстоянии r от центра звезды. Условие механического равновесия заключается в том, что изменение P на единицу расстояния r должно быть уравновешено весом единицы объема газа. Таким образом,

$$\frac{dP}{dr} = -g\rho, \quad (1.1)$$

где ρ – плотность газа и g – ускорение силы тяжести. Если обозначить через φ гравитационный потенциал, то

$$g = -\text{grad } \varphi; \quad (1.2)$$

потенциал φ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi G\rho; \quad (1.3)$$

гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-8}$. В случае сферической симметрии

$$\nabla^2 \varphi = \text{div grad } \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{dr^2 \text{ grad } \varphi}{dr}. \quad (1.4)$$

Сопоставляя эти равенства, находим следующее уравнение механического равновесия звезды:

$$\frac{1}{\rho r^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{r^2 dP}{\rho dr} \right] = -4\pi G. \quad (1.5)$$

Здесь

$$P = p + B. \quad (1.6)$$

Внутри звезд излучение почти изотропно. Поэтому B равно одной трети плотности лучистой энергии. Как будет видно из следующего параграфа, с достаточной степенью точности можно принять, что плотность лучистой энергии определяется законом Стефана–Больцмана. Таким образом,

$$B = \frac{1}{3} \alpha T^4, \quad (1.7)$$

где постоянная Стефана $\alpha = 7,59 \cdot 10^{-15}$ и T – абсолютная температура. Давление P зависит от плотности ρ , вообще говоря, от температуры. Характер этой зависимости определяется фазовым состоянием материи. Для идеального газа

$$p = nkT = \frac{\mathfrak{R}T}{\mu} \rho. \quad (1.8)$$

Здесь n – число частиц в единице объема; k – постоянная Больцмана, равная $1,372 \cdot 10^{-16}$; \mathfrak{R} – постоянная Клапейрона, равная $8,313 \cdot 10^7$, и μ – средний молекулярный вес. Например, для обыкновенного газа Ферми давление зависит только от плотности согласно формуле

$$p = K\rho^{5/3}; \quad K = \mu_e^{-5/3} K_H; \quad K_H = 9,89 \cdot 10^{12}, \quad (1.9)$$

где μ_e – число единиц молекулярного веса на каждый свободный электрон. Мы видим, что распределение давлений внутри звезды может быть получено из (1.5), вообще говоря, лишь в том случае, когда известно распределение температур. Это последнее определяется условием теплового равновесия.

§2. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛООВОГО РАВНОВЕСИЯ

Обозначим через ε количество энергии, вырабатываемое в секунду единицей массы звездной материи. Величина ε может зависеть от физических условий состояния материи и, таким образом, является функцией r . Изучение ε и составляет цель нашего исследования. Условие теплового равновесия или условие энергетического баланса может быть записано следующим образом:

$$\operatorname{div} F = \varepsilon \rho, \quad (1.10)$$

где F – полный поток энергии, состоящий из потока лучистой энергии F_R , потока, переносимого конвекционными токами F_C и потока теплопроводности F_T . Таким образом,

$$F = F_R + F_C + F_T. \quad (1.11)$$

Определим в первую очередь значение F_R . Изменение интенсивности излучения I при прохождении слоя толщиной ds согласно закону Кирхгофа имеет следующее выражение:

$$\frac{dI}{ds} = -\kappa\rho[I - E], \quad (1.12)$$

где κ – коэффициент поглощения, рассчитанный на единицу массы, и E – излучательная способность абсолютно черного тела при температуре слоя, рассчитанная на единицу телесного угла ω . Это последнее уравнение в полярных координатах будет иметь вид

$$\cos \theta \frac{\partial I}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial I}{\partial \theta} = -\kappa\rho[I - E]; \quad (1.12a)$$

здесь θ – угол, образованный нормалью к слою, т.е. r , с направлением излучения I . Поток F_R и лучевое давление B связаны с I следующими соотношениями:

$$F_R = \int I \cos \theta d\omega; \quad Bc = \int I \cos^2 \theta d\omega, \quad (1.13)$$

где c – скорость света, и интегрирование производится по всем телесным углам. Обозначим далее

$$\int I d\omega = J. \quad (1.14)$$

Умножая (1.12a) на $\cos \theta$ и интегрируя по $d\omega$, имеем

$$c \frac{dB}{dr} - \frac{1}{r} [J - 3Bc] = -\kappa \rho F_R.$$

Для получения отсюда F_R примем следующее приближение Эддингтона (Eddington):

$$3Bc = J = 4\pi E, \quad (1.15)$$

равносильное отбрасыванию производных более высоких порядков в выражении F_R . Тогда

$$F_R = -\frac{c}{\kappa \rho} \frac{dB}{dr}. \quad (1.16)$$

Рассмотрим теперь конвективный поток F_c . На поверхности Солнца и звезд мы видим проявление бурной конвекции. Возможно, что эта конвекция вынужденная, связанная с внезапными выделениями энергии. Но для того чтобы конвекционные токи могли создать значительный поток F_c , они должны обладать большими скоростями и переносить энергию на большие расстояния. Эти условия будут осуществляться в зонах конвективной неустойчивости, где возможно развитие свободной конвекции. Начиная с Шварцшильда (Schwarzschild) [2], работами целого ряда астрофизиков: Унзольда (Unsöld), Коулинга (Cowling), Бирмана (Bierman) и других – было показано, что хотя равновесие звезды, вообще говоря, устойчиво, развитие свободной конвекции действительно возможно в зонах быстрого нарастания источников энергии или в зонах, где энергия ионизации порядка тепловой энергии газа.

Будем считать, что конвекционные токи радиальны. Обозначим через Q полную энергию единицы массы конвекционного тока. Следовательно, Q представляет собой сумму внутренней энергии газа, тепловой функции, потенциальной и кинетической энергии. Допустим, что в пути конвекционный ток не меняет своей энергии, т.е. изменяется адиабатически, а диссипация энергии происходит лишь при остановке тока. Тогда поток энергии, переносимый конвекцией, согласно Шмидту (Schmidt) [3] может быть представлен следующим образом:

$$F_c = -A\rho \frac{dQ}{dr}; \quad A = \bar{v}\bar{\lambda}. \quad (1.17)$$

Величина A представляет собой коэффициент конвекции; $\bar{\lambda}$ – средняя длина пробега конвекционного тока и \bar{v} – средняя скорость тока. Если лучевым давлением можно пренебрегать в сравнении с газовым, то для идеального газа согласно первому началу термодинамики

$$\frac{dQ}{dr} = c_v \frac{dT}{dr} + p \frac{d\frac{1}{\rho}}{dr}, \quad (1.18)$$

или

$$\frac{dQ}{dr} = c_p \frac{dT}{dr} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr}, \quad (1.19)$$

где c_v – теплоемкость газа при постоянном объеме и c_p – теплоемкость при постоянном давлении:

$$c_p = c_v + \frac{\Re}{\mu}.$$

Обозначая

$$\frac{c_p}{c_v} = \Gamma,$$

имеем

$$c_p = \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} \frac{\mathfrak{R}}{\mu}. \quad (1.20)$$

В результате очевидных преобразований находим следующее выражение:

$$\frac{dQ}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} u \quad \text{и} \quad u = 1 - \frac{\Gamma}{4(\Gamma - 1)} \frac{p}{B} \frac{dB}{dp}, \quad (1.21)$$

для одноатомного газа $\Gamma = 5/3$.

Поток теплопроводности имеет аналогичное выражение вида (1.17). Поскольку частицы двигаются во всевозможных направлениях, вместо u в выражении для A будет стоять одна треть средней скорости движения частиц. В данном случае dQ/dr будет равняться лишь первому члену формулы (1.18) и, следовательно, иметь значение того же порядка, что и для конвекции. Имея в виду формулу (1.17) для A , очевидно, что F_c в подавляющее число раз превосходит F_T . Только в некоторых исключительных случаях, например для вырожденного газа, F_T может иметь существенное значение. Используя формулы (1.10), (1.16), (1.17) и (1.21), получим следующее уравнение теплового равновесия:

$$\frac{1}{\rho r^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{r^2 dB}{\kappa \rho dr} \right] - \frac{1}{c \rho r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 A u \frac{dp}{dr} \right] = -\frac{\varepsilon}{c}. \quad (1.22)$$

В заключение настоящего параграфа необходимо заметить, что поскольку ε представляет собой весьма малую величину в сравнении с излучением единицы массы, то ничтожные изменения состояния материи должны привести к нарушению наших равенств. Поэтому даже для больших областей, сравнимых с размерами звезды, условие (1.10) теплового баланса может не соблюдаться. То же относится и к выражению теплового потока конвекции, ибо только для очень больших площадей можно статистически трактовать грандиозную конвекцию звезд. Поэтому полученные уравнения следует понимать как усреднение по всем радиусам звезды и за большой промежуток времени, и в этом смысле они должны обязательно выполняться. Указанные ограничения не мешают нашему анализу, поскольку нас будет интересовать общее представление о поведении звезды как целого и в ряде случаев лишь как среднее из большого числа звезд.

§3. ОСНОВНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

Чтобы фиксировать внимание на основном, начнем с рассмотрения полученных уравнений равновесия для простейшего случая, а именно: в уравнении механического равновесия будем пренебрегать лучевым давлением B в сравнении с газовым p , а в уравнении теплового равновесия – конвекционным членом. Тогда мы получим следующую основную систему:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho r^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{r^2 dp}{\rho dr} \right] &= -4\pi G, \\ \frac{1}{\rho r^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{r^2 dB}{\kappa \rho dr} \right] &= -\frac{\varepsilon}{c}. \end{aligned} \quad (I)$$

B зависит только от температуры газа согласно формуле (1.7). Коэффициент поглощения единицы массы κ зависит, вообще говоря, от (p, B) . Эта зависимость нам неизвестна. То же относится и к ε . Допустим теперь, что эти функции нам известны. Тогда для решения системы необходимо иметь еще уравнение состояния материи, связывающее переменные: ρ , p и B . В этом случае остаются две функции, например p и B , зависимость которых от r полностью определится уравнениями (I). Эти функции должны удовлетворять следую-

щим граничным условиям. На поверхности звезды полный поток энергии $F_0 = F_{R_0}$; ($F_c = F_T = 0$). Приближенно по формуле (1.13)

$$F_{R_0} = \frac{1}{2}J_0 = \frac{3}{2}cB_0,$$

откуда при помощи формулы (1.16) находим следующее условие на поверхности:

$$\text{при } p = 0: B = -\frac{2}{3} \frac{dB}{\kappa \rho dr}. \quad (1.23)$$

Из уравнений (I) видно, что условие конечности решений при $r = 0$ равносильно следующим:

$$\text{при } r = 0: \frac{dp}{dr} = 0; \quad \frac{dB}{dr} = 0. \quad (1.24)$$

Эти условия в центре звезды совершенно необходимы и безусловно выполняются в реально существующем теле. Теория внутреннего строения звезд проф. Милна (Milne) [4], основанная на решениях, не удовлетворяющих этим условиям, не означала, разумеется, отказа от этих условий для центра звезды. В слоях звезд, удаленных от центра, эти особые решения могут действительно осуществляться, но лишь в том случае, когда производные физических характеристик материи не являются непрерывными функциями расстояния, а имеют разрывы. Следовательно, рассмотрение таких решений а priori допускает, что уравнение фазового состояния материи имеет разрыв, т.е. что материя существует в звезде по крайней мере в двух совершенно различных фазах. Только таким путем, наделяя материю гипотетическими свойствами, можно было прийти к наличию внутри звезд областей особо высоких температур и давлений. Если же не руководствоваться предвзятой точкой зрения о существовании в звездах «особенных» областей, то представляется наиболее естественным начать рассмотрение задачи при помощи обычных уравнений фазового состояния материи.

Произведем теперь весьма важное преобразование переменных в системе (I). Вместо r и других переменных введем безразмерные величины с соответствующими граничными условиями. Обозначим значком c значения функций в центре звезды ($r = 0$). Вместо r введем безразмерную величину x согласно формуле

$$x = ar; \quad a = \rho_c \sqrt{\frac{4\pi G}{p_c}} \quad (1.25)$$

и введем функции

$$\rho_1 = \frac{\rho}{\rho_c}; \quad p_1 = \frac{p}{p_c}; \quad B_1 = \frac{B}{B_c}; \dots \quad (1.26)$$

Тогда, как легко проверить, система (I) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1 x^2} \frac{d}{dx} \left[\frac{x^2 dp_1}{\rho_1 dx} \right] &= -1, \\ \frac{1}{\rho_1 x^2} \frac{d}{dx} \left[\frac{x^2 dB_1}{\kappa_1 \rho_1 dx} \right] &= -\lambda \varepsilon_1, \end{aligned} \quad (Ia)$$

где

$$\lambda = \frac{\varepsilon_c \kappa_c}{4\pi G c \gamma_c} \quad \text{и} \quad \gamma_c = \frac{B_c}{p_c}. \quad (1.27)$$

Все входящие в систему (Ia) функции заключены в пределах 0,1. Условия в центре будут иметь вид

$$\text{при } x = 0: p_1 = 1, \frac{dp_1}{dx} = 0; B_1 = 1, \frac{dB_1}{dx} = 0. \quad (1.28)$$

На поверхности звезды вместо (1.23) практически мы можем пользоваться простым условием

$$\text{при } x = x_0: B_1 = 0; p_1 = 0. \quad (1.29)$$

Напишем теперь в новых переменных систему основных уравнений с учетом конвекции. Из уравнения (1.22) находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1 x^2} \frac{d}{dx} \left[\frac{x^2 dp_1}{\rho_1 dx} \right] &= -1, \\ \frac{1}{\rho_1 x^2} \frac{d}{dx} \left[\frac{x^2 dB_1}{\kappa_1 \rho_1 dx} \right] - \frac{\kappa_c \rho_c}{c \gamma_c} \frac{1}{\rho_1 x^2} \frac{d}{dx} \left[x^2 A u \frac{dp_1}{dx} \right] &= -\lambda \varepsilon_1. \end{aligned} \quad (II)$$

Для идеального газа из формулы (1.21) имеем следующее простое выражение для u :

$$u = 1 - \frac{\Gamma}{4(\Gamma - 1)} \frac{p_1 dB_1}{B_1 dp_1}. \quad (1.30)$$

Наконец, система уравнений с учетом лучевого давления (при отсутствии конвекции), как это видно из формул (1.5) и (1.6), может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1 x^2} \frac{d}{dx} \left[\frac{x^2 d(p_1 + \gamma_c B_1)}{\rho_1 dx} \right] &= -1, \\ \frac{1}{\rho_1 x^2} \frac{d}{dx} \left[\frac{x^2 dB_1}{\kappa_1 \rho_1 dx} \right] &= -\lambda \varepsilon_1. \end{aligned} \quad (III)$$

ГЛАВА 2

АНАЛИЗ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ И СООТНОШЕНИЕ «МАССА – АБСОЛЮТНАЯ ЯРКОСТЬ»

§1. НАБЛЮДАЕМЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗВЕЗД

Из наблюдений нам известны следующие величины, характеризующие звезду: радиус звезды R , масса M и светимость звезды, или полное количество энергии, излучаемое звездой в одну секунду, L . Посмотрим, как эти величины связаны с параметрами основной системы уравнений. В систему уравнений самого общего вида при любых предположениях относительно фазового состояния материи и типа других функций будут входить лишь два параметра: B_c и p_c .

Из формулы (1.25) находим

$$R = \frac{1}{\rho_c} \sqrt{\frac{p_c}{4\pi G}} x_0, \quad (2.1)$$

где x_0 – значение x на поверхности звезды, т.е. там, где $p_1 = B_1 = 0$. Из этой формулы, принимая определенное уравнение состояния материи, легко получить зависимость $R = f(B_c, p_c)$. Следует заметить, что значение x_0 , входящее в формулу (2.1), вообще говоря, может тоже зависеть от B_c и p_c . Однако, поскольку в систему уравнений входят функции, изменяющиеся в пределах $0,1$, x_0 должно быть порядка, не сильно отличающегося от единицы. Поэтому первый множитель формулы (2.1) является основным.

Так как

$$M = 4\pi \int_0^R \rho r^2 dr,$$

то

$$M = \frac{p_c^{3/2}}{G^{3/2} \sqrt{4\pi} \rho_c^2} M_{x_0}, \quad (2.2)$$

где

$$M_{x_0} = \int_0^{x_0} \rho_1 x^2 dx.$$

Наконец, полная яркость звезды

$$L = 4\pi \int_0^R \varepsilon \rho r^2 dr,$$

откуда

$$\frac{L}{M} = \varepsilon_c \frac{L_{x_0}}{M_{x_0}}; \quad L_{x_0} = \int_0^{x_0} \varepsilon_1 \rho_1 x^2 dx. \quad (2.3)$$

Величины M_{x_0} , L_{x_0} не должны сильно меняться при изменении P_c и B_c , сохраняя порядок, близкий к единице. Если величины x_0 , M_{x_0} , L_{x_0} будут одинаковы для ряда звезд, то такого рода конфигурации называются гомологическими, и мы будем говорить, что эти звезды имеют одинаковую структуру.

Легко видеть, что средняя плотность звезды связана с ρ_c следующим соотношением:

$$\bar{\rho} = \rho_c \frac{3M_{x_0}}{x_0^3}. \quad (2.4)$$

Найдем теперь выражение для полной потенциальной энергии звезды Ω :

$$\Omega = -G \int_0^R \frac{M_r}{r} dM_r.$$

Умножая под знаком интеграла на R и деля на M^2 , находим

$$\Omega = - \frac{GM^2}{R} \Omega_{x_0} \quad (2.5)$$

и

$$\Omega_{x_0} = \frac{x_0}{M_{x_0}^2} \int_0^{x_0} x \rho_1 M_x dx.$$

При малых лучевых давлениях, пользуясь условием механического равновесия, из системы (I) имеем

$$\int_0^{x_0} x \rho_1 M_x dx = - \int_0^{x_0} x^3 dp_1 = 3 \int_0^{x_0} x^2 p_1 dx, \quad (2.5a)$$

откуда

$$\Omega_{x_0} = \frac{3x_0 \int_0^{x_0} p_1 x^2 dx}{\left[\int_0^{x_0} \rho_1 x^2 dx \right]^2}. \quad (2.6)$$

Так как все функции, входящие в основную систему уравнений, могут быть выражены через B_1 и p_1 , то для их определения мы имеем систему двух дифференциальных уравнений с двумя параметрами B_c и p_c . Для полного описания решений условий в центре звезды (1.28) достаточно. Таким образом, поверхностное условие (1.29) будет выполняться лишь при некоторых соотношениях между B_c и p_c . Отсюда следует, что все величины, характеризующие звезду, являются функциями только одного параметра, например B_c : $R = f_1(B_c)$, $M = f_2(B_c)$ и $L = f_3(B_c)$. Это обстоятельство при одинаковом химическом составе звезд дает нам зависимости: 1) $L = \varphi_1(M)$ – масса–абсолютная яркость и 2) диаграмму Ресселла–Гертцшпрунга, т.е. $L = \varphi_2(R)$.

Из изложенного видно, что неизбежным следствием равновесия звезд является существование зависимостей между M , L и R . Таким образом, существование этих зависимостей, найденных эмпирически, могло быть предсказано теорией.

§2. ЗВЕЗДЫ ПОЛИТРОПНЫХ СТРУКТУР

Решение основной системы должно давать зависимости $p_1(x)$ и $B_1(x)$. Следовательно, в результате решения системы мы можем получить и $B_1(p_1)$. При заданном фазовом состоянии материи тогда может быть получена и зависимость $p_1(\rho_1)$. Допустим, что эта зависимость типа $p_1 = \rho_1^\Gamma$ где Γ – некоторый постоянный показатель. Такая структура звезды называется политропной. Для политропных структур можно сравнительно легко найти зависимости всех характеристик от x . Поэтому для получения первого представления о виде решений системы мы займемся рассмотрением этих структур. Первые работы по исследованию внутреннего строения звезд Эмдена (Emden) и были проведены этим путем.

Политропная зависимость как бы заменяет уравнение теплового равновесия. Остается в системе только одно первое уравнение. Введем новую переменную T_1 которая для идеального газа равна приведенной температуре:

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \rho_1^{\Gamma-1} = T_1, \quad (2.7)$$

или

$$\rho_1 = T_1^n; \quad n = \frac{1}{\Gamma - 1} \quad \text{и} \quad p_1 = T_1^{n+1}. \quad (2.7a)$$

Таким образом,

$$dp_1 = (n + 1)T_1^n dT_1.$$

Подставляя эти выражения в первое уравнение (I), находим

$$E[T'_1] = \frac{1}{x_1^2} \frac{d}{dx_1} \left[x_1^2 \frac{dT_1}{dx_1} \right] = -T_1^n, \quad (2.8)$$

где вместо x введена новая переменная x_1 :

$$x = \sqrt{n+1} x_1. \quad (2.9)$$

Уравнение Эмдена (2.8) интегрируется для случая $n = 0$ и $n = 1$ весьма просто. Действительно, при $n = 0$, т.е. для звезды постоянной плотности, находим

$$p_1 = T_1 = 1 - \frac{x_1^2}{6} \quad \text{для } n = 0. \quad (2.10)$$

Откуда легко вычисляются и все другие характеристики. При $n = 1$ подстановка $u = T_1 x_1$ сводит дифференциальное уравнение (2.8) к простому виду: $u'' = -u$. Следовательно,

$$\text{при } n = 1: T_1 = \frac{\sin x_1}{x_1} \quad \text{и} \quad p_1 = \frac{\sin^2 x_1}{x_1^2}. \quad (2.11)$$

Для других индексов политропы n можно получить решение в виде ряда по степеням x_1 . Все нечетные производные оператора E должны обращаться в нуль при $x_1 = 0$. Для четных же производных легко установить

$$E_0^{(2i)}[T'_1] = \frac{2i+3}{2i+1} T_1^{(2i+2)}(0). \quad (2.12)$$

Теперь непосредственным дифференцированием формулы (2.8) уже нетрудно вычислить значения производных различных порядков функции T_1 при $x_1 = 0$ и тем самым определить коэффициенты степенного разложения. Получается следующий ряд:

$$T_1 = 1 - \frac{x_1^2}{3!} + \frac{n}{5!} x_1^4 - \frac{n(8n-5)}{3 \cdot 7!} x_1^6 + \frac{n(122n^2 - 183n + 70)}{9 \cdot 9!} x_1^8 \dots \quad (2.13)$$

При помощи (2.13) можно отойти от особой точки $x_1 = 0$, дальнейший же ход решения легко получить численным интегрированием. В результате можно составить таблицу характеристик звездных структур для некоторых n (табл. 1).

Т а б л и ц а 1

| n | x_0 | M_{x_0} | $\frac{x_0^2}{3M_{x_0}}$ | Ω_{x_0} |
|------|-------|-----------|--------------------------|----------------|
| 0 | 2,45 | 4,90 | 1,0 | 3/5 |
| 1 | 4,52 | 9,04 | 3,4 | 3/4 |
| 3/2 | 5,81 | 11,1 | 5,9 | 6/7 |
| 2 | 7,65 | 12,7 | 11,4 | 1 |
| 2,5 | 10,2 | 14,4 | 24,1 | 6/5 |
| 3 | 13,8 | 16,1 | 54,4 | 3/2 |
| 3,25 | 17,0 | 17,5 | 88,2 | 12/7 |

Случай $n = 3/2$ соответствует адиабатическому изменению состояния одноатомного идеального газа ($\Gamma = 5/3$), а также обыкновенному газу Ферми (1.9). Что касается $n = 3$, то этому состоянию соответствуют: с одной стороны, релятивистский газ Ферми, а с другой стороны, идеальный газ при $B_1 = p_1$ – так называемое решение Эддингтона.

Для политропных структур значения Ω_{x_0} вычисляются точно. Действительно, интеграл числителя (2.6) преобразуется:

$$\int_0^{x_0} p_1 x^2 dx = \int_0^{x_0} T_1 dM_x = - \int_0^{x_0} M_x \frac{dT_1}{dx} dx.$$

Из уравнения Эмдена следует, что

$$M_x = -(n+1)x^2 \frac{dT_1}{dx}. \quad (2.14)$$

Таким образом,

$$\int_0^{x_0} p_1 x^2 dx = \frac{1}{n+1} \int_0^{x_0} \frac{M_x^2}{x^2} dx = - \frac{M_{x_0}^2}{x_0(n+1)} + \frac{2}{n+1} \int_0^{M_{x_0}} \frac{M_x}{x} dM_x.$$

Из формулы (2.5а) получается другое соотношение между теми же интегралами, откуда вычисляем

$$\left[1 - \frac{6}{n+1}\right] \int_0^{x_0} p_1 x^2 dx = - \frac{M_{x_0}^2}{x_0(n+1)},$$

и, подставляя это выражение в формулу (2.6), находим формулу Риттера (Ritter)

$$\Omega_{x_0} = \frac{3}{5-n}. \quad (2.15)$$

Из этого выражения, между прочим, вытекает, что звезда может быть конечных размеров лишь при $N < 5$.

§3. РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШЕЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Начнем с рассмотрения системы (1а), справедливой при отсутствии конвекции и малом лучевом давлении. Если коэффициент поглощения κ , количество вырабатываемой энергии ε и уравнение фазового состояния материи могут быть представлены как произведения различных степеней функций p , B и ρ , то функции $\kappa_1 = \kappa/\kappa_c$, $\varepsilon_1 = \varepsilon/\varepsilon_c$ и уравнения фазового состояния будут зависеть только от p_1 , B_1 и ρ_1 и не содержать параметров p_c , B_c и ρ_c . В этом случае единственным параметром системы будет коэффициент λ . Систему (1а) будем исследовать при еще бóльших ограничениях: допустим, что κ не зависит от физических условий, и будем принимать закон идеальных газов; таким образом, мы имеем зависимости

$$\kappa = \text{const}; \quad \kappa_1 = 1; \quad p_1 = B_1^{1/4} \rho_1; \quad \varepsilon_1 = f(p_1, B_1); \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1 x^2} \frac{d}{dx} \left[\frac{x^2 dp_1}{\rho_1 dx} \right] &= -1, \\ \frac{1}{\rho_1 x^2} \frac{d}{dx} \left[\frac{x^2 dB_1}{\rho_1 dx} \right] &= -\lambda \varepsilon_1, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где

$$\lambda = \frac{\varepsilon_c \kappa}{4\pi G c \gamma_c}; \quad \gamma_c = \frac{B_c}{p_c}. \quad (2.18)$$

Взяв интегралы от обеих частей равенств (2.17), находим

$$\frac{x^2}{\rho_1} \frac{dB_1}{dx} = -\lambda L_x; \quad \frac{x^2}{\rho_1} \frac{dp_1}{dx} = -M_x, \quad (2.19)$$

где использованы уже ранее введенные обозначения

$$L_x = \int_0^x \varepsilon_1 \rho_1 x^2 dx; \quad M_x = \int_0^x \rho_1 x^2 dx. \quad (2.20)$$

Интегрируя (2.19), получим, используя граничные условия, следующие выражения:

$$\lambda = \frac{1}{\int_0^{x_0} L_x \frac{\rho_1}{x^2} dx}; \quad 1 = \int_0^{x_0} M_x \frac{\rho_1}{x^2} dx.$$

Следовательно,

$$\lambda = \frac{\int_0^{x_0} M_x \frac{\rho_1}{x^2} dx}{\int_0^{x_0} L_x \frac{\rho_1}{x^2} dx}. \quad (2.21)$$

Из выражений (2.21) и (2.20) заключаем, что чем больше концентрация источников энергии, тем больше λ . Если интенсивность источников возрастает к центру, то $\lambda > 1$. При $\varepsilon = \text{const}$, $\varepsilon_1 = 1$ очевидно $\lambda = 1$. Наконец, если энергия вырабатывается в большей степени в наружных слоях звезды, то $\lambda < 1$. Из уравнений (2.19) следует

$$\frac{dB_1}{dp_1} = \frac{\lambda L_x}{M_x}. \quad (2.22)$$

В силу условий $p_1 = 0$, $B_1 = 0$; $p_1 = 1$, $B_1 = 1$ среднее значение производной dB_1/dp_1 всегда равно единице. Так как

$$\left(\frac{dB_1}{dp_1}\right)_{x=0} = \lambda \quad \text{и} \quad \left(\frac{dB_1}{dp_1}\right)_{x=x_0} = \frac{\lambda L_{x_0}}{M_{x_0}},$$

приходим к выводу, что в случае центральных источников $(\lambda L_{x_0}/M_{x_0}) < 1$, а при поверхностных $(\lambda L_{x_0}/M_{x_0}) > 1$. При равномерном выделении энергии $\frac{\lambda L_x}{M_x} = 1$, $B_1 = p_1$, и мы имеем рассмотренный в предыдущем параграфе случай политропы третьего класса. Этот частный вид решения был положен Эддингтоном в основу его теории внутреннего строения звезд. При $n > 3$, как легко видеть, $(dB_1/dp_1)_{x_0} \rightarrow \infty$, что соответствует $L_{x_0} \rightarrow \infty$. Поэтому можно считать, что случаи $n > 3$ характеризуют звезду с поверхностными источниками энергии. Политропы класса $n < 3$ соответствуют до некоторой степени источникам, усиливающимся к центру. Поэтому данные табл.1 отвечают наиболее вероятным структурам звезд. Однако следует иметь в виду, что при $n < 3$ $(dB_1/dp_1)_{x_0} = 0$, как это вытекает из формул (2.7) и (2.7а), и что, следовательно, $L_{x_0} = 0$. Таким образом, политропные конфигурации, соответствующие концентрированным источникам, могут иметь место лишь при наличии стока энергии в наружных слоях звезды.

Последовательное дифференцирование формулы (2.22) при использовании системы (2.17) дает возможность вычислить производные $B_1(p_1)$ при $p_1 = 1$ и таким образом получить для $B_1(p_1)$ разложение в ряд Тейлора. Первые члены этого разложения имеют вид

$$B_1 = 1 + \lambda(p_1 - 1) + \frac{3}{10} \lambda \left[\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial p_1} + \lambda \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial B_1} \right]_1 (p_1 - 1)^2 + \dots$$

Из поверхностного условия $B_1 = 0$ при $p_1 = 0$ с помощью этой формулы при достаточном числе членов получается уравнение, определяющее λ . Этот прием дает ориентировочное значение λ , уточнить которое можно численным интегрированием системы (2.17). Последнюю операцию приходится производить последовательными пробами.

Центр, т.е. $x = 0$, является особой точкой дифференциальных уравнений (2.17). Отойти от особой точки можно при помощи рядов, после чего (когда сходимость рядов ухудшится) перейти к численному интегрированию. Разложение в ряд легко получить следующим приемом. Систему (2.17) перепишем в виде

$$\begin{aligned} E \left[\frac{B_1^{1/4}}{p_1} \frac{dp_1}{dx} \right] &= -p_1 B_1^{-1/4}, \\ E \left[\frac{B_1^{1/4}}{p_1} \frac{dB_1}{dx} \right] &= -\lambda \varepsilon_1 p_1 B_1^{-1/4}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Формула (2.12) дает

$$E_0^{(2i)}[u] = \frac{2i+3}{2i+1} [u]_0^{(2i+1)}. \quad (2.24)$$

Тогда последовательное дифференцирование формулы (2.23) с применением (2.24) позволяет вычислить производные различных порядков $p_1(x)$ и $B_1(x)$ при $x = 0$ и получить, таким образом, представление этих функций при помощи рядов Маклорена. Приведем первые члены этих разложений:

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 - \frac{1}{3} \frac{x^2}{2!} + \frac{2}{15} [4 - \lambda] \frac{x^4}{4!} - \dots \\ B_1 &= 1 - \frac{\lambda}{3} \frac{x^2}{2!} + \frac{2\lambda}{15} \left[(4 - \lambda) + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial p_1} + \lambda \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial B_1} \right) \right] \frac{x^4}{4!} - \dots \end{aligned} \quad (2.25)$$

Для численного интегрирования удобно пользоваться следующими выражениями, которые легко получить из системы (2.23):

$$\begin{aligned} p_1'' &= -p_1^2 B_1^{-1/2} + p_1' \left[\frac{p_1'}{p_1} - \frac{B_1'}{4B_1} - \frac{2}{x} \right], \\ B_1'' &= -\lambda \varepsilon_1 p_1^2 B_1^{-1/2} + B_1' \left[\frac{p_1'}{p_1} - \frac{B_1'}{4B_1} - \frac{2}{x} \right]. \end{aligned} \quad (2.23a)$$

В этой системе вместо B_1 можно ввести приведенную температуру T_1 и вместо p_1 новую переменную $u_1 = p_1^{1/4}$:

$$\begin{aligned} u_1'' &= -\frac{u_1^5}{4T_1^2} + u_1' \left[\left(\frac{u_1'}{u_1} - \frac{T_1'}{T_1} \right) - \frac{2}{x} \right], \\ T_1'' &= -\frac{\lambda \varepsilon_1 u_1^8}{4T_1^5} + T_1' \left[4 \left(\frac{u_1'}{u_1} - \frac{T_1'}{T_1} \right) - \frac{2}{x} \right], \end{aligned} \quad (2.23b)$$

что дает значительное преимущество благодаря медленным изменениям функций T_1 и u_1 .

Численное решение можно не доводить до поверхности звезды, так как для внешних слоев уравнения (2.23) могут быть непосредственно проинтегрированы. Действительно, принимая во внешних слоях $M_x = M_{x_0} = \text{const}$ и $L_x = L_{x_0} = \text{const}$, при помощи (2.19) находим

$$\frac{dp_1}{\rho_1} = -\frac{M_{x_0}}{x^2} dx; \quad \frac{dB_1}{\rho_1} = -\frac{\lambda L_{x_0}}{x^2} dx \quad \text{и} \quad B_1 = \frac{\lambda L_{x_0}}{M_{x_0}} p_1. \quad (2.26)$$

Уравнение идеальных газов и последнее соотношение из (2.26) позволяют написать

$$\frac{dp_1}{p_1} = B_1^{1/4} \frac{dp_1}{p_1} = B_1^{-3/4} dB_1.$$

Интегрируя теперь первое выражение (2.26), находим

$$4T_1 = M_{x_0} \frac{x_0 - x}{x_0 x}, \quad (2.27)$$

что дает линейный закон возрастания температуры с глубиной в самых наружных слоях звезды.

При нахождении λ пробными интегрированиями критерием правильности значения λ может служить, как видно из (2.26), постоянство отношения B_1/p_1 , начиная с некоторых, достаточно далеких от центра значений x . Характер решений очень зависит от изменений λ , поэтому этот параметр определяется вполне точно. При численном интегрировании значения функций близ поверхности определяются очень неуверенно. Поэтому для вычисления характеристик L_{x_0} , и M_{x_0} лучше всего воспользоваться непосредственно их интегральными выражениями (2.20). При нарастающих к центру источниках энергии L_{x_0} получается надежно даже при самом приближенном решении системы. Хуже всего определяется x_0 , которое при известном M_{x_0} и решении для достаточно далекого x может быть вычислено по формуле (2.27):

$$x_0 = \frac{x}{1 - \frac{4T_1}{M_{x_0}} x}. \quad (2.27a)$$

Изложенным способом были получены решения системы для двух видов функции ε . Табл. 2 содержит характеристики этих решений в сопоставлении с моделью Эддингтона.

Последний столбец этой таблицы содержит характеристику, весьма существенную, как мы увидим в дальнейшем, для соотношения «масса–абсолютная яркость».

Т а б л и ц а 2

| ε_1 | λ | x_0 | M_{x_0} | L_{x_0} | $\frac{\lambda L_{x_0}}{M_{x_0}^3}$ |
|-----------------|-----------|-------|-----------|-----------|-------------------------------------|
| 1 | 1 | 13,8 | 16,1 | 16,1 | $3,8 \cdot 10^{-3}$ |
| B_1 | 1,76 | 10 | 12,4 | 2,01 | $1,8 \cdot 10^{-3}$ |
| $B_1 p_1$ | 2,32 | 9 | 11,5 | 1,57 | $2,2 \cdot 10^{-3}$ |

Постараемся теперь оценить, какие изменения в характеристиках звездных структур можно ожидать от переменности коэффициента поглощения. При κ , зависящем от физических условий, уравнение (2.22) будет иметь вид

$$\frac{dB_1}{dp_1} = \frac{\kappa_1 \lambda L_x}{M_x}. \quad (2.22a)$$

Допустим, что переменность κ может быть описана следующим образом:

$$\kappa_1 = \frac{p_1^\alpha}{B_1^\beta}.$$

Рассмотрим простейший случай равномерного распределения источников энергии. Тогда $\varepsilon_1 = 1$, $L_x = M_x$, и возможно интегрирование уравнения (2.22a):

$$B_1^{1+\beta} = \lambda \frac{1+\beta}{1+\alpha} p_1^{1+\alpha}.$$

Из условия в центре звезды ($B_1 = p_1 = 1$) получаем

$$\lambda = \frac{1 + \alpha}{1 + \beta}; \quad B_1 = p_1^\lambda.$$

Следовательно, звезда будет иметь политропную структуру класса

$$n = \frac{4}{\lambda} - 1.$$

С физической точки зрения наиболее вероятным является уменьшение коэффициента поглощения с глубиной, а также выполнение неравенства $\alpha \geq -1$. Так как

$$\kappa_1 = p_1^{\frac{\alpha-\beta}{1+\beta}} = B_1^{\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha}},$$

то уменьшение κ_1 с возрастанием p_1 и B_1 будет при $\alpha < \beta$. Тогда, очевидно, $\lambda < 1$ и $n > 3$. Следовательно, переменность к скорее всего будет вызывать повышение класса политропии. Согласно теории фотоэлектрического поглощения

$$\kappa_1 = \rho_1/T_1^{3,5}.$$

В этом случае $\alpha = 1$, $\beta = 1,125$, и, следовательно, $n = 3,25$. В табл.1 приведены соответствующие значения характеристик x_0 и M_{x_0} . Для других характеристик получаем $\lambda = 0,94$ и $\lambda L_{x_0}/M_{x_0}^3 = \lambda/M_{x_0}^2 = 3,06 \cdot 10^{-3}$. Все эти значения мало отличаются от тех, которые содержатся в табл.2. Можно ожидать, что и при других типах распределения источников энергии переменность к будет вызывать эффект того же порядка.

Рассматривая данные табл. 1 и 2, мы видим, что характеристики $x_0 \cong M_{x_0} \cong 10$ и $\lambda L_{x_0}/M_{x_0}^3 \cong 2 \cdot 10^{-3}$ меняются сравнительно мало при разнообразных предположениях относительно структуры звезды, т.е. распределения в ней источников энергии¹. Эти данные соответствуют случаям: равномерного распределения источников, столь сильной их концентрации, как приблизительная пропорциональность их интенсивности восьмой степени температуры, и политропным структурам, которые отвечают явлениям стока энергии в наружных слоях звезды. Однако следует иметь в виду, что нами не рассмотрены другие возможные случаи выделения энергии, как, например, выделение энергии только в некотором энергетически активном слое, т.е. случай существования максимума ε на некотором расстоянии от центра. При таком распределении источников внутри звезды должно быть, как видно из второго уравнения нашей основной системы, изотермическое ядро, и звезда по своей структуре будет приближаться к политропе более высокого класса, чем три. При таком виде функции ε_1 вместо прежнего ε_1 можно образовать $\varepsilon/\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1$, $0 \leq \varepsilon_1 \leq 1$, которое и будет входить в λ . Но в этом случае ε_1 , а следовательно, и все характеристики, получаемые в результате решения системы, будут зависеть от p_c и B_c , причем по-прежнему возможность совместного решения системы будет устанавливать определенную связь между этими параметрами. Наконец, возможно, и это мы считаем весьма вероятным, что энергия в звезде выделяется лишь при некоторых определенных соотношениях между B и p в количестве, которого требует совместимость уравнений равновесия. Но для дальнейших выводов нам особенно важно констатировать постоянство характеристики $\lambda L_{x_0}/M_{x_0}^3$, приведенной в последнем столбце табл.2. Эта характеристика может оставаться приблизительно постоянной даже при таких особенных типах выделения энергии благодаря приблизительно параллельному ходу изменений числителя и знаменателя. Идя путем последовательных приближений, мы считаем себя вправе принять данные наших таблиц как первое приближение, которое может быть уточнено из сравнения с данными наблюдений.

¹ Следует помнить, что данные этих таблиц характеризуют структуру лишь при малом лучевом давлении. В противном случае все характеристики x_0 , M_{x_0} и т.д. будут зависеть от γ_c .

Изложенное показывает, что вряд ли целесообразно более строгое исследование системы (2.17). Поэтому мы не останавливались на доказательстве единственности значения параметра λ .

§4. ФИЗИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ В ЦЕНТРЕ ЗВЕЗД

Средняя плотность Солнца $\bar{\rho}_{\odot} = 1,411$. Пользуясь этим значением, найдем из (2.4) следующее выражение, определяющее центральную плотность звезд:

$$\rho_c = 0,470 \frac{x_0^3}{M_{x_0}} \frac{M/M_{\odot}}{(R/R_{\odot})^3}. \quad (2.28)$$

Формула (2.1) позволяет теперь вычислить газовое давление в центре звезды

$$p_c = \frac{G}{4\pi} \left(\frac{M_{\odot}}{R_{\odot}^2} \right)^2 \frac{x_0^4}{M_{x_0}^2} \frac{(M/M_{\odot})^2}{(R/R_{\odot})^4}. \quad (2.29)$$

Принимая $M_{\odot} = 1,985 \cdot 10^{33}$ и $R_{\odot} = 6,95 \cdot 10^{10}$, получаем

$$p_c = 8,9 \cdot 10^{14} \frac{x_0^4}{M_{x_0}^2} \frac{(M/M_{\odot})^2}{(R/R_{\odot})^4}. \quad (2.30)$$

Таким образом, давление в центре Солнца должно быть порядка 10^{16} дин/см², т.е. порядка десяти миллиардов атмосфер. Следует подчеркнуть, что эти формулы для ρ_c и p_c , как видно из их вывода, справедливы для любого фазового состояния материи.

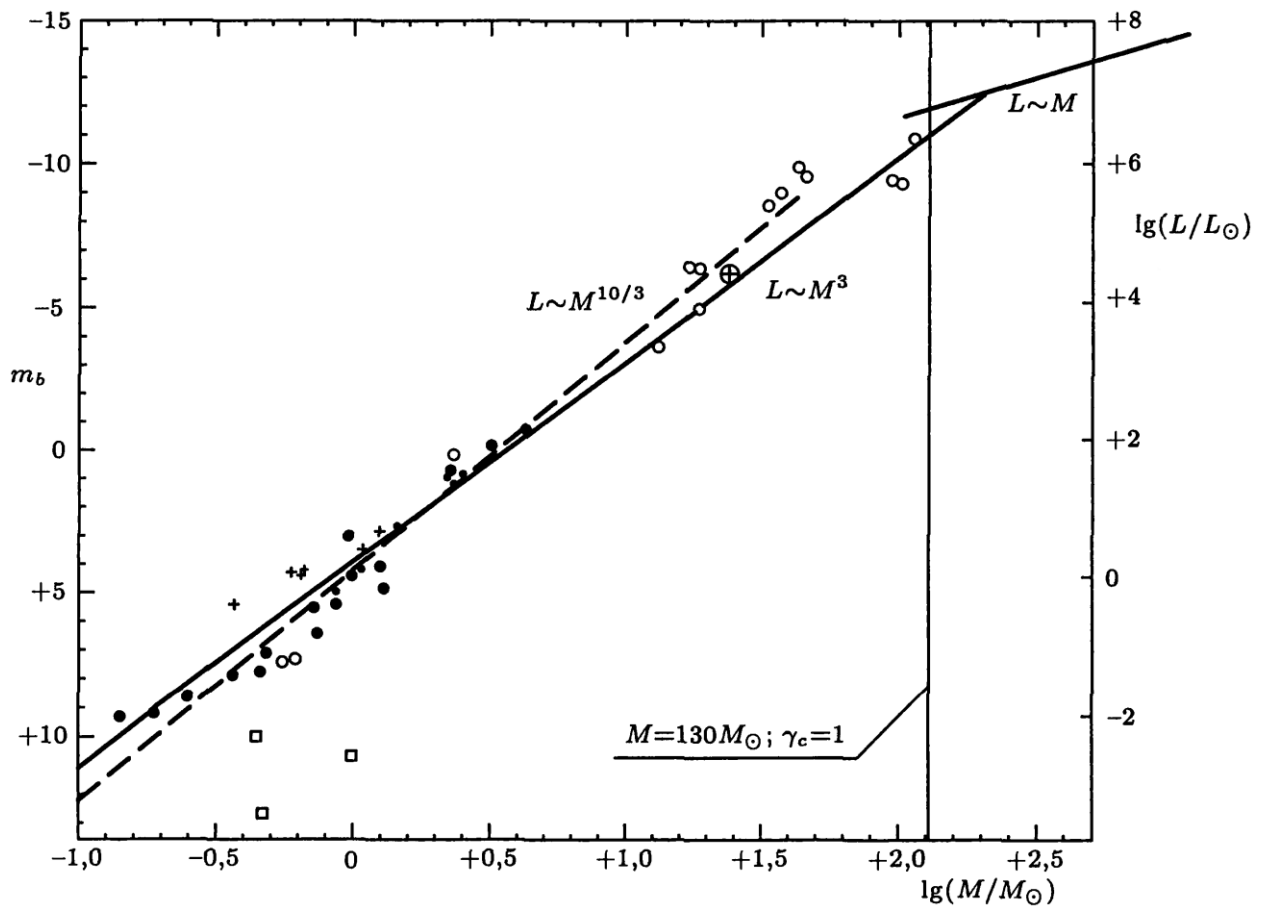
Допустим теперь, что звезда состоит из идеального газа. Тогда, беря отношение (2.30) к (2.28) и пользуясь уравнением идеальных газов (1.8), находим

$$T_c = 2,29 \cdot 10^7 \mu \frac{x_0}{M_{x_0}} \frac{M/M_{\odot}}{R/R_{\odot}}. \quad (2.31)$$

Следовательно, внутри Солнца температура порядка десяти миллионов градусов. В качестве другого крайнего примера рассмотрим инфракрасный спутник ϵ Aurigae. Для этой звезды: $M = 24,6M_{\odot}$, $\lg L/L_{\odot} = 4,46$ и $R = 2140R_{\odot}$ [5]. Вычисляя по формулам (2.30) и (2.31) p_c и T_c , находим $T_c \cong 2 \cdot 10^5$ и $p_c \cong 2 \cdot 10^5$, т.е. температуру порядка сотен тысяч градусов и давление около одной атмосферы. Так как эта звезда прекрасно ложится на диаграмму зависимости масса–абсолютная яркость (фиг.1) и на диаграмму Ресселла–Гертцшпрунга, мы имеем основания считать, что она имеет обычную для всех звезд структуру. Это может служить указанием на то, что энергия внутри звезд вырабатывается и в условиях, сравнительно близких к тем, которые могут быть осуществлены в земной лаборатории.

Докажем теперь, что только внутри белых карликов, т.е. только в звездах особо малого радиуса, порядка нескольких сотых R_{\odot} , может выполняться уравнение вырожденного газа Ферми (1.9). Действительно, если в центре какой-либо звезды газ удовлетворяет уравнению Ферми, получим $p_c = 1 \cdot 10^{13} \rho_c^{5/3} \mu_e^{-5/3}$. Это условие выполняется, как показывают формулы (2.28) и (2.30), лишь при

$$R/R_{\odot} = 3,16 \cdot 10^{-3} \frac{x_0 M_{x_0}^{1/3}}{(M/M_{\odot})^{1/3}} \mu_e^{-5/3}. \quad (2.32)$$



Фиг.1: Зависимость «масса–светимость».

Точки – визуально-двойные звезды; кружки – спектрально-двойные и затменные переменные; крестики – звезды в Гидах; квадратики – белые карлики; крестик в кружке – спутник ϵ Aurigae.

Эта формула остается справедливой независимо от того, какое состояние материи имеет место в других частях звезды. Последнее обстоятельство может влиять лишь на величину фактора $x_0 M_{x_0}^{1/3}$, для которого, исходя из данных наших таблиц, мы можем принять ориентировочное значение порядка 10. Формула (2.32) показывает, что при обыкновенном вырождении газа звезды должны иметь (при $M \sim M_\odot$) приблизительно одинаковый радиус: $R \cong 2 \cdot 10^9$, т.е. около 20 000 км ($R = 0,03R_\odot$). Такими размерами и обладают как раз белые карлики; например, спутник Сириуса имеет $M = 0,94M_\odot$ и $R = 0,035R_\odot$ [6]. При больших плотностях, т.е. при малых радиусах, и, как видно из формулы (2.32), возрастающих массах обыкновенное вырождение газа может перейти в релятивистское:

$$p = k\rho^{4/3}; \quad k = k_H \mu_e^{-4/3}; \quad k_H = 1,23 \cdot 10^{15}.$$

Применяя эти формулы к центру звезды, пользуясь выражениями (2.28) и (2.30), мы видим, что радиус из них выпадает, и таким образом релятивистское вырождение может осуществляться лишь при определенной массе:

$$\frac{M}{M_\odot} = 0,356 M_{x_0} \quad (\mu_e = 1). \quad (2.32a)$$

Из табл.1 при $n = 3$ $M_{x_0} = 16,1$. Следовательно, предельная масса, которую может иметь звезда, состоящая из вырожденного газа, равна $5,7M_\odot$. Для полного исследования вопроса о звездах из вырожденного газа мы должны пользоваться уравнением фазового состояния, охватывающим обыкновенное, релятивистское и переходное вырождения. Применяя к этому соотношению, как это мы делали выше, формулы (2.28) и (2.30), легко

получить связь между радиусом и массой звезды, не имеющую ограничений со стороны малых радиусов. В этом заключается сущность теории белых карликов Чандрасекара (Chandrasekhar) [7]. Заметим, что для наблюдаемых размеров белых карликов уравнение (2.32) при $x_0 M_{x_0}^{1/3} = 10$ дает то же значение радиусов, что и таблица Чандрасекара, его известное соотношение между радиусом и массой звезды. Точное значение предельной массы, вычисленное Чандрасекаром, совпадает с этим значением $5,7M_{\odot}$. В соотношении Чандрасекара, так же как и в формуле (2.32), радиус имеет обратную зависимость от массы. В настоящее время только для трех белых карликов известны массы и радиусы, и эти звезды не подтверждают обратную зависимость масса–радиус. Таким образом, кроме совпадения размеров спутника Сириуса с выражением (2.32), у нас нет прямых астрофизических подтверждений вырождения газа внутри белых карликов.

Для звезд, построенных из идеального газа, выведем соотношение, определяющее массу звезды в зависимости от условий внутри нее. Для этого можно воспользоваться формулами (2.30) и (2.31) или непосредственно выражением (2.2). Применяя к формуле (2.2) уравнение Бойля–Мариотта (1.8) и пользуясь законом Стефана–Больцмана (1.7), находим

$$M = C \frac{\gamma_c^{1/2}}{\mu^2} M_{x_0}; \quad C = \frac{\mathfrak{R}^2}{G^{3/2} \sqrt{\frac{4}{3}} \pi \alpha} = 2,251 \cdot 10^{33}. \quad (2.33)$$

Введем в уравнение (2.33) массу Солнца: $M_{\odot} = 1,985 \cdot 10^{33}$. Тогда

$$M = 1,134 M_{\odot} \frac{\gamma_c^{1/2}}{\mu^2} M_{x_0}. \quad (2.34)$$

Мы увидим ниже, что характер зависимости масса – абсолютная яркость указывает для голубых сверхгигантов на значение γ_c приближающееся к единице. Таким образом, формула (2.34) дает наблюдаемые значения звездных масс. То обстоятельство, что мы получаем правильный порядок звездных масс, исходя лишь из значений универсальных физических констант G , \mathfrak{R} и α , является, по нашему мнению, замечательным подтверждением теории.

§5. СООТНОШЕНИЕ МАССА–АБСОЛЮТНАЯ ЯРКОСТЬ

При выводе соотношения масса–абсолютная яркость будем полагать, что: 1) лучевое давление всюду в звезде мало по сравнению с газовым, 2) звезды построены из идеального газа и 3) ε и κ могут быть аппроксимированы функциями типа $p^{\alpha} B^{\beta}$. Основная система уравнений будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1 x^2} \frac{d}{dx} \left[\frac{x^2 dp_1}{\rho_1 dx} \right] &= -1, \\ \frac{1}{\rho_1 x^2} \frac{d}{dx} \left[\frac{x^2 dB_1}{\kappa_1 \rho_1 dx} \right] &= -\lambda \varepsilon_1, \end{aligned} \quad (2.35)$$

где

$$\lambda = \frac{\varepsilon_c \kappa_c}{4\pi G c \gamma_c}.$$

Решение этой системы, как мы знаем, возможно лишь при некотором определенном значении λ , не сильно отличающемся от единицы. Следовательно, звезда может находиться в равновесии только в том случае, если внутри нее вырабатывается энергия в количестве, определяемом формулой

$$\varepsilon_c = \frac{\lambda 4\pi G c}{\kappa_c} \gamma_c. \quad (2.36)$$

Если звезда вырабатывает другое количество энергии, она будет сжиматься или расширяться, пока новая конфигурация не приведет к значению энергии (2.36). Так как γ_c определяет массу звезды (2.34), а ε_c яркость звезды, то в зависимости (2.36) мы и должны искать связь «масса – абсолютная яркость». Следовательно, зависимость масса – абсолютная яркость является условием равновесия звезды.

По формуле (2.3)

$$\varepsilon_c = \frac{L}{M} \frac{M_{x_0}}{L_{x_0}}.$$

Подставляя это выражение в формулу (2.36), находим

$$L = \frac{4\pi G c}{\kappa_c} \frac{\lambda L_{x_0}}{M_{x_0}} M \gamma_c.$$

Величина γ_c входящая в эту формулу, может быть заменена массой звезды согласно (2.33):

$$L = \frac{4\pi G^4 c 4\pi \alpha}{3\kappa_c \mathfrak{R}^4} \mu^4 \left(\frac{\lambda L_{x_0}}{M_{x_0}^3} \right) M^3. \quad (2.37)$$

Если принять светимость Солнца $L_\odot = 3,78 \cdot 10^{33}$, то из формулы (2.37), вычисляя постоянные, получим

$$L/L_\odot = 1,04 \cdot 10^4 \frac{\mu^4}{\kappa_c} \left(\frac{\lambda L_{x_0}}{M_{x_0}^3} \right) (M/M_\odot)^3. \quad (2.38)$$

Формула (2.38) дает простое соотношение: яркость пропорциональна кубу массы звезды. При выводе этой формулы мы приняли, что ε является функцией типа $\varepsilon \sim p^\alpha B^\beta$ и что, следовательно, ε_1 зависит от p_1 и B_1 . Очевидно, что отказ от этого допущения не может существенно повлиять на общий ход найденной зависимости (2.38). Действительно, при произвольном ε ε_1 будет зависеть от p_c и B_c . Таким образом, множитель $\lambda L_{x_0}/M_{x_0}^3$ в формуле (2.38) будет для различных звезд соответствовать различным структурам. Но, как показывает табл.2, этот множитель почти одинаков для различных звездных структур. Поэтому зависимость масса – абсолютная яркость не дает никаких указаний о характере источников звездной энергии; она практически не зависит от их вида. Напротив, другие сделанные допущения очень существенны. Как видно из вывода формулы (2.33), зависимость массы от яркости получается только в том случае, если давление зависит от температуры, и наша зависимость (2.38) получается лишь для идеального газа. Также очень существенно считать коэффициент поглощения κ одинаковым для всех звезд. Что касается роли лучевого давления, то она будет специально рассмотрена в следующем параграфе.

Перейдем теперь к сравнению формулы (2.38) с данными наблюдений. На прилагаемом чертеже приведены массы и яркости звезд в соответствии с современным состоянием этого вопроса. Чертеж построен по данным Койпера (Kuiper) [8] и монографии Ресселла–Мура (Moore) [9] о звездных массах. Из диаграммы Койпера мы исключили звезды Тремплера (Trumpler) [10], массы которых мало надежны. Действительно, массы этих звезд, принадлежащих к звездным скоплениям, были вычислены Тремплером в предположении, что K – член лучевых скоростей относительно всего скопления – всецело объясняется красным смещением Эйнштейна. Поэтому массы звезд Тремплера могут быть чрезвычайно завышены. Вместо звезд Тремплера для характеристики соотношения масса – яркость при больших массах мы предпочли использовать определения масс особо мас-

сивных затменных переменных (VV Cephei, V381 Scorpii, тоже малонадежные) и приближительные данные о спектрально–двойной звезде Пласкетта BD+6°1309.

Как видно из фиг.1, полученная нами зависимость $L \sim M^3$ хорошо согласуется с наблюдениями во всем интервале наблюдаемых масс с наибольшим отклонением порядка 1,5*m*. Пунктирная прямая, которая мало отличается от нашей теоретической прямой, соответствует $L \sim M^{10/3}$. Эту прямую большинство исследователей (Паренаго [11], Койпер [8], Расселл [9] и др.) считают наилучшим представлением наблюдений. Некоторые авторы находят для показателя массы еще большее значение; так, например, Бэз (Baize) [12] получил $L = M^{3,58}$. Если даже считать реальными эти отклонения показателя от трех, все же как первое приближение теоретическое представление зависимости является вполне удачным. Коэффициент в нашей зависимости (2.38) очень чувствителен к изменениям μ . Поэтому близкое совпадение теоретической зависимости с наблюдениями говорит о том, что в среднем химический состав звезд приблизительно одинаков. То же относится и к коэффициенту поглощения. Так как внутренние условия звезд могут быть чрезвычайно разнообразными и при одинаковой яркости звезд быть весьма отличными (например, у красных гигантов и голубых звезд основной последовательности), то неизбежным заключением является независимость коэффициента поглощения звездной материи от давления и температуры. Этими выводами оправдываются допущения, принятые в §3, при решении основной системы уравнений.

То обстоятельство, что белые карлики не ложатся на общую для других звезд зависимость масса – яркость, может рассматриваться как подтверждение наличия внутри них вырожденного газа. Поскольку сильное увеличение коэффициента поглощения внутри белых карликов в сравнении с обычными звездами мало правдоподобно, другое объяснение возможно лишь в предположении, что для них структурный множитель $\lambda L_{x_0}/M_{x_0}$ приблизительно в 100 раз меньше, чем для других звезд. Положение белых карликов на диаграмме Расселла–Гертцшпрунга может дать известное указание для решения этого вопроса.

Произведем теперь численное сравнение формулы (2.38) с данными наблюдений. Как видно из чертежа, прямая $L \sim M^3$, наилучшим образом согласованная с наблюдениями, проходит несколько выше положения Солнца. Поэтому при $M = M_{\odot}$ мы должны в формуле (2.38) считать $L = 1,8L_{\odot}$. В соответствии с табл.2 примем $\lambda L_{x_0}/M_{x_0}^3 = 2 \cdot 10^{-3}$. Тогда получается

$$\mu^4/\kappa_c = 0,08. \quad (2.39)$$

§6. ЛУЧЕВОЕ ДАВЛЕНИЕ ВНУТРИ ЗВЕЗД

До сих пор мы пренебрегали лучевым давлением в сравнении с газовым в уравнении механического равновесия звезды. Рассмотрим теперь основную систему уравнений (III), учитывающую лучевое давление. При постоянном κ , т.е. при $\kappa_1 = 1$, эта система, очевидно, может быть написана в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1 x^2} \frac{d}{dx} \left[x^2 \frac{dp_1}{\rho_1 dx} \right] &= -(1 - \lambda \gamma_c \varepsilon_1), \\ \frac{1}{\rho_1 x^2} \frac{d}{dx} \left[x^2 \frac{dB_1}{\rho_1 dx} \right] &= -\lambda \varepsilon_1. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Производя вычисления, аналогичные тем, которые были выполнены при выводе формулы (2.21), находим

$$\lambda(1 + \gamma_c) = \frac{\int_0^{x_0} M_x \frac{\rho_1}{x^2} dx}{\int_0^{x_0} L_x \frac{\rho_1}{x^2} dx}. \quad (2.41)$$

Отношение интегралов этой формулы зависит от распределения источников энергии внутри звезды, т.е. от структуры звезды, сохраняя значение, близкое к единице. Таким образом, $\lambda(1 + \gamma_c) \sim 1$. При равномерном распределении источников $\varepsilon_1 = 1$; $L_x = M_x$, и, следовательно, точно $\lambda(1 + \gamma_c) = 1$. При источниках, усиливающих к центру, $\lambda(1 + \gamma_c) > 1$. В этом случае при большом лучевом давлении ($\gamma_c > 1$) структура звезды должна быть весьма своеобразной. Действительно, в этом случае $\lambda\gamma_c > 1$, и правый член в первом уравнении (2.40), в центре звезды, будет положителен; тогда из формулы (2.24) следует, что $p''_1 > 0$. Таким образом, в центре такой звезды газовое давление и плотность должны иметь минимум, а максимальное значение – на некотором расстоянии от центра.

Из изложенного следует, что особо массивные звезды, т.е. звезды с большим γ_c , могли бы находиться в равновесии лишь при $\lambda\gamma_c \sim 1$, откуда имеем условие

$$\varepsilon_c \sim \frac{4\pi Gc}{\kappa}. \quad (2.42)$$

Таким образом, начиная с некоторой массы, соответствующей $\gamma_c > 1$, количество энергии, вырабатываемое единицей массы, должно иметь постоянное значение для всех этих особо массивных звезд. Яркость этих звезд, как следует из формул (2.3) и (2.2), должна быть пропорциональна массе: $L \sim M$. Эта зависимость изображена на фиг.1 отрезком прямой в верхнем углу чертежа. Первоначальное изображение зависимости масса–абсолютная яркость у Эддингтона [13] и других авторов имело у массивных звезд тенденцию искривления в эту сторону. Однако последующие исследования даже для самых массивных звезд (как видно из нашего чертежа) уже не дают этого искривления, что особо подчеркивается Расселлом [9] и Бэзом [12]. Поэтому можно считать, что в природе не осуществляются конфигурации, для которых $\gamma_c > 1$, и что пределом возможных звездных масс является условие $\gamma_c = 1$. Не имея представления о характере источников звездной энергии, затруднительно обосновать это положение с точки зрения устойчивости звезды. Но все же сложность конфигураций при больших γ_c говорит о том, что подобные конфигурации трудно осуществимы и что такие звезды, если и существуют, то встречаются весьма редко.

Чтобы получить представление о влиянии γ_c на структуру звезды, рассмотрим простейший случай равномерно распределенных источников $\varepsilon_1 = 1$. В этом случае, как мы знаем,

$$\lambda = \frac{1}{1 + \gamma_c}, \quad (2.43)$$

и система (2.40) может быть написана в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1 x^2} \frac{d}{dx} \left[\frac{x^2 dp_1}{\rho_1 dx} \right] &= -\frac{1}{1 + \gamma_c}, \\ \frac{1}{\rho_1 x^2} \frac{d}{dx} \left[\frac{x^2 dB_1}{\rho_1 dx} \right] &= -\frac{1}{1 + \gamma_c}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Вводя вместо x переменную $x_{\gamma_c=0}$ согласно условию

$$x = \sqrt{1 + \gamma_c} x_{\gamma_c=0}, \quad (2.45)$$

получаем основную систему в том же виде, как при отсутствии лучевого давления. Поэтому основные характеристики звездных структур будут выражаться следующим образом:

$$x_0 = x_{0, \gamma_c=0}(1 + \gamma_c)^{1/2}; \quad M_{x_0} = M_{x_0, \gamma_c=0}(1 + \gamma_c)^{3/2};$$

$$L_{x_0} = L_{x_0, \gamma_c=0}(1 + \gamma_c)^{3/2}; \quad \lambda = \frac{\lambda_{\gamma_c=0}}{1 + \gamma_c}. \quad (2.46)$$

Характеристики с индексом ($\gamma_c = 0$) соответствуют структурам при $\gamma_c \ll 1$ и могут быть взяты из нашей табл.2. Выражения (2.46) должны представлять приблизительные изменения характеристик и для других структур. Таким образом, при больших γ_c выражение для массы звезды (2.34) будет следующим:

$$M \cong 1,134M_{\odot} \frac{\gamma_c^{1/2}}{\mu^2} (1 + \gamma_c)^{3/2} M_{x_0, \gamma_c=0}. \quad (2.47)$$

Наблюдения показывают, что максимальные массы имеют значение порядка $120M_{\odot}$ (см. фиг.1, которая показывает некоторую тенденцию к искривлению зависимости около $\lg M/M_{\odot} = 2$). Полагая в формуле (2.47) для этого значения массы $\gamma_c = 1$ и принимая $M_{x_0} = 10$, получаем значение среднего молекулярного веса $\mu = 0,51$.

Тогда по формуле (2.39) находим $\kappa = 0,8$. С другой стороны, считая, что зависимость масса–яркость имеет тенденцию выхода к прямой $L \sim M$, изображенной на чертеже, мы получаем предельное значение $\bar{\varepsilon} = 5 \cdot 10^4$. Если источники распределены равномерно, то из (2.42) следует, что $\kappa = 0,5$. В другом предположении, например при концентрации источников, $\varepsilon_c > \bar{\varepsilon} = \varepsilon_c \cdot L_{x_0}/M_{x_0}$. Но в этом случае и в формуле (2.42) будет стоять знак $>$. Происходит некоторая компенсация, и можем считать, что это значение κ оценено правильно. Точное выражение для $\bar{\varepsilon}$ получается

$$\frac{L}{M} = \bar{\varepsilon} = \frac{4\pi Gc}{\kappa} \frac{L_{x_0}}{M_{x_0}} \frac{\int_0^{x_0} M_x \frac{\rho_1}{x^2} dx}{\int_0^{x_0} L_x \frac{\rho_1}{x^2} dx} \frac{\gamma_c}{1 + \gamma_c}. \quad (2.48)$$

Итак, из анализа зависимости масса–абсолютная яркость мы приходим к следующим важным заключениям: 1) все звезды, возможно, кроме белых карликов, целиком состоят из идеального газа; 2) во внутренних областях, где происходит выделение энергии, все звезды имеют одинаковый химический состав: $\mu = \text{const} = 1/2$, т.е. состоят из смеси протонов и электронов без заметной примеси других ядер; 3) коэффициент поглощения на единицу массы κ не зависит от физических условий и имеет значение несколько меньше единицы. Томсоновское рассеяние света свободными электронами обладает как раз этими свойствами и имеет это численное значение. Действительно, коэффициент томсоновского рассеяния на один электрон

$$\sigma_0 = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 = 6,66 \cdot 10^{-25}, \quad (2.49)$$

где e и m_e – соответственно заряд и масса электрона. Для нашей смеси протонов и электронов для единицы массы получаем

$$\kappa_T = \frac{\sigma_0}{m_H} = \frac{6,66 \cdot 10^{-25}}{1,66 \cdot 10^{-24}} = 0,40. \quad (2.50)$$

Совпадение наших оценок κ с этим значением κ_T достаточно хорошо. Поэтому представляется возможным, что взаимодействие света и материи внутри звезд определяется процессом Томсона – ускорения свободных электронов электрическим полем световой волны.

Так как μ входит в соотношение масса–яркость (2.38) в четвертой степени, то получаемая оценка μ должна быть весьма точной. Из (2.39) при $\kappa = \kappa_T$ $\mu = 0,43$. Так как μ

не может быть меньше 1/2, то получаемое при этом $\kappa = 0,8$ почти вдвое больше κ_T скорее всего может объясняться тем обстоятельством, что структурный коэффициент в формуле (2.38) должен быть взят в два раза меньшим. По-видимому, для μ мы можем принять значение, равное 1/2, с точностью до 0,05. При полной ионизации тяжелых атомов их средний молекулярный вес равен 2. Если принять средний молекулярный вес в звезде вместо 1/2 равным 0,55, то процент содержания ионизованных атомов водорода x_H получится из условия

$$2x_H + \frac{1}{2}(1 - x_H) = \frac{1}{0,55}; \quad x_H \cong 90\%.$$

Таким образом, внутри звезды максимальная примесь тяжелых ядер, которую мы можем допустить, исходя из вида зависимости масса–яркость, составляет несколько процентов. При $\mu = 1/2$ значение массы звезды, при которой $\gamma_c = 1$, получается равным $130M_\odot$. Это значение и отмечено на фиг.1.

Оценим теперь значение лучевого давления в центре такой звезды, как Солнце. Из формулы (2.34) следует, что $\gamma_{c\odot} \cong 10^{-3}$. В этом случае в уравнении механического равновесия можно вполне пренебрегать членом, содержащим лучевое давление.

§7. СРАВНЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ С РЕЗУЛЬТАТАМИ ДРУГИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

В обычной трактовке теории внутреннего строения звезд вывод соотношения масса–абсолютная яркость чрезвычайно осложнен тем обстоятельством, что коэффициент поглощения κ априори принимался зависящим от физических условий. Предполагалось, что внутри звезд поглощение света происходит в результате свободно связанных переходов электрона (поглощение за границами спектральных серий) или переходов электрона с одной гиперболической орбиты на другую в поле положительно заряженного ядра. Теория этого типа поглощения впервые была дана Крамерсом (Kramers), затем уточнена последующими исследованиями Гаунт (Gaunt) и др., и в особенности исследованиями Чандрасекара [14]. Согласно Чандрасекару коэффициент поглощения зависит от физических условий приблизительно следующим образом:

$$\kappa_{ch} = 3,9 \cdot 10^{25} \frac{\rho}{T^{3,5}} (1 - x_H^2), \quad (2.51)$$

где x_H – процент содержания водорода, а числовой фактор получен для ресселловской смеси элементов. Для уяснения влияния этого рода поглощения на ход зависимости масса–абсолютная яркость примем для κ_{ch} упрощенное выражение

$$\kappa = \kappa_0/\gamma. \quad (2.52)$$

В этом случае, при малых γ_c , как видно из формул (2.38) и (2.33), L будет пропорционально M^5 . Этот показатель, как мы знаем, слишком велик, поэтому приходится допустить, что γ_c нельзя отбрасывать в сравнении с единицей. При больших γ_c из формул (2.48) и (2.47) следует, что $L \sim M^{3/2}$. Таким образом, чтобы согласовать теоретический вывод с наблюдениями, оставалось рассматривать случай промежуточных γ_c и отказаться от прямолинейной зависимости $\lg L$ от $\lg M$. Из формул (2.47) и (2.48) имеем

$$M^2 \sim \frac{\gamma_c(1 + \gamma_c)^2}{\mu^4}; \quad M^2 \sim \frac{1 - \beta}{\mu^4 \beta^4},$$

$$L \sim M \frac{\gamma_c^2}{1 + \gamma_c}; \quad L \sim M^{3/2} (1 - \beta)^{3/4} \mu. \quad (2.53)$$

Здесь мы привели выражения, в которых γ_c заменена постоянной β (этой постоянной обычно пользуются в теории внутреннего строения звезд):

$$\beta = \frac{p_c}{p_0} = \frac{1}{1 + \gamma_c}. \quad (2.54)$$

Таким образом, зависимость масса–абсолютная яркость, представляемая двумя формулами (2.53), приобретает сложный вид. Эти формулы приблизительно соответствуют формулам Эддингтона [15] и других авторов. Точное выражение для (2.51) вводит в них еще температуру центра T_c . При больших γ_c как это видно из формул (2.46), в выражении (2.31) для T_c будет еще множитель β :

$$T_c = 2,29 \cdot 10^7 \mu \beta \left(\frac{x_0}{M_{x_0}} \right)_{\gamma_c=0} \frac{M/M_\odot}{R/R_\odot}. \quad (2.55)$$

Тогда через T_c в зависимость масса–абсолютная яркость войдет радиус звезды или эффективная температура. Отсюда и получается известная температурная поправка Эддингтона.

Чтобы согласовать с наблюдениями рассматриваемый случай промежуточных γ_c , приходится принять $\gamma_c = 1$ уже при $M \cong 10M_\odot$, что дает для Солнца $\gamma_{c_0} = 0,08$. Как видно из формулы (2.47), это возможно при $\mu \cong 2$. Тогда из (2.39), принимая в соответствии с моделью Эддингтона $\lambda L_{x_0}/M_{x_0}^3 = 3,8 \cdot 10^{-3}$, получаем $\kappa_{c_0} = 170$ и $\kappa_0 = 14$. Теоретическая величина κ_0 может быть найдена из сравнения (2.52) и (2.51):

$$\kappa_0 = \frac{\alpha \mu}{3 \mathfrak{R} \sqrt{T_{c_0}}} \cdot 3,9 \cdot 10^{25} (1 - x_H^2). \quad (2.56)$$

Согласно (2.55) $T_{c_0} = 4 \cdot 10^7$. Тогда при малом содержании водорода имеем $\kappa_0 = 0,4$. Таким образом, теоретическое значение коэффициента поглощения приблизительно в тридцать раз меньше значения, необходимого для согласования всей этой теории с наблюдениями. Это расхождение представляет собой хорошо известную «трудность теории», обнаруженную еще Эддингтоном. Согласно Стремгрену (Strömrgren) [16] выход из этого затруднения может быть найден в предположении, что химический состав звезд меняется в зависимости от светимости звезды. Благодаря значительной примеси водорода μ может изменяться в пределах $1/2 \leq \mu \leq 2$. Хотя в этом случае, как видно из (2.56), теоретическое κ_0 может слегка уменьшиться, зато κ_0 , получаемое из согласования теории с наблюдениями, как мы знаем из наших рассмотрений в предыдущем параграфе, уменьшится значительно сильнее, и возможно, как это и получается у Стремгрена, согласование этих значений. Отсюда уже и рождаются все дальнейшие исследования эволюционного изменения содержания водорода в звездах, ставшие столь распространенными благодаря объяснениям звездной энергии термонуклеарными реакциями Бете.

Натянутость изложенных теорий очевидна. Простота же и общность, с которой получены наши выводы, говорят в их пользу. Заметим, что два наших основных вывода, полученных независимо один от другого,

$$1) \mu = 1/2; \quad x_H = 1 \quad \text{и} \quad 2) \kappa = \kappa_T,$$

физически неизбежно связываются между собой. Действительно, при $x_H = 1$ формула (2.51) неприменима. Поглощение Крамерса (свободные переходы) будет в этом случае на несколько порядков меньше и вряд ли превысит томсоновский процесс. Тем не менее основной наш результат, заключающийся в том, что $\gamma_c < 1$ для всех звезд, откуда получены и все другие заключения, столь важен, что мы считаем необходимым обосновать его еще на другом астрофизическом материале. Это и будет сделано в следующей главе при анализе зависимости «период–яркость Цефеид». Заметим еще, что полученный нами вывод о том, что внутренние области звезд, где происходит выделение энергии, почти целиком состоят из водорода, несмотря на кажущуюся парадоксальность, следует рассматривать как эмпирически установленный факт. Можно надеяться, что дальнейшее приближение к решению вопроса о природе звездной энергии позволит привести этот результат в соответ-

ствие со спектроскопическими данными о наличии тяжелых элементов в наружных слоях звезд.

§8. РОЛЬ КОНВЕКЦИИ ВНУТРИ ЗВЕЗД

В главе 1, § 3 были приведены уравнения равновесия звезды, учитывающие конвективный перенос энергии. Предполагая коэффициент конвекции $A = \text{const}$, уравнение теплового равновесия звезды – второе уравнение системы (II) – может быть написано в следующем виде:

$$\frac{1}{\rho_1 x^2} \frac{d}{dx} \left[\frac{x^2 dB_1}{\rho_1 dx} \right] - \frac{\kappa \rho_c A}{c \gamma_c} \frac{1}{\rho_1 x^2} \frac{d}{dx} \left[x^2 u \frac{dp_1}{dx} \right] = -\lambda \varepsilon_1, \quad (2.57)$$

где

$$u = 1 - \frac{\Gamma}{4(\Gamma - 1)} \frac{p_1}{B_1} \frac{dB_1}{dp_1}. \quad (2.58)$$

Конвективный член в формуле (2.57) будет играть роль в том случае, если

$$\frac{\kappa \rho_c A}{c \gamma_c} > 1; \quad A > \frac{c \gamma_c}{\kappa \rho_c}. \quad (2.59)$$

Следовательно, для Солнца коэффициент конвекции должен удовлетворять условию $A_{\odot} > 5 \cdot 10^7$. Что касается сверхгигантов, то для них конвекция может иметь значение лишь при $A > \sim 10^{16}$. Коэффициент A , как мы видели – формула (1.17), равен произведению скорости конвекционного тока на среднюю длину пробега тока $\bar{\lambda}$. Таким образом, в сверхгигантах только при токах, для которых $\bar{\lambda}$ порядка размеров звезды, конвекция может влиять на перенос тепла. Такая сильная вынужденная конвекция маловероятна. Но при наличии конвективной неустойчивости, так как средняя длина пробега тока должна быть порядка размера конвективной зоны, коэффициент A может быть очень велик и для всех звезд удовлетворять неравенству (2.59). Если A во много раз превышает значение правой части этого неравенства, то, поскольку все члены уравнения (2.57) и уравнения механического равновесия порядка единицы, выражение в квадратных скобках конвективного члена должно быть близким к нулю. Таким образом, при большом A

$$u = 0, \quad \text{откуда} \quad B_1 = p_1^{\frac{4(\Gamma-1)}{\Gamma}}, \quad (2.60)$$

т.е. уравнение адиабатического изменения состояния. Для одноатомного газа $\Gamma = 5/3$ ($n = 3/2$) и

$$B_1 = p_1^{8/5}. \quad (2.61)$$

Так как согласно нашим заключениям звезды состоят почти целиком из водорода, значение Γ может отличаться от $5/3$ лишь в самых наружных слоях звезд, не существенных с точки зрения строения звезды в целом. Поэтому зоны свободной конвекции могут возникнуть лишь за счет распределения источников энергии.

Свободная конвекция будет иметь место в том случае, когда градиент температуры лучевого равновесия больше градиента температуры конвективного равновесия. Этому условию Шварцшильда можно придать следующий вид:

$$\left(\frac{d \lg B_1}{d \lg p_1} \right)_{\text{Rad}} > \left(\frac{d \lg B_1}{d \lg p_1} \right)_{\text{Ad}},$$

откуда при помощи (2.22) и (2.61) находим

$$\frac{\lambda L_x}{M_x} > 1,6 \frac{B_1}{p_1}. \quad (2.62)$$

Из этого неравенства видно, что в наружных слоях звезд свободная конвекция невозможна. Для центральных областей получается следующее условие возможности свободной конвекции:

$$\lambda > 1,6.$$

Данные табл.2 показывают, что уже при $\varepsilon_1 = B_1$ внутри звезд должно существовать конвективное ядро. Если ε_1 зависит только от температуры и может быть аппроксимировано функцией $\varepsilon_1 = T^m$, то, как показывают вычисления, λ будет иметь критическое значение 1,6 при $m = 3,5$. Таким образом, конвективное ядро появляется внутри звезд при $m > 3,5$. Радиус конвективного ядра x_1 определяется условием равенства градиента температур. Заменяя в формуле (2.62) знак $>$ равенством, находим

$$\lambda L_{x_1} = 1,6 M_{x_1} \left(\frac{B_1}{p_1} \right)_{x_1} = 1,6 M_{x_1} \rho_{x_1}. \quad (2.63)$$

Очевидно, что при более сильной концентрации источников размер конвективного ядра будет увеличиваться. При достаточной концентрации все источники энергии будут практически сосредоточены внутри конвективной зоны, а в зоне лучевого равновесия будет $\lambda L_x = \lambda L_{x_1} = \text{const}$. Так как граница конвективной зоны определяется равенством градиентов физических характеристик зон конвективного и лучевого равновесий, в такой звезде будут непрерывными не только сами p_1 и T_1 но и их производные. Поэтому расчет этой структуры можно произвести до конца, решая систему уравнений механического и лучевого равновесий при $\varepsilon_1 = 0$ и граничных условиях: 1) при некотором $x = x_1$ p_1 и B_1 и их производные должны иметь значения, соответствующие решению уравнения Эмдена при $n = 3/2$, 2) при $x = x_0$ $p_1 = B_1 = 0$. Эти четыре условия полностью определяют решение. Определение x_1 можно произвести последовательными пробами так, как это было сделано в § 3 при определении λ .

Формулированная задача, называемая обычно задачей строения звезды с точечным источником при малом лучевом давлении, была в этом виде впервые поставлена и решена Коулингом [17]. В расчетах Коулинга коэффициент поглощения считался переменным согласно формуле (2.51): $\kappa = \kappa_{ch}$. Мы видели (§ 6), что внутри звезд $\kappa = \kappa_T$. В самых внешних слоях звезды, очевидно, κ должно сильно возрасти и переходить в κ_{ch} . Но благодаря медленным изменениям физических условий в значительной части звезды κ может оставаться равным κ_T . Поэтому представляется интересным произвести расчет общей структуры звезды при $\kappa = \text{const}$. Это перевычисление модели Коулинга было произведено путем численного интегрирования системы уравнений (2.23в), полагая в ней $\varepsilon_1 = 0$.

В табл.3 приведены основные характеристики конвективной модели при $\kappa = \text{const}$ и $\kappa = \kappa_{ch}$; последние получены по вычислениям Коулинга. Величина λL_{x_0} определена при помощи формулы (2.62). В этой модели безразличен характер распределения источников внутри конвективной зоны, поэтому постоянные λ и L_{x_0} не разделяются. Для отдельного их вычисления необходимо задать тип распределения источников.

Т а б л и ц а 3

| κ | x_1 | M_{x_1} | λL_{x_0} | x_0 | M_{x_0} | $\frac{x_0^3}{3M_{x_0}}$ | $\frac{\lambda L_{x_0}}{M_{x_0}^3}$ |
|---------------|--------|-----------|-------------------|-------|-----------|--------------------------|-------------------------------------|
| const | 2,4913 | 3,570 | 3,018 | 8,9 | 11,46 | 20,5 | $1,97 \cdot 10^{-3}$ |
| κ_{ch} | 1,88 | 1,25 | 1,25 | 11,2 | 12,4 | 37,0 | $0,65 \cdot 10^{-3}$ |

Мы видим, что основные характеристики структуры x_0 , M_{x_0} и $\lambda L_{x_0}/M_{x_0}$ весьма мало отличаются от принятых нами на основании табл.2. Основное различие звездных структур при двух типах κ заключается в том, что при $\kappa = \text{const}$ конвективное ядро боль-

ше; в связи с этим характеристики структуры становятся ближе к политропным класса 3/2 и получается меньшая концентрация материи: $\rho_c = 20,5\bar{p}$.

В табл. 4 приведен полный расчет конвективной модели при $k = \text{const}$.

Т а б л и ц а 4

| x | T_1 | p_1 | ρ_1 | x | T_1 | p_1 | ρ_1 |
|------|-------|-----------------------|-----------------------|------|-------|-----------------------|-----------------------|
| 0,00 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 5,00 | 0,245 | $0,125 \cdot 10^{-1}$ | $0,510 \cdot 10^{-1}$ |
| 0,50 | 0,983 | 0,958 | 0,975 | 5,50 | 0,195 | $0,52 \cdot 10^{-2}$ | $0,266 \cdot 10^{-1}$ |
| 1,00 | 0,935 | 0,845 | 0,904 | 6,00 | 0,154 | $0,20 \cdot 10^{-2}$ | $0,129 \cdot 10^{-1}$ |
| 1,50 | 0,856 | 0,677 | 0,791 | 6,50 | 0,118 | $0,67 \cdot 10^{-3}$ | $0,57 \cdot 10^{-2}$ |
| 2,00 | 0,762 | 0,507 | 0,665 | 7,00 | 0,087 | $0,20 \cdot 10^{-3}$ | $0,23 \cdot 10^{-2}$ |
| 2,50 | 0,652 | 0,346 | 0,530 | 7,50 | 0,060 | $0,49 \cdot 10^{-4}$ | $0,82 \cdot 10^{-3}$ |
| 3,00 | 0,544 | 0,211 | 0,388 | 8,00 | 0,036 | $0,64 \cdot 10^{-5}$ | $0,18 \cdot 10^{-3}$ |
| 3,50 | 0,451 | 0,117 | 0,259 | 8,50 | 0,015 | $0,19 \cdot 10^{-6}$ | $0,79 \cdot 10^{-4}$ |
| 4,00 | 0,370 | $0,598 \cdot 10^{-1}$ | 0,161 | 8,9 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 4,50 | 0,328 | $0,284 \cdot 10^{-1}$ | $0,936 \cdot 10^{-1}$ | | | | |

ГЛАВА 3

ЗВЕЗДНЫЕ СТРУКТУРЫ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА СООТНОШЕНИЯ «ПЕРИОД–СРЕДНЯЯ ПЛОТНОСТЬ ЦЕФЕИД» И ДРУГИХ НАБЛЮДАТЕЛЬНЫХ ДАННЫХ

В предыдущей главе были получены соотношения, позволяющие определить физические характеристики состояния материи внутри звезд при известных звездных структурах. Для уверенного расчета помимо общих теоретических соображений весьма существенно получить структурные характеристики из наблюдательных данных, относящихся хотя бы к некоторым классам звезд.

Особенности структур должны проявляться в динамических свойствах звезд. Поэтому можно рассчитывать, что некоторые наблюдаемые свойства переменных звезд позволят сделать заключения о характере структур этого класса звезд. Например, период пульсации Цефеид должен зависеть не только от абсолютного значения физических характеристик, но и от их распределения внутри звезд. Теоретическое выяснение этой зависимости может быть произведено достаточно строго. Поэтому мы начнем с подробного рассмотрения этого вопроса.

Излучение энергии звездой должно вызывать рассеяние механической энергии колебаний. Вероятнее всего, что в переменных звездах энергия колебаний поддерживается и возникает за счет постоянно действующих источников звездной энергии: иными словами, они являются автоколебательными системами. Характер кривых колебаний яркости и скорости пульсации действительно указывает на нелинейность колебаний, характерную для автоколебательных систем. Для автоколебательных систем главную часть решения составляет гармоника с частотой, равной частоте собственных колебаний системы. Поэтому, не вникая в сущность процесса колебаний, можно получить значение периода пульсации как собственного периода малых линейных колебаний.

§1. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ПУЛЬСАЦИИ

Типичные Цефеиды имеют массы менее десяти солнечных масс, например для δ Серпейс $M \cong 9M_{\odot}$. Из уравнения (2.34) следует, что в таком случае $\gamma_c < 0,1$, и Цефеиды должны удовлетворять простому выражению $L \sim M^3$ зависимости масса–абсолютная яр-

кость. Таким образом, для этих звезд согласно нашим представлениям лучевое давление не играет большой роли, и мы можем при рассмотрении их внутреннего строения учитывать только газовое давление. Пренебрегая членами второго порядка малости, будем рассматривать линейные колебания. Задача получает значительное упрощение благодаря тому, что вариации температур должны соответствовать адиабатическим колебаниям почти для всей массы звезды за исключением лишь самых наружных ее слоев. Действительно, для получения наблюдаемых относительных вариаций эффективных температур порядка единицы среднее изменение энергии одного грамма за одну секунду должно быть порядка $\bar{\epsilon}$, т.е. $\sim 10^2$, а следовательно, за полпериода около 10^8 . С другой стороны, тепловая энергия единицы массы должна быть порядка Ω/M (как это следует из теоремы вириала), т.е. по формуле (2.5) порядка 10^{15} эрг. Таким образом, за время пульсации относительное изменение энергии составляет всего лишь 10^{-7} , откуда и следует, что пульсация звезд с весьма высокой точностью адиабатична. Допустим далее, что пульсация может быть описана простой стоячей волной с частотой $n/2\pi$:

$$V(r, t) = V(r) \sin nt; \quad a = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -n^2 V(r) \sin nt, \quad (3.1)$$

где $V(r)$ обозначает относительную амплитуду пульсации:

$$V(r) = \delta r/r.$$

В этих предположениях задача Пульсации звезды была решена Эддингтоном.

Связывая координату r с одной и той же частицей, будем иметь уравнение непрерывности в следующем виде:

$$M_r = \text{const}; \quad r^2 \rho \, dr = \text{const}. \quad (3.2)$$

Пользуясь условием адиабатического изменения состояния $\frac{\delta p}{p} = \Gamma \frac{\delta \rho}{\rho}$ и беря вариации от второго равенства, находим

$$\frac{\delta p}{p} = -\Gamma \left[3V + r \frac{dV}{dr} \right]. \quad (3.3)$$

Очевидно, что уравнение движения

$$\frac{dp}{\rho dr} = -g; \quad g = \frac{GM_r}{r^2}$$

с точностью до членов первого порядка может быть записано следующим образом:

$$\frac{d(\delta p)}{dr} = -r a \rho - 4V \frac{dp}{dr}.$$

Подставляя в это уравнение формулу (3.3), получим уравнение пульсации Эддингтона

$$\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \left[4 + \frac{r}{p} \frac{dp}{dr} \right] + \frac{V}{r\Gamma} \frac{1}{p} \frac{dp}{dr} \left[(3\Gamma - 4) - \frac{n^2 r}{g} \right] = 0. \quad (3.4)$$

Введем вместо r безразмерную переменную x , которой мы пользовались при изучении статических звезд. Как легко видеть,

$$\frac{g}{r} = 4\pi G \frac{\bar{\rho} r}{3} = 4\pi G \rho_c \frac{M_x}{x^3}. \quad (3.5)$$

Подставляя выражение (3.5) в формулу (3.4), получаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dV}{dx} \left[4 + \frac{x}{p_1} \frac{dp_1}{dx} \right] - \frac{V}{x\Gamma} \frac{1}{p_1} \frac{dp_1}{dx} \left[(4 - 3\Gamma) + \frac{n^2}{4\pi G \rho_c} \frac{x^3}{M_x} \right] = 0. \quad (3.6)$$

Приведем это уравнение к самосопряженному виду. Умножая на $x^4 p_1$ находим

$$\frac{d}{dx} \left[x^4 p_1 \frac{dV}{dx} \right] - V x^3 \frac{dp_1}{dx} \frac{4 - 3\Gamma}{\Gamma} \left[1 - \lambda \frac{x^3}{3M_x} \right] = 0, \quad (3.7)$$

где

$$\lambda = \frac{n^2}{4\pi G \rho_c (\Gamma - 4/3)}. \quad (3.8)$$

Задача определения периода пульсации сводится теперь к нахождению собственных значений λ , при которых дифференциальное уравнение (3.7) имеет решения, удовлетворяющие «естественным» граничным условиям:

$$x^4 p_1 \frac{dV}{dx} \Big|_0^{x_0} = 0. \quad (3.9)$$

Формула (3.8) дает соотношение период–центральная плотность, а следовательно, и соотношение период–средняя плотность звезды. Очевидно, что λ зависит от структуры звезды. Значение λ должно быть порядка единицы. Если звезда имеет постоянную плотность, то $x_0^3/(3M_x) = 1$ для всей звезды. В этом случае уравнение (3.7) имеет решение $V = \text{const}$, $\lambda = 1$. Это решение определяет основное колебание. Для определения основных колебаний звезд других структур мы можем исходить из этого решения, применяя метод возмущений.

§2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ПУЛЬСАЦИИ МЕТОДОМ ВОЗМУЩЕНИИ

Запишем уравнение пульсации в следующем виде:

$$(py')' + qy(1 - \lambda\rho) = 0. \quad (3.10)$$

Допустим, что нам известно решение этого уравнения при некоторой другой функции $\rho = \rho_0$:

$$(py'_0)' + qy_0(1 - \lambda_0\rho_0) = 0. \quad (3.11)$$

Следовательно, будем считать, что функция y_0 и параметр λ_0 нам известны. Умножая (3.10) на y_0 , (3.11) на y , вычитая одно из другого и интегрируя в пределах, для которых имеются граничные условия, находим

$$\int_0^{x_0} qy y_0 [\lambda_0 \rho_0 - \lambda \rho] dx = 0,$$

откуда

$$\lambda = \lambda_0 \frac{\int_0^{x_0} qy y_0 \rho_0 dx}{\int_0^{x_0} qy y_0 \rho dx}. \quad (3.12)$$

Предположим, что уравнение (3.10) мало отличается от уравнения (3.11):

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho; \quad y = y_0 + \delta y \quad \text{и} \quad \lambda = \lambda_0 + \delta\lambda.$$

Тогда точное выражение для $\delta\lambda$

$$\delta\lambda = -\lambda_0 \frac{\int_0^{x_0} qy_0 y \delta\rho dx}{\int_0^{x_0} qy_0 y \rho dx}$$

можно заменить следующим:

$$\delta\lambda = -\lambda_0 \frac{\int_0^{x_0} qy_0^2 \delta\rho dx}{\int_0^{x_0} qy_0^2 \rho dx}.$$

Таким образом, в первом приближении имеем

$$\lambda = \lambda_0 \frac{\int_0^{x_0} qy_0^2 \rho_0 dx}{\int_0^{x_0} qy_0^2 \rho dx}. \quad (3.13)$$

В нашем случае $y_0 = 1$ и $\lambda_0 = 1$. Сравнивая формулы (3.10) и (3.7), находим из (3.13)

$$\lambda = \frac{3 \int_0^{x_0} x\rho_1 M_x dx}{\int_0^{x_0} x^4 \rho_1 dx}. \quad (3.14)$$

Это выражение перепишем согласно формуле (2.5а) в следующем виде:

$$\lambda = \frac{9 \int_0^{x_0} p_1 x^2 dx}{\int_0^{x_0} \rho_1 x^4 dx}. \quad (3.15)$$

Если в формулу (3.8) вместо ρ_c ввести среднюю плотность звезды $\bar{\rho}$, то

$$\bar{\lambda} = \frac{n^2}{4\pi G \bar{\rho} (\Gamma - 4/3)}, \quad (3.16)$$

$$\bar{\lambda} = \lambda \frac{\rho_c}{\bar{\rho}} = \frac{x_0^3}{3M_{x_0}} \lambda, \quad (3.17)$$

как это следует из формулы (2.4). При помощи формул (2.6) и (3.17) можем переписать (3.15):

$$\bar{\lambda} = \frac{x_0^2 \Omega_{x_0} M_{x_0}}{I_{x_0}}, \quad (3.18)$$

где I_{x_0} обозначает безразмерный момент инерции:

$$I_{x_0} = \int_0^{x_0} \rho_1 x^4 dx. \quad (3.19)$$

Выражения (3.16) и (3.18) определяют период колебаний звезды $P = 2\pi/n$ в зависимости от средней плотности звезды $\bar{\rho}$. Этот результат совершенно иным методом был получен Леду (Ledoux). Интересно, что выражения (3.16) и (3.18), как легко показать, вполне точно совпадают с формулой Леду [18].

Т а б л и ц а 5

| n | $\bar{\lambda}$ |
|-----|-----------------|
| 0 | 1,00 |
| 1 | 1,91 |
| 3/2 | 2,52 |
| 2 | 3,85 |
| 2,5 | 7,0 |
| 3 | 13,1 |

Произведем вычисление λ для политропных структур. В этом случае для I_{x_0} можно получить следующее выражение:

$$I_{x_0} = x_0^2 M_{x_0} - 6(n+1) \int_0^{x_0} T_1 x^2 dx, \quad (3.20)$$

где n означает индекс политропы. Таким образом,

$$\frac{1}{\bar{\lambda}} = \frac{5-n}{3} \left[1 - 6(n+1) \frac{\int_0^{x_0} T_1 x^2 dx}{M_{x_0} x_0^2} \right]. \quad (3.21)$$

Вычисления дают следующую таблицу значений $\bar{\lambda}$ для различных клас-

сов политропии (табл. 5).

При больших $\bar{\lambda}$ т.е. при сильных отклонениях от единицы, точность данных этой таблицы должна ухудшаться. Поэтому для контроля точности метода интересно сопоставить полученные результаты при $n = 3$ с вычислениями постоянной в зависимости период–средняя плотность, произведенными Эддингтоном, путем точного решения уравнения адиабатических колебаний звезды, построенной по его модели. Эддингтон на основании своих вычислений заключил, что для таких звезд $n^2/(\pi G \rho_c \Gamma) = (3/10)(3 - 4\Gamma)$. Отсюда, сопоставляя с формулой (3.8), находим $\lambda = 9/40$. Следовательно, $\bar{\lambda} = \rho_c/\bar{\rho} \cdot 9/40 = 12,23$, что хорошо согласуется с нашими данными.

§3. СРАВНЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ С ДАННЫМИ НАБЛЮДЕНИЙ

Представим зависимость период–средняя плотность в следующем виде:

$$P\sqrt{\bar{\rho}_0} = c_1, \quad (3.22)$$

где P – период, выраженный в днях, и $\bar{\rho}_0$ – средняя плотность в долях средней плотности Солнца,

$$n = \frac{2\pi}{P \cdot 86400}; \quad \bar{\rho} = \bar{\rho}_0 \cdot 1,411.$$

При помощи формулы (3.16) легко получить следующую связь постоянных $\bar{\lambda}$ и c_1 :

$$\bar{\lambda}(\Gamma - 4/3) = 0,447(10c_1)^{-2}. \quad (3.23)$$

Согласно результатам, полученным нами при анализе зависимости масса–абсолютная яркость, лучевое давление в звезде много меньше газового, и, поскольку внутренние области звезды состоят из водорода, тепловая энергия значительно превосходит энергию ионизации. Поэтому мы имеем все основания считать $\Gamma = 5/3$ отношением теплоемкостей одноатомного газа. Следовательно,

$$\bar{\lambda} = 1,34(10c_1)^{-2}. \quad (3.24)$$

Чтобы выразить c_1 через наблюдаемые характеристики звезды, заменим в формуле (3.22) $\bar{\rho}_0$ через эффективную температуру и абсолютную величину по формуле масса–абсолютная яркость. Допустим, что соотношение масса–яркость имеет вид $L \sim M^\alpha$. Тогда, обозначая соответственно через \bar{T} и M_b эффективную температуру по отношению к эффективной температуре Солнца и абсолютную величину звезды, из формулы (3.22) находим

$$\left(0,30 - \frac{1}{5\alpha}\right)(M_b - M_\odot) + \lg P + 3\lg \bar{T} = \lg c_1. \quad (3.25)$$

Из этой формулы видно, что для определения c_1 точное значение α несущественно, если только α достаточно велико (практически больше трех). Формула Эддингтона соотношения масса–яркость при больших массах имеет эффективное значение показателя α около двух (см. (2.53)). Поэтому значение $c_1 = 0,100$, которое получается при пользовании формулой Эддингтона, является завышенным. Применение формулы $L \sim M^{10/3}$, как показал Паренаго[19], дает $c_1 = 0,071$. Тщательный анализ наблюдаемых данных по отдельным Цефеидам с применением эмпирической кривой Койпера масса–яркость привел Беккера (W. Becker) [20] к заключению, что в среднем $c_1 = 0,076$. Из этих определений по формуле (3.24) получается, что $\bar{\lambda} = 2,7$ или 2,3, откуда на основании данных табл.5 мы приходим к заключению, что Цефеиды имеют структуру, близкую к политропной класса $n = 3/2$. Таким образом, Цефеиды обладают весьма малой концентрацией материи: $\rho_c \cong 6\bar{\rho}$.

Качественно этот результат находится в согласии с естественным представлением о том, что интенсивность источников звездной энергии сильно возрастает с приближени-

ем к центру звезды. Однако даже разобранный в § 8 гл.2 модель с точечным источником и постоянным коэффициентом поглощения, которая, как мы видели, дает наименьшую концентрацию материи, приводит к значительно большему отношению: $\rho_c/\bar{\rho} = 20,5$. Таким образом, для этой модели $\bar{\lambda}$ должно получиться больше наблюдаемого. Действительно, вычисляя по данным табл.4 $\int_0^{x_0} p_1 x^2 dx = 6,06$ и $I_{x_0} = 140,0$, из формул (3.15) и (3.17) находим, что для этой модели с предельной концентрацией источников энергии $\bar{\lambda} = 8,0$. Соответствующий класс политропии $n = 2,5$. С переменным коэффициентом поглощения на основании вычислений Коулинга получается еще большее значение $\bar{\lambda} = 8,4$.

В теоретических исследованиях периода пульсации Эддингтона и других авторов расхождение теоретического значения $\bar{\lambda}$ для модели Эддингтона с наблюдаемым значением объяснялось влиянием лучевого давления. Исследование пульсации при γ_c , близких к единице, показывает, что полученные выражения периода пульсации при малых γ_c справедливы и в этом случае, если считать, что Γ представляет собой эффективное отношение теплоемкостей, заключающееся в зависимости от роли лучевого давления в пределах $4/3 \leq \Gamma_{\text{eff}} \leq 5/3$.

Из выражения (3.23) следует, что при $\bar{\lambda} = 12,23$ и наблюдаемом $c_1 = 0,075$ $\Gamma_{\text{eff}} = 1,40$. Но Γ_{eff} должно меняться в зависимости от γ_c т.е. в зависимости от роли лучевого давления. Для одноатомного газа согласно Эддингтону [21] и другим авторам эта зависимость может быть представлена следующим образом:

$$\Gamma_{\text{eff}} - 4/3 = \frac{1}{3} \frac{1 + 4\gamma_c}{(1 + \gamma_c)(1 + 8\gamma_c)}. \quad (3.26)$$

При $\Gamma_{\text{eff}} = 1,400$ получается $\gamma_c = 1,5$. Будем считать, что это значение соответствует среднему значению периода Цефеид, т.е. $P = 10^d$, и по соотношению масса–яркость массе $M = 12M_{\odot}$. Может показаться, что этот результат хорошо согласуется с обычными представлениями о роли лучевого давления внутри звезд (см. § 7 гл.2). Однако, поскольку λ_c зависит от массы звезды, для других периодов мы будем иметь согласно (3.26) другие значения Γ_{eff} и, следовательно, другие значения постоянной c_1 . По формулам (3.26) и (3.23) можно вычислить изменение эффективного значения c_1 при переходе к звездам большого периода $20^d < P < 30^d$. Вместо найденного Беккером среднего значения $\lg c_1 = -1,12$ для звезд таких периодов должно получаться $\lg c_1 \cong -1,00$. Хотя этот эффект и невелик, все же из наблюдений совершенно не видно такого систематического возрастания c_1 [20]. Таким образом, наше представление о малой роли лучевого давления в звездах, даже таких, как сверхгиганты, находят новое подтверждение, и этим подтверждаются результаты $\mu = 1/2$; $\kappa = \kappa_T$, полученные в главе 2.

§4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ДАННЫЕ О ЗВЕЗДНЫХ СТРУКТУРАХ

Некоторые указания о структурах звезд можно извлечь из анализа эффекта эллиптичности в кривых блеска затменных переменных. Наблюдения позволяют определить отношение диаметров экваториального сечения звезды, различие которых вызвано приливной деформацией. При синхронном вращении звезды и всей системы сжатие вращения в первом приближении должно отличаться от экваториального на множитель, зависящий от масс компонент, который может быть вычислен. Таким образом, из наблюдаемого сжатия может быть определено сжатие в меридиональной плоскости ε – чистый эффект вращения. Согласно теории Клеро, ε пропорционально φ – отношению центробежной силы на экваторе к силе тяжести на поверхности звезды:

$$\varepsilon = \alpha\varphi; \quad \frac{\omega^2}{3\pi G \bar{\rho}},$$

где α – постоянная, зависящая от структуры звезды. Для политропных структур эта постоянная вычислялась рядом исследователей: Ресселл, Чандрасекар и др. При $n = 0$ (одно-

родная звезда) $\alpha = 1,25$; $n = 1$ $\alpha = 15/(2\pi^2) = 0,755$ и $n = 5$ (пределная концентрация – модель Роша) $\alpha = 0,50$. Как видно из этих чисел, постоянная α мало чувствительна к характеру структуры; поэтому определение этим способом класса n требует слишком большой точности наблюдений и мало надежно, несмотря на простоту теоретических предположений. Первые выводы, полученные Шапли (Shapley), о том, что звезды близки к однородности, были подтверждены Лейтенем (Luyten) [22], который нашел как среднее из большого числа звезд $\alpha = 0,57$ для звезд типа β Лугае и $\alpha = 0,71$ для звезд типа Алголя, что соответствует политропным структурам классов $n = 3/2$ и $n = 1$.

Наблюдаемое у некоторых затменных переменных движение линии апсид в ряде случаев объясняется эллиптичностью этих звезд. При сильной концентрации материи, несмотря на эллиптичность, звезды будут взаимодействовать как материальные точки, и движения линии апсид не будет. Поэтому скорость движения линии апсид должна быть в первом приближении пропорциональна величине $(\alpha - 1/2)$, которая, как видно из приведенных выше значений α , весьма чувствительна к характеру звездной структуры. Однако многочисленные теоретические исследования, посвященные этому вопросу, приводят к разноречивым выражениям для скорости движения линии апсид в зависимости от гипотез о характере вращения компонент пары. Первое исследование Ресселла предполагало, что компоненты вращаются как твердые тела. Применение этой теории к системе Υ Cygni привело Ресселла и Дугана (Dugan) [23] к значению $(\alpha - 1/2) = 0,034$, соответствующему политропной структуре $3/2 < n < 2$. Другие исследователи при других предположениях получали n значительно большим: $n \cong 3$. По-видимому, можно утверждать только то, что, поскольку в системах звезд наблюдается движение линии апсид, в звездах нет высокой концентрации материи.

Т а б л и ц а 6

| n | k |
|-----|------|
| 0 | 1,00 |
| 1 | 0,65 |
| 3/2 | 0,52 |
| 2 | 0,40 |
| 2,5 | 0,28 |
| 3 | 0,20 |

В случае, если справедлив закон, высказанный Блэкеттом (Blackett) о постоянстве отношения магнитного момента P и углового момента U для всех вращающихся тел, получается другая интересная возможность определения звездной структуры. Обозначим через k отношение момента инерции звезды, вращающейся с угловой скоростью ω , к моменту инерции той же звезды при равномерном распределении ее плотности; тогда $U = (2/5)k\omega MR^2$, $k = (5/3)[I_{x_0}/(x^2 M_{x_0})]$, где I_{x_0} – безразмерный момент инерции. При помощи формулы Блэкетта [24]

$$\frac{P}{U} = \beta \frac{G^{1/2}}{2c} \quad (3.27)$$

(β – безразмерный множитель порядка единицы), зная напряжение магнитного поля на полюсе $H = 2P/R^3$, можно определить k . Применение этой формулы к Земле ($k = 0,88$) дает $\beta = 0,3$. Полагая для звезд $k = 0,16$, Блэкетт находит для Солнца и 78 Virginis, магнитное поле которой было измерено Бэбкокком (H.W. Babcock), $\beta = 1,14$ и $\beta = 1,16$ соответственно. Таким образом, если закон (3.27) действительно имеет универсальный характер и $\beta = 0,3$ для всех тел, для звезд должно быть принято $k = 0,60$. Из сопоставления с данными табл.6 следует, что $n \cong 3/2$. Для звездной модели, вычисленной в § 8 гл.2, получается значение $k = 0,26$, которое значительно меньше требуемого. Эта же конвективная модель с переменным коэффициентом поглощения (модель Коулинга) дает еще меньшее значение: $k = 0,19$. Согласованность полученного значения n с другими рассмотренными выше определениями подтверждает справедливость закона Блэкетта. Возможно, что формула (3.27) должна быть написана без β со знаменателем $2\pi c$.

§5. ВЫВОДЫ О СТРУКТУРАХ ЗВЕЗД

Наиболее надежные заключения о структурах звезд получаются исходя из теории пульсации Цефеид. Цефеиды, по-видимому, имеют структуры, близкие к политропным класса $n = 3/2$, для которых $\rho_c = 6\bar{\rho}$. Этот вывод подтверждается совокупностью других

соображений, из которых каждое, взятое в отдельности, может вызывать большие сомнения. Однако знаменательно, что различные свойства звезд различных типов приводят приблизительно к одинаковым результатам. Вероятно, звезды действительно близки к однородности, имея концентрацию материи, аналогичную большим планетам – Юпитеру и Сатурну. Такое распределение материи, как видно из рассмотренной нами предельной конвективной модели, не может быть объяснено высокой концентрацией источников энергии и особым видом коэффициента поглощения. Причина этого заключается в том, что в уравнение механического равновесия B входит через p в степени $1/4$, и, таким образом, это уравнение мало чувствительно к изменениям параметров уравнения теплового равновесия, определяющего B . Поэтому характеристики M_{x_0} и x_0 , определяемые в основном характером функций ρ_1 , меняются мало при разных моделях. Следовательно, для получения наблюдаемой малой концентрации материи можно пытаться внести изменения не в уравнение теплового, а в уравнение механического равновесия. Политропная модель $n = 3/2$ отличается от рассмотренных моделей с различными типами источников энергии меньшим x_0 . Для уменьшения x_0 необходимо ускорить падение давления во внешних слоях звезды. Более быстрое падение давления получится, если внешние слои будут тяжелыми, т.е. при возрастании к поверхности молекулярного веса μ . Такое объяснение находится в полном соответствии с нашим представлением о большом содержании водорода во внутренних слоях звезд. Если допустить, что средний молекулярный вес меняется в звезде от $\mu = 1/2$ в центре до $\mu = 2$ во внешних слоях, то это сравнительно небольшое изменение молекулярного веса может оказаться достаточным.

Выясним влияние переменного μ при следующих упрощениях. Допустим, что μ зависит от температуры следующим образом:

$$\mu_1 = T_1^{-s}, \quad (3.28)$$

где s – некоторый положительный показатель. Возрастание к поверхности молекулярного веса должно вызвать возрастание коэффициента поглощения (переход от $\kappa = \kappa_T$ к $\kappa = \kappa_{ch}$). Но при источниках, быстро растущих к центру, величина $\kappa_1 L_x / M_x$ может оставаться постоянной. При этом знаменитом упрощении Эддингтона будем решать нашу задачу. Если $\kappa_1 L_x / M_x = \text{const} = 1$, то из уравнения (2.22а) следует, что

$$p_1 = B_1 = T_1^4 \quad (\lambda = 1). \quad (3.29)$$

Введем вместо T_1 характеристику

$$u_1 = \frac{T_1}{\mu_1} = T_1^{1+s} = \mu_1^{-\frac{1+s}{s}}. \quad (3.30)$$

С этой характеристикой уравнение идеальных газов будет иметь прежний вид: $p_1 = u_1 \rho_1$. Согласно (3.29)

$$p_1 = u_1^{\frac{4}{1+s}}. \quad (3.31)$$

Показатель $4/(1+s)$ мы должны приравнять к $n+1$ в соответствии с формулой (2.7а).

Таким образом,

$$\rho_1 = u_1^n; \quad n = \frac{3-s}{1+s}, \quad (3.32)$$

и функция u_1 будет определяться уравнением Эмдена класса n . Следовательно, для получения структуры $n = 3/2$ должно быть $s = 3/5$, т.е. сравнительно медленное увеличение молекулярного веса. При таком s μ увеличивается в 4 раза на расстоянии x_1 от центра звезды, определяемом значениями

$$\mu_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^{8/3} = 0,025; \quad T_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^{5/3} = 0,10. \quad (3.33)$$

Для $x > x_1$ μ_1 должно оставаться постоянным, и равновесие звезды будет определяться обычными уравнениями. Однако при значениях (3.33) уже исчерпана основная масса звезды (см., например, табл.4), и к политропной структуре $n = 3/2$ получатся сравнительно небольшие поправки. Действительно, из таблиц функции Эмдена при $n = 3/2$ видно, что $x_1 = 5,6$ и $M_{x_1} = 11,0$. Применяя теперь формулу (2.27а), находим $x_0 = 7,0$ вместо $x_0 = 6$ при политропной структуре. Приведенный расчет показывает, что наблюдаемые звездные структуры² подтверждают полученный из анализа соотношения масса–яркость результат о большом содержании водорода внутри звезд. Однако следует иметь в виду, что содержание водорода во внешних слоях звезд на самом деле очень значительно. Поэтому во всей звезде $\mu < 2$ и вопрос об однородности звездных структур вряд ли исчерпывается приведенным здесь рассуждением.

Мы видели, что безразмерная масса M_{x_0} мало меняется для различных звездных моделей. Для политропных структур при $n = 3/2$ и $n = 2$ для конвективных моделей и моделей, приведенных в табл.2, получается приблизительно одинаковое значение. Поэтому с достаточной уверенностью можно принять $M_{x_0} = 11$. Что касается x_0 , то в соответствии с наблюдаемыми звездными структурами, по-видимому, следует остановиться на значении $x_0 = 6$. Тогда $\bar{\rho}_c = 6,5\bar{\rho}$. Для получения из наблюдаемой кривой масса–яркость $\kappa = \kappa_1$ должно быть $\lambda L_{x_0}/M_{x_0}^3 = 1,0 \cdot 10^{-3}$. Таким образом, получается $\lambda L_{x_0} = 1,5$. Теперь мы имеем возможность по формулам (2.28), (2.30) и (2.31) рассчитать, физические условия внутри любой звезды. Произведем этот расчет для Солнца. Полагая $\mu_c = 1/2$, находим

$$\begin{aligned} \rho_c &= 9,2; \quad p_c = 9,5 \cdot 10^{15}; \\ \gamma_c &= 0,4 \cdot 10^{-3}; \quad B_c = 3,8 \cdot 10^{12}; \\ T_c &= 6,2 \cdot 10^6 \text{ град.} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Из этих данных наиболее надежно значение γ_c , поскольку оно зависит только от характеристики M_{x_0} . Столь низкая температура в центре Солнца – около шести миллионов градусов – получилась благодаря малым значениям μ_c и x_0 . При таких температурах вряд ли возможно объяснение происхождения звездной энергии термонуклеарными реакциями: эти реакции не смогут обеспечить необходимого выхода энергии.

Полученные результаты делают возможным дальнейшие исследования о внутреннем строении звезд. В частности, открывается путь физической интерпретации диаграммы Расселла–Гертцшпрунга, которая уже самым тесным образом связана с вопросом происхождения звездной энергии.

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ

1. B e t h e H. A. Energy Production in Stars // The Physical Review. 1939. Vol. 55. N 5. P. 434–456.
2. S c h w a r z s c h i l d K. Ueber das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre // Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch–physikalische Klasse. 1906. H. 1. S. 41–53.
3. S c h m i d t W. Der Massenaustausch in freier Luft und verwandte Erscheinungen. Hamburg, 1925. 120 S. (Probleme der Kosmischen Physik; Bd 7).

²Следует заметить, что учет переменности молекулярного веса не изменяет формул, определяющих период пульсации Цефеид. Переменность μ влияет на результат лишь изменением структуры звезды.

4. Milne E. A. The Analysis of Stellar Structure // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1930. Vol. 91. N 1. P. 4–55.
5. Kuiper G. P. Note on Hall's Measures of ϵ Aurigae // The Astrophys. Journ. 1938. Vol. 87. N 2. P. 213–215.
6. Паренаго П. П. Физические характеристики субкарликов // Астрон. журн. 1946. Т. 23. Вып. 1. С. 37.
7. Chandrasekhar S. The Highly Collapsed Configurations of a Stellar Mass. (Second Paper) // Monthly Notices of the Royal Astron. Soc. 1935. Vol. 95. N 3. P. 217.
8. Kuiper G. P. The Empirical Mass–Luminosity Relation // The Astrophys. Journ. 1938. Vol. 88. N 4. P. 472–507.
9. Russell H. N., Moore Ch. E. The masses of the stars with a general catalogue of dynamical parallaxes. Chicago, 1946. 236+IX p. (Astrophysical Monographs).
10. Trumpler R. J. Observational evidence of a relativity red shift in class O stars // Publications of the Astron. Soc. of the Pacific. 1935. Vol. 47. N 279. P. 254.
11. Parenago P. P. The mass–luminosity relation // Астрон. журн. 1937. Т. 14. Вып. 1. С. 46.
12. Baize P. Les masses des étoiles doubles visuelles et la relation empirique masse–luminosité // Bulletin Astronomique [Paris]. 1947 Т. 13, fasc 2 P. 123–152.
13. Eddington A. S. The internal constitution of the stars. Cambridge, 1926. P. 153.
14. Chandrasekhar S. An introduction to the study of stellar structure. Chicago, 1939. P. 412 (Astrophysical Monographs).
15. Eddington A. S. The internal constitution... P.135.
16. Strömberg B. 1) The opacity of stellar matter and the hydrogen content of the stars // Zeitschrift für Astrophysik. 1932. Bd 4. H. 2. S. 118–152; 2) On the Interpretation of the Hertzsprung–Russell–Diagram // Zeitschrift für Astrophysik. 1933. Bd 7. H. 3. S. 222–248.
17. Cowling T. G. The Stability of Gaseous Stars. (Second Paper) // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1935. Vol. 96. N 1. P. 57.
18. Ledoux P. On the Radial Pulsation of Gaseous Stars // The Astrophys. Journ. 1945. Vol. 102. N 2. P. 143–153.
19. Паренаго П. П. Курс звездной астрономии. М.; Л., 1938. С. 200.
20. Becker W. Spektralphotometrische Untersuchungen an δ Cephei–Sternen X // Zeitschrift für Astrophysik. 1940. Bd 19. H. 4/5. S. 297.
21. Eddington A. S. The internal constitution... P. 191.
22. Luyten W. J. On the Ellipticity of Close Binaries // Monthly Notices of the Royal Astron. Soc. 1938. Vol. 98. N 6. P. 459–466.
23. Russell H. N., Dugan R. S. Apsidal Motion in γ Cygni and other Stars // Monthly Notices of the Royal Astron. Soc. 1930. Vol. 91. N. 2 P. 212–215.
24. Blackett P. M. S. The magnetic field of massive rotating bodies // Nature. 1947. Vol. 159. N 4046. P. 658–666.

Адрес страницы: <http://www.nkozyrev.ru/bd/018.php>