

Н. П. КАСТЕРИН

ОБОБЩЕНИЕ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ  
АЭРОДИНАМИКИ И ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

ДОКЛАД НА ОСОБОМ СОВЕЩАНИИ  
ПРИ АКАДЕМИИ НАУК СССР  
9 ДЕКАБРЯ 1936 г.

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР  
МОСКВА—1937 г.

~~Проверено 10 1937 г.~~

533  
К 288

Государственный  
Исторический  
Музей  
Л. К. Г. М.

980/5  
37  
bb

ПРОВЕРКА  
VII ГНЕ 1949

1938  
ПРОВЕРЕНО

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР  
Непременный секретарь академик Н. Горбунов

Свердло  
1937 г.

Свердло  
1937 г.

СВЕРДЛО

Отв. редактор академик А. Е. Ферсман      Редактор С. С. Бернштейн  
Сдано в набор 11/1 1937 г.    Подписано к печати 14/II 1937 г.    16 стр. Формат бум. 72x110 см.—1 печ. л.—58 000 печ. зн. в л.—Тираж 3.000. Москва. Уполномоченный Главлита Б—5958. АНИ № 430. Заказ № 87

16-я типография треста «Полиграфкнига», Трехпрудный пер., 9.

## ОБОБЩЕНИЕ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ АЭРОДИНАМИКИ И ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

(Доклад на особ. совещании при Академии Наук 9 декабря 1936 г.)

Я хочу изложить в качестве предварительного сообщения результаты моих исследований по вопросам: 1) обобщения уравнений аэродинамики; 2) обобщения уравнений электродинамики и 3) по вопросу обобщения этих уравнений в одну общую систему.

Чрезвычайная обширность поставленной мною темы заставляет меня ограничиться здесь изложением только самого существенного и обойти молчанием многие само собой возникающие в связи с моим исследованием вопросы принципиального значения. Я полагаю, что мне придется еще не раз выступать с докладами по тем или другим разделам разрешенной мною задачи.

Исходная идея всего исследования более, чем проста: вся физика и аэродинамика в том числе основаны на опытных измерениях, точность же наших измерений всегда ограничена; стало быть, и все закономерности как конечные, так и в форме дифференциальных уравнений, служащие теоретическим отображением экспериментальных измерений, всегда приближенны; и почти все закономерности современной физики являются только первыми приближениями. Система основных уравнений электромагнитного поля Максвелла, установленная 75 лет тому назад, несомненно не в состоянии обнять все явления электромагнетизма, известные в настоящее время; современная теоретическая физика пытается достигнуть этой цели путем надстроек в виде релятивистской, квантовой и волновой механики, изменяя, обобщая и даже извращая основы классической механики и физики, но допуская *tacito consensu*, что уравнения Максвелла абсолютно точны. С нашей точки зрения уравнения электромагнитного поля Максвелла только первые приближения, и их недостаточность в настоящее время происходит от того, что точность современных измерений в электродинамике неизмеримо возросла по сравнению с временами Фарадея, Максвелла, Герца, со времени их установления. То же самое справедливо по отношению к уравнениям гидродинамики, данным 180 лет тому назад Эйлером и формально распространенным на случай движения газов: они явно недостаточны для представления тех быстрых движений воздуха, с которыми приходится иметь дело в авиации, особенно для вихревых движений. Уравнения аэродинамики Эйлера также представляют только первое приближение.

При таком положении дела сама собой является мысль, *не изменяя основ классической механики и физики*, искать второе приближение как для уравнений электромагнитного поля, так и для аэродинамики, и посмотреть, не смогут ли эти более общие уравнения обнять всю ту совокупность фактов в области электромагнетизма и аэродинамики, которые твердо установлены опытным путем.

Когда поставлен вопрос о степени приближения, то должен быть установлен критерий для этого; установить его не представляется никакого труда из анализа тех условий, при которых в свое время вырабатывались уравнения Эйлера и Максвелла. Таким образом в аэродинамике за критерий приближенности надо взять отношение квадрата скорости движения газа к квадрату скорости звука в нем:  $\frac{v^2}{c^2}$ .

В электродинамике критерием в указанном смысле служит отношение квадрата напряжения магнитного поля ( $M$ ) к квадрату напряжения электрического поля ( $E$ ), т. е.  $M^2/E^2$ . Этот электродинамический критерий совершенно точно совпадает, как увидим ниже, с аэродинамическим, так как отношение магнитного напряжения к электрическому всегда можно представить как отношение скорости движения электрического поля ( $\omega$ ) к скорости света:  $\frac{M^2}{E^2} = \frac{\omega^2}{c^2}$ .

В первом приближении это отношение квадратов скоростей считается очень малой величиной по сравнению с единицей и в уравнениях ею можно пренебречь или, если удерживать, то в качестве поправочной величины. Во втором приближении это отношение  $\frac{\omega^2}{c^2}$  может быть не только равным единице, но и больше, никаких ограничений в этом смысле механика Ньютона не знает, и следовательно этой величине во втором приближении надо уделять особенное внимание.

При изыскании вторых приближений в наших случаях надо иметь в виду не только то, что дело идет о скоростях движения, равных или даже больших, чем скорость звука и соответственно света, но и то, что после времен Эйлера и Максвелла экспериментально установлены факты, которые коренным образом меняют самую трактовку этих задач: это — факт прерывности строения и газа и электрического поля. При выводах Эйлера и Максвелла, наоборот, постулировалась непрерывность в этих случаях. Прерывность структуры газа устанавливается прежде всего кинетической теорией газов и ее согласием с фактами, прерывность электрического поля — существованием элементарного электрического заряда (электрона).

В качестве основного метода для решения поставленных мною задач я пользуюсь уравнениями динамики Лагранжа, обобщенными для физических систем Гельмгольцем в его последних работах по принципу наименьшего действия; если через  $\Pi$  обозначим потенциальную энергию системы, а через  $K$  — кинетическую, так что кинетический потенциал будет  $H = \Pi - K$ , то уравнение Гельмгольца для параметра  $q_a$  и скорости  $\dot{q}_a$  имеет вид:

$$\frac{\partial H}{\partial q_a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_a} = 0. \quad (1)$$

Составление выражения для кинетического потенциала ( $H$ ) производится на основании экспериментально установленных

и признаваемых всеми основными свойствами аэродинамического и электрического полей.

Оставляя пока в стороне все необходимые вычисления, которые конечно сложны и требуют много места, я в настоящем моем предварительном сообщении изложу только главнейшие результаты моего исследования с некоторыми применениями их для сравнения с опытом в ряде частных случаев.

В целях наглядности и для облегчения сравнения первого и второго приближений для уравнений как аэродинамики, так и электродинамики, я буду пользоваться превосходным приемом старинных математиков именно буду применять натуральные криволинейные ортогональные координаты. Для представления уравнений аэродинамики Эйлера в этих координатах  $\lambda, \mu, \nu$  примем, что первая ось  $\lambda$  криволинейных координат направлена по оси вихря, третья,  $\nu$ , — по направлению скорости  $\omega$  по нормали к оси вихря и ось  $\mu$  расположена перпендикулярно к  $\lambda$  и  $\nu$ , образуя с ними правую систему координат; скорость движения ( $v$ ) тогда представится двумя компонентами:  $u = h_1 \dot{\lambda}$  по оси вихря (продольная скорость) и по нормали к вихрю  $\omega = h_3 \dot{\nu}$  (нормальная скорость), где  $\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, \frac{1}{h_3}$  — коэффициенты Ламэ.

В так выбранных координатах уравнения Эйлера напишутся в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}(\rho\tau) = 0. \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{u^2 + \omega^2}{2} \right) - \frac{d}{dt} (h_1 u) &= 0; \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \mu} - \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{u^2 + \omega^2}{2} \right) &= 0; \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \nu} - \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{u^2 + \omega^2}{2} \right) + \frac{d}{dt} (h_3 \omega) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Здесь  $\tau$  — объем частицы,  $\rho$  — плотность,  $p$  — измеряет упругость газа; действие внешних сил положено равным нулю; операции  $\frac{\partial}{\partial \lambda}, \dots$  означают, что эти производные берутся в предположении, что  $\dot{\lambda}, \dot{\nu}$  не изменяются.

В случае невихревого движения к этим уравнениям нужно добавить:

$$\text{curl } v = 0.$$

Второе приближение для невихревого движения, как оказалось из вычислений, отличается по внешнему виду от первого чрезвычайно мало, именно, уравнения второго приближения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{u^2 + \omega^2}{2} \right) + \frac{d}{dt} (h_1 u) &= 0; \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \mu} - \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{u^2 + \omega^2}{2} \right) &= 0; \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \nu} - \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{u^2 + \omega^2}{2} \right) + \frac{d}{dt} (h_3 \omega) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Изменение касается только операций  $\frac{\partial}{\partial \lambda}, \dots$ , которые здесь имеют обычный смысл.



При втором приближении теория вихревого движения вытекает непосредственно из уравнения Гельмгольца для кинетического потенциала, и может быть получена в совершенно точном виде из уравнения:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial \Omega_\lambda} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} \left( (\Omega_\lambda \sigma_\lambda) \cdot f(\gamma_k) \right) = 0; \quad (6)$$

разумеется, условие непрерывности вихря (5а) служит, как характеристика вихря.

В уравнении (6) функция  $f(\gamma_k)$  имеет довольно сложный вид, а

$$\gamma_k = (\Omega_\lambda \sigma_\lambda) \cdot \Omega_\lambda^{\left(\frac{2}{k}-1\right)}.$$

Таким образом уравнение (6) показывает, что, вообще говоря, сохранение напряжения вихря ( $\gamma = \Omega_\lambda \sigma_\lambda$ ) не имеет места. Непосредственные наши наблюдения конечно вполне с этим выводом согласуются: вихрь есть довольно мимолетное движение, вихревые движения легко возникают и так же легко исчезают; основываясь на теории Гельмгольца, мы приписывали это свойство вихрей вязкости газов (замечу, что в рассматриваемом втором приближении мы пока оставили в стороне вязкость газа).

Но наблюдения наши над вихрями в атмосфере обнаруживают, что возможны также вихри в виде смерчей, которые не только не разрушаются, встречая препятствия на своем пути, но сами их разрушают, — вихри необычайно устойчивые.

Уравнение (6) дает нам возможность объяснить и существование смерчей. Если проинтегрировать уравнение (6) по времени, то мы получим напряжение вихря  $\gamma$  как функцию его угловой скорости  $\Omega_\lambda$ ; оказывается, что  $\gamma$  имеет максимум при некотором значении угловой скорости, следовательно вблизи этого максимума вихрь обладает наибольшей устойчивостью; величина этого максимума определяется тремя физическими параметрами: адиабатным коэффициентом  $k$ , скоростью звука  $c$  и числом Авогадро. Для воздуха получается, что  $\gamma_{\max} = 6 \cdot 10^7 \frac{\text{см}^2}{\text{сек}}$ . На основании этого определится поперечник вихря, потому что, как будет видно из нижеследующего, линейная скорость на периферии вихря равна скорости звука: поперечник вихря равен 10 м и соответственно угловая скорость оказывается порядка 10 об/сек. Все, наблюдавшие смерчи в наиболее разрушительной их стадии, оценивают их поперечные размеры именно 10 м.

Таким образом второе приближение уже на первых порах сразу позволяет нам расшифровать одно из наиболее загадочных атмосферных явлений стихийного характера.

Уравнение (6) приводит к еще более важным заключениям общего значения, именно, оказывается, что уравнение непрерывности (2) для случая вихрей распадается на два уравнения:

$$\frac{d}{dt} (\rho \sigma_\lambda) = 0; \quad \frac{d}{dt} (h_1 d\lambda) = 0. \quad (7)$$

Эти уравнения (7) нам говорят, что всякий вихрь по своей длине состоит из ряда «звеньев», длина каждого звена и масса его остаются во все время движения вихря неизменными.

Это очень важное следствие из уравнения (6), мне кажется, можно до некоторой степени проверить на таком мысленном опыте: представим себе однородное вихревое поле между двумя параллельными плоскостями, на которые вихри опираются своими концами. Если мы при помощи внешней силы будем раздвигать эти плоскости и тем самым растягивать вихри по их длине, то однородность вихревого поля и напряжение вихревого поля от этого, по симметрии обстоятельств, не нарушатся; энергия вихревого поля будет возрастать на счет работы внешних сил, но вместе с этим будет возрастать и масса завихренного газа, будут таким образом создаваться новые вихри — число вихревых звеньев будет увеличиваться за счет завихрения, притекающего извне незавихренного до того газа. По теории Гельмгольца объяснить такой опыт невозможно.

Для случая вихрей описанный опыт только мыслим, но в аналогичном случае электростатического поля между обкладками плоского конденсатора он легко осуществляется, и собственно такой именно процесс растягивания поля лежит в основе электростатических машин «без трения».

Уравнение (6) приводит еще к одному неожиданному результату, именно: из выражения для  $\gamma_k$  ясно, что при  $k = 2$

$$\frac{d}{dt}(\Omega_\lambda \sigma_\lambda) = 0,$$

т. е. в этом единственном случае имеет место сохранение напряжения вихря, вихрь вполне устойчив.

Так как газа с адиабатной константой, равной 2, нет среди известных нам газов — для них  $k < 2$ , то этот исключительный газ мы будем называть в дальнейшем сверх-газом.

Итак, общий вывод из уравнения (6) можно формулировать в следующей форме: для всех реальных газов ( $k < 2$ ) вихревое движение есть движение неустойчивое, раз возникший вихрь не сохраняется, а исчезает, вместе с тем — при действии внешних сил — возможно, при некоторых условиях, образование вихревого движения. Только для сверх-газа ( $k = 2$ ) вихревое движение вполне устойчиво. Именно этот последний случай мы будем иметь в виду при составлении уравнений движения системы вихрей в дальнейшем построении второго приближения и будем предполагать, что величина

$$\frac{\gamma \Omega}{c^2} \ll 1,$$

так что, разлагая кинетический потенциал  $H$  в ряд, мы можем отбросить все члены высшего порядка малости, тогда дифференциальные уравнения движения системы вихрей принимают следующий сравнительно простой вид, совершенно отличный от того, что дают уравнения Эйлера; первая группа уравнений:

$$\frac{d}{dt}(h_1 u) = 0; \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ h_1 \left( 1 + \frac{u^2}{2c_L^2} - \frac{\omega^2}{2c_L^2} \right) \cdot \int \frac{dp}{\rho} \right\} = 0; \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ h_1 \left( 1 + \frac{u^2}{2c_L^2} - \frac{\omega^2}{2c_L^2} \right) \cdot \int \frac{dp}{\rho} \right\} + \frac{d(h_3 \omega)}{dt} = 0; \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

и затем вторая группа, содержащая угловую скорость вихря  $\Omega_\lambda$ :

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left( h_1 h_3 \frac{\omega \Omega_\lambda}{c_L^2} \right) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial \mu} (h_1 h_3^2) = 0; \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{h_2 h_1} \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ h_1 \Omega_\lambda \left( 1 + \frac{u^2}{c_L^2} - \frac{\omega^2}{c_L^2} \right) \right\} = 0; \\ \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ h_1 \Omega_\lambda \left( 1 + \frac{u^2}{c_L^2} - \frac{\omega^2}{c_L^2} \right) \right\} + \frac{1}{\sigma_\mu} \cdot \frac{d}{dt} \left( \sigma_\mu \frac{\omega \Omega_\lambda}{c_L^2} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$(\sigma_\mu = h_1 h_3 d\lambda d\nu).$

При  $k < 2$ , для реальных газов здесь надо вместо  $\underline{1}$  и  $\underline{2}$  поставить  $\frac{1}{k-1}$  и  $\frac{2}{k-1}$ , а вместо  $c_L \sim 2c_N$ , причем  $c_L$  есть скорость звука, вычисленная по формуле Лапласа, а  $c_N$  — по формуле Ньютона.

Для условий на границе системы вихрей с завихренным газом из того же основного уравнения Гельмгольца для кинетического потенциала ( $H$ ) имеем, при непрерывности  $u$  и  $\omega$ , на концах вихря:

$$\rho \cdot \left\{ 2 - \frac{u^2 + \omega^2}{c^2} \right\} = 0 \quad \text{и} \quad u = 0. \quad (12)$$

На боковой границе

$$1 + \frac{u^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2} = 0, \quad (13)$$

$$\int \frac{dp'}{\rho'} - \omega^2 = 0, \quad (14)$$

где  $p'$  и  $\rho'$  — упругость и плотность завихренного газа.

Уравнения движения системы вихрей (8) — (14) обнаруживают ярко анизотропию свойств завихренного газа, тогда как в уравнениях Эйлера это свойство ничем не выражено.

Пограничное условие (13) при отсутствии продольной скорости ( $u = 0$ ) показывает, что на периферии одиночного вихря скорость должна быть равна скорости звука; этим свойством вихря мы пользовались в двух ранее рассмотренных частных случаях.

Перейду ко второй разрешенной мною проблеме — к обобщению уравнений электромагнитного поля.

Уравнения Максвелла-Хевисайда-Герца для «вакуума» в векторной форме можно написать в следующем виде:

$$\operatorname{div} (D_0 E) = 0 \quad (\text{a}); \quad \operatorname{curl} M = \frac{D_0}{c_0} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (\text{b}); \quad (15)$$

$$\operatorname{div} (\mu_0 M) = 0 \quad (\text{a}); \quad \operatorname{curl} E = - \frac{\mu_0}{c_0} \frac{\partial M}{\partial t} \quad (\text{b}). \quad (16)$$

Причем  $D_0 \mu_0 = 1$ ,  $D_0$  — диэлектрическая постоянная «вакуума», обыкновенно совершенно произвольно принимаемая за единицу,  $c_0$  — скорость света в «вакууме»,  $E$  и  $M$  — напряжения электрического и магнитного полей.

Применяя и здесь натуральные криволинейные ортогональные координаты  $\lambda, \mu, \nu$ , причем ось  $\lambda$  имеет направление  $E$ , ось  $\mu$  — напра-

вление  $M$  и  $v$  ортогональна к ним и направлена, как увидим, по нормальной скорости электрического поля  $\omega$ , мы можем написать уравнения электрического поля в более симметричной и, главное, в более прозрачной форме:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (D_0 E \sigma_\lambda) = 0 \quad (a); \quad \frac{\partial}{\partial t} (D_0 E) + \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial v} (h_2 c_0 M) = 0 \quad (b); \quad (15^*)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} (\mu_0 M \sigma_\mu) = 0 \quad (a); & \quad \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \mu} (h_1 D_0 E) = 0; \\ \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial v} (h_1 D_0 E) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{M}{c_0} \right) \quad (b). & \end{aligned} \right\} \quad (16^*)$$

Из уравнения непрерывности электрического напряжения (15\*, а) вследствие существования минимального элементарного заряда  $\epsilon$  получаем в обычных единицах:

$$D_0 E \sigma_\lambda = 4\pi \epsilon. \quad (17)$$

Так как элементарный заряд сохраняется, то должно быть

$$\frac{d}{dt} (D_0 E \sigma_\lambda) = 0,$$

или в развернутом виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} (D_0 E) + \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial v} (h_2 \omega D_0 E) = 0. \quad (18)$$

Сравнивая (18) с (15\*, b), получаем соотношение Дж. Дж. Томсона, установленное им в 1891 г., между магнитным напряжением  $M$ , электрическим напряжением  $E$  и нормальной скоростью движения  $\omega$ :

$$c_0 M = \omega D_0 E. \quad (19)$$

Пользуясь этим соотношением, можно исключить из уравнения (16\*) магнитное напряжение совсем:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left( \mu_0 \frac{\omega D_0 E}{c_0} \sigma_\mu \right) = 0 \quad (a); \quad \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial v} (h_1 D_0 E) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\omega D_0 E}{c_0^2} \right) \quad (b). \quad (16^{**})$$

При таком представлении уравнений Максвелла нам легче будет сравнивать их со вторым приближением для уравнения электромагнитного поля.

Второе приближение получается легко из общего уравнения Гельмгольца для кинетического потенциала (1), если принять во внимание соотношение Дж. Дж. Томсона и обычные выражения для электрической и магнитной энергии; уравнения непрерывности электрического поля (15\*, а) и сохранения заряда (18) представляют характеристичное свойство электромагнитного поля, и они конечно остаются и во втором приближении, а для уравнений движения электрического поля во втором приближении получается следующая система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ h_1 D_0 E \left( 1 + \frac{u^2}{c_0^2} - \frac{\omega^2}{c_0^2} \right) \right\} &= 0; \\ \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ h_1 D_0 E \left( 1 + \frac{u^2}{c_0^2} - \frac{\omega^2}{c_0^2} \right) \right\} &= -\frac{1}{c_\mu} \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega D_0 E}{c_0^2} \sigma_\mu \right). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

В развернутом виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_\mu} \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega D_0 E}{c_0^2} \sigma_\mu \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\omega D_0 E}{c_0^2} \right) + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial}{\partial v} \left( h_1 \frac{\omega^2 D_0 E}{c_0^2} \right) + \\ &+ \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( h_3 \frac{u \omega}{c_0^2} D_0 E \right); \end{aligned}$$

при  $u = 0$  последний член пропадает, и тогда уравнения (20) и (16\*\*, б) вполне совпадают, т. е. в этом случае получаются уравнения Максвелла.

Как показывают формулы (20), отличие второго приближения от первого заключается главным образом в появлении в последней системе уравнений фактора  $g(c_0^2) = \left(1 + \frac{u^2}{c_0^2} - \frac{\omega^2}{c_0^2}\right)$  в левой части и в правой вместо местной производной по времени от напряжения магнитного поля  $M$  входит полная производная по времени от потока магнитной индукции:

$$\frac{1}{D_0} \cdot \frac{\omega D_0 E}{c_0} \sigma_\mu = \mu_0 M \sigma_\mu.$$

Сравнивая эту систему уравнений для электромагнитного поля с ранее приведенными уравнениями для вихревого поля в случае сверхгаза (во втором приближении), мы найдем полный параллелизм этих уравнений. Для удобства сравнения мы можем опустить в уравнении электромагнитного поля постоянные величины и тогда получаем:

Уравнения вихревого поля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\Omega_\lambda \sigma_\lambda) &= 0; \\ \frac{d}{dt} (\Omega_\lambda \sigma_\lambda) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{\omega \Omega_\lambda}{c^2} \sigma_\mu \right) &= 0; \\ \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \mu} \{ h_1 \Omega_\lambda \cdot g(c^2) \} &= 0; \\ \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial}{\partial \nu} \{ h_1 \Omega_\lambda \cdot g(c^2) \} + \\ &+ \frac{1}{c_\mu} \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega \Omega_\lambda}{c^2} \sigma_\mu \right) = 0. \end{aligned}$$

Уравнения электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} (E \sigma_\lambda) &= 0; \\ \frac{d}{dt} (E \sigma_\lambda) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{\omega E}{c_0^2} \sigma_\mu \right) &= 0; \\ \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \mu} \{ h_1 E \cdot g(c_0^2) \} &= 0; \\ \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial}{\partial \nu} \{ h_1 E \cdot g(c_0^2) \} + \\ &+ \frac{1}{c_\mu} \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega E}{c_0^2} \sigma_\mu \right) = 0. \end{aligned}$$

Из этого сопоставления видим, что  $\Omega$  и  $E$  — пропорциональные величины и что  $c_0^2$  для электромагнитного поля соответствует  $c^2$  для вихревого. Значение коэффициента пропорциональности мы получим, приравняв выражения для энергии единицы объема в поле электромагнитном и вихревом и допуская конечно, что для сверхгаза скорость «звуковая» равна скорости света. В результате мы получаем для элементарного электрического заряда соотношение:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{c_0^2}{2\pi\rho_0}} \cdot (\rho \sigma_\lambda),$$

т. е. элементарный электрический заряд пропорционален массе, распределенной на сечении элементарного вихря. В первый раз теории удастся «материализация» электрического заряда, но вместе с тем очевидно, что самое понятие «заряд» теряет свой прежний смысл, и его можно употреблять только как меру элементарного «потока электрической индукции» (17).

Переходя к последней части моего доклада, я прежде всего должен отметить, что система уравнений электромагнитного поля во втором приближении, только что рассмотренная, недостаточна для полного определения скорости поля  $\nu$  и что  $c_0^2$  есть постоянная вели-

чина, тогда как соответствующая ей величина  $c^2$  в вихревом поле представляет функцию, вообще говоря, времени и координат. Выход из этого затруднения я вижу в том, что в качестве обобщенных уравнений электромагнитного поля надо принять полностью все уравнения вихревого поля и тогда, выражая последние на «электромагнитном» языке, эти обобщенные уравнения электромагнитного поля мы можем представить в следующей окончательной форме.

Основная характеристика поля:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (E_{\lambda}^* \sigma_{\lambda}) = 0 \quad (a); \quad \frac{d}{dt} (E_{\lambda}^* \sigma_{\lambda}) = 0 \quad (b), \quad (I)$$

$$E_{\lambda}^* \sigma_{\lambda} = 4\pi \varepsilon,$$

где  $E^* = D_0 E$ .

Далее, уравнения связи и движения поля:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} (\mu^* M_{\mu} \sigma_{\mu}) &= 0 \quad (a); \\ \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ h_1 E_{\lambda} \left( 1 + \beta^2 - 2 \frac{M_{\mu}^2}{E_{\lambda}^2} \right) \right\} &= 0 \quad (b); \\ \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ h_1 E_{\lambda} \left( 1 + \beta^2 - 2 \frac{M_{\mu}^2}{E_{\lambda}^2} \right) \right\} &= - \frac{1}{c_0 \sigma_{\mu}} \frac{d}{dt} (\mu^* M_{\mu} \sigma_{\mu}), \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

где  $\mu^* = \frac{c_0}{c D_0}$ ;  $\beta^2 = \frac{u^2 + \omega^2}{c^2} = \frac{v^2}{c^2}$ ;

и наконец уравнения непрерывности и уравнения, определяющие  $c^2$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} (c^2 \tau) &= 0; \quad \frac{d}{dt} (h_1 d\lambda) = 0; \quad \frac{d}{dt} (h_1 u); = 0; \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ h_1 \left( c^2 + \frac{u^2}{2} - \frac{\omega^2}{2} \right) \right\} &= 0; \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ h_1 \left( c^2 + \frac{u^2}{2} - \frac{\omega^2}{2} \right) \right\} + \frac{d}{dt} (h_3 \omega) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

Последняя система уравнений есть только преобразованная система уравнений (2), (8) и (9), так как для сверх-газа  $\int \frac{dp}{\rho}$  равен  $c^2$ .

Таким образом обобщенные уравнения электромагнитного поля отличаются от уравнений Максвелла не только тем, что они нелинейны, но и тем, что скорость света  $c$  внутри поля переменна.

Вследствие нелинейности уравнений мы, решая какую-либо частную задачу, обязательно придем к решению по крайней мере квадратного уравнения для компонентов поля, и из этого обстоятельства очевидно, что уравнения (II) могут дать нам вид поля только в ограниченной части пространства, так как для остального пространства компоненты будут иметь мнимые значения. Но из общего выражения для кинетического потенциала  $H$  для движения системы вихрей оказывается, что существуют не только те уравнения, которые представлены формулами (II), но что имеет место еще целая система дифференциальных уравнений подобного вида с единственным изменением, касающимся  $g(c^2) = \left( 1 + \beta^2 - 2 \frac{M^2}{E^2} \right)$ , именно в это выражение можно подставить вместо единицы любое целое число (но не слишком большое), положительное или отрицательное, и нуль в том числе, и полученное

таким образом уравнение будет иметь место. В результате такая система дифференциальных уравнений с различными

$$g_n(c^2) = \left( n + \beta^2 - 2 \frac{M^2}{E^2} \right)$$

определяет электромагнитное поле во всем пространстве, занятом системой вихрей или электромагнитным полем.

В этом свойстве кинетического потенциала  $H$  и системы дифференциальных уравнений, определяющих поле, я вижу основу для объяснения квантовых свойств поля. Самое это свойство  $H$  обусловлено прерывной структурой электрического поля; аналогично тому, как вихревое поле мы представляем системой «вихревых трубок», мы можем и электромагнитное поле представлять как систему движущихся «фарадеевых трубок». Уравнения движения фарадеевых трубок и их свойства даются обобщенными уравнениями I, II, III электромагнитного поля, и они вполне подобны элементарным вихревым трубкам. Движение и распределение массы внутри вихревой или фарадеевой трубки не отображены в этих уравнениях; для их определения надо прибегнуть к другому методу — к статистической механике или кинетической теории газов.

Заканчивая сообщение, я разберу, ограничиваясь самыми необходимыми для понимания хода решения подробностями, частный случай, когда система вихрей или фарадеевых трубок сводится к одной только трубке, случай движения изолированной вихревой или фарадеевой трубки. Интерес такого исследования лежит в области электромагнитной — таким образом выясняется структура поля основных элементарных «единиц» электромагнитного поля: электрона (позитрона), протона (анти-протона), нейтрона и фотона.

Уравнения я буду писать в форме электромагнитной, но при изложении свойств полученного решения буду употреблять и термины, относящиеся к вихревому полю, потому что эти решения годны в этих обеих областях.

Для изолированного вихря или фарадеевой трубки основные дифференциальные уравнения значительно упрощаются, именно:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \quad (1)$$

$$\operatorname{div} E^* = 0; \quad (2)$$

$$1 + \beta^2 - 2 \frac{M^2}{E^2} = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим случай, когда фарадеева трубка движется с постоянной поступательной скоростью  $\beta_0 c_0$  и вращается тоже с постоянной угловой скоростью  $\omega$  около оси, направленной по поступательной скорости; тогда первое уравнение будет удовлетворено. Второе уравнение отнесем к сферическим координатам  $r, \varphi, \vartheta$ :

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \varphi E_r^*) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \sin \varphi E_\varphi^*) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (r E_\vartheta^*) = 0; \quad (2')$$

$$1 + \beta_0^2 + \frac{\omega^2 r^2 \sin^2 \varphi}{c^2} - 2 \frac{M^2}{E^2} = 0. \quad (3')$$

Кроме того мы имеем еще уравнение кинематического характера,

выражающее, что для наблюдателя, вращающегося вместе с полем, поле остается неизменным:

$$E_r^* \cos \varphi - E_\varphi^* \sin \varphi = k^* \omega, \quad (4)$$

где  $k^*$  — коэффициент пропорциональности для перехода от напряжения электрического поля  $E$  к угловой скорости  $\Omega$ .

Уравнение с частными производными (2') сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению, если мы примем во внимание, что оно имеет место только в пространстве, занятом полем. Интеграл его имеет вид:

$$(r^2 \sin \varphi E_r^*) \cdot (r \sin \varphi E_\varphi^*) \cdot (r E_\vartheta^*) = A_0^3.$$

Полагая  $A_0^3 = 0$ , мы получаем простейшие решения поставленной задачи: для случая  $E_\vartheta = 0$  и  $E_r, E_\varphi$  конечных мы получаем коническое поле — поле имеет вид тонкого слоя (с угловой толщиной  $\varphi_0$ ) на поверхности усеченного конуса с углом  $\varphi^*$ . Направление поля приблизительно определяется логарифмической спиралью на поверхности конуса. Для случая  $E_\vartheta = 0$  и  $E_r, E_\varphi$  конечных получается поле в виде слоя на воронкообразной поверхности, начинающейся у начала координат, и поле направлено по образующим этой поверхности.

Эти два решения совместно (так как они имеют место в разных частях пространства) определяют вид поля тех вихревых образований, свойства которых (см. ниже) совпадают с известными нам из опыта свойствами электрона и протона. Именно, для электрона угол конуса  $\varphi_1^* = \frac{\pi}{2} - \varphi_0$ , а для протона  $\varphi_2^* = \varphi_0$ , где  $\varphi_0$  означает предельный, физически бесконечно малый угол в структуре поля.

Итак, для электрона поле имеет вид такой же, как для тех вихрей, которые часто наблюдаются осенью в сухой, холодный, но солнечный день на сжатых нивах: вследствие неравномерного нагревания почвы в такие дни образуются местами восходящие токи нагретого воздуха, под действием порывистого ветра они — эти токи воздуха — завихряются, и образуются вихревые «воронки», которые сначала стелятся почти по земле и тогда вращаются медленно, и иногда удается заметить в них «спиральную» структуру; затем они вытягиваются вверх, растут выше человеческого роста, вращение внутри делается быстрее, и они под действием бокового ветра бегут довольно быстро по гладкой дороге и скрываются из глаз. Большая сравнительно устойчивость этих «воронок» обусловлена действием тяжести; нагретый воздух в вихре, поднимаясь, растягивает вихрь и тем поддерживает его существование.

В случае электрона поле симметрично относительно плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к оси вращения: электрон таким образом состоит из двух симметричных половин.

На основании вышеуказанных решений, определяющих количественно поле электрона, находим, для очень малых скоростей поступательного движения электрона:  $\beta_0^2 \ll 1$ : масса электрона  $m_0 = \frac{h_0}{c_0^2} \left( \frac{\omega_1}{2\pi} \right) = \frac{h_0 \nu_1}{c_0^2}$ , количество вращательного движения  $(J_1 \omega_1)_0 = \frac{1}{2} \frac{h_0}{2\pi}$ , магнитный момент  $(\mu_{z_1})_0 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon c_0}{\omega_1} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{m_0 c_0} \cdot \frac{h_0}{2\pi}$ ; гиромагнитное отношение  $G_1 = \frac{(J_1 \omega_1)_0}{(\mu_{z_1})_0} = 1 \times \frac{m_0}{\varepsilon / c_0}$ , причем для сокращения обозначено:  $\frac{h_0}{2\pi} = \frac{\varepsilon^2}{c_0} \cdot \frac{4.50}{\varphi_0}$ .

Как видно по смыслу,  $h_0$  представляет постоянную Планка. Для скоростей, меньших скорости света, т. е.  $\beta_0^2 < 1$ , получается:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta_0^2 + 2\beta_0^2 \varphi_0^2}}; (J_1 \omega_1) = (J_1 \omega_1)_0 \cdot \sqrt{1 - \beta_0^2 + 2\beta_0^2 \varphi_0^2};$$

$$\mu_{z_1} = (\mu_{z_1})_0 \cdot (1 - \beta_0^2 + 2\beta_0^2 \varphi_0^2).$$

Для случая протона ( $\varphi_2^* = \varphi_0$ ) вид поля более подобен вихревому полю в случае смерча; оно состоит также из двух симметричных половин, как для электрона: при  $\beta_0^2 \ll 1$  масса протона  $M_0 = 2 \frac{h_0 v_2}{c_0^2}$ , количество вращательного движения  $(J_2 \omega_2)_0 = 1 \frac{h_0}{2\pi}$  и магнитный момент  $(\mu_{z_2})_0 = \frac{1}{4} \frac{\varepsilon c_0}{\omega_2} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{M_0 c_0} \cdot \frac{h_0}{2\pi}$ ; гиромагнитное отношение:  $G_2 = \left( \frac{J_2 \omega_2}{\mu_{z_2}} \right)_0 = 2 \cdot \frac{M_0}{\frac{\varepsilon}{c_0}}$ .

При скоростях, меньших скорости света,  $\beta_0^2 < 1$ :  
масса протона:

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1 + \beta_0^2 - 2\beta_0^2 \varphi_0^2}};$$

количество вращательного движения:

$$(J_2 \omega_2) = (J_2 \omega_2)_0 \cdot \sqrt{1 + \beta_0^2 - 2\beta_0^2 \varphi_0^2}$$

и магнитный момент:

$$\mu_{z_2} = (\mu_{z_2})_0 \cdot (1 + \beta_0^2 - 2\beta_0^2 \varphi_0^2).$$

Из выражений для  $m_0$  и  $M_0$  имеем:

$$\frac{m_0}{M_0} = \frac{1}{2} \varphi_0^2,$$

так как вообще

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\cos \varphi_1^* \cdot \sin \varphi_2^*}{\sin \varphi_1^* \cdot \cos \varphi_2^*};$$

то отсюда, так как из опыта  $\frac{m_0}{M_0} = \frac{1}{1838}$ , получается  $\varphi_0 = 0.033$ , а из  $\frac{h_0}{2\pi}$

видим, что  $\frac{\varphi_0}{4.50} = \alpha_0 = \frac{1}{137}$  есть постоянная тонкой структуры.

При  $\beta_0^2 = 1$ , насколько можно судить из косвенных соображений, эти образования—электрон и протон—неустойчивы и не могут существовать, исчезают.

При асимметрии поля указанных для протона двух половин получается нейтрон с массой, близкой к протону (но не равной в точности, так как для них различна энергия незавихренного поля); в случае асимметрии двух половин, входящих в состав электрона, получается образование, подобное и равное по массе электрону, но нейтральное—нейтрино.

Структура фотона более сложна, чем в случае электрона и протона. В первом приближении третий возможный случай общего решения— $A_0^3 = 0$  и  $E_r \rightarrow 0$ , а  $E_\varphi$  и  $E_\vartheta$  конечны—дает нам некоторое представление о поле фотона: это поле в виде слоя на поверхности сферы  $r^*$ ; оно

возможно на основании (3) и (4) только при скорости поступательного движения, равной скорости света:  $\beta_0^2 = 1$ . Направление поля на сфере определяется локсодромой, пересекающей меридианы под углом  $70^\circ$ .

Этот беглый перечень основных особенностей структуры полей для электрона и протона показывает, что количественные соотношения для электрона находятся в полном согласии с тем, что известно из опыта, и притом лучше, чем дает какая-либо из существующих теорий; это относится главным образом к гиромангнитному отношению  $G$ , которое по максвелловой теории получается вдвое большим.

Совершенно новыми являются зависимости количества вращательного движения и магнитного момента как электрона, так и протона от скорости их поступательного движения. Совершенно неожиданным является то обстоятельство, что масса протона уменьшается с увеличением скорости его поступательного движения.

Что касается «волновых» свойств электрона, то ясно, что вращающееся электрическое поле электрона образует в незавихренной области волны сгущения и разряжения с амплитудой, пропорциональной  $\varphi_0$ , распространяющиеся со скоростью  $v_0 = \frac{c_0^2}{u_0}$ , если  $u_0$  — скорость поступательного движения электрона. Это основное волновое соотношение в этом вопросе получается непосредственно из системы уравнений во втором приближении для движения незавихренного газа; для плоской волны эти уравнения напишутся в виде:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) + \frac{du}{dt} = 0$$

при условии:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Как общую особенность тех полей, которые получаются при решении основных уравнений электромагнитного поля во втором приближении, надо отметить отсутствие особых точек.

Сравнивая решения, полученные для электрона (позитрона) и протона, мы можем предсказать, что если удастся на опыте при помощи внешнего магнитного поля увеличить скорость вращения позитрона в  $\frac{1838}{2} = 919$  раз, то он превратится в протон, а из электрона таким же путем должен получиться анти-протон, еще не бывший в руках физиков-экспериментаторов.