

тур начерченного угла, будут сходиться с его углов с некоторою скоростью; жидкость же, лежащая за углом, будет оставаться почти неподвижной. Вследствие этого образуются поверхности раздела, по которым будет отделяться бегущая жидкость от неподвижной. На этих поверхностях в жидкости, обладающей некоторою степенью вязкости, зародятся вихревые шнуры, сечения которых отмечены на

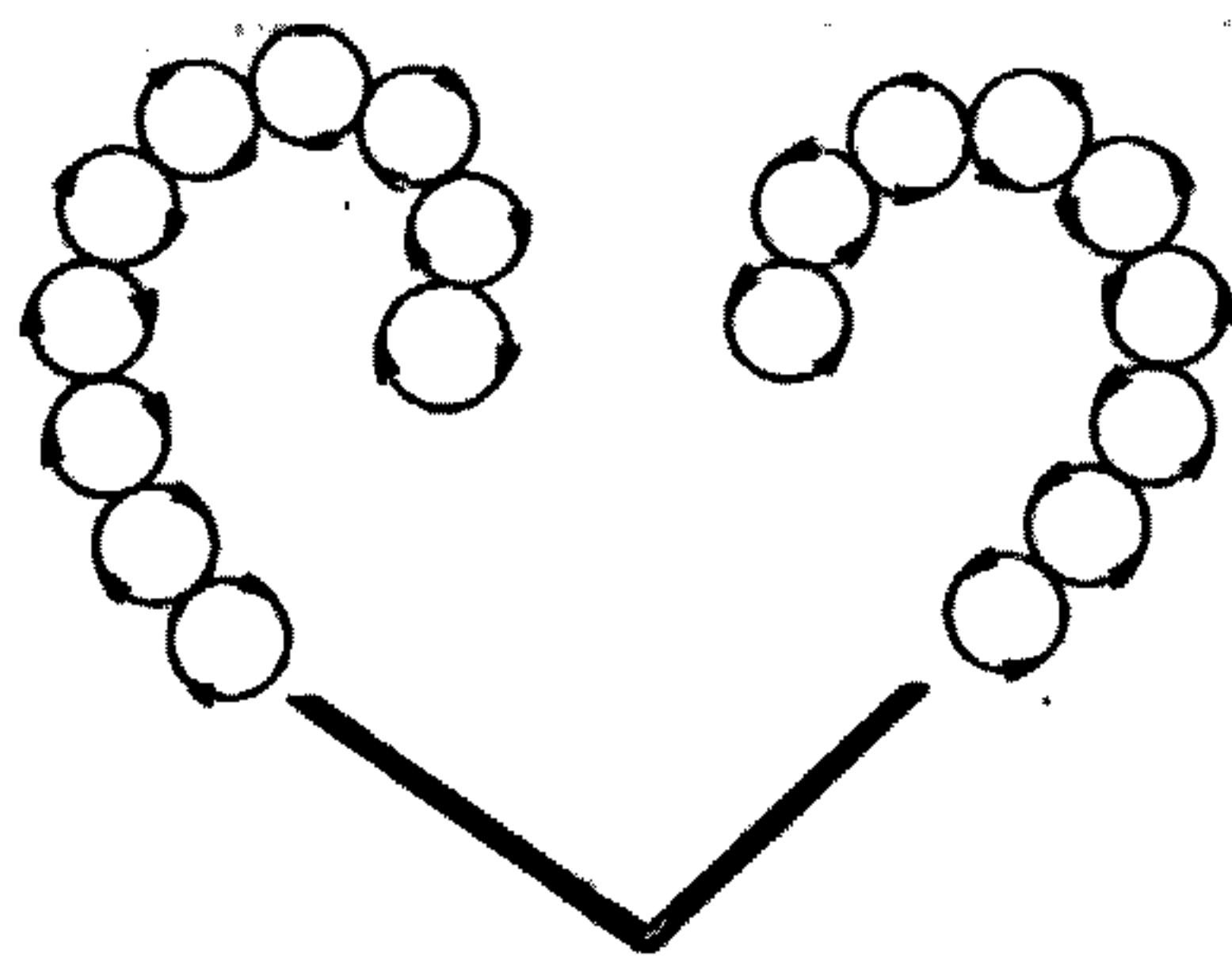


Рис. 44.

рисунке кружками. Эти шнуры закручиваются в те два вихря, которые мы замечаем за ложечкой в виде двух воронок.

Эти рассуждения показывают, как важно для гидродинамики исследовать движения жидкости, сопровождающиеся образованием поверхностей раздела. Сначала не представлялось возможным приступить к этой трудной задаче.

Гельмгольцу первому пришла мысль, могущая послужить для разрешения подобных вопросов. Он пояснил свою идею, определил форму струи, вбегающей в пространство, заключенное между двумя стенками, из сосуда, окружающего эти стенки. Статья Гельмгольца об этом предмете заключает в себе всего десяток страниц. Он, так сказать, только наметил путь исследования, по которому пошли Кирхгоф, лорд Рейли, Фохт и многие другие ученые, окончательно разработавшие решение вопроса.

2. О ВИХРЕВЫХ АТОМАХ.¹⁾

ВИЛЬЯМ ТОМСОН КЕЛЬВИН.

Отметив замечательное открытие Гельмгольца²⁾ о законе вихревого движения в совершенной жидкости, т. е. в жидкости,

¹⁾ Сообщено автором после прочтения в „Королевском обществе“ Эдинбурга. Напечатано в „Philosophical Magazine“ 1867 г., V. 34. Перевод Н. М. Лихтенштейна, примечания З. Цейтлина. Точный перевод заглавия статьи („On vortex atoms“) будет: „Об атомах, как вихревых шнурах“. Vortex — вихревой шнур, состоящий из вихревых нитей.

²⁾ Это открытие изложено Гельмгольцем в работе „Об интегралах уравнений гидродинамики, соответствующих вихревым движениям“ (Crelle-Borchardt, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LV, S. 25—55, 1858. Русский перевод С. А. Чаплыгина, Москва 1902 г.: „Два исследования по гидродинамике“).

совершенно лишенной вязкости (или жидкого трения), автор настоящей статьи указал, что это открытие неизбежно внушает мысль, что кольца Гельмгольца единственно истинные атомы. Единственным предположением, повидимому, оправдывающим чудовищное допущение бесконечно твердых (strong) и бесконечно неупругих (rigid) частей материи, существование которых утверждается, как вероятная гипотеза, некоторыми из величайших современных химиков в их беглых вступительных замечаниях, является, требуемое Лукрецием и принятое Ньютоном, повидимому, необходимое объяснение неизменных отличительных качеств разных родов материи. Но Гельмгольц доказал абсолютно неизменное качество движения части совершенной жидкости, в которой однажды вызвано особого рода движение, которое он называет вихревым — (Wirbelbewegung). Таким образом всякая часть совершенной жидкости, имеющая вихревое движение, обладает особенностью атомов Лукреция — вечным специфическим качеством. Создать или разрушить вихревое движение в совершенной жидкости может только акт творческой силы.¹⁾ Атом Лукреция не объясняет никаких свойств материи, не приписывая их самому атому. Так, например, „столкновение атомов“, как оно

¹⁾ Первое доказательство закона сохранения вихревого движения было дано Коши („Mémoire sur la théorie des Ondes“. Mém. de l'Acad. Royal des Sciences, I, 1827), другое Стоксом (Camb. Trans., 8, 1845), который вместе с тем критически обозрел историю проблемы Лагранжа о движении с так называемым „потенциалом скоростей“ (не вихревым). Доказательство Стокса было развито Томсоном („On vortex motion, Trans. of the Royal Soc. Edin. Vol. 25, 1869). Имеется также доказательство Кирхгофа, изложенное в его „Механике“. Необходимо отметить, что все эти доказательства относятся к так называемой „совершенной (идеальной) жидкости“. Идеальная жидкость гидродинамики это, согласно определению Томсона („On vortex motion“), — „масса, непрерывно заполняющая пространство, смежные части которой везде давят друг на друга в точности по направлению перпендикуляра к поверхности, разделяющей эти части“. Последнее условие означает абсолютное отсутствие трения. Обратим внимание читателя на то, что евклидово пространство, рассматриваемое как физическое тело, является однородной, непрерывной, т. е. абсолютно несжимаемой „жидкостью“, но в этой „жидкости“ мы наблюдаем процессы „трения“, которыми и объясняется нарушение закона Гельмгольца в реальных телах природы. Это доказывает, что теория Гельмгольца еще далека от приблизительного даже охвата действительности. Подробно об этом — в прилагаемом к статье Томсона очерке развития вихревой теории материи.

Основы вихревой теории вместе с историческими указаниями хорошо изложены у Ламба (Hydrodynamik), в руководстве Винкельмана (статья Ф. Ауэрбаха) и книге Пуанкаре „Théorie des tourbillons“.

хорошо названо, выдвигалось новейшими последователями Лукреция для объяснения упругости газов. Всякое другое свойство материи равным образом требовало допущения специфических сил, свойственных атому. Одинаково легко (и также невероятно, если не более того) допустить какие-либо специфические силы в части материи, обладающей вихревым движением, как и в твердой неделимой материи. Поэтому атом Лукреция прежде всего не имеет никакого преимущества перед атомом Гельмгольца. Но великолепный опыт с кольцами дыма, на котором автор недавно имел удовольствие присутствовать в аудитории профессора Тэта, сохранил одно из допущений, требуемых для объяснения свойств материи на основании гипотезы, что все тела состоят из вихревых атомов в совершенно однородной жидкости. Два кольца дыма несколько раз отскакивали косвенно друг от друга, сильно потрясаясь действием толчка. Результат был весьма подобен наблюдаемому в двух больших резиновых кольцах, ударяющих друг друга в воздухе. Упругость каждого кольца дыма, казалось, недалеко от того совершенства, какого можно ожидать в твердом резиновом кольце такой же формы, и из которого мы заключаем о вязкости резины. Конечно, кинетическая упругость формы есть совершенная упругость вихревых колец в совершенной жидкости. По крайней мере это такое же хорошее начало, как и „столкновение атомов“ для объяснения упругости газов. Вероятно, прекрасные исследования Д. Бернулли, Герапата, Джоуля, Кренига, Клаузиуса и Максвелла о разных термодинамических свойствах газов могут иметь все те же положительные допущения, которые авторы принуждены были сделать о взаимных силах между двумя атомами и о кинетической энергии, приобретенной индивидуальными атомами или молекулами; но объяснение посредством вихревых колец не предполагает другого свойства в материи, движение которой образует кольца, кроме инерции и несжимаемого наполнения пространства. Полное математическое исследование взаимодействия между двумя вихревыми кольцами данных величин и скоростей, проходящими друг возле друга по каким-либо двум линиям в таком направлении, что они никогда не могут приблизиться друг к другу более, чем на кратную величину диаметра каждого, — вполне разрешимая математическая задача; и новизна наблюдаемых обстоятельств представляет трудности удивительного свойства. Ее решение станет основанием предложенной новой кинетической теории газов. Возможность основать теорию упругих твердых и жидких тел на динамике более сплоченных вихревых атомов

может быть предположена с большим основанием. В связи с этим предположением можно заметить, что самое заглавие записки Ранкина „О молекулярных вихрях“, сообщенной Королевскому обществу Эдинбурга в 1849 и 1850 гг., было знаменательным шагом в физической теории.

Королевскому обществу были представлены диаграммы и проводочные модели для иллюстрации связанных и сплетенных вихревых атомов, разнообразие которых бесконечно больше, чем достаточно для объяснения разновидностей и видоизменений известных простых тел и их взаимного сродства. Надо заметить, что два кольцевые атома, соединенные вместе или в одно целое, связанное каким-либо образом своими встречными концами, составляет систему, которая хотя может быть изменена в форме, никогда не может уклониться от своей особенной кратной непрерывности, так как невозможно для материи на какой-либо линии вихревого движения пройти через линию какой-либо другой материи в таком же движении или какую-либо другую часть ее собственной линии. В самом деле, замкнутая линия вихревого ядра буквально неделима каким-либо действием, происходящим из вихревого движения.¹⁾

Автор обращал внимание на весьма важное свойство вихревого атома в отношении к знаменитому ныне спектральному анализу, практически установленному открытиями и работами Кирхгофа и Бунзена. Динамическая теория этого предмета, которую профессор Стокс объяснил автору настоящей записки до сентября 1852 г., и которую он излагал на своих лекциях в Глазговском университете, начиная с этого времени, требовала, чтобы последний состав простых тел имел один или более периодов колебаний, какие имеет струнный инструмент из одной или более струн или упругое твердое тело,

¹⁾ Эти абсолютные утверждения Томсона являются метафизическими абстракциями, рисующими на самом деле лишь основную „тенденцию“ вихревых движений. Н а d a r d доказал, например, что ударные волны могут вызвать вихревое движение и в идеальной жидкости (см. C. R. 136. 299. 1903 г.). I. R. Schütz (Wied. Ann. 56. 144. 1895), основываясь на том, что в воде вязкость не играет почти роли, а вихревое движение уклоняется от гидродинамической теории, пришел к заключению, что законы Гельмгольца имеют силу только при совершенном термодинамическом равновесии. Сам Гельмгольц в работе „О прерывном движении жидкости“ указывает, что „различного рода, странные, прерывного характера неправильности, с которыми, вероятно, приходилось бороться каждому предпринимавшему наблюдения над движениями жидкости, не могли быть объяснены даже и трением, действующим во всяком случае непрерывно и равномерно.

состоящее из одного или более камертонов, твердо соединенных. Допускать такое свойство в атоме Лукреция значит в то же время придавать ему ту самую гибкость и упругость, для объяснения которых, как они проявляются в сложных телах, атомическое строение и было первоначально допущено. Таким образом, если бы гипотеза атомов и пустоты, признанная Лукрецием и его последователями

обходимой для объяснения гибкости и сжимаемости осозаемых твердых и жидких тел, была действительно необходима, то молекула, например, натрия должна бы быть не атомом, а группой атомов с пустым пространством между ними. ¹⁾ Такая молекула не могла бы быть крепкой и прочной, и таким образом она потеряла бы то преимущество, которое и обусловило ее популярность среди философов. Но, как показывают опыты, произведенные перед обществом, вихревой атом имеет совершенно определенные основные виды колебаний, зависящие только от движения, существование которого образует его. Открытие этих основных свойств представляет крайне интересную проблему чистой математики. Даже для простого кольца Гельмгольца аналитические затруднения громадны, но, конечно, далеки от непреодолимости при настоящем состоянии математической науки. Автор этого сообщения до сих пор не пытался разработать вопроса, кроме случая бесконечно длинного, прямого, цилиндрического вихря. Для этого случая он исследовал решения, соответствующие всякой возможной форме бесконечно-малого колебания, и намеревался включить их в математическую записку, которую он надеялся скоро сообщить Королевскому обществу. ²⁾ Один весьма простой результат, который он мог бы уже теперь установить, — следующий. Пусть дан такой вихрь, имеющий сечение, отличное от точной круговой фигуры и бесконечно-малое гармоническое отклонение порядка i . ³⁾

¹⁾ Современная теория строения атома доказала, что это именно так. Подтверждает ли это значение вихревой теории? Да, если ее рассматривать, как точное изображение, действительности, „истину в конечной инстанции. Нет, если вихревую теорию рассматривать как „физическую геометрию“, т. е. науку, рисующую основные линии явлений природы, „детали“ механизма природы: механизм может быть очень сложен, детали же всегда просты. Об этом ниже.

²⁾ Математическая теория колебания цилиндрического вихря была опубликована Томсоном лишь в 1880 г. („Vibrations of a columnar Vortex“. Proc. of R. S. Ed. 1880 г. См. V том соч. Томсона).

³⁾ Для понимания нижеследующего необходимо сделать несколько пояснительных замечаний. Вообразим окружность радиуса R_0 . Пусть эта окружность деформирована так, что точка с полярными координатами R_0 и α_0 пе-

Эта форма будет двигаться волнообразно вокруг оси цилиндра в том же направлении, как вращение вихря, с угловой скоростью равной $\frac{i-1}{i}$ угловой скорости вращения. Отсюда, так как число гребней в целой окружности равно i , то для гармонического отклонения порядка i число $i-1$ периодов колебания соответствует одному периоду обращения вихря. Для случая $i=1$ здесь нет колебаний, и решение выражает только бесконечно-мало смещенный вихрь с его неизменной круговой формой. Случай $i=2$ соответствует эллиптической деформации кругового сечения, и потому для него период колебания представляет просто период обращения. Эти результаты, конечно, приложимы к кольцу Гельмгольца, когда диаметр, приблизительно кругового сечения мал сравнительно с диаметром кольца, как это было в кольцах дыма, показанных Обществу. Низшие основные виды двух родов поперечных колебаний кольца, ¹⁾ подобные ко-

решла в течение времени dt в точку с полярными координатами $R=R_0+dR$ и $\alpha=\alpha_0+d\alpha$. Разложим R в ряд Фурье: $R=R_0+\sum A_i \cos i\alpha + \sum B_i \sin i\alpha$. Уклонение кривой, соответствующее значению i , называется гармоническим отклонением порядка i . Анализ вихревого колебания дает для A_i и B_i следующие значения: $A_i=C_0 \sin (1-i)t + C_1$; $B_i=C_0 \cos (1-i)t + C_1$, где C — постоянные, а угловая скорость вихря считается равной единице. В целях упрощения предположим, что все коэффициенты ряда Фурье, за исключением A_i и B_i равны нулю. Тогда $R=R_0+A_i \cos i\alpha + B_i \sin i\alpha = R_0+C_0 \sin [(1-i)t + i\alpha] = R_0+C \sin [(i-1)t - i\alpha]$, если положить $C_1=0$. Общеизвестно, что подобного рода уравнение означает волнообразное движение со скоростью (угловой): $\frac{i-1}{i}$. При $i=1$, $R=R_0+A_1 \cos \alpha + B_1 \sin \alpha$ — ур-е окружности с центром (A_1, B_1) , который неподвижен, так как $\frac{i-1}{i}=0$. При $i=2$ получаем $R=R_0+A_2 \cos 2\alpha + B_2 \sin 2\alpha$ — ур-е эллипса, который вращается с угловой скоростью $\frac{i-1}{i}=\frac{1}{2}$ угловой скорости вихря.

Так как в эллипсе 2 гребня, то период колебания какой-либо точки равен периоду обращения вихря; точно так же для случая i , $i-1$ периодов колебания равны одному периоду обращения. Подробности у Томсона и в книге Пуанкаре: „Théorie des tourbillons“ (1893 г.); см. также Lamb § 157.

¹⁾ Из анализа Томсона (см. т. V, стр. 163) вытекает, что в цилиндрическом вихревом шнуре имеют место колебания не только по окружности вихря, но и вдоль его. Кроме того, если в ряде Фурье имеется более двух коэффициентов не равных нулю, то кривая более сложна и складывается из ряда форм, каждая из которых имеет свою скорость. Томсон указывает, что действительные колебания (в дымовых кольцах, например) гораздо быстрее эллиптических.

лебаниям, наблюдавшимся в опытах, должны быть гораздо быстрее эллиптического колебания сечения. Вероятно, колебания, вызывающие воспламенение паров натрия, аналогичны тем, которые представляли кольца дыма. Поэтому, вероятно, что период каждого вихревого вращения атомов паров натрия гораздо меньше $\frac{1}{525}$ миллионной от миллионной секунды, так как это приблизительно период колебания желтого света натрия. Далее, поскольку этот свет состоит из двух рядов колебаний, одновременных с немного различными периодами, равными приблизительно времени, сейчас установленному, и, насколько можно заметить, с почти равными напряжениями, — атом натрия должен иметь два основных вида колебания с соответственными периодами, вызываемыми теми же силами, которые испытывают атомы в воспламененных парах. Это последнее условие делает вероятным, что соответственные два основных вида приблизительно подобны (а не только разные порядки разных родов, случайно почти совпадающих в их периодах колебания). В приблизительно круглом и однородном диске упругого твердого тела основные виды поперечных колебаний с узловыми делениями на квадраты удовлетворяют оба условия. В приблизительно круглом и однородном кольце упругого твердого тела эти условия выполняются для крутильных (*flexural*) колебаний в его плоскости, а также для поперечных колебаний, перпендикулярных к плоскости. Но круглое вихревое кольцо, имеющее одну часть немного толще другой, не осталось бы в таком виде, но испытывало бы продольные колебания вокруг собственной окружности и не могло бы иметь двух основных видов колебаний, подобных по характеру и приблизительно равных периодов. Вероятно, ¹⁾ то же утверждение может быть практически распространено на всякий атом, состоящий из одного вихревого кольца, как бы оно ни было свернуто и иллюстрировано кольцами моделей, показанных Обществу, состоявших из одной только проволоки и соединенных разными способами. Поэтому кажется вероятным, что атом натрия не может состоять из одной вихревой линии; но он может, очень вероятно, состоять из двух приблизительно равных вихревых колец, проходящих одно через другое подобно двум звеньям цепи. Но достоверно, что пар, состоящий из таких атомов, с соответственными объемами и угловыми скоростями

¹⁾ [Записка апреля 26, 1867. — Автор имел основание для уверенности, что особенность натрия может быть осуществлена известной конфигурацией одной линии вихревого ядра; эта конфигурация будет описана в математической записке, которую он намерен сообщить Обществу].

в обоих кольцах каждого атома, действовал бы точно так, как воспламененный пар натрия, т. е. удовлетворял бы „характерному спектру“ натрия.

Возможное действие перемены температуры на основные виды колебаний не может быть выяснено без математического исследования, до сих пор не выполненного, и потому мы не можем сказать, что динамическое объяснение, подсказываемое ныне, математически доказано настолько, чтобы включить весьма приблизительное тождество периодов колеблющихся частиц воспламененного

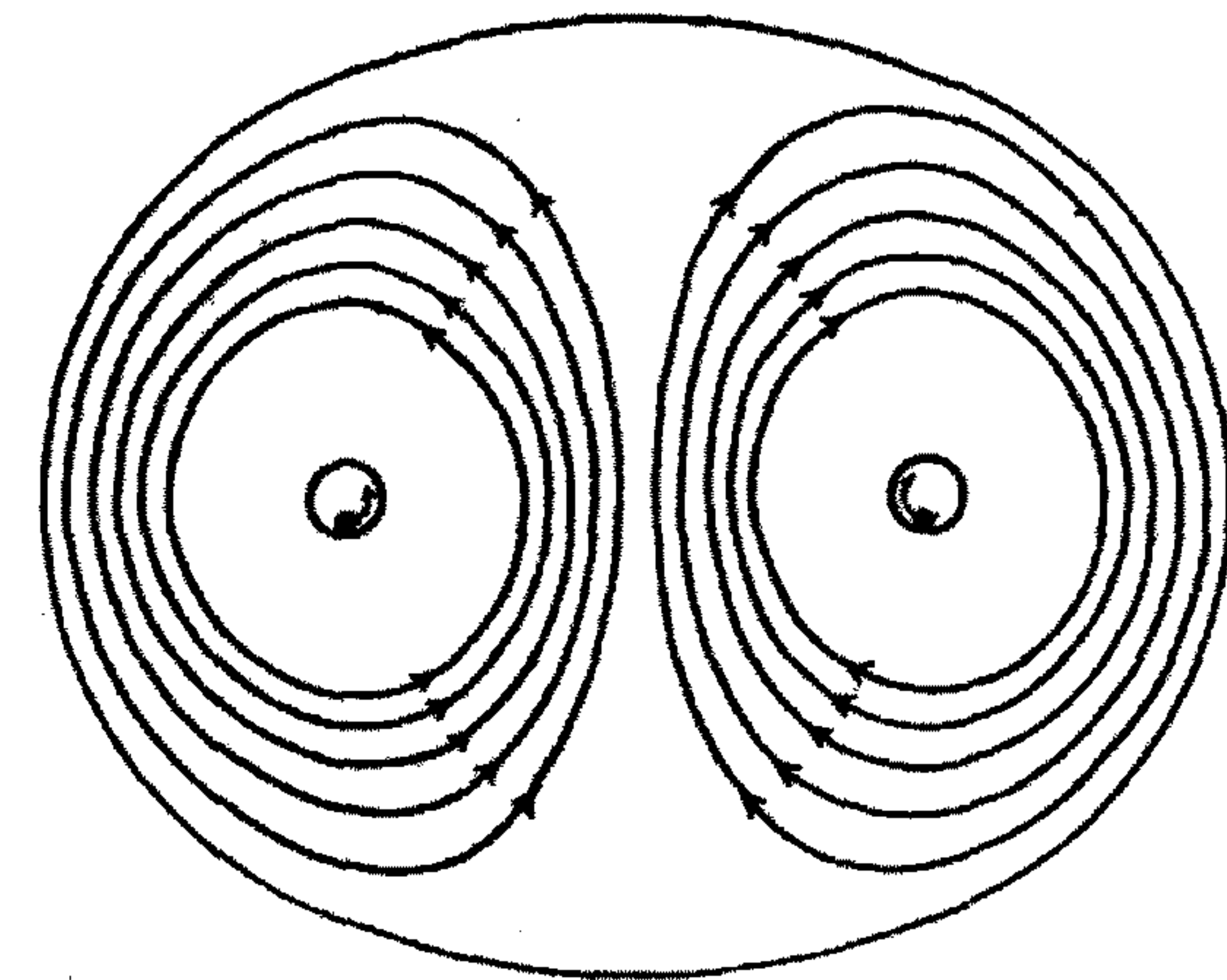


Рис. 45.

пара с периодами соответствующих им основных видов при низшей температуре, при которой пар обнаруживает свою замечательную способность поглощения света натрия.

Весьма замечательное открытие, сделанное Гельмгольцем относительно простого вихревого кольца, состоит в том, что оно всегда движется относительно отдаленных частей жидкости в направлении, перпендикулярном к его плоскости, в сторону, в которую вращательное движение влечет внутренние части кольца. Определение скорости движения, даже приблизительно, для колец, которых радиус сечения мал сравнительно с радиусом оси круга, представило математические трудности, до сих пор не превзойденные. ¹⁾ В коль-

¹⁾ (См. однако примечание к переводу проф. Тэта записки Гельмгольца (Phil. Mag. 1867, vol. XXXIII. Suppl.), где дан результат математического исследования, которое недавно удалось выполнить автору настоящего сообщения). См. т. V, стр. 67, соч. Томсона.

цах дыма, действительно наблюдавшихся, она кажется всегда несколько меньше скорости жидкости вдоль прямой оси, через центр кольца; ибо наблюдатель, стоящий в стороне от линии движения кольца, в тот момент, когда плоскость кольца проходит через положение глаза, видит выпуклое ¹⁾ очертание атмосферы дыма впереди кольца. Это выпуклое очертание указывает выступающую поверхность между количеством дыма, увлекаемым вперед, с кольцом в его движении и окружающим воздухом, пропускающим его. Не так легко различить соответственное выпуклое очертание позади кольца, так как неопределенный след дыма обыкновенно остается позади. В совершенной жидкости выступающая поверхность части, увлекаемой вперед, необходимо была бы совершенно симметрична на передней и задней стороне средней плоскости кольца. Движение окружающей жидкости должно быть точно то же, как оно было бы, если бы пространство внутри этой поверхности было занято гладким твердым телом. Но в действительности воздух внутри его находится в состоянии быстрого движения, обращаясь вокруг круглой оси кольца с возрастающей скоростью по окружностям все ближе и ближе к самому кольцу. Условия действительного движения могут быть представлены таким образом: пусть твердый столбик резины с круглым сечением и диаметром малым сравнительно с его длиной будет согнут в кружок, и два его конца скреплены так, что он, представленный самому себе, может удерживать круглую форму. Отверстие кольца закроем бесконечно тонкой пластинкой и сообщим этой пластинке импульсивное давление с так распределенным напряжением, чтобы вызвать определенное движение жидкости нижеуказанного характера, и вслед затем пусть пластинка вся расплавится. Это

¹⁾ Диаграмма точно представляет выпуклое очертание, указанное выше, и линии движения внутренней жидкости, увлекаемой вихрем, в случае двойного вихря, состоящего из двух бесконечно длинных, параллельных, прямых вихрей с одинаковым вращением в противоположных направлениях. Кривые начерчены м-ром Д. М. Фарленом по вычислениям, сделанным им с помощью уравнения системы кривых: $\frac{y^2}{a} = \frac{2x}{a} \cdot \frac{N+1}{N-1} - \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$, где $\log_e N = \frac{x+b}{a}$. Доказательство будет дано в математической записке, которую автор намерен скоро сообщить Королевскому Обществу Эдинбурга.

Вопрос о линиях тока разрабатывался целым рядом лиц. Для случая, приводимого Томсоном, см. Riecke (Gött. Nachr, 1888) и Hicks (Quart. Journ. Math., 17, 1881, стр. 194). Очень ясно задача рассмотрена у Пуанкаре (глава III), который пользуется замечательными электрическими аналогиями. См. также трактат Lamb'a.

движение должно происходить согласно одному из законов Гельмгольца — вдоль тех кривых, которые были бы силовыми линиями, если бы вместо резинового кружка было помещено кольцо электромагнита: ¹⁾ скорости в различных точках должны быть пропорциональны напряжениям магнитных сил в соответственных точках магнитного поля. Движение, как давно известно, будет удовлетворять этому определению и продолжаться в таком виде, если первоначальные скорости в каждой точке пластинки перпендикулярно ее собственной плоскости пропорциональны напряжениям магнитной силы в соответственных точках магнитного поля. Пусть теперь кольцо передвинется перпендикулярно своей плоскости в направлении движения жидкости через середину кольца со скоростью очень малой в сравнении со скоростью жидкости в центре кольца. Большая приблизительно шарообразная часть жидкости будет увлечена вперед с кольцом. Пусть скорость кольца увеличится; объем жидкости, увлекаемой вперед, уменьшится во всех диаметрах, но больше всего по направлению „вперед — назад“ и, таким образом, его форма станет заметно сплюсненной. При возрастании поступательной скорости кольца, эта сплюсненность увеличится, пока вместо вполне выпуклой она станет вогнутой спереди и сзади вокруг обоих концов оси. Если скорость кольца будет увеличиваться до тех пор, пока она станет равна скорости жидкости через центр кольца, то осевое сечение очертания части жидкости, увлекаемой вперед, станет лемнискатой.

¹⁾ (Т. е. круглый проводник с постоянным электрическим током.) Основные аналогии следующие: Если у нас имеется вихрь силы J (сила вихря или, точнее, циркуляция, это — произведение двойной угловой скорости на площадь поперечного сечения. $2\omega \cdot s$), то этот вихрь вызывает в точке на расстоянии r от элемента вихря dl скорость dU , которая перпендикулярна к плоскости, образуемой r и dl и равна: $\frac{J \sin \alpha \cdot dl}{4\pi r^2}$, где α — угол между r и de . Эта формула дает известный закон Био-Савара, при чем U соответствует магнитному полю, а J электрическому току.

В электродинамической системе Максвелла мы находим опять-таки поразительную аналогию. Если через J обозначить силу тока, а через H магнитное поле, то одно из ур-ий Максвелла гласит (если считать ток смещения равным нулю): $4\pi J_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}$, $4\pi J_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}$, $4\pi J_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}$ и, кроме того, $\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$, если в поле нет магнитных масс („источников и стоков“). Если в этих ур-иях заменить J и H через вектор угловой скорости (деленный на 2π) и скорость частиц жидкости, то мы получим знаменитые ур-ия Гельмгольца для вихревого движения.

Если кольцо будет увлекаться все время вперед, то часть жидкости, увлекаемая с резиновым кольцом, сама станет кольцеобразной, и относительно кольца движение жидкости будет происходить в обратном направлении через центр. Во всех случаях фигура части жидкости, увлекаемой вперед, и линии движения будут симметричны как относительно оси, так и обеих сторон экваториальной плоскости. Конечно, всякая форма описанного движения может быть произведена или описанным порядком, или первоначально путем сообщения скорости кольцу, а затем приведением жидкости в движение с помощью мгновенной пластинки или одновременным применением обоих первоначальных действий. Все количество требуемого импульса или, как мы можем назвать это, действительный момент движения или просто момент движения представляет сумму интегральных величин импульсов, сообщенных кольцу и пластинке, требуемых для произведения того или другого из двух составляющих целого движения. Теперь, очевидно, что, так как диаметр кольца очень мал в сравнении с диаметром круглой оси, то импульс, сообщенный кольцу, должен быть очень мал в сравнении с импульсом, сообщенным пластинке, если скорость кольца не на много больше скорости центральных частей пластинки. Отсюда, если только скорость, сообщенная кольцу, не так велика, чтобы довести объем жидкости, увлекаемой им вперед, до величины несравнимо большей объема самого твердого кольца, то моменты различных форм движения, рассмотренных нами, превзойдут на незаметные количества момент неподвижного кольца. Величина этого момента легко определяется соответственным применением формул Грина. Таким образом действительный момент в части жидкости, увлекаемой вперед (одинаковый с моментом твердого тела такой же плотности, движущегося с тою же скоростью) вместе с эквивалентом инерции жидкости, допускающей это движение, приблизительно одинаков во всех этих случаях и равен интегралу Грина, выражающему весь первоначальный импульс, сообщенный пластинке. Равенство действительного момента для различных скоростей кольца легко проверить без анализа для скоростей не столь больших, чтобы вызвать заметные отклонения от сферической формы в части жидкости, увлекаемой вперед. Таким образом, во всяком случае длина оси части жидкости, увлекаемой вперед, определяется нахождением точки на оси кольца, в которой скорость равна скорости кольца. На больших расстояниях от плоскости кольца эта скорость изменяется подобно магнитной силе бесконечно малого магнита в точке его оси — обратно пропорционально кубу расстояния от центра. Поэтому куб

радиуса приблизительно шарообразной части, увлекаемой вперед, находится в простом обратном отношении к скорости кольца, и потому момент ее постоянен для различных скоростей кольца. К нему надо прибавить, как доказал Пуассон, количество, равное половине его собственной величины, как эквивалент инерции внешней жидкости; и сумма составит весь действительный момент движения. Отсюда мы видим, что не только целый действительный момент независим от скорости кольца, но его величина та же, как магнитный момент в соответственном кольце электромагнита. Конечно, тот же результат получается с помощью интеграла Грина указанного выше.¹⁾

¹⁾ Метод „пластинки“ описанный Томсоном, является приложением общего метода так называемых „импульсивных сил“. Томсон ввел понятие „импульса“ в особом смысле (см. On vortex motion, § 6), именно для обозначения системы импульсивных сил, которые, действуя в данный момент (мгновенно), могли бы довести данную систему от состояния покоя до тех скоростей, которыми эта система в данный момент обладает. Общие выражения для импульсивных сил можно найти у W. Thomson'a („On vortex motion“), J. J. Thomson'a („On the motion of vortex Ring's“); см. также у Lamb'a §§ 119 и 152. Согласно Томсону, слагающая по оси x — ов импульса — $X = \iint (Nx - \varphi \cos \alpha) ds$, где N — нормальная слагающая скорости, φ — потенциал скорости, α — угол наклона нормали площадки ds к оси x — ов. Томсон доказывает, что слагающая магнитного момента по отношению к оси x , т. е. $\iiint m x dv$, где m — магнитная плотность элемента объема dv равна — $\frac{1}{4\pi} \iint (Nx - \varphi \cos \alpha) ds$, где N — нормальная слагающая магнитной силы, φ — магнитный потенциал, α и ds имеют то же значение, что и раньше. Укажем еще на две замечательные аналогии. Для энергии системы вихрей мы имеем: $T = \frac{1}{4\pi} \sum J' J'' \iint \frac{\cos \alpha}{r} dl' dl'' = \frac{1}{2} \iiint (u^2 + v^2 + w^2) dx dy dz$, где $J = 2\omega \cdot s$ (удвоенное произведение угловой скорости на поперечное сечение), dl' и dl'' элементы длины вихревых нитей, α — угол между ними; u, v, w слагающие скоростей. Если в этих формулах считать J силой тока, а u, v, w — слагающими магнитного поля, то мы получим выражения для энергии системы линейных проводников. Вывод формул см. Lamb'a (§ 153) и в „Механике“ Кирхгофа (20-ая лекция). Далее, если через A_x, A_y, A_z обозначить слагающие так называемого „электрокинетического потенциала“

$A = \iiint \frac{m \cdot u}{r} dv$, где m — плотность электричества в объеме dv , и скорость движения (иначе $\frac{mu}{c} = i$ плотности тока в элементе dv), то слагающие магнитного поля будут: $H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$, $H_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$, $H_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$. Чтобы получить выражения для вихрей, достаточно вместо плотностей тока поставить угловые скорости (деленные на 2π), а вместо силы поля H скорость частиц (u, v, w).

Синтетический метод, только-что объясненный, не ограничивается случаем простого круглого кольца, подробно описанного выше, но равно применим к нескольким кольцам какой-либо формы, отделенным друг от друга или сцепленным друг через друга каким-либо способом, или к простому шнуру, связанному в виде „многократной непрерывности“ и соединенному непрерывно, так что он не имеет конца. Во всяком возможном случае движение жидкости в каждой точке ядра вихря или жидкости, наполняющей все пространство вокруг него, в совершенстве определяется формулами Гельмгольца, когда дана форма ядра. Изложенное синтетическое исследование доказывает, что действительный момент движения всей жидкости совпадает по величине и направлению с магнитным моментом соответствующего электромагнита. Поэтому продолжая рассматривать ради простоты только бесконечно тонкую линию ядра, проектируем ее на каждую из трех плоскостей под прямыми углами друг к другу. Площади плоской цепи, полученные таким образом [рассчитывая их, согласно правилу Де-Моргана¹⁾ при взаимном пересечении (autotomic), как это вообще бывает], суть составляющие момента, перпендикулярные к этим трем плоскостям.²⁾ Проверка этого результата будет хорошим упражнением в „многократной непрерывности“. Автор еще недостаточно знаком с замечательными исследованиями Римана этой ветви аналитической геометрии, чтобы знать, все ли виды „многократной непрерывности“, указанные нами, включены в его классификацию и номенклатуру или нет.

Часть синтетического исследования, в которой тонкое твердое проволочное кольцо предполагается движущимся в каком-либо направлении через жидкость со свободным вихревым движением, пред-

¹⁾ Правило де-Моргана указывает, что следует считать площадью много-связной кривой, которую де-Морган называет autotomic. См. „Extension of the word area“. *Cambr. and Dublin Math. Journ.* May 1850 г., а также „Elements of Natural Phil.“. Томсона и Тэта, р. I, 1873, где приведено это правило.

²⁾ Под моментом здесь, как и выше, разумеются импульсивные силы, эквивалентные действительному моменту движения. Теория показывает (см. Lamb, § 152), что слагающие импульсивной силы по координатам имеют значения $J \iint ds$, $J \iint m ds$, $J \iint n ds$, где J — сила (циркуляция) одного бесконечно тонкого вихревого шнура, l , m , n — направляющие косинусы нормали к элементу ds поверхности вихря. Но произведение площадки на косинус нормали равно соответствующей проекции площадки, следовательно, слагающие импульсы (моменты) пропорциональны проекциям вихревой поверхности на координатные плоскости.

варительно вызванным в нем, требует, чтобы диаметр проволоки в каждой точке был бесконечно мал в сравнении с радиусом кривизны ее оси и с ближайшим расстоянием всякой другой части окружности от этой точки проволоки. Но, когда найден действительный момент целого движения жидкости для вихря с бесконечно тонким ядром, мы можем предположить некоторое число таких вихрей, по возможности близко друг к другу, вызванными одновременно; и весь действительный момент по величине и направлению будет равнодействующим моментом различных составляющих вихрей, считаемых каждый отдельно. Отсюда мы имеем замечательное предложение, что действительный момент всякого возможного движения в бесконечной несжимаемой жидкости совпадает по направлению и величине с магнитным моментом соответствующего электромагнита в теории Гельмгольца. Автор надеется дать математические формулы, выражающие и доказывающие это утверждение в более подробной записке, которую он предполагает скоро представить Королевскому Обществу.¹⁾

Всякому, наблюдающему явления колец дыма или исследующему теорию, скоро представляется вопрос, — какие условия определяют размеры кольца в каждом случае. Исследование Гельмгольца доказывает, что угловая скорость ядра вихря изменяется прямо пропорционально его длине и обратно пропорционально его плоскости сечения. Поэтому сила электрического тока в электромагните, соответствующем бесконечно тонкому ядру вихря, остается постоянной, как бы сильно ни изменялась его длина в течение превращений, испытываемых им от движения жидкости. Отсюда очевидно, что, чем больше диаметр кольца для того же объема и силы вихревых движений в обыкновенном кольце Гельмгольца, тем больше вся кинетическая энергия жидкости, и тем больше момент. Таким образом мы видим, что размеры кольца Гельмгольца определены, когда даны объем и сила вихревого движения и, кроме того, или кинетическая энергия или момент движения всей жидкости. Поэтому, если после некоторого числа столкновений или воздействий кольцо Гельмгольца удаляется на большое расстояние от других и становится свободным или почти свободным от колебаний, то его диаметр должен увеличиться или уменьшиться, смотря по тому, получило оно или отдало энергию другим. Полная теория увеличения вихревых

¹⁾ См. „On vortex motion“.

атомов при повышении температуры может быть разработана по этому принципу.¹⁾

План проф. Тэта для демонстрации колец дыма следующий: большой прямоугольный ящик, открытый с одной стороны, имеет круглое отверстие в 6 или 8 дюймов в диаметре, вырезанное на противоположной стороне. Простой грубый ящик для упаковки в 2 куб. фута или около того вполне соответствует этой цели. Открытая сторона ящика закрыта толстым холстом или куском сукна или пластинкой резины, растянута на ней. Удар по гибкой стороне вызывает круглое вихревое кольцо, вырывающееся из отверстия на другой стороне. Вызванные таким образом вихревые кольца видимы, если ящик наполнен дымом. Один из наиболее подходящих способов для этого представляют две реторты, вставленные горлышками в отверстия, сделанные для этой цели в одной из сторон ящика. Небольшое количество соляной кислоты вводится в одну из этих реторт, а крепкий жидкий аммоний в другую. Поднося спиртовую лампу от времени до времени к одной или другой из этих реторт, легко получить густое облако аммониевой соли внутри ящика. Любопытный и занимательный опыт может быть сделан с двумя устроенными указанным образом ящиками, помещенными или плотно друг возле друга или обращенными один к другому так, чтобы выбрасывать кольца дыма, идущие навстречу с противоположных сторон, или в различных относительных положениях так, чтобы дать кольца дыма идущие по путям, наклоненным друг к другу под некоторым углом, и проходящие друг возле друга на разных расстояниях. Интересная вариация опыта может быть сделана с чистым воздухом без дыма в одном из ящиков. Невидимые вихревые кольца, выбрасываемые из него, делают свое присутствие поразительно заметным, когда они подходят близко к одному из колец дыма, выходящих из другого ящика.

¹⁾ Закон Гельмгольца говорит лишь о сохранении циркуляции (интеграл произведения удвоенной угловой скорости на элемент площади поперечного сечения), следовательно, вихри могут изменять свое поперечное сечение, угловую скорость, длину. В 1905 г. В. Томсон пришел к заключению, что вихри подлежат закону рассеяния (см. Proc. Royal. Soc. Edin., 25 книга, стр. 556), т. е. некоторое количество элементарных колец Гельмгольца, находящихся в конечном объеме, разлетаются в бесконечное пространство, причем полная энергия системы равномерно распределяется повсюду в виде бесконечно малых скоростей. Такое рассеяние вихрей мы имеем в процессе электромагнитного излучения в случае волн максвелловского типа, как это хорошо видно из теории вибратора Герца.

ВИХРЕВАЯ ТЕОРИЯ МАТЕРИИ, ЕЕ РАЗВИТИЕ И ЗНАЧЕНИЕ.

3. ЦЕЙТЛИН.

1.

Предпосылки вихревой теории материи мы находим в учениях древнегреческих философов — Анаксимандра, Гераклита, Парменида, Зенона и Аристотеля. Но основоположником этой теории необходимо считать Маркса физики — Ренэ Декарта, который впервые вполне отчетливо и глубоко формулировал смысл и значение учения о вихревой природе материи. Принципы вихревой физики изложены Декартом в трактате „О мире“ (Du Monde),¹⁾ „Принципах философии“, „Возражениях и ответах“ (Objections et Reponses), переписке философа; но так как философия Декарта, по справедливому замечанию А. Рея, это — его физика, то все основные труды Декарта являются фундаментом этой физики. К несчастью, сам философ, и само собою разумеется, его последователи так запутали „картезианскую философию“, т. е. физику, что она понимается обычно совершенно ложно.

Это ложное понимание принципов физики Декарта можно обозначить как псевдокартезианизм или абсолютный рационализм. Сущность псевдокартезианизма в том, что он не принимает во внимание философских оснований картезианской физики, т. е. метода Декарта. Отсюда и произошла знаменитая борьба между относительно формальной физикой Ньютона и крайним рационализмом псевдокартезианцев, при чем относительный формализм Ньютона превратился у его последователей в абсолютный, который и противопоставлялся абсолютному рационализму. Эта историческая борьба тянется до сих пор и очень плодотворна по своим результатам, так как она постепенно выявляет истинный метод науки. Этапы борьбы заключаются в постоянной смене эпох абсолютного рационализма и абсолютного формализма, согласно общезвестному закону диалектического движения. Период от появления идей Декарта до 1740 года был периодом господства псевдокартезианизма.

Философы и физики стремились объяснить все физические явления при помощи однородной непрерывной материи (простран-

¹⁾ Этот трактат представляет собою отрывки большого сочинения „Космос“, которое Декарт предназначал к первоначальному опубликованию, но которое он скрыл, услышав о судьбе Галилея.