где ds — элемент поверхности, а l, m, n — направляющие косинусы нормали, обращенные во внутрь.

Если поверхность s так мала, что внешнее магнитное поле на всем ее протяжении можно считать постоянным, то это выражение *можно написать так*

$$c \iint \Sigma g(lu + mv + nw) - b \iint \Sigma h(lu + mv + nw)\, ls.$$

Но

$$\iint \Sigma g(lu + mv + nw) ds \quad \text{и} \quad \iint \Sigma h(lu + mv + nw) ds.$$

представляют число фарадеевых трубок, параллельных соответственно y и z, входящих в элемент в единицу времени, т. е. они представляют объемные интегралы слагающих q и r тока, параллельного соответственно y и z: если среда, окруженная поверхностью s — диэлектрик, то это поляризационный ток; если она проводник, то это ток проводимости. *Таким образом, количество движения,* параллельное x, сообщаемое в единицу времени единице объема среды, другими словами, сила, параллельная x, действующая на единицу объема среды, равна

$$cq - br;$$

точно так же силы, параллельные y и z, соответственно равны

$$\left.\begin{matrix} ar - cp \\ bp - aq \end{matrix}\right\} \qquad (11)$$

Когда среда есть проводник, то это — обыкновенные выражения для слагающих силы на единицу объема проводника, когда он несет ток в магнитное поле.

Когда мы рассматриваем, как в данном выше выражении силу, действующую на проводник, несущий ток, как зависящую от сообщения проводнику количества движения фарадеевых трубок, входящих в проводник, то происхождение силы между двумя токами будет очень похоже на силу притяжения между двумя телами по теории тяготения Лесажа. Так, напр., если мы имеем два параллельных тока A и B, идущие в том же направлении, то, когда A находится слева от B, большее число трубок войдут в A слева, чем справа, потому что некоторые из тех, которые вошли бы справа в отсутствии B, будут поглощены B, так что в единицу времени количество движения, имеющее направление слева направо, входящее в A, превзойдет количество движения, имеющее противоположное направление, так что A стремится двигаться вправо, т. е. к B, а B по той же причине будет двигаться к A.

15. Таким образом мы видели, что гипотеза фарадеевых трубок *в движении объясняет свойства электромагнитного поля и* ведет к обычным уравнениям его. Эта гипотеза имеет преимущество, показывая весьма ясно, почему поляризационные токи и токи проводимости вызывают подобные механические и магнитные действия. Ибо механические действия и магнитные силы в некоторой точке поля зависят от движения фарадеевых трубок в этой точке, и всякое изменение поляризации предполагает движение этих трубок точно так, как при обычном токе проводимости.

ВИХРЕВАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ДВИЖЕНИЯ. [1]

З. Цейтлин.

Вывод уравнений Максвэлла-Герца.

1.

История развития учения об электромагнетизме и свете приводит к бесспорному убеждению, что сущностью электромагнитных процессов является вихревое движение. Недавние исследования Дж. Дж. Томсона, Кастерина и Уайттекера [2]) о квантовом электромагнитном кольце, уж не оставляют места для какого бы то ни было сомнения на этот счет. Большой знаток теорий электромагнетизма Уайттекер подчеркивает в своей последней работе, что электромагнитное квантовое кольцо, повидимому, является вихревым образованием.

Задача настоящей статьи показать весьма простым способом, что уравнения Максвэлла-Герца действительно вытекают из основного уравнения вихревой теории — уравнения Стокса-Гельмгольца:

$$2\omega = 4\pi w = curl \cdot v,$$

[1]) *Для понимания нижеизложенного необходимо знание основ теории* вихрей. Рекомендуем для этой цели превосходную книгу А. А. Эйхенвальда: „Теоретическая физика", ч. I. теория поля. Более подробное изложение в III томе „Теоретической механики" П. Аппеля. Практические иллюстрации в „Основах воздухоплавания" Н. Е. Жуковского.

[2]) См. статьи: Кастерина—Phil. Magaz. Декабрь 1926 г. E. T. Whittaker Proc. Royal. Ed. 46 (1926), стр. 116; там же J. M. Whittaker, стр. 306.

где $v(x,y,z,t)$ — скорость данной точки среды,[1] $\omega(x,y,z,t)$ — соответствующая угловая скорость; величина w называется вихрем, при чем коэффициент 4π вводится для приведения в соответствие формул механического движения с принятыми в электродинамике обозначениями.

Чтобы понять сущность нашего вывода уравнений электромагнитного движения, необходимо прежде всего принять во внимание следующее:

Теория Максвэлла-Герца является теорией „средних значений" — Mittelwertheorie, как говорят немцы.

В самом деле, величины E и H электрического и магнитных полей имеют в теории Максвэлла-Герца смысл „п л о т н о с т е й", т. е. выражают число силовых линий на единицу площади в данной точке; $\frac{E^2}{8\pi}$ $\left(\text{или } \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}\right)$ и $\frac{H^2}{8\pi}$ $\left(\frac{\mu H^2}{8\pi}\right)$ будут плотностями энергии в данной точке среды.

Этот характер теории Максвэлла-Герца обусловлен тем, что теория эта является теорией с п л о ш н о й с р е д ы, теорией поля, а во всякой такой теории мы оперируем не с „прерывными" величинами, относящимися к „изолированным" физическим индивидуумам (отдельными материальными частицами, атомами, электронами, массами планет и т. д.), а с величинами непрерывными.[2] Физико-математическое же исследование таких величин возможно лишь в форме средних значений.

Для наглядного уяснения этого пункта возьмем уравнение движения „изолированного" тела и сплошной среды:

$$\left.\begin{aligned} X &= M\frac{d^2x}{dt^2} \\ \rho X &= \rho\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned}\right\} \text{ аналогично для } Y \text{ и } Z.$$

[1] Здесь мы имеем в виду вихревую слагающую скорости (скорость без потенциала скоростей); невихревую слагающую мы в дальнейшем обозначаем через V_t (c).

[2] Во избежание недоразумений заметим здесь, что эта непрерывность в конечном итоге исследования оказывается синтезированной с прерывностью. Вихревые трубки в эфире одновременно непрерывны (по отношению к среде) и прерывны (между собою). Вот почему Томсон имеет возможность начинать исследование с прерывных фарадеевых трубок, чтобы в конечном итоге притти к уравнениям непрерывности Максвэлла. Вот почему нет никакого противоречия между нашим утверждением и утверждением Томсона: „С нашей точки зрения этот взгляд на электрические явления может считаться образующим род м о л е к у л я р н о й т е о р и и э л е к т р и ч е с т в а, при чем фарадеевы трубки занимают место молекул в кинетической теории газов".

Первое уравнение изображает движение массы M под действием силы $X(Y,Z)$, т. е. сила $X(Y,Z)$ отнесена ко всей массе M.

Второе уравнение — основное уравнение гидродинамики; в нем сила X отнесена к единице массы, и, стало-быть, ρX означает силу, действующую на единицу объема; этот же смысл имеет величина $\rho\frac{d^2x}{dt^2}$; $\frac{\partial p}{\partial x}$ это — изменение (градиент) давления p, т. е. силы, отнесенной к единице площади. Вот почему в теории сплошных сред скорость „в данной точке" v и вихрь w имеют смысл „плотностей", и плотность энергии в данной точке определяется формулами:[1]

$$P_{cp.} = \rho\frac{v^2}{8\pi} = k\rho w^2 = \frac{k\rho}{4\pi^2}\omega^2.$$

Здесь плотность энергии выражается тремя способами: а) через скорость v, б) через плотность вихрей w, при чем введен неопределенный коэффициент k, зависящий от формы вихревого движения, в) через угловую скорость ω, связанную с w равенством $2\omega = 4\pi w$.

„Статистический" характер теории Максвэлла-Герца дает возможность при выводе уравнений электромагнитного движения не делать никаких предварительных предположений о деталях механизма этого движения, за исключением одного *лишь* того, именно, что эфир и заряды движутся подобно несжимаемой жидкости. Это предположение лежит в основе главных теорий электромагнетизма.

2.

Пусть $P_{cp} = k\rho A^2$ будет плотностью энергии в некоторой точке. Величина A может означать скорость v, угловую скорость ω или же вихрь w, в соответствии с чем коэффициент k будет иметь различные значения.

Из векторного анализа известно, что полное изменение во времени $\frac{dA}{dt}$ вектора A слагается из двух частей: а) местного (локального) изменения $\frac{\partial A}{\partial t}$ и б) стационарного со слагаемыми по осям координат

$$\left(v_x\frac{\partial A_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial A_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)$$

[1] Плотность энергии в обычных обозначениях будет $\frac{\rho v^2}{2}$; коэффициент $1/4\pi$ вводится для согласования с электродинамическими обозначениями.

См. книгу А. А. Э й х е н в а л ь д а.

и аналогично для A_y и A_z. В векторной символике стационарное изменение изображается через $(v \text{ grad})\, A$, так что

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (v \text{ grad})\, A.$$

В установившемся, например, течении жидкостей локальное изменение равно нулю, так как в каждой точке среды скорость неизменна; имеется лишь различие в скоростях различных точек; это различие и называют стационарным изменением скорости — стационарным ускорением.

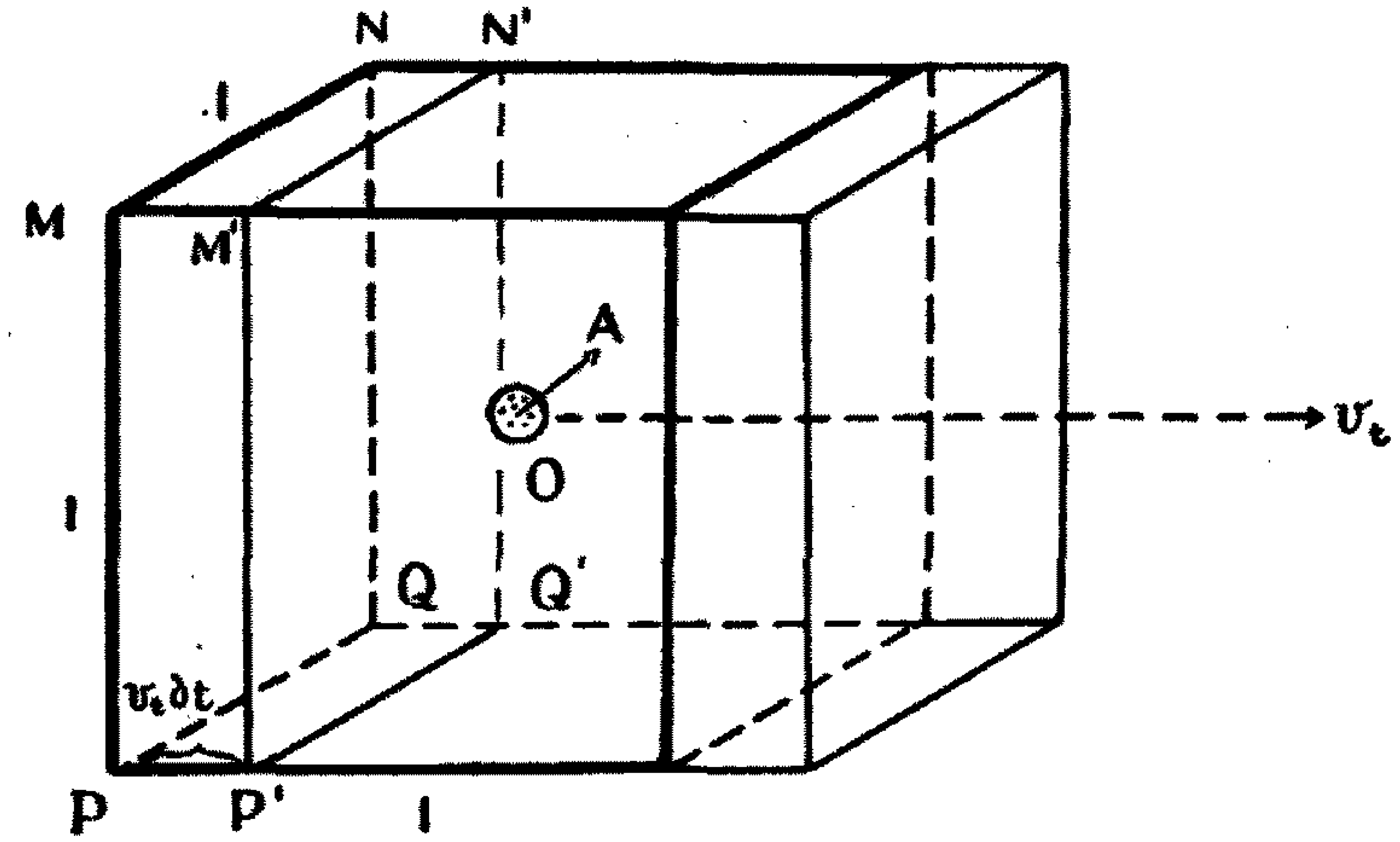

Рис. 48.

В уравнениях Максвэлла-Герца мы имеем дело с местным изменением величин электромагнитного поля, так что для вывода этих уравнений нам придется рассмотреть, что происходит в данной точке поля, иначе — в соотнесенной к данной точке единице объема.

При этом, как было уже указано, нет надобности предварительно знать детали происходящих в данном месте среды движений, — важен *лишь общий итог этих движений.*

Таким итогом может быть или стационарное состояние, которого мы не рассматриваем, или же локальное изменение движения, связанное с изменением плотности энергии в данной точке среды. Это локальное изменение плотности энергии и является исходным пунктом нашего исследования.

Пусть в данной точке O среды в определенный момент времени плотность энергии будет $P_{cp} = k\rho A^2$.

Всякое изменение этой величины является результатом положительного или отрицательного притока энергии в данную точку среды, результатом движения энергии. Это движение происходит с определенной скоростью v_t, зависящей от характера среды (плотности, упругости и т. д.). Изобразим эту скорость вектором, исходящим из точки O и построим вокруг этой точки куб в единицу объема, с основанием, параллельным вектору.

Энергия P_{cp}, равномерно распределенная по объему единичного куба, изобразит плотность энергии в данной точке в данный момент. Пусть теперь локальное изменение плотности энергии происходит таким образом, что в итоге оно эквивалентно движению энергии из соотнесенной к данной точке единицы объема со скоростью v_t в течение времени ∂t. Через время ∂t энергия куба $MNPQ$ займет положение $M'N'P'Q'$, так что изменение плотности энергии за время ∂t будет равно энергии параллелепипеда

$$MNPQM'N'P'Q',$$

объем которого равен $v_t\, \partial t \times 1 \times 1 = v_t\, \partial t$, что при плотности P_{cp} даст для изменения $-\partial P_{cp}$ величину

$$\partial P_{cp.} = -P_{cp.}\, v_t\, \partial t,$$

откуда

$$\frac{\partial P_{cp.}}{\partial t} = -P_{cp.}\, v_t.$$

Полученное соотношение представляет собою один из самых элементарных законов физики: изменение какой-либо величины пропорционально самой величине. Таков, например, закон распада радия или закон растворения веществ. [1])

Мы принимаем формулированный закон изменения плотности энергии в данной точке в качестве нашей основной гипотезы и утвер-

---

[1]) Уравнение радиевого распада будет $\frac{dR}{dt} = -kR$, где R — наличное количество радия в момент t; растворение веществ представляет собою так называемый процесс второго порядка, уравнение которого будет $\frac{dm}{dt} = -km\,(s - c)$, где m — наличное количество вещества, s — концентрация в насыщенном состоянии, c — зависящая от m концентрация в данный момент. Если c мало сравнительно с s, то уравнение процесса растворения будет:

$$\frac{dm}{dt} = -ksm = -Km.$$

ждаем, что вихревое электромагнитное движение подчиняется именно этому закону.

Решение полученного уравнения дает формулу

$$P_{cp} = P_o e^{-v_t \cdot t},$$

которая изображает закон убывания плотности энергии в данной точке среды. Чтобы изобразить закон возрастания плотности, вводим отрицательное время и формулу:

$$P_{cp} = P_o e^{+v_t \cdot t},$$

в которой t изменяется от $-\infty$ до o. Левая и правая кривые (рис. 49) графически изображают возрастание и убывание плотности энергии в данной точке.

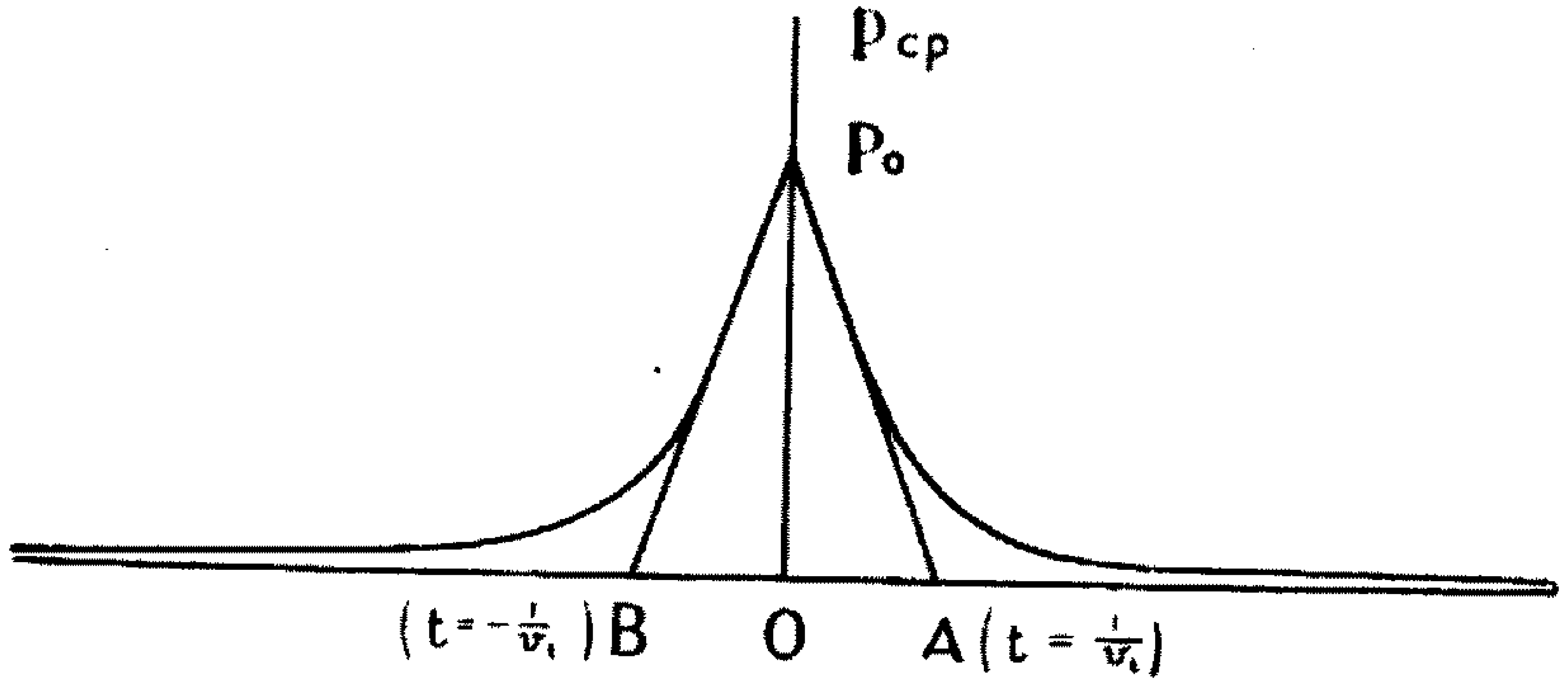

Рис. 49.

Так как для электромагнитных процессов в эфире v_t очень велико ($v_t = c = 3 \cdot 10^{10}$), а P, вообще говоря, ничтожно мало (плотность энергии света, например), то верхние ветви кривых почти вертикальны. Эти ветви можно заменить поэтому касательными P_oA и P_oB в точке (P_o, O), уравнения которых будут:

$$P_{cp} = P_o \pm P_o v_t . t.$$

Эти уравнения изображают движение единичного „твердого" куба плотности P_o через данную точку. Отсюда ясны происхождение и смысл нашего основного закона локального изменения плотности; как учит теория вихрей, вихри подобны твердым вращающимся телам и движутся подобно твердым телам (закон Гельмгольца); разница между твердым телом и вихрем та, что твердое тело имеет резко определенные границы, в то время как вихрь — образование в сплошной среде, границей которого является определенная поверхность разрыва скоростей, но не разрыва движения вообще; отсюда и проистекает различие между законами движения твердого тела и вихря через данную точку; однако, при наличии очень большой скорости v_t движение вихря почти тожественно с движением твердого тела.

— — — —

Условившись считать время отрицательным для случая увеличения плотности, можно основной закон выразить формулой:

$$\frac{\partial P_{cp}}{\partial t} = \pm P_{cp} v_t.$$

Заменив P_{cp} через $k\rho A^2$, получим тот же закон в иной форме:

$$k\rho \frac{\partial (A^2)}{\partial t} = \pm k\rho A^2 v_t$$

или

$$2Ak\rho \frac{\partial A}{\partial t} = \pm k\rho A^2 v_t$$

или

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \pm \frac{1}{2} A v_t.$$

3.

Рассмотрим прежде всего при помощи полученного основного уравнения электромагнитное движение в **свободном эфире**. Для этого необходимо установить, во-первых, скорость перемещения электромагнитной энергии в свободном эфире, а, во-вторых, найти соотношение между величинами v, w (ω) и величинами H, E.

Сделать первое очень просто, — ныне окончательно признано, что лучистая энергия представляет собою энергию электромагнитного движения, так что электромагнитная энергия распространяется в свободном эфире прямолинейно и с постоянной скоростью $c = 300\,000$ *км/ск*.

$$v_t = \text{const} = c.$$

Для установления соотношения между v, w (ω), H и E придется выдвинуть гипотезу о характере векторов H и E. Из теории вихрей известно, что вихревое кольцо движется перпендикулярно к своей плоскости, т. е. направление движения перпендикулярно к вектору-вихрю.

Согласно теории Дж. Дж. Томсона, электромагнитное квантовое кольцо образуется из электрических (E) силовых трубок и двигается перпендикулярно к своей плоскости. Если, стало-быть, электромагнитное кольцо действительно является вихревым, то E соответствует $w(\omega)$, а H — скорости v; или, короче: E — аксиальный вектор, H — полярный. Вопрос о том, какой из векторов является аксиальным (или полярным) — вопрос спорный, и многие исследователи настаивают на обратном, нежели принимаемое нами соотношение.

Последующие наши выводы не зависят, однако, от той или иной гипотезы и легко могут быть обращены, если кто-либо пожелал бы рассматривать H, как аксиальный вектор, а E, как полярный.

Пользуясь теперь вышеприведенной формулой для плотности энергии P_{cp}, напишем два соотношения:

$$P_{cp} = \frac{\rho v^2}{8\pi} = \frac{H^2}{8\pi};$$

H — выражено в электромагнитных единицах.

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{\rho}} H,$$

$$P_{cp} = k\rho w^2 = \frac{E^2}{8\pi};$$

E — выражено в электростатических единицах.

$$w = \pm \frac{1}{\sqrt{8\pi k \rho}} E.$$

Остается определить величину коэффициента k. Эта величина не может быть найдена априори, так как она характеризует структуру электромагнитных силовых трубок, о которых мы не сделали никаких предварительных предположений. Наоборот, наш метод заключается именно в том, чтобы, получив из опыта величину k, определить тем самым структуру электромагнитных силовых волокон („линий"). Оказывается, что уравнениям Максвэлла-Герца удовлетворяет простое значение $k = 8\pi$.

Это значение дает возможность определить структуру вихревых трубок; подставив в формулу для плотности энергии вместо k величину 8π, получим:

$$P_{cp} = 8\pi\rho w^2 = \frac{2}{\pi}[\rho\omega^2]_{max} = \frac{E^2}{8\pi}.$$

Общеизвестно, что при *синусоидальном* распределении какой-либо величины *среднее значение этой величины за половину периода* будет $\frac{2}{\pi} \times$ — *максимальное значение*. Следовательно, $[\rho\omega^2]$ — максимальное значение синусоидального распределения энергии в электромагнитном вихревом волокне, а $8\pi\rho w^2 = \frac{E^2}{8\pi}$ — среднее значение энергии, что вполне соответствует теории Максвэлла-Герца, как теория „средних значений".

Рис. 50 показывает структуру электромагнитного вихревого волокна (поперечное сечение).

$$P = P_m \sin\alpha r; \quad P_{cp} = \frac{2}{\pi} P_m.$$

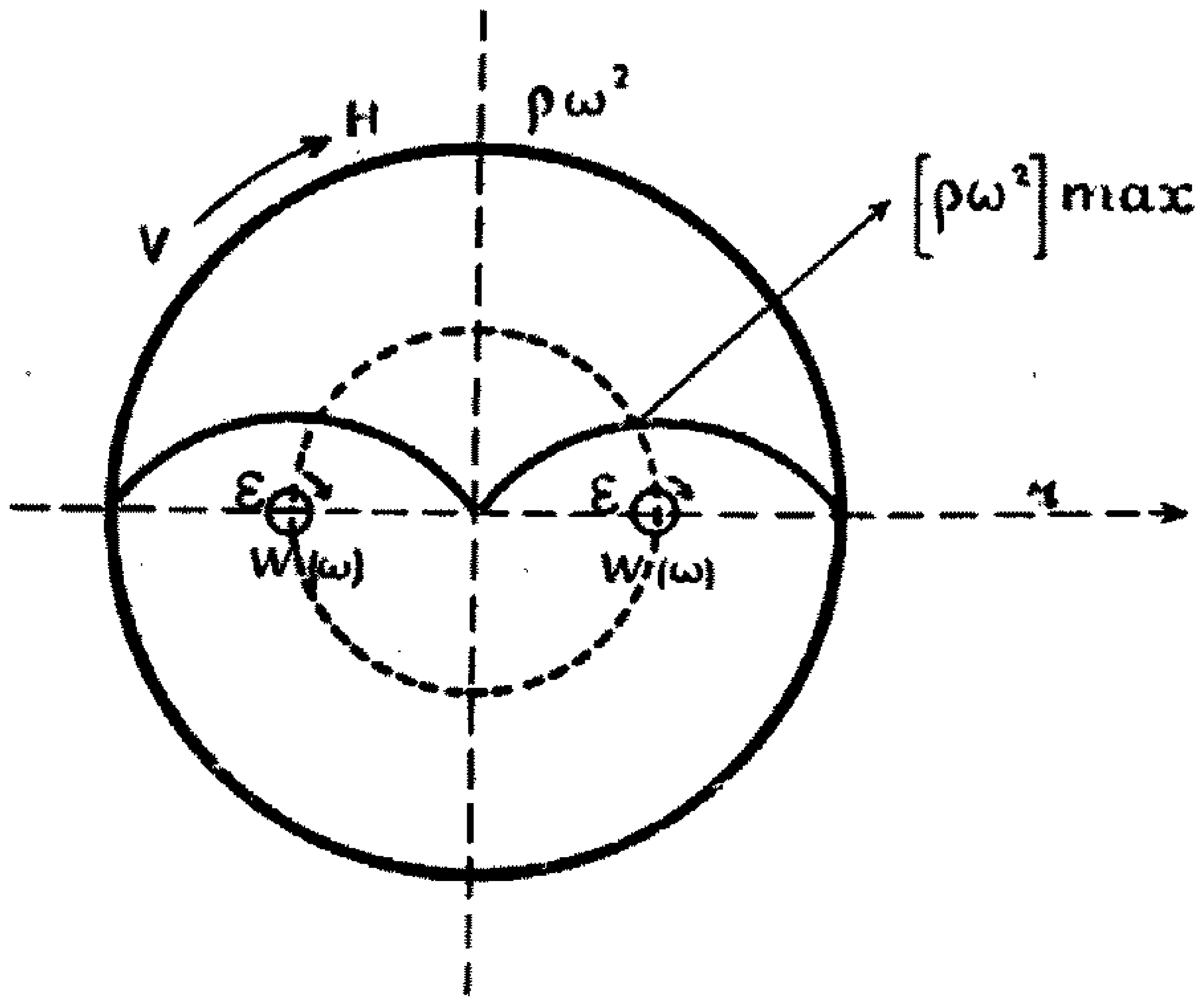

Рис. 50.

Магнитное поле H соответствует скорости $\vec{v}$, электрическое $\widehat{E}$ — вихрю $w(\omega)$, при чем $E \perp H$ в каждой точке вихря. Вихрь достигает максимума на средней окружности, в центре же и на пограничной окружности он равен нулю. На пограничной окружности мы имеем „разрыв непрерывности" скоростей, вследствие чего и происходит поступательное движение вихревой поверхности разрыва.[1])

Подставим теперь полученные соотношения для v, w, H и E в основное уравнение локального изменения. Получим:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \pm \frac{1}{2} wc; \quad \frac{1}{c}\frac{\partial w}{\partial t} = \pm \frac{1}{2} w = \frac{1}{8\pi} \operatorname{curl} v,$$

так как

$$w = \frac{1}{4\pi} \operatorname{curl} v$$

[1]) См. „Механику" Аппеля § 712: „О распространении волн и разрывах сплошности в движениях жидких сред".

или

$$\frac{1}{8\pi v\rho c}\,\frac{\partial E}{\partial t}=\pm\frac{1}{8\pi v\rho}\,\mathrm{curl}\,H;$$

так как

$$w=\pm\frac{1}{\sqrt{8\pi k\rho}}\,E=\pm\frac{1}{8\pi v\rho}\,E,$$

откуда:

$$\frac{1}{c}\,\frac{\partial E}{\partial t}=\pm\,\mathrm{curl}\,H.$$

Это и есть количественное выражение[1]) первого уравнения теории Максвэлла-Герца. Второе уравнение можно получить двумя способами:

а) из равенства

$$P_{cp}=\frac{\rho v^2}{8\pi}=8\pi\rho w^2=\frac{E^2}{8\pi}=\frac{H^2}{8\pi};\ E\perp H \text{ и } E=H.$$

Это именно равенство и характеризует особенность развиваемой нами теории. Написанные величины это лишь различные способы выражения плотности энергии одного и того же вихря: $\frac{E^2}{8\pi}$ это—выражение через плотность вихря $w(\omega)$; $\frac{H^2}{8\pi}$ через скорость v. В обычных изложениях электромагнитного учения E и H рассматриваются как меры двух совершенно различных вещей: „электрического" и „магнитного" полей.

Такая точка зрения обусловлена тем, что наши понятия об электрическом и магнитном полях возникли на основе изучения взаимодействий магнитов, токов и зарядов. Опыт показывает, что магниты и токи всегда действуют друг на друга в то время, как для взаимодействия магнита (или тока) с зарядом необходимо особое движение последнего. Но взаимодействие между вихревыми системами, каковыми являются магниты, токи и заряды,—явление чрезвычайно сложное, для понимания которого необходима рациональная динамическая теория. Такой теории не существует, однако, до сих пор. Повидимому, отсутствие взаимодействия между магнитами, токами и неподвижными зарядами объясняется тем, что последние являются открытыми вихревыми системами; электромагнитный вихрь имеет концы на заряженных телах, в то время как магниты и токи—это—системы замкнутые. В случае же движения зарядов возможно имеет место то же явление, что и при движении тел друг относительно друга в жидкости.

[1]) Т. е. не принимая во внимание знаков ($\pm$), характеризующих направление электромагнитных действий.

Необходимо, кроме того, подчеркнуть, что структура электромагнитного поля зарядов не тождественна со структурой поля магнитов и токов. Имеются, например, основания полагать, что электрический ток, это—так называемый динамической вихревой шнур, т. е. вихревая область сосредоточена главным образом на оси тока, область же вне провода это—безвихревая область, в которой скорость имеет потенциал скоростей. Электромагнитное поле изолированного и движущегося электрона имеет опять-таки свои особенности. В современной электродинамике все эти различия не принимаются во внимание. Уже давно Гегелем отмечен тот недостаток естественно-научного мышления, что оно, изыскивая повсюду единство и тождество, забывает о различиях, и наука поэтому часто бывает похожа на ночь, где все кошки серы. Таким образом, утверждение, что магнитное поле возникает лишь при движении электрических силовых линий, необходимо с нашей точки зрения[1]) понимать так, что движение силовой линии—одно из условий взаимодействия с магнитами и токами.

Если $E=H$, то, переставив E и H в первом уравнении Масквэлла, получим второе уравнение

$$\frac{1}{c}\,\frac{\partial H}{\partial t}=\pm\,\mathrm{curl}\,E,$$

совершенно симметричное с первым.

б) тот же результат можно получить на основании теории вихрей.

Теория эта учит, что, если положить

$$v=\mathrm{curl}\,B,$$

где B называется вектором-потенциалом (понятие, введенное Максвэллом), то плотность энергии выразится через

$$P_{cp}=\rho\,\frac{(B\cdot w)}{2},$$

где $(B\cdot w)$ означает скаларное произведение, т. е. $B\cdot w\cdot\cos(\widehat{B\cdot w})$.

Получаем, стало быть,

$$P_{cp}=8\pi\rho w^2=\rho\,\frac{(B\cdot w)}{2};$$

так что можно считать

$$B\parallel w$$

[1]) Это и есть по существу точка зрения Дж. Дж. Томсона.

и

$$B = 16\pi w = \pm \frac{2E}{\sqrt{\rho}}.$$

Применяя основное уравнение по вектору v, получим:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial v}{\partial t} = \pm \frac{1}{2} v = \pm \operatorname{curl} B = \pm \frac{1}{\sqrt{\rho}} \operatorname{curl} E$$

или

$$\frac{1}{c\sqrt{\rho}}\frac{\partial H}{\partial t} = \pm \frac{1}{\sqrt{\rho}} \operatorname{curl} E;$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = \pm \operatorname{curl} E.$$

Полученные уравнения Максвэлла дают законы количественных (скалярных) изменений векторов H и E. Векторы эти имеют, однако, известные направления, и скалярные изменения связаны с определенными направлениями. Настоящая работа не ставит себе целью обосновать и выявить физический смысл направлений электромагнитных действий, мы ограничимся поэтому лишь приведением действительных знаков уравнений Максвэлла: первое уравнение берется со знаками (+), второй со знаком (—):

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = + \operatorname{curl} H,$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = - \operatorname{curl} E.$$

Формально-физический смысл знака (—) таков: если магнитное поле получает приращение определенного направления, которое условно считается положительным $(+\partial H)$, то появляется вихрь электрического поля, который при принятых условных обозначениях считается отрицательным. [1]) Написанное выражение уравнения Максвэлла-Герца получится при нашем выводе, если в равенстве

$$P_{cp} = 8\pi w^2 = \rho \frac{(B \cdot w)}{2}$$

считать $\angle Bw = \pi$ и, стало-быть, $\cos(\widehat{Bw}) = -1$, т. е. вектор-потенциал B — параллельным, но обратным по направлению вектору w. Тогда

$$B = -16\pi w = -\frac{2E}{\sqrt{\rho}} \text{ и т. д.}$$

[1]) Эти условные обозначения можно найти в любом учебнике физики при формулировке законов индукции.

Третье и четвертое уравнения теории Максвэлла-Герца непосредственно вытекают из учения о вихревом движении в несжимаемой жидкости. Расходимость (дивергенция) как скорости, так и вихрей равна в такой жидкости нулю:

$$\operatorname{div}(v) = 0; \quad \operatorname{div}(w) = 0.$$

Так как мы предположили, что эфир движется подобно несжимаемой жидкости, то эти уравнения имеют силу и для движения в эфире. Заменяя v и w их значениями через H и E, получим третье и четвертое уравнения Максвелла-Герца:

$$\operatorname{div} H = 0$$

$$\operatorname{div} E = 0.$$

Выведем теперь первое уравнение Масквэлла для случая наличия в поле заряда плотности δ.

Из теории поля известно, что в этом случае

$$\operatorname{div} E = 4\pi\delta = E_2$$

div E или расходимость (дивергенция) поля означает положительный или отрицательный избыток числа силовых линий, выходящих из единицы объема, над числом входящих. Таким образом, $E_2 = 4\pi\delta$; это — дополнительное число силовых линий поля на единицу объема, обусловленное наличием заряда плотности δ. Приложим к дополнительному полю E_2 основное уравнение:

$$\frac{\partial E_2}{\partial t} = \frac{1}{2} E_2 v = 2\pi\delta v = 2\pi J; \quad \delta \cdot v = J.$$

Здесь мы вместо скорости c берем скорость движения зарядов v; произведение этой скорости на плотность δ называется плотностью тока J (в электростатических единицах). Вставив полученное значение $\frac{\partial E_2}{\partial t}$ в первое уравнение Масквэлла-Герца, получим:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_2}{\partial t} = \frac{2\pi J}{c} = K \operatorname{curl} H_2.$$

Коэффициент K введен в виду особой единицы, принятой для измерения движущихся зарядов $\frac{\partial E_2}{\partial t}$, т. е. силы тока. Эта единица силы тока определяется на основании уравнения:

$$KH = \frac{J(\text{элм.})}{r} = \frac{J(\text{элс.})}{cr},$$

где r — поперечное расстояние некоторой точки магнитного поля H от длинного (бесконечного) проводника. За единицу (электромагн.) силы тока принимается сила такого тока, который при $r=1$ дает $K=\frac{1}{2}$, т. е. соответствует двум **электромагнитным единицам магнитного поля**. Подставив в полученное уравнение $K=\frac{1}{2}$ будем, иметь:

$$\frac{4\pi J}{c} = \mathrm{curl}\, H_2.$$

Сложив это уравнение с первым уравнением Масквэлла-Герца, получим:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi J}{c} = \mathrm{curl}\, H_1 + \mathrm{curl}\, H_2 = \mathrm{curl}\, H,$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi J}{c} = \mathrm{curl}\, H.$$

Все предыдущие рассуждения и выводы приложимы, если вместо свободного эфира рассматривать диэлектрик с диэлектрическим и магнитным коэффициентами ε и μ. Необходимо только исходить из равенств:

$$P_{cp.} = \frac{\rho v^2}{8\pi} = 8\pi\rho w^2 = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{\mu H^2}{8\pi}\,; \sqrt{\varepsilon}\, E = \sqrt{\mu}\, H.$$

Производя вычисления, как и раньше получим:

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}}{v}\frac{\partial E}{\partial t} = \sqrt{\mu}\,\mathrm{curl}\, H.$$

$$\frac{\sqrt{\mu}}{v}\frac{\partial H}{\partial t} = -\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{curl}\, E.$$

Здесь вместо скорости c поставлена скорость распространения света в диэлектрике v. Полученные уравнения можно написать так:

$$\frac{\varepsilon}{v\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{\partial E}{\partial t} = \mathrm{curl}\, H$$

$$\frac{\mu}{v\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{\partial H}{\partial t} = -\,\mathrm{curl}\, E.$$

Если считать, что $v\sqrt{\varepsilon\mu} = c$

или $\frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon\mu} = n$ — показателю преломления среды,

получим уравнения Масквэлла-Герца для диэлетриков:

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = \mathrm{curl}\, H$$

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = \mathrm{curl}\, E.$$

В обычных изложениях исходят из этих уравнений, и получают $v\sqrt{\varepsilon\mu} = c$; у нас же это соотношение является предварительной гипотезой, которая приводит к обычным уравнениям Максквэлла-Греца. Опыт, как известно, не всегда подтверждает такого рода гипотезу.

4.

Основная особенность защищаемой нами точки зрения заключается, как мы уже это указали, в том, что E и H являются различными характеристиками одного и того же вихря по крайней мере для случая электромагнитного движения в свободном эфире. Вот почему плотность энергии в электромагнитном вихре будет $\frac{E^2}{8\pi}$ или же $\frac{H^2}{8\pi}$. Но в обычной теории считают плотность энергии электромагнитной волны равной $\frac{E^2}{8\pi} + \frac{H^2}{8\pi} = \frac{E^2}{4\pi}$ или $\frac{H^2}{4\pi}$, так как уравнения Максвэлла-Герца дают $E = H$. Тот же результат получается из нашей теории при предположении, что на единицу объема энергия вращательного движения равна энергии поступательного, т. е. **при допущении для электромагнитного движения известного в статистической механике закона равномерного распределения энергии по степеням свободы**.

В самом деле, $\frac{E^2}{8\pi}$ или $\frac{H^2}{8\pi}$ это — в нашей теории энергия вращательного (вихревого) движения на единицу объема, энергия которая перемещается с поступательной скоростью c. Следовательно, если плотность эфира ρ, то, сверх энергии вращательного движения, мы имеем на единицу объема еще энергию поступательного движения $\frac{1}{2}\rho c^2$, так что полная плотность энергии в „волне“ будет:

$$P_b = \frac{E^2}{8\pi}\left(\text{или}\,\frac{H^2}{8\pi}\right) + \frac{1}{2}\rho c^2.$$

Приняв закон равномерного распределения энергии, получим:

$$\frac{E^2}{8\pi} = \frac{H^2}{8\pi} = \frac{1}{2}\rho c^2,$$

так что

$$P_b = \frac{E^2}{4\pi} = \frac{H^2}{4\pi} = \rho c^2.$$

Энергию поступательного движения $\frac{1}{2}\rho c^2 = \frac{H^2}{8\pi}$ можно считать энергией обычного магнитного поля, энергию же вихря $\frac{E^2}{8\pi}\left(=\frac{H^2}{8\pi}\right)$ энергией электрического, хотя в действительности оно электромагнито-статическое.

Полученное соотношение замечательно тем, что дает рациональное объяснение известной формуле $P = \rho c^2 (mc^2)$, подтверждаемое опытами с давлением света.

Удвоение массы (m вместо $^1/_2\ m$) для энергии света обусловлено, как мы видим, тем обстоятельством, что световая масса, кроме поступательного движения, имеет еще вращательное, при чем энергии этих двух движений равны между собою.

5.

Одно из решений максвэлловских уравнений, найденное Герцем, соответствует вихревым электромагнитным кольцам, имеющим скорость в собственных плоскостях и распространяющихся, рассеиваясь от центра излучения, как это показано на чертежах в статье „Развитие воззрений на природу света". Дж. Дж. Томсона нашел другую возможную форму электромагнитных колец — таких, именно, которые движутся перпендикулярно к собственной плоскости, сохраняя свои размеры. Кастерин и Уайттекер (*E. T.*) показали, что такого рода кольца также удовлетворяют уравнениям Максвэлла-Герца. Томсон и Уайттекеры (*E. T.* и *J. M.*) разобрали в общих чертах вопрос об интерференции, поляризации, отражении и преломлении квантовых колец. Мы на этом останавливаться не будем, так как вопрос требует еще детальной разработки. Отметим лишь две особенности квантовых колец.

Первая касается найденного нами распределения энергии в поперечном сечении колец.

Мы видели выше, что средняя плотность энергии в данной точке P_{cp} изменяется согласно определенному закону вследствие прохождения вихря через данную точку с определенной скоростью v_t; это изменение P_{cp} образует „волну"; но сама величина P_{cp} есть средняя от синусоидального распределения плотности в поперечном сечении вихря. Если поэтому вообразить себе ряд вихревых колец,

следующих друг за другом (рис. 51), то в каждой точке

$$P = P_m \sin\alpha\ (ct - r);\ P_{cp} = \frac{2}{\pi} P_m.$$

В среде, через которую проходят кольца, будет иметь место синусоидальная пульсация плотности энергии. На рис. изображена такого рода пульсация, при чем направление вихрей одно и то же. Физически мыслимо, однако, и чередующееся направление вращений, но в этом случае имеет место особое соотношение между вихрями. [1])

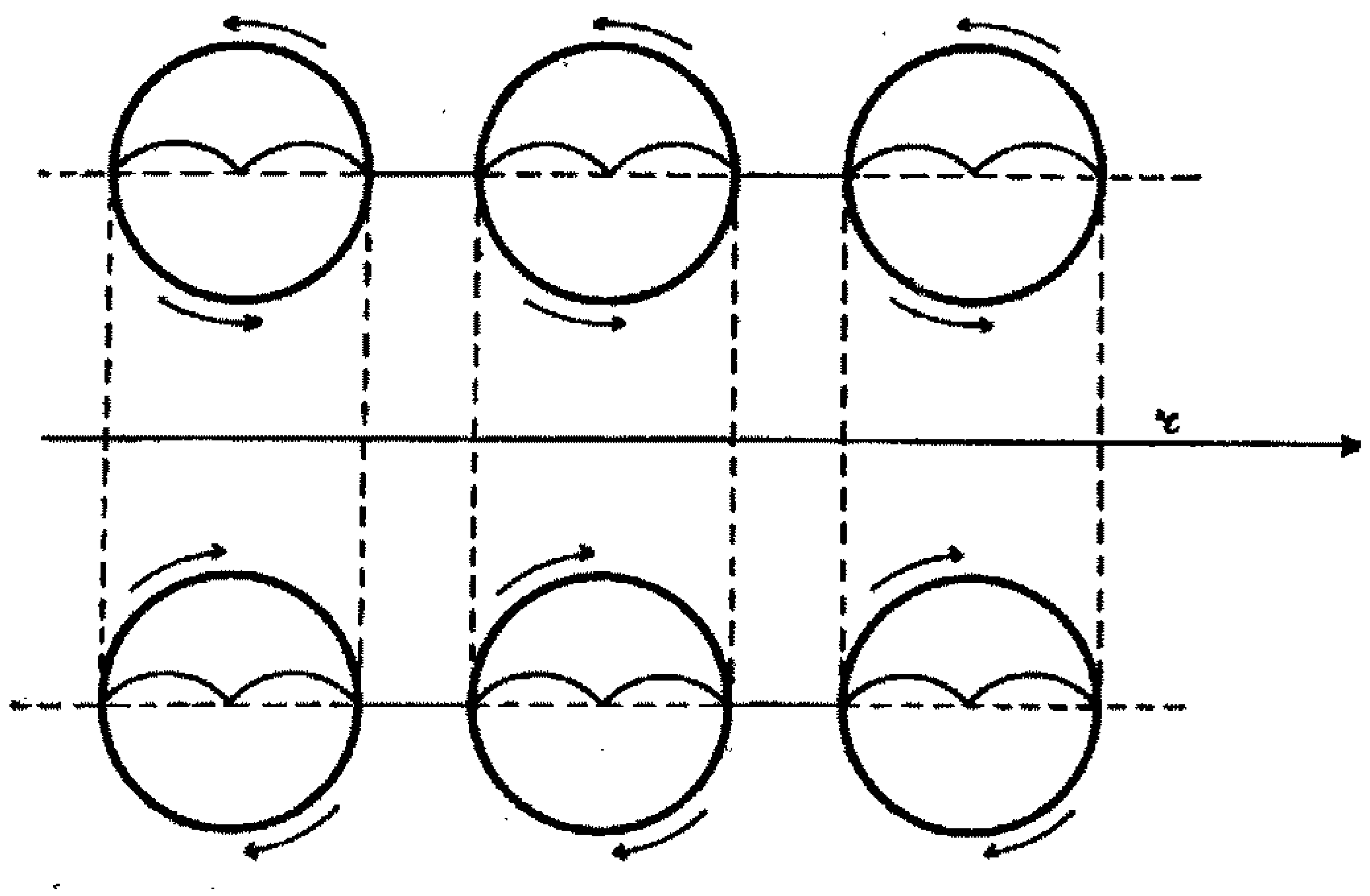

Рис. 51.

Так как вихревый и скоростный векторы, иначе векторы электрического и магнитного поля, пропорциональны корню квадратному из плотности энергии, то передвижение электромагнитного вихревого шнура образует в каждой точке поля периодическую пульсацию:

$$E(H) = \pm E_m(H_m) \sqrt{\sin\alpha(ct - r)}.\ ^{2})$$

Таким образом, если электрон, например, вращается в атоме вокруг ядра, то имеет место внутренняя электромагнитная волна, распространяющаяся по замкнутым путям вокруг протона; внешнее же

---

[1]) См. „Механику" М. Аппеля, § 774: „Круговые вихревые кольца с одной той же осью".

[2]) Здесь E и H — распределение плотностей вихрей и скоростей в „среднем" элементарном вихре E_{cp} (H_{cp}). Кастерин доказал, что E_{cp} (H_{cp}) для вихревого кольца также удовлетворяет уравнениям Максвэлла-Герца, что ясно из предыдущего вывода этих уравнений.

излучение равно (или почти равно) нулю. Мы видим, стало быть, что модель атома Бора нисколько не противоречит уравнениям Максвэлла-Герца.

Точно так же, если электрон движется внутри провода с постоянной скоростью (постоянный ток), то вихревая волна сосредоточена в проводе, во внешнем же поле имеет место безвихревое движение (обычное магнитное поле). Но если скорость электрона переменна, то электромагнитные вихревые шнуры отделяются от цепи и уносятся в окружающий эфир. [1]) В этом случае электромагнитная волна распространяется наружу. Разумеется, в случае вибратора Герца электромагнитная волна более сложной структуры (двояко периодическая) нежели в случае кольца Томсона или внутренней волны в атоме. Мы на этом останавливаться не будем, так как вопрос этот не имеет принципиального значения для нашей темы. Необходимо вообще помнить основное положение диалектики о конкретности истины: действительность бесконечно богаче, нежели самые сложные теоретические схемы, которые являются лишь скелетами реальных процессов.

Вторая особенность, о которой мы упомянули, касается отражения света по перпендикулярному направлению. Если, как это делают некоторые, утверждать, что кванты, это—просто материальные частицы, то невозможно объяснить отражение по ответному направлению. В самом деле, отраженные частицы должны сталкиваться с падающими. На этом именно основании философ Шопенгауэр высмеивал теорию корпускулярного отражения, утверждая, что эта теория ведет к невозможности увидать собственную физиономию в зеркале. Но, если кванты это — вихревые кольца, — явление отвесного отражения объясняется очень просто. Для этого необходимо лишь вспомнить об „игре“ вихревых колец, о которой упомянуто в статье Н. Е. Жуковского. Квантовые вихревые кольца могут проходить друг сквозь друга; при встречном, например, движении одно из колец расширяется и пропускает другое, которое сжимается.

Этим свойством вихревых колец легко объясняется явление отвесного отражения. Мы считаем такого рода объяснение важным аргументом в пользу вихревой структуры электромагнитных силовых трубок и вообще вихревой природы электромагнетизма и света.

---

[1]) Чтобы явление имело место во всей отчетливости, необходимы особые условия: значительная емкость, самоиндукция, открытая колебательная цепь, ток большой частоты и пр.

6.

Физический смысл константы Планка и вихревая теория водородного атома.

Дж. Дж. Томсон показал, что при известных простых предположениях выражение энергии квантового кольца совпадает с выражением закона Планка ($E = h\nu$). Уайттекер и Кастерин доказали, что значение электрического и магнитного полей (E_{cp} и H_{cp}) кольца удовлетворяют уравнениям Максвэлла. Но эти исследования не дали обоснования непосредственного физического смысла планковской константы h, а такое обоснование имеет решающее значение для всякой физической теории квант. Мы попытаемся дать такого рода обоснование при помощи вышеразвитой вихревей теории электромагнетизма и в связи с теорией водородного атома Бора-Зоммерфельда.

Исходным пунктом нашего обоснования будут следующие теоремы:

1. Теоремы Гельмгольца о вихрях.

Они гласят: а) вихревые нити всегда состоят из одних и тех же частиц, б) сила (циркуляция) вихревой нити во все времена и во всех сечениях постоянна, с) вихревые нити должны или замыкаться в себе или оканчиваться на границах инородных сред.

Эти теоремы выражают закон сохранения или „вечности“ вихревых нитей в „идеальных жидкостях“. С диалектической точки зрения это сохранение или „вечность“ необходимо толковать в относительном смысле подобно сохранению или вечности атомов, протонов и электронов, т. е. как выражение известной устойчивости. Атомы, электроны и протоны бесспорно возникают при известных условиях, но эти материальные системы характеризуются большой относительной устойчивостью. Той же устойчивостью обладают, согласно законам Гельмгольца, вихревые нити, которые являются как бы атомами вращательного движения.

С диалектической точки зрения вечны только материя и движение, а не отдельные конкретные формы материи и движения.

Относительно постоянную силу (циркуляцию) электромагнитных вихревых нитей мы обозначим через h. Циркуляция (сила) вихрей действительно имеет те же физические размеры $\left({}^{c^2}/_{s}\right)$, что и постоянная Планка. Мы покажем, что это совпадение не случайно и что имеются серьезные основания предполагать, тожество физического смысла планковской константы с циркуляцией скорости элементарных вихревых трубок. [1])

2. Теорема Стокса, которая гласит: в односвязном пространстве циркуляция скорости по какому-либо контуру равна потоку вихрей сквозь этот контур.

Математически:

$$J = \int (v \cdot dl) = \int (\mathrm{curl}\, v \cdot dS) = \int (2\omega \cdot dS) = \int (4\pi w \cdot dS);$$

скалярные произведения $(\mathrm{curl}\, v \cdot dS) = (2\omega \cdot dS) = (4\pi w \cdot dS)$,

это — элементарные циркуляции по контурам площадок dS вокруг отдельных вихревых нитей, пронизывающих контур. Принимая относительно-атомистическую природы электромагнитных вихревых нитей, т. е. их относительную тождественность и прерывность, мы должны интегралы заменить суммами, так что

$$J \text{ (циркуляция)} = \sum h = nh,$$

где h — циркуляция элементарной вихревой нити, n — целое число этих нитей, пронизывающих поперечное сечение вихревого шнура.

3. Теорема Бора о соотношении между кинетической и потенциальной энергиями.

Теорема гласит: „В каждой системе, состоящей из неподвижных ядер и из электронов, обращающихся по круговым орбитам со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света (C), кинетическая энергия равна, если отвлечься от знака, половине потенциальной энергии“. [2])

Зоммерфельд („Строение атома“) указывает, „что этот закон обладает гораздо большей общностью, — он остается справедливым не только для круговых орбит, но и для движений любого вида.

[1]) Ср. со следующими замечаниями Дж. Дж. Томсона („Электричество и материя“, глава II, раздел „Электрическая и связанная масса“): „если m будет сила вихревого столба, a — скорость ненарушаемого вихрем течения жидкости, то можно легко показать, что масса увлекаемой столбом жидкости пропорциональна $\frac{m^2}{a^2}$. Таким образом, если будем считать m пропорциональным числу фарадеевских трубок в единице объема, — эта система будет нам иллюстрировать связь, существующую между силой электрического поля и связанной массой“.

[2]) Здесь, как и в дальнейшем под потенциальной энергией разумеется значение уровня энергии (потенциала); так как при вычислениях мы имеем дело с разностями энергий, то константу энергии можно считать равной нулю.

В последнем случае (при переменной кинетической и потенциальной энергиях) нужно только заменить в формулировке закона слова „кинетическая и потенциальная энергия“ словами „средняя (по времени) кинетическая и потенциальная энергия“. Закон этот остается за небольшим изменением справедливым и тогда, когда вместо силы, действующей по закону Кулона, будет действовать любая центральная сила“.

В случае круговых орбит при данном радиусе r орбиты, потенциальная энергия равна

$$P = -\frac{e_1 \cdot e_2}{r}; \; e_1 \text{ и } e_2 \text{ — заряды}.$$

Следовательно, по теореме Бора, кинетическая энергия равна

$$K = \frac{1}{2} \frac{e_1 \cdot e_2}{r},$$

а полная

$$H = -\frac{e_1 e_2}{r} + \frac{1}{2}\frac{e_1 e_2}{r} = -\frac{1}{2}\frac{e_1 e_2}{r}.$$

Для эллиптических орбит средняя (по времени) потенциальная энергия будет

$$\overline{P} = -e_1 e_2 \overline{\frac{1}{r}} = -\frac{e_1 e_2}{a},$$

где $\overline{\frac{1}{r}}$ — среднее значение обратности радиуса-векатора, которое, как известно, равно обратности большой полуоси эллипса a $(= {}^1/a)$.

4. Закон Кулона-Пуассона. Мы даем этот закон в формулировке Максвэлла: [1]) „Кулон экспериментально установил, что напряжение электрической силы около данной точки проводника нормально поверхности и пропорционально поверхностной плотности в данной точке“. Количественное соотношение

$$R = 4\pi\sigma$$

установлено Пуассоном.

Сила действующая на элемент dS наэлектризованной поверхности, равна согласно § 79 (ибо напряженность равна нулю на внутренней стороне поверхности)

$$\frac{1}{2} R\sigma dS = 2\pi\sigma^2 dS = \frac{1}{8\pi} R^2 dS.$$

[1]) См. „Электричество и магнетизм“, § 79: „Сила, действующая на электризованную поверхность“, и § 80: „Наэлектризованная поверхность проводника“.

Сила, эта направлена наружу от проводника, безразлично—положителен ли заряд или отрицателен. Ее численное значение в динах на *кв. см* равно

$$\frac{1}{2}R\sigma = 2\pi\sigma^2 = \frac{1}{8\pi}R^2.$$

Она действует подобно давлению, проложенному к поверхности проводника и направленному наружу.

Рассмотрим теперь систему водородного атома, т. е. систему из протона и электрона. Электрон находится на расстоянии r от протона. Согласно закону Кулона, сила, действующая на электрон, будет

$$F = -\frac{e^2}{r^2}.$$

Протон и электрон соединены между собою целой системой силовых линий, общее число которых связано с понятием неизменного заряда. Расположение силовых линий нам неизвестно. Мы поэтому выдвинем следующую общую гипотезу: общее число силовых линий распадается на две части: одна часть силовых линий уравновешивается внутри самой себя и может быть поэтому исключена из непосредственного рассмотрения; другая часть, именно центрально соединяющая протон с электроном, определяет стационарное равновесие системы. Эту последнюю, именно, часть мы и имеем в виду в нашем вычислении. Указанный характер силовых линий можно, примерно, представить себе из следующей схемы: на концах диаметра окружности находятся протон и электрон; первая часть силовых линий сосредоточена вдоль окружности, вторая — центральная — по диаметру.

В несколько другом разрезе выдвигаемая нами гипотеза подчеркивается на стр. 261 — в форме утверждения относительности числа n, определяющего стационарное равновесие системы силовых линий.

Итак, предположим, что силовые линии (вихревые нити) электрического поля, центрально соединяющие протон и электрон, равномерно распределены по некоторой нормальной площадке S поверхности электрона; средняя сила поля (а эта средняя величина и фигурирует в электромагнитной теории Максвэлла, как это показано было выше) пусть будет E_{cp}.

Тогда, согласно закону Кулона-Пуассона, сила, действующая на элемент поверхности dS, будет

$$df = \frac{1}{8\pi}E^2_{cp}dS,$$

а на всю поверхность S:

$$F = \int df = \frac{1}{8\pi}E^2_{cp}\cdot\int dS = \frac{E^2_{cp}S}{8\pi}.$$

Но $E^2_{cp} = 64\pi w^2$ (полагая плотность $\rho = 1$), так что

$$F = 8\pi w^2 S = \frac{1}{2\pi S}(4\pi w S)^2 = kJ^2,$$

где $k = \frac{1}{2\pi S}$, а $4\pi w S = J =$ циркуляции по контуру поверхности S.

Принимая во внимание направление действия силы и приравняв полученное выражение силы F обычному кулоновскому, мы получим:

$$F = -kJ^2 = -\frac{e^2}{r^2},$$

откуда

$$P \text{ (потенциальная энергия)} = -krJ^2 = -\frac{e^2}{r}.$$

Согласно закону Бора, полная энергия H будет:

$$H = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{r} = -\frac{1}{2}krJ^2.$$

Полученное нами выражение энергии явно зависит от квадрата циркуляции J, которая имеет размер так называемой переменной действия (Wirkungsvariable) теории Гамильтон-Якоби. Рассматривая J как переменную действия, мы, согласно теории Гамильтона-Якоби, [1]) получим для частоты или числа оборотов электрона вокруг ядра значение

$$\nu^0 = \frac{\partial H}{\partial J} = -krJ,$$

так что

$$H = \frac{1}{2}\nu^0 J = \frac{n}{2}h\nu^0, \text{ так как } J = nh.$$

Это и есть наиболее общее выражение закона Планка. Число n может быть как четным, так и нечетным.

Если предположить симметрию в расположении вихревых нитей, — по поверхности электрона с вихревой нитью в центре симметрии n будет нечетным: $n = 2m + 1$. Тогда

$$H = \left(m + \frac{1}{2}\right)h\nu^0;$$

---

[1]) См. M. Born. Vorlesungen über Atommechanik.

Сила, эта направлена наружу от проводника, безразлично—положителен ли заряд или отрицателен. Ее численное значение в динах на *кв. см* равно

$$\frac{1}{2} R\sigma = 2\pi\sigma^2 = \frac{1}{8\pi} R^2.$$

Она действует подобно давлению, проложенному к поверхности проводника и направленному наружу.

Рассмотрим теперь систему водородного атома, т. е. систему из протона и электрона. Электрон находится на расстоянии r от протона. Согласно закону Кулона, сила, действующая на электрон, будет

$$F = -\frac{e^2}{r^2}.$$

Протон и электрон соединены между собою целой системой силовых линий, общее число которых связано с понятием неизменного заряда. Расположение силовых линий нам неизвестно. Мы поэтому выдвинем следующую общую гипотезу: общее число силовых линий распадается на две части: одна часть силовых линий уравновешивается внутри самой себя и может быть поэтому исключена из непосредственного рассмотрения; другая часть, именно центрально соединяющая протон с электроном, определяет стационарное равновесие системы. Эту последнюю, именно, часть мы и имеем в виду в нашем вычислении. Указанный характер силовых линий можно, примерно, представить себе из следующей схемы: на концах диаметра окружности находятся протон и электрон; первая часть силовых линий сосредоточена вдоль окружности, вторая — центральная — по диаметру.

В несколько другом разрезе выдвигаемая нами гипотеза подчеркивается на стр. 261 — в форме утверждения относительности числа n, определяющего стационарное равновесие системы силовых линий.

Итак, предположим, что силовые линии (вихревые нити) электрического поля, центрально соединяющие протон и электрон, равномерно распределены по некоторой нормальной площадке S поверхности электрона; средняя сила поля (а эта средняя величина и фигурирует в электромагнитной теории Максвэлла, как это показано было выше) пусть будет E_{cp}.

Тогда, согласно закону Кулона-Пуассона, сила, действующая на элемент поверхности dS, будет

$$df = \frac{1}{8\pi} E^2_{cp} dS,$$

а на всю поверхность S:

$$F = \int df = \frac{1}{8\pi} E^2_{cp} \cdot \int dS = \frac{E^2_{cp} S}{8\pi}.$$

Но $E^2_{cp} = 64\pi w^2$ (полагая плотность $\rho = 1$), так что

$$F = 8\pi w^2 S = \frac{1}{2\pi S} (4\pi w S)^2 = kJ^2,$$

где $k = \frac{1}{2\pi S}$, а $4\pi w S = J =$ циркуляции по контуру поверхности S.

Принимая во внимание направление действия силы и приравняв полученное выражение силы F обычному кулоновскому, мы получим:

$$F = -kJ^2 = -\frac{e^2}{r^2},$$

откуда

$$P \text{ (потенциальная энергия)} = -krJ^2 = -\frac{e^2}{r}.$$

Согласно закону Бора, полная энергия H будет:

$$H = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{r} = -\frac{1}{2} krJ^2.$$

Полученное нами выражение энергии явно зависит от квадрата циркуляции J, которая имеет размер так называемой переменной действия (Wirkungsvariable) теории Гамильтон-Якоби. Рассматривая J как переменную действия, мы, согласно теории Гамильтона-Якоби,[1] получим для частоты или числа оборотов электрона вокруг ядра значение

$$\nu^0 = \frac{\partial H}{\partial J} = -krJ,$$

так что

$$H = \frac{1}{2} \nu^0 J = \frac{n}{2} h\nu^0, \text{ так как } J = nh.$$

Это и есть наиболее общее выражение закона Планка. Число n может быть как четным, так и нечетным.

Если предположить симметрию в расположении вихревых нитей, — по поверхности электрона с вихревой нитью в центре симметрии n будет нечетным: $n = 2m + 1$. Тогда

$$H = \left(m + \frac{1}{2}\right) h\nu^0;$$

[1]) См. M. Born. Vorlesungen über Atommechanik.

$\frac{1}{2}h\nu^0$ — не что иное как „Nullpunktsenergie" Планка и по своему физическому смыслу является энергией, соответствующей вихревой нити, образующей ось симметрии.

Чтобы перейти теперь от закона Планка к закону Бора, достаточно в выражении частоты заменить дифференциальное отношение разностным:

$$\nu_q{}^0 = \frac{\Delta H}{\Delta J} = \frac{H_2 - H_1}{n_2 h - n_1 h} = \frac{H_2 - H_1}{(n_2 - n_1)h};$$

$$\Delta J = J_2 - J_1 = n_2 h - n_1 h;$$

отсюда

$$\nu_q = (n_2 - n_1)\,\nu_q{}^0 = \tau\nu_q{}^0 = \frac{H_2 - H_1}{h}.$$

Это и есть закон Бора.

$$\text{Если}\quad \tau = n_2 - n_1 = 1,\ \text{то}\quad \nu_q{}^0 = \frac{H_2 - H_1}{h}$$

в пределе соответствует (принцип соответствия) классической основной частоте $\nu_k{}^0$; если же $\tau = n_2 - n_1 \neq 1$, то боровская частота $\nu_q = \tau\nu_q{}^0$ в пределе соответствует классической τ — ой гармонической.

Так как

$$H_2 - H_1 = \frac{1}{2}\,n_2\nu_2{}^0 h - \frac{1}{2}\,n_1\nu_1{}^0 h = \frac{n_2\nu_2{}^0 - n_1\nu_1{}^0}{2}\,h = \nu_q h,$$

то закон Бора устанавливает следующее соотношение между квантовой частотой ν_q, квантовыми числами n_2 и n_1 и числами оборотов электрона $\nu_2{}^0$ и $\nu_1{}^0$:

$$\nu_q = \frac{n_2\nu_2{}^0 - n_1\nu_1{}^0}{2}.$$

С точки зрения вихревой теории эта формула означает, что боровская частота не имеет непосредственного физического смысла, а является лишь энергетическим коэффициентом. В самом деле, квантовые числа n_2 и n_1 означают числа вихревых нитей; полная энергия, соответствующая этим нитям, будет $\frac{1}{2}n_2 h\nu_2{}^0$ и ½ n_1 $h\nu_1{}^0$; при перескоке электрона с одной орбиты на другую получается вихревое электромагнитное кольцо, энергия которого равна

$$H_2 - H_1 = ½\,(n_2\,\nu_2{}^0 - u_1\,\nu_1{}^0)\,h = \nu_q\,h;$$

ν_q, стало быть, это — энергетический коэффициент пропорциональности, характеризующий кольцо. Этот коэффициент связан с числами оборотов на стационарных орбитах указанным соотношением.

Вычислим теперь значения радиуса r и угловой скорости ω ($= 2\pi\nu^0$) для стационарных круговых орбит в зависимости от квантового числа n.

Для этой цели примем во внимание условие равновесия при движении по круговой орбите, именно равенство центробежной силы кулоновской внешней силе:

$$\frac{mv^2}{r} = mr\omega^2 = \frac{e^2}{r^2}\quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

Это уравнение совместно с уравнениями:

$$(H) = \frac{1}{2}kr\,J^2 = \frac{1}{2}\frac{e^2}{r}\quad \dots\dots\dots\dots (2)$$

$$\nu^{0\prime\prime} = \frac{\omega}{2\pi} = krJ\quad \dots\dots\dots\dots (3)$$

дает решение задачи.

Из системы трех уравнений (1), (2), (3) с тремя неизвестными r, ω и k получаем:

$$r = \frac{J^2}{4\pi^2 me^2} = \frac{n^2h^2}{4\pi^2 me^2}$$

$$\omega = \frac{8\pi^3 me^4}{J^3} = \frac{8\pi^3 me^4}{n^3h^3}$$

$$k = \frac{1}{2\pi S} = \frac{16\pi^4 m^2 e^6}{J^6} = \frac{16\pi^4 m^2 e^6}{n^6h^6}.$$

Энергия H равна:

$$H = -\frac{1}{2}kr\,J^2 = -\frac{2\pi^2 me^4}{h^2}\cdot\frac{h}{n^2} = -\frac{Rh}{n^2};$$

а частота — ν_q:

$$\nu_q = \frac{H_2 - H_1}{h} = R\left(\frac{1}{n_1{}^2} - \frac{1}{n_2{}^2}\right),$$

где $R = \frac{2\pi^2 me^4}{h^3}$ — постоянная Ридберга — Ритца.

Если заряд ядра кратный от e, $e_1 = Ze$ тогда вместо e^4 мы имеем $e_1{}^2e^2$; заменяя $e_1{}^2$ через Z^2e^2 получим:

$$\nu_q = RZ^2\left(\frac{1}{n_1{}^2} - \frac{1}{n_2{}^2}\right)$$

Полученное выражение для r и k показывает, что число центральных вихревых линий, а также занимаемая ими площадь $\left(k = \frac{1}{2\pi S}\right)$ возрастает с возрастанием квантового числа n. Вычислим радиус r_m

орбиты и число центральных силовых линий при предположении, что эти линии пронизывают половину шаровой поверхности электрона: Имеем:

$$k = \frac{1}{2\pi S} = \frac{16\pi^4 m^2 e^6}{n^6 h^6},$$

откуда

$$S = \frac{n^6 h^6}{32\pi^5 m^2 e^6}.$$

При $n = 1$ мы получаем поперечное сечение и, следовательно, радиус вихревой нити. Приравниваем выражение для S половине поверхности электрона. Радиус электрона равен, как известно,

$$r = \frac{e^2}{mc^2}$$

так что половина поверхности электрона равна

$$2\pi \frac{e^4}{m^2 C^4};$$

имеем:

$$\frac{n^6 h^6}{32\pi^5 m^2 e^6} = \frac{2\pi e^4}{m^2 c^4}.$$

откуда

$$n = 2\pi \sqrt[3]{\frac{e^2}{c^2}} \frac{e}{h}.$$

Число n пропорционально таким образом $\frac{e}{h}$, n приблизительно равно 29 200.

Подставив в выражение для r величину n^2 получим:

$$r_m = \frac{e}{cm}\sqrt[3]{\frac{e}{c}} = \frac{e}{m}\sqrt[3]{e},$$

если e выражать не в электростатических единицах, а в электромагнитных, r_m приблизительно равно 2,7 *см.*

Таким образом, для ближайшей к ядру стационарной орбиты число n вихревых нитей, центрально соединяющих ядро с электроном, равно 1 ($n = 1$). С увеличением радиуса орбиты n возрастет, при чем теоретически (т. е. при предположении действительного существования соответствующей орбиты) n достигает максимума для определенного r_m.

При дальнейшем возрастании r число n должно уменьшаться. Это видно из основного соотношения

$$-kJ^2 = -\frac{1}{2\pi S} J^2 = \frac{-n^2 h^2}{2\pi S} = \frac{-e^2}{r}.$$

Так как предел поверхности S достигнут (мы полагаем эту поверхность равной половине поверхности электрона), то в приведенной формуле необходимо S рассматривать, как константу. При увеличении r правая часть равенства уменьшается по абсолютной величине, следовательно, должна уменьшаться по абсолютной величине и левая часть, т. е. число n.

Вычислим, при каком r числе n снова достигает минимума $n = 1$. Имеем, полагая $n = 1$, $S = \frac{2\pi e^4}{m^2 c^4}$

$r = \sqrt{\frac{2\pi S e^3}{h^2}} = \frac{2\pi e^3}{mhc^2} =$ приб. 1,3 *км,* — величина, разумеется, чисто теоретическая.

Полученный результат соответствует экспериментальной картине обычных спектров электрических силовых линий; спектры эти показывают, что по мере увеличения расстояния между заряженными телами число силовых линий, центрально связывающих тела, уменьшается. Мы видим, таким образом, что законы микрокосма отличны от законов макрокосма.

Подчеркнем в заключение еще раз, что выведенные нами численные значения n имеют относительное значение. Это видно из наших исходных формул:

$$-kJ^2 = -\frac{e^2}{r^2}$$

$$-krJ^2 = -\frac{e^2}{r}$$

В правой части первой формулы фигурирует понятие силы — понятие относительное, означающее итог многообразных движений в среде. Точно так же величина $-krJ^2 = -\frac{e^2}{r}$, которую мы принимаем за значение потенциальной энергии, на самом деле является значением уровня энергии (потенциала). Если потенциал ядра равен константе — C, то потенциальная энергия на уровне r будет $C - \frac{e^2}{r}$; но так как при вычислениях мы имеем дело с разностями энергий, то мы можем константу C приравнять нулю. Такое положение вещей мы имеем во всех задачах о равновесии. Здесь в первую очередь важны отношения факторов равновесия, а не их абсолютные величины. Так, с абстрактной точки зрения, равновесие рычага определяется отношением величин грузов; в физическом же рычаге имеют конечно, значение абсолютные величины грузов. Квантовые числа n являются, таким образом, определяющими равновесие системы относительными величинами. Разумеется, абсолютное значение числа вихревых нитей имеет значение в действительном физическом процессе, теорию которого еще предстоит разработать. Но даже в нашей абстрактной схеме (модели) уже фигурируют абсолютные величины, как, например, заряд e и значение r радиуса электрона — значение, полученное на основании формулы абсолютного значения энергии массы электрона ($E = mc^2$).

Числа n являются также относительными и в более глубоком смысле. Как мы подчеркнули выше значение планковской константы h (и связанное с ним понятие „элементарной" вихревой нити), будучи абсолютным, является вместе с тем и относительным. „Элементарная" вихревая нить, подобно атому и электрону, бесспорно не является „истиной в конечной инстанции", последним метафизическим элементом мира.

Перейдем теперь к определению эллиптических орбит Зоммерфельда. Имеем, как и раньше, для расстояния между протоном и электроном, равного a — большой полуоси эллипса:

$$-kJ^2 = -\frac{e^2}{a^2}$$

или

$$-kaJ^2 = -\frac{e^2}{a}.$$

Но $-\frac{e^2}{a}$ есть среднее значение потенциальной энергии; согласно теореме Бора-Зоммерфельда, среднее значение кинетической энергии равно половине этой величины, так что совокупная средняя энергия будет

$$\overline{H} = -\frac{1}{2}kaJ^2 = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{a}.$$

Мы видим таким образом, что, если оперировать со средними значениями энергий, радиус r орбиты Бора заменяется большой полуосью эллипса.

Отсюда.

$$a = \frac{J_1^2}{4\pi^2me^2} = \frac{n^2h^2}{4\pi^2me^2}$$

$$\omega = \frac{8\pi^3me^4}{J_1^3} = \frac{8\pi^3me^4}{n^3h^3}$$

$$\overline{H} = \frac{-2\pi^2me^4}{J_1^2} = \frac{-2n^2me^4}{h^2}\cdot\frac{h}{n^2} = -\frac{Rh}{n^2}.$$

Квантовое число n называют главным квантовым числом; мы его можем назвать средним квантовым числом, так как оно соответствует средним значениям энергии.

Для полного определения орбиты необходимо дополнительное квантовое число, которое очень просто получается из следующего соображения.

Если в уравнении эллипса

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$$

эксцентрицитет ε стремится к нулю, то параметр p стремится к r.

С физической точки зрения это значит, что параметр p должен удовлетворять тем же квантовым условиям, что и радиус орбиты Бора. Так как $p \neq a$, то, вводя второе квантовое число k, имеем:

$$p = \frac{J_2^2}{4\pi^2me^2} = \frac{k^2h^2}{4\pi^2me^2}.$$

Так как

$$p = a\ (1 - \varepsilon^2)$$

и

$$b\ (\text{малая полуось}) = a\sqrt{1 - \varepsilon^2},$$

то

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{J_2^2}{J_1^2} = \frac{n^2 - k^2}{n^2},$$

и

$$b = \frac{J_1J_2}{4\pi^2me^2} = \frac{nkh^2}{4\pi^2me^2}.$$

Число k называют дополнительным или азимутальным квантовым числом; мы его можем назвать параметрическим квантовым числом, так как оно соответствует параметру эллиптического движения. Нетрудно показать, что среднее квантовое число соответствует полной скорости движения по орбите, а параметрическое — нормальной, слагающей, так что

$$n = k + n',$$

где n' называется обычно радиальным квантовым числом, соответствующим радиальной слагающей движения.
