ПРИЛОЖЕНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ

УРАВНЕНИЯ МАКСВЭЛЛА-ГЕРЦА

ФАРАДЕЕВЫ СИЛОВЫЕ ТРУБКИ И УРАВНЕНИЯ МАКСВЭЛЛА.

ДЖ. ДЖ. ТОМСОН. [1])

Глава I.

Электрическое смещение и фарадеевы силовые трубки.

1. Влияние, которое оказывали всегда обозначения и идеи теории электрической жидкости, со времени их введения, на науку об электричестве и магнетизме, представляет поразительную иллюстрацию благодетельного влияния, оказанного этой науке конкретным представлением символов, которые в математической теории электричества определяют состояние электрического поля. Действительно, услуги, которые старая теория жидкости оказала электричеству, доставив язык, которым научные факты могут быть выражены ясно и кратко, едва ли могут быть переоценены. Описательная теория этого рода не только служит средством для ясного изложения хорошо известных результатов, но часто оказывает важные услуги, указывая на возможность существования новых явлений.

Описательная гипотеза смещения в диэлектрике, которою Максвэлл иллюстрировал свою математическую теорию, признается, повидимому, многими читателями не столь простой, не столь легкой для понимания, как старая теория жидкости; действительно, это, кажется, было одной из главных причин, почему его взгляды не встретили сначала общего признания, которое они получили впоследствии. Так как многие студенты находят концепцию „смещения" затруднительной, то я решаюсь дать другой способ представления процессов, встречающихся в электрическом поле, который я

[1]) Перевод начала первой главы из книги I. I. Thomson'a. Recent Researches on Electricity and Magnetism. Oxford. 1893. Новейшие исследования в области электричества и магнетизма.

часто находил полезным и который с математической точки зрения равносилен теории Максвэлла.

2. Этот способ основывается на концепции, введенной Фарадеем, о трубках электрической силы или, скорее, электростатической индукции. Как известно, Фарадей пользовался этими трубками, как способом выражения явлений электрического поля. Так, их стремлением к сокращению и боковым отталкиваниям, которые подобные трубки оказывают друг на друга, он объяснял механические силы между электрическими телами, между тем как влияние среды на эти трубки указывалось, по его мнению, существованием специфической индуктивной проницаемости диэлектриков. Хотя выражения, которыми Фарадей пользовался, говоря о силовых линиях, оставляют впечатление, что он обыкновенно рассматривал их как цепи поляризованных частиц в диэлектрике, но, повидимому, имеются указания, что он при случае рассматривал их с другой точки зрения, т. е. как нечто, существующее независимо от молекул диэлектрика, хотя бы последние были поляризованы трубками при прохождении через диэлектрик. Так, напр., в § 1616 „Экспериментальных исследований" он, повидимому, рассматривает эти трубки, как простирающиеся через пустоту. Мы примем этот последний взгляд на трубки электростатической индукции, мы будем считать, что они пребывают в эфире, при чем поляризация частиц, сопровождающая их прохождение через диэлектрик, — вторичное явление. Ради краткости мы будем называть такие трубки фарадеевыми трубками.

В дополнение к трубкам, простирающимся от положительного к отрицательному электричеству, предположим, что в эфире имеется множество трубок такого рода, которые лишь образуют отдельные замкнутые кривые вместо того, чтобы иметь свободные концы; мы будем называть такие трубки „замкнутыми" трубками. Различие между обоими видами трубок подобно различию между вихревой нитью с концами на свободной поверхности жидкости и нитью, образующей замкнутое вихревое кольцо внутри ее. Эти замкнутые трубки, по предположению, присутствующие в эфире независимо от того, существуют ли электрические силы или нет, сообщают эфиру волокнистую структуру. [1])

В своей теории электрических и магнитных явлений Фарадей пользовался наравне с трубками электростатической индукции и

[1]) Замкнутые трубки в настоящее время использованы I. I. Thomson'ом для объяснения теории квант. *(Прим. ред.)*

трубками магнитной; однако, если держаться концепции трубок электростатической индукции, то мы найдем, что явления магнитного поля можно объяснить, как зависящие от движения электрических трубок.

Фарадеевы трубки.

3. Как это объяснено в § 82 „Электричества и магнетизма", Максвэлла, эти трубки начинаются от мест, заряженных положительным электричеством, и кончаются в местах, заряженных отрицательным, при чем количество положительного электричества в начале трубки равно количеству отрицательного на конце. Если допустить, что все трубки одинаковой силы, то количество свободного положительного электричества какой-либо поверхности пропорционально числу трубок, оставляющих поверхность. В математической теории электричества нет указаний на то, что есть предел, до которого поле электрической силы может быть подразделяемо на трубки постоянно уменьшающейся силы, но дело обстоит иначе, если считать эти силовые трубки не только формой математического выражения, но и реальными физическими количествами, имеющими определенные размеры и формы.[1]) Принимая этот взгляд, мы естественно считаем эти трубки совершенно одинаковой силы, и мы увидим основания для допущения, что эта сила такова, что, когда трубки оканчиваются на проводнике, то на конце трубки имеется заряд отрицательного электричества, равный тому, который мы в теории электролиза ассоциируем с атомом одновалентного элемента в роде хлора.

Эта сила единичных трубок допускается потому, что явления электролиза показывают, что действительно имеется естественная единица, и что не существует дробных частей этой единицы, по крайней мере в электричестве, прошедшем через электролит. Мы будем допускать в этой главе, что во всех электрических процессах, а не только в электролизе не существует дробных частей этой единицы.

Фарадеевы трубки либо образуют замкнутые цепи, либо начинаются и оканчиваются на атомах, а все незамкнутые трубки простираются в эфире вдоль прямых или кривых линий от одного атома к другому. Когда длина связывающей два атома трубки сравнима с расстоянием между атомами в молекуле, то атомы считаются в химическом соединении; когда же трубка, связывающая атомы, гораздо длиннее этого расстояния, атомы считаются „химически свободными".

Свойство фарадеевых трубок образовывать всегда замкнутые цепи, т. е. иметь окончания на атомах, может быть иллюстрировано подобным же свойством трубок, образуемых вихревым движением в жидкости, лишенной трения; эти трубки или образуют замкнутые цепи, или имеют свои окончания на границе жидкости, в которой имеет место вихревое движение.

Можно предположить, что фарадеевы трубки простираются через пространство, а не только ограничены местами, где имеет место конечной величины электродвижущая сила, так что отсутствие этого напряжения зависит не от отсутствия фарадеевых трубок, но от недостатка правильного расположения наличных трубок: так что электродвижущая сила в данном месте представляет меру не всего числа трубок в этом месте, но лишь избытка числа их в направлении электродвижущей силы над числом обращенных в противоположную сторону.

4. В этой главе мы постараемся показать, что различные явления электромагнитного поля могут быть объяснены как зависящие от движения фарадеевых трубок или от изменений в их положении или форме. Таким образом, с нашей точки зрения, этот взгляд на электрические явления может считаться образующим род молекулярной теории электричества, при чем фарадеевы трубки занимают место молекул в кинетической теории газов. Цель этого метода объяснить явления электрического поля, как зависящие от движения этих трубок, точно так, как цель кинетической теории газов объяснить свойства газа, как зависящие от движения молекул. Точно также эти трубки похожи на молекулы газа и в другом смысле, когда мы рассматриваем их как неспособные к разрушению или возникновению.

5. Прежде всего можно спросить, почему мы считаем нашими, так сказать, молекулами трубки электростатической индукции, а не трубки магнитной индукции? Ответ на этот вопрос тот, что очевидность, представляемая явлениями, которые сопровождают прохождение электричества через жидкости и газы, показывает, что молекулярное строение имеет чрезвычайно тесную связь с трубками электростатической индукции, гораздо более тесную, чем мы имеем основание допускать для трубок магнитной индукции. Выбор трубок

[1]) Эта мысль была высказана Томсоном еще в ту пору, когда не был установлен заряд электрона и, следовательно, атомистическая структура электричества во всей ее полноте. Однако, и теперь мы не можем установить, сколько трубок связано с элементарным зарядом. Во всяком случае это должно быть какое-то определенное число. *(Прим. ред.)*

электростатической индукции в качестве наших молекул является поэтому единственным, который дает нам наибольшую возможность объяснить те электрические явления, в которых играют роль материя так же, как эфир.

6. Рассмотрим с этой точки зрения происхождение энергии в электростатическом и электромагнитном полях. Мы предполагаем, что в связи с фарадеевыми трубками находится распределение скорости эфира как в самих трубках, так и в пространстве, окружающем их. Таким образом, мы можем иметь вращение в эфире внутри и вокруг трубок даже тогда, когда сами трубки не имеют поступательной скорости, при чем кинетическая энергия, зависящая от этого движения, составляет потенциальную энергию электростатического поля:[1] когда же сами трубки находятся в движении, то мы прибавляем к нему другое распределение скорости, энергия которого составляет энергию магнитного поля.

Энергия, о которой мы говорили, находится в эфире, но, когда трубка падает на атом, то она может видоизменить внутреннее движение атома и таким образом воздействовать на его энергию. Итак, в придачу к кинетической энергии эфира, происходящей от электрического поля, в атомах может также находиться некоторая энергия, возникающая от той же причины и зависящая от изменения внутреннего движения в атомах, вызванного присутствием фарадеевых трубок. Если изменение энергии атома, вызванное присутствием фарадеевой трубки, различно для атомов разных веществ, если оно не одинаково, напр., для атома водорода и для атома хлора, то энергия известного числа молекул хлористоводородной кислоты будет зависеть от того, начинаются ли фарадеевы трубки от водорода и оканчиваются на хлоре или наоборот. Если, таким образом, энергия в молекулах зависит от расположения трубок в молекуле, то будет иметь место стремление, чтобы все трубки начинались на водороде и оканчивались на хлоре или наоборот, сообразно тому, первое или второе из этих расположений делает различие между кинетической и потенциальной энергией максимальным. Другими словами, на языке обыкновенной теории электричества, все атомы водорода обнаружат стремление зарядиться электричеством одного знака, а все атомы хлора заряжаются равным количеством электричества противоположного знака.

[1] Замечательная попытка свести потенциальную энергию к кинетической. *(Прим. ред.)*

Результат различного действия на энергию атома, вызванного присутствием фарадеевой трубки, будет тот же, как если бы атомы разных веществ притягивали электричество с разной степенью напряжения; как показано Гельмгольцем, этого достаточно для объяснения электричества, вызываемого соприкосновением и трением. Таким образом, как мы увидим во II главе, это объясняет некоторые из действий, наблюдаемых при прохождении электричества от газа к металлу или наоборот.

7. Фарадеевы трубки при достижении проводника суживаются до молекулярных размеров. Мы рассмотрим процессы, которыми это достигается, в конце этой главы, а пока приступим к обсуждению действий, вызываемых этими трубками при движении через диэлектрик.

8. Чтобы иметь возможность определить состояние электрического поля в каком-либо месте диэлектрика, мы введем величину, которую мы назовем „поляризацией" диэлектрика и которая, будучи математически тожественной с максвэлловым „смещением", однако, физически имеет иное объяснение. „Поляризация" определяется следующим образом: пусть A и B будут две соседние точки в диэлектрике, проведем между этими точками плоскость и выделим на ней площадку, равную единице, перпендикулярно к линии, соединяющей их; тогда поляризация в направлении AB представляет излишек числа фарадеевых трубок, проходящих через единицу площади со стороны A в сторону B, над проходящими через ту же плоскость от B к A. В диэлектрике, отличном от воздуха, вообразим единицу площади, расположенной в узкой щели, вырезанной в диэлектрике, так что стороны щели перпендикулярны к AB. Очевидно, поляризация представляет величину вектора и может быть разложена на составляющие тем же способом, как сила или скорость; обозначим составляющие, параллельные осям x, y, z, буквами f, g, h; последние математически тожественны с величинами, которые Максвэлл обозначает теми же буквами, но их физическая интерпретация иная.

9. Исследуем теперь степень изменения составляющих поляризации в диэлектрике. Так как фарадеевы трубки в такой среде не могут ни возникать ни разрушаться, то изменение числа трубок, проходящих через некоторую неподвижную площадь, должно зависеть от движения или деформации трубок. Предположим во-первых, что трубки в одном месте движутся все с одинаковой скоростью. Пусть u, v, w будут составляющие скоростей этих трубок в известной точке, тогда изменение f, числа трубок, проходящих в точке

x, y, z через единицу площади перпендикулярно к оси x, будет зависеть от трех причин. Первая из них — движение трубок из других частей поля к рассматриваемой площади; вторая — распространение или концентрация трубок, зависящие от их относительного движения; а третья — изменение направления трубок, зависящее от той же причины. [1])

Пусть $\delta_1 f$ будет изменение f, зависящее от первой причины; тогда вследствие движения трубок, трубки, проходящие во время $t+\delta t$ через единицу площади, будут те, которые во время t были в точке

$$x-u\delta t,\quad y-v\delta t,\quad z-w\delta t,$$

отсюда $\delta_1 f$ будет получено из уравнения

$$\delta_1 f=-\left(u\frac{df}{dx}+v\frac{df}{dy}+w\frac{df}{dz}\right)\delta t.$$ [2])

Вследствие движения трубок одной относительно другой те, которые во время t проходили через единицу площади перпендикулярно к x, будут во время $t+\delta t$ распространяться по площади

$$1+\delta t\left\{\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right\};$$ [3])

---

[1]) Т. е. от того, что не все части одной и той же трубки движутся с одинаковой скоростью, поэтому по отношению к данной площадке трубка будет нагибаться, и слагающая f вектора f, g, h будет от этого изменяться. *(Прим. ред.)*

[2]) Вследствие движения трубок, в область, занятую нашей площадкой (x, y, z), за время δt на место прежних трубок придут те, которые помещались в области $x-u\delta t$, $y-v\delta t$ и $z-w\delta t$. Таким образом, чтобы найти изменение числа трубок $\delta_1 f$, надо из $f(x-u\delta t,\ y-v\delta t,\ z-w\delta t)$ вычесть $f(x, y, z)$; разлагая в ряд по δt и ограничиваясь первыми степенями разложения, мы получаем стоящее в тексте выражение.

[3]) Выражение в тексте получается следующим образом. Вследствие того, что скорости движения трубок в различных частях поля не одинаковы, трубки, проходящие через O и A (см. рис. 46), пройдут различные пути: $v\delta t$ и $\left(v+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)\delta t$ (мы предполагаем, что u, v и w функции x, y и z); вследствие этой причины все трубки, которые располагались по длине dy, теперь, т. е. через δt, расположатся по длине $dy+\left(a+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)\delta t-v\delta t=dy\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\delta t\right)$. Аналогичное выражение получаем и для слагающей движения по оси z: $dz\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\delta t\right)$. Таким образом, трубки, располагавшиеся на площади $dydz$, по прошествии δt окажутся расположенными

таким образом $\delta_2 f$, изменение f, зависящее от этой причины, будет дано уравнением

$$\delta_2 f=\frac{f}{1+\delta t\left\{\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right\}}-f,$$

или

$$\delta_2 f=-\delta t f\left\{\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right\}.$$

Вследствие наклонения трубок, [1]) зависящего от относительного движения их частей, некоторые из тех, которые во время t были перпендикулярны к оси x, будут во время $t+\delta t$ иметь составляющую вдоль нее. Так, напр., трубки, бывшие во время t параллель-

---

на площади $dydz\left\{1+\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\delta t\right\}$, если мы откинем члены с δt^2

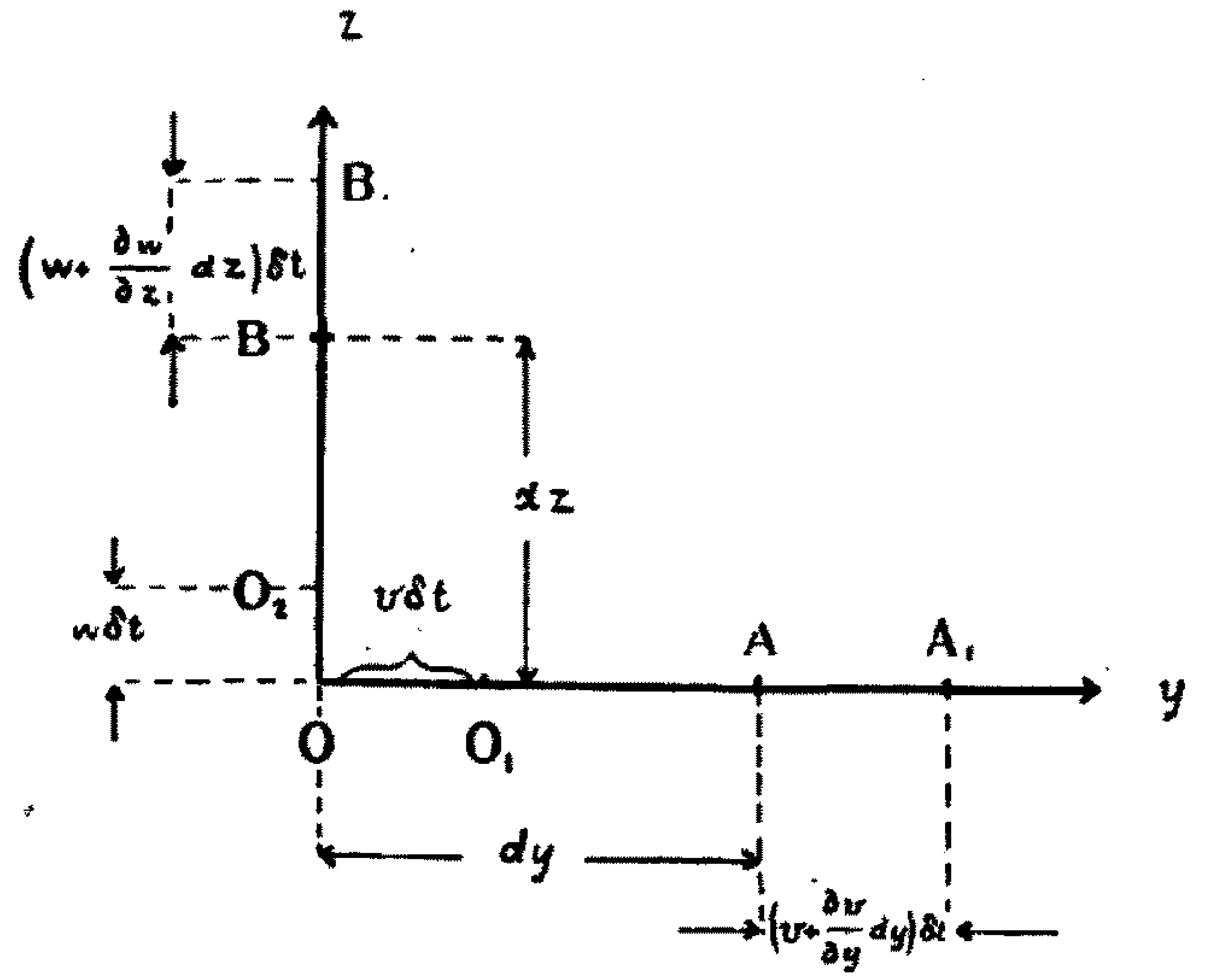

Рис. 46.

Для изменения числа трубок, вызванного относительной скоростью движения трубок, находим следующее выражение:

$$\delta_2 f=\frac{f\,dydz}{dydz\left\{1+\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\delta t\right\}}-f=-f\delta t\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

если мы опять пренебрежем членами с δt^2. *(Прим. ред.)*

[1]) Вследствие неодинакового движения частей одной и той же трубки, направление ее изменяется. На рис. 47 показано, как участок OA принимает вследствие неодинаковой скорости частей O и A положение O_1B. Так как смещения бесконечно малы, то $tg\,\alpha$ можно заменить через α и поло-

ными к y, будут по истечении времени δt закручены к оси x на угол $\delta t\,\frac{du}{dy}$; подобным образом трубки, параллельные z, будут закручены на угол $\delta t\,\frac{du}{dz}$ к оси x во время δt; отсюда $\delta_3 f$, изменение f, зависящее от этой причины, будет дано уравнением

$$\delta_3 f = \delta t\left\{g\frac{du}{dy} + h\frac{du}{dz}\right\}.$$

Поэтому, если δf есть полное изменение f во время δt, так как

$$\delta f = \delta_1 f + \delta_2 f + \delta_3 f,$$

то мы имеем

$$\delta f = \left[-\left(u\frac{df}{dx} + v\frac{df}{dy} + w\frac{df}{dz}\right) - f\left(\frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(g\frac{du}{dy} + h\frac{du}{dz}\right)\right]\delta t,$$

которое можно написать в виде:

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dy}(ug - vf) - \frac{d}{dz}(wf - uh) - u\left(\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz}\right) \quad . . . \quad (1)$$

жить $= \frac{B_0B}{O_1B_0} = \frac{\partial u}{\partial y}\,\delta t$. Вследствие поворота вектора f, g, h, слагающая по

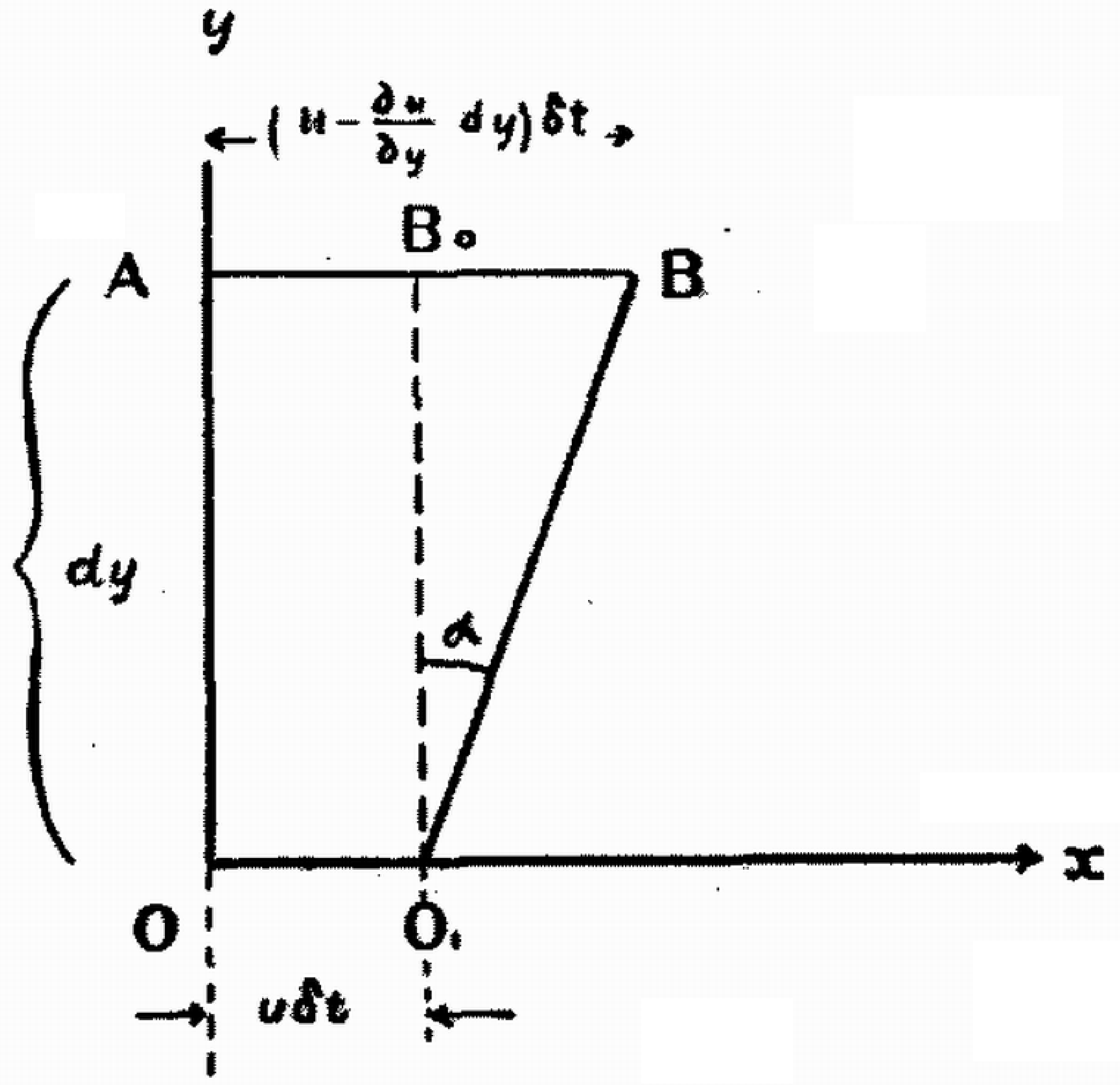

Рис. 47.

оси x увеличится на $g\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\delta t$. Аналогично находим для оси z: $h\,\frac{\partial u}{\partial z}\,\delta t$. Итак, $\delta_3 f = \delta t\left\{g\,\frac{\partial u}{\partial y} + h\,\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$. *(Прим. ред.)*

Если ρ есть плотность свободного электричества, то в виду того, что, по определению § 8, поверхностный интеграл нормальной поляризации, взятый по некоторой замкнутой поверхности, должен быть равен количеству электричества внутри этой поверхности, следовательно,

$$\rho = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz}, \text{ [1]}$$

поэтому уравнение (1) можно написать

$$\left.\begin{aligned} &\frac{df}{dt} + u\rho = \frac{d}{dy}(ug - vf) - \frac{d}{dz}(wf - uh) \\ &\text{Подобным образом} \\ &\frac{dg}{dt} + v\rho = \frac{d}{dx}(vh - wg) - \frac{d}{dx}(ug - vf), \\ &\frac{dh}{dt} + w\rho = \frac{d}{dx}(wf - uh) - \frac{d}{dy}(vh - wg) \end{aligned}\right\} \quad . . . . \quad (2)$$

Если p, q, r суть составляющие плотности тока, соответственно параллельные x, y, z, α, β, γ — составляющие магнитной силы в тех же направлениях, то мы знаем

$$\left.\begin{aligned} 4\pi p &= \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}, \text{ [2]} \\ 4\pi q &= \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}, \\ 4\pi r &= \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Поэтому, рассматривая ток, как состоящий из конвекционного тока, составляющие которого соответственно $u\rho$, $v\rho$, $w\rho$ и тока поляризации, составляющие которого $\frac{df}{dt}$, $\frac{dg}{dt}$, $\frac{dh}{dt}$, мы увидим, сравнивая уравнения (2) и (3), что можно счесть движущиеся фарадеевы

---

[1]) Из условия $\int\limits_0 (f\cos ux + g\cos uy + h\cos uz)\,ds = e$ (для замкнутой поверхности s), вытекает после преобразования поверхностного интеграла в объемный для элемента $dxdydz$ и замены $\rho\,dxdydz = e$ (ρ плотность заряда) — $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = \rho$. (Положительное направление нормали n внутрь замкнутой поверхности.)

[2]) Первая группа уравнений Максвэлла. Таким образом, если мы сделаем допущение, что напряжение магнитного поля выражается (4), то уравнение (2) дает максвэлловские уравнения, которые мы получили, рассматривая движение фарадеевских трубок. *(Прим. ред.)*

*

трубки дающими начало магнитной силе, составляющие которой α, β, γ даны уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= 4\pi(vh - wg),\\ \beta &= 4\pi(wf - uh),\\ \gamma &= 4\pi(ug - vf)\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Таким образом фарадеева трубка в движении производит магнитную силу, перпендикулярную к ней [1]) самой и направлению ее движения, величина которой пропорциональна составляющей скорости, перпендикулярной направлению трубки. Магнитная сила и вращение от направления движения к направлению трубки в некоторой точке относятся подобно передвижению и вращению в правом винте.

10. Движение этих трубок предполагает кинетическую энергию, которая представляет энергию магнитного поля. Но, если μ есть магнитная проницаемость, то мы знаем, что энергия на единицу объема будет

$$\frac{\mu}{8\pi}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

или, подставляя величины α, β, γ из уравнений (4),

$$2\pi\mu[(hv - gw)^2 + (fw - hu)^2 + (gu - fv)^2].$$

Количество движения на единицу объема диэлектрика, параллельное x, есть частная производная [2]) этого выражения по x, откуда, если U, V, W суть составляющие количества движения, соответственно параллельные x, y, z, мы имеем

$$U = 4\pi\mu\{g(gu - fv) - h(fw - hu)\} = gc - hb,$$

если a, b, c суть составляющие магнитной индукции, параллельные x, y, z.

Подобным образом

$$\left.\begin{aligned}V &= ha - fc\\ W &= fb - ga\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

[1]) Формулы (4) показывают, что $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$, а также $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$, т. е. что направление вектора (α, β, γ) образует прямой угол с векторами скорости v (u, v, w) и электростатической индукции D (f, g, h). Пользуясь векторными обозначениями можно сказать, что $M = 4\pi[vD] = 4\pi|v|\,|D| \sin(v, D)$. *(Прим. ред.)*

[2]) Так, например, количество движения mu движущейся материальной точки равняется частной производной от кинетической энергии $\frac{mu^2}{2}$ по u. *(Прим. ред.)*

Таким образом, количество движения на единицу объема диэлектрика, зависящее от движения трубок, перпендикулярно поляризации и магнитной индукции, при чем величина количества движения равна произведению поляризации и слагающей магнитной индукции, перпендикулярной к направлению трубки. Интересно отметить, что составляющие количества движения в поле, данные уравнениями (5), пропорциональны количествам энергии, переносимым в единицу времени через единицу площади плоскостей, перпендикулярных к осям x, y, z, по теории Пойнтинга о переносе энергии в электромагнитном поле (Philos. Trans 1884, ч. II, стр. 343); поэтому направление, в котором, по теории Пойнтинга, энергия должна двигаться, одинаково с направлением количества движения, определенного предыдущим исследованием.

11. Электродвижущие силы, параллельные x, y, z, зависящие от движения трубок, суть частные производные кинетической энергии соответственно по f, g, h; [1]) отсюда мы получаем следующие выражения для X, Y, Z составляющих электродвижущей силы

$$\left.\begin{aligned}X &= wb - vc\\ Y &= uc - wa\\ Z &= va - ub\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Таким образом, направление электродвижущей силы, зависящее от движения трубок, перпендикулярно как магнитной индукции, так и направлению движения трубок.

Из уравнений (6) мы получим

$$\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dx} = v\frac{da}{dy} + w\frac{da}{dz} - u\left(\frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz}\right) + \\ + a\left(\frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) - b\frac{du}{dy} - c\frac{du}{dz}.$$

Но так как уравнение

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0$$

[1]) Это можно выяснить себе на следующем примере. Если материальная точка движется под действием упругой силы $F = -a^2x$, то энергия, вызванная смещением x, будет $-\frac{a^2x^2}{2}$, отсюда сила $F = -a^2x$ будет частной производной от энергии по смещению x. Точно также в рассматриваемом случае электродвижущая сила получается как частная производная от магнитной энергии по f, g, h. *(Прим. ред.)*

остается в силе, как мы сейчас покажем; по принятой нами теории магнитной силы, так же, как и по обыкновенной теории имеем

$$\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}=u\frac{da}{dx}+v\frac{da}{dy}+w\frac{da}{dz}+$$
$$+a\left(\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)-b\frac{du}{dy}-c\frac{du}{dz}.$$

Правая часть этого уравнения по рассуждению, данному в § 9, равна $-\frac{da}{dt}$, степени уменьшения числа линий магнитной индукции, проходящих через единицу площади перпендикулярной оси x: отсюда мы имеем

$$\left.\begin{aligned}\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}&=-\frac{da}{dt}.\\ \frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}&=-\frac{db}{dt},\\ \frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}&=-\frac{dc}{dt}.\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

[1]

Подобным образом

Но по теореме Стокса

$$\int(Xdx+Ydy+Zdz),$$

взятый вдоль замкнутого контура, равен

$$\iint\left\{l\left(\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}\right)+m\left(\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}\right)+n\left(\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}\right)\right\}ds,$$

где l, m, n суть косинусы направления нормали к поверхности s, которая вполне ограничена замкнутым контуром. Подставляя предыдущие величины вместо $dZ/dy-dY/dz$ и пр., мы видим, что линейный интеграл электродвижущей силы вдоль замкнутой цепи равен степени уменьшения числа линий магнитной индукции, проходящих через цепь. Поэтому предыдущая теория происхождения магнитной силы ведет к правилу Фарадея относительно индукции токов путем изменения магнитного поля.

12. Когда электродвижущая сила вполне зависит от движения трубок в изотропной среде, диэлектрическая постоянная которой есть K, мы имеем

$$f=\frac{K}{4\pi}X=\frac{K}{4\pi}(wb-vc),$$

а так как

$$b=4\pi\mu(fw-hu),\quad c=4\pi\mu(gu-fv),$$

[1] Т. е. вторая группа уравнений Максвэлла.

то

$$f=\mu K\{f(u^2+v^2+w^2)-u(fu+gv+hw)\};$$

точно также

$$g=\mu K\{g(u^2+v^2+w^2)-v(fu+gv+hw)\},$$
$$h=\mu K\{h(u^2+v^2+w^2)-w(fu+gv+hw)\},$$

откуда

$$fu+gv+hw=0, \text{ [1]}$$

и потому

$$u^2+v^2+w^2=\frac{1}{\mu K}. \text{ [2]}$$

Поэтому, когда электродвижущая сила вполне зависит от движения трубок, то трубки движутся перпендикулярно к самим себе со скоростью $1/\sqrt{\mu K}$, т. е. со скоростью света, проходящего через диэлектрик. В этом случае количество движения параллельно направлению движения, *и электродвижущая сила имеет направление* электрической поляризации. В этом случае п о л я р и з а ц и я, направление движения и магнитная сила взаимно перпендикулярны.

Подводя итоги, мы видим, что, когда фарадеева трубка находится в движении, то она сопровождается 1) магнитной силой, перпендикулярной к трубке и к направлению, в котором она движется, 2) количеством движения, перпендикулярным к трубке и к магнитной индукции, 3) электродвижущей силой, перпендикулярной к направлению движения и к магнитной индукции; эта сила стремится всегда поставить трубку перпендикулярно к направлению, в котором трубка движется. Таким образом, в изотропной среде, в которой нет свободного электричества и, следовательно, электродвижущих сил, кроме тех, которые возникают от движения трубок, трубки становятся перпендикулярно к направлению движения.

13. До сих пор мы рассматривали случай, когда трубки в какомлибо месте диэлектрика движутся с одинаковой скоростью. Но мы без труда можем распространить эти результаты на случай, когда у нас разные ряды трубок, движущиеся с разными скоростями.

Предположим, что мы имеем трубки f_1, g_1, h_1, движущиеся со скоростью, составляющие которой u_1, v_1, w_1, тогда как трубки f_2, g_2, h_2 движутся со скоростями u_2, v_2, w_2, и т. д. Тогда сте-

[1] Результат этот получается, если мы сложим написанные уравнения, помножив их соответственно на u, v и w. *(Прим. ред.)*

[2] $\frac{1}{\mu K}=c^2$, где c — скорость света. *(Прим. ред.)*

пень возрастания числа трубок, проходящих через единицу площади перпендикулярна к оси x, по тем же основаниям, как прежде, будет

$$\frac{d}{dy}\Sigma(ug-fv)-\frac{d}{dz}\Sigma(wf-uh)-\Sigma(u\rho).$$

Отсюда мы видим, как прежде, что трубки можно считать производящими магнитную силу, составляющие которой α, β, γ даны уравнениями

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=4\pi\Sigma(vh-wg)\\ \beta&=4\pi\Sigma(wf-uh)\\ \gamma&=4\pi\Sigma(ug-vf).\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

Кинетическая энергия на единицу объема T, зависящая от движения этих трубок, дана уравнением

$$T=\frac{\mu}{8\pi}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2),$$

или

$$T=2\pi\mu[\{\Sigma(vh-wg)\}^2+\{\Sigma(wf-uh)\}^2+\{\Sigma(ug-vf)\}^2].$$

Таким образом, dT/du, количество движения на единицу объема, параллельное x, зависящее от трубки со значком 1, равно

$$\begin{aligned}4\pi\mu\{g_1\Sigma(ug-vf)-h_1\Sigma(wf-uh)\}&=\\ =g_1\,c-h_1\,b,&\end{aligned}$$

где a, b, c — составляющие магнитной индукции.

Таким образом, U, V, W составляющие количества движения на единицу объема, параллельные соответственно осям x, y, z, даны уравнениями

$$\left.\begin{aligned}U&=c\Sigma g-b\Sigma h\\ V&=a\Sigma h-c\Sigma f\\ W&=b\Sigma f-a\Sigma g.\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

Итак, когда мы имеем известное число трубок, движущихся в электрическом поле, равнодействующее, количество движения в некоторой точке перпендикулярно как к равнодействующей магнитной индукции, так и к равнодействующей поляризации и равно произведению этих двух величин на синус угла между ними.

Электродвижущие силы X, Y, Z, параллельные соответственно осям x, y, z, равны средним величинам dT/df, dT/dg, dT/dh, отсюда мы имеем

$$\left.\begin{aligned}X&=b\bar{w}-c\bar{v},\\ Y&=c\bar{u}-a\bar{w},\\ Z&=a\bar{v}-b\bar{u},\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

где черта, проведенная над данным количеством, показывает, что надо взять среднюю величину его.

Таким образом, когда система фарадеевых трубок находится в движении, то электродвижущая сила перпендикулярна к равнодействующей магнитной индукции и к средней скорости трубок и равна по величине произведению этих двух количеств на синус угла между ними.

Из предыдущих уравнений мы видим, что здесь возможна равнодействующая магнитная сила, зависящая от движения положительных трубок в одном направлении и отрицательных в противоположном без всякого равнодействующего количества движения или электродвижущей силы; ибо, если здесь столько же положительных, как отрицательных трубок проходит через каждую единицу площади, так что нет равнодействующей поляризации, то и не будет, на основании уравнений (9), равнодействующего количества движения, ибо, если число трубок, движущихся в одном направлении, таково же, как число движущихся в противоположном, то уравнения (10) показывают, что здесь не будет равнодействующей электродвижущей силы, зависящей от движения трубок. Итак мы видим, что, когда магнитное поле постоянно, то движение фарадеевых трубок в поле будет своего рода сдвигами положительных и отрицательных трубок: положительные трубки движутся в одном направлении, а отрицательные в том же количестве в противоположном. Когда же поле не постоянно, это не имеет места, и тогда развиваются электродвижущие силы, зависящие от индукции.

Механические силы в поле.

14. Количество движения, параллельное x на единицу объема среды, зависящее от движения фарадеевых трубок, равно по уравнению (9)

$$c\Sigma g-b\Sigma h;$$

так что количество движения, параллельное x, которое входит в часть среды, ограниченную замкнутой поверхностью s, в единицу времени, равно

$$\iint[c\Sigma g(lu+mv+nw)-b\Sigma h(lu+mv+nw)]\,ds,$$

где ds — элемент поверхности, а l, m, n — направляющие косинусы нормали, обращенные во внутрь.

Если поверхность s так мала, что внешнее магнитное поле на всем ее протяжении можно считать постоянным, то это выражение *можно написать так*

$$c \iint \Sigma g(lu+mv+nw) - b \iint \Sigma h(lu+mv+nw)\, ds.$$

Но

$$\iint \Sigma g(lu+mv+nw)ds \quad \text{и} \quad \iint \Sigma h(lu+mv+nw)ds.$$

представляют число фарадеевых трубок, параллельных соответственно y и z, входящих в элемент в единицу времени, т. е. они представляют объемные интегралы слагающих q и r тока, параллельного соответственно y и z: если среда, окруженная поверхностью s — диэлектрик, то это поляризационный ток; если она проводник, то это ток проводимости. *Таким образом, количество движения*, параллельное x, сообщаемое в единицу времени единице объема среды, другими словами, сила, параллельная x, действующая на единицу объема среды, равна

$$cq - br;$$

точно так же силы, параллельные y и z, соответственно равны

$$\left.\begin{array}{l} ar - cp \\ bp - aq \end{array}\right\} \qquad (11)$$

Когда среда есть проводник, то это — обыкновенные выражения для слагающих силы на единицу объема проводника, когда он несет ток в магнитное поле.

Когда мы рассматриваем, как в данном выше выражении силу, действующую на проводник, несущий ток, как зависящую от сообщения проводнику количества движения фарадеевых трубок, входящих в проводник, то происхождение силы между двумя токами будет очень похоже на силу притяжения между двумя телами по теории тяготения Лесажа. Так, напр., если мы имеем два параллельных тока A и B, идущие в том же направлении, то, когда A находится слева от B, большее число трубок войдут в A слева, чем справа, потому что некоторые из тех, которые вошли бы справа в отсутствии B, будут поглощены B, так что в единицу времени количество движения, имеющее направление слева направо, входящее в A, превзойдет количество движения, имеющее противоположное направление, так что A стремится двигаться вправо, т. е. к B, а B по той же причине будет двигаться к A.

15. Таким образом мы видели, что гипотеза фарадеевых трубок *в движении объясняет свойства электромагнитного поля и* ведет к обычным уравнениям его. Эта гипотеза имеет преимущество, показывая весьма ясно, почему поляризационные токи и токи проводимости вызывают подобные механические и магнитные действия. Ибо механические действия и магнитные силы в некоторой точке поля зависят от движения фарадеевых трубок в этой точке, и всякое изменение поляризации предполагает движение этих трубок точно так, как при обычном токе проводимости.

ВИХРЕВАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ДВИЖЕНИЯ. [1]

З. Цейтлин.

Вывод уравнений Максвэлла-Герца.

1.

История развития учения об электромагнетизме и свете приводит к бесспорному убеждению, что сущностью электромагнитных процессов является вихревое движение. Недавние исследования Дж. Дж. Томсона, Кастерина и Уайттекера [2]) о квантовом электромагнитном кольце, уж не оставляют места для какого бы то ни было сомнения на этот счет. Большой знаток теорий электромагнетизма Уайттекер подчеркивает в своей последней работе, что электромагнитное квантовое кольцо, повидимому, является вихревым образованием.

Задача настоящей статьи показать весьма простым способом, что уравнения Максвэлла-Герца действительно вытекают из основного уравнения вихревой теории — уравнения Стокса-Гельмгольца:

$$2\omega = 4\pi w = curl \cdot v,$$

[1]) *Для понимания нижеизложенного необходимо знание основ теории вихрей.* Рекомендуем для этой цели превосходную книгу А. А. Эйхенвальда: „Теоретическая физика", ч. I. теория поля. Более подробное изложение в III томе „Теоретической механики" П. Аппеля. Практические иллюстрации в „Основах воздухоплавания" Н. Е. Жуковского.

[2]) См. статьи: Кастерина—Phil. Magaz. Декабрь 1926 г. E. T. Whittaker Proc. Royal. Ed. 46 (1926), стр. 116; там же J. M. Whittaker, стр. 306.