

А. ПУАНКАРЕ<sup>[36]</sup>  
ИДЕИ ГЕРЦА В МЕХАНИКЕ

В 1890 г. слава великого электрика Герца достигла апогея; академии Европы оказывали ему всевозможные почести. Все надеялись, что ему предстоят еще многие годы жизни, которые будут столь же блестящими, как и первые годы его деятельности.

К несчастью, болезнь, которая преждевременно унесла Герца, рано настигла его и вскоре замедлила и почти полностью приостановила экспериментальную работу ученого. Он едва успел организовать свою новую лабораторию в Бонне; различные болезни лишили его и нас открытий, которые он обещал там сделать.

Он продолжал служить физическим наукам огромным влиянием, которым он пользовался, советами, которые он давал своим ученикам; но этот период отмечен только одним личным открытием, имевшим, правда, фундаментальное значение, — открытием прохождения алюминия катодными лучами.

Но если он был так жестоко лишен возможности заниматься столь дорогими ему исследованиями, он все же не оставался бездейственным; если ему изменяли чувства, то у него остался ум, и он использовал его для глубоких размышлений о философии механики. Результаты этих размышлений были опубликованы посмертно. Здесь я хотел бы их резюмировать и кратко обсудить.

Во-первых, Герц критикует обе предлагавшиеся до сих пор основные системы, которые я назову классической и энергетической, и предлагает третью, которую я назову Герцевой.

## I. КЛАССИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

### § 1 Определение силы

Первую попытку обобщить механические явления мы назовем классической системой; Герц ее называет великой столбовой дорогой, основные вехи которой обозначены именами — Архимед, Галилей, Ньютон и Лагранж.

В основу этого изложения кладутся понятия пространства, времени, силы и массы. В этой системе сила рассматривается как причина движения, она предшествует движению и независима от него.

Я постараюсь объяснить, по каким причинам Герц не был удовлетворен этим взглядом на вещи.

Прежде всего мы оказываемся перед трудностями, когда хотим дать определение основным понятиям. Что такое масса? Это, — отвечает Ньютон, — произведение объема на плотность. — Лучше было бы сказать, отвечают Томсон и Тэт, что плотность есть количество массы в единице объема. — Что такое сила? Это, — отвечает Лагранж, — причина, которая производит движение тела или которая стремится произвести движение. Это, — скажет Кирхгоф, — произведение массы на ускорение. Но тогда почему не сказать, что масса есть количество силы, рассчитанной на единицу ускорения? Эти затруднения непреодолимы.

Когда говорят, что сила есть причина движения — это метафизика, и это определение, если бы пришлось довольствоваться им, оказалось бы совершенно бесплодным. Чтобы определение могло быть полезным, оно должно научить измерять силу; впрочем, этого достаточно, нет никакой необходимости, чтобы оно объясняло, что такое сила в себе, и что она является причиной или следствием движения.

Нужно, следовательно, сначала определить равенство двух сил. Когда можно сказать, что две силы равны? Это, ответим мы, когда приложенные к одной и той же массе, они ей сообщат одно и то же ускорение, или когда, будучи направлены в прямо противополож-

ные стороны, они окажутся в равновесии. Тем не менее это определение обманчиво. Нельзя отцепить силу, приложенную к телу, чтобы прицепить ее к другому телу, как отцепляют локомотив, чтобы присоединить его к другому поезду. Таким образом, невозможно узнать, какое ускорение сообщит какая-либо сила, приложенная к некоторому другому телу, если бы она была приложена к последнему. Нельзя знать, как будут вести себя две силы, которые направлены не прямо в противоположные стороны, если они будут направлены прямо противоположно.

Это определение стремятся, так сказать, материализовать, когда измеряют силу при помощи динамометра или уравнивая ее гирей. Две силы  $F$  и  $F'$ , которые я предположу вертикальными и направленными для упрощения снизу вверх, приложены соответственно к двум телам  $C$  и  $C'$ ; я подвешиваю какое-либо тело весом  $P$  сначала к телу  $C$ , потом к телу  $C'$ ; если равновесие будет иметь место в обоих случаях, я сделаю вывод, что обе силы  $F$  и  $F'$  равны между собой, поскольку они обе равны весу тела  $P$ .

Но уверен ли я, что тело  $P$  сохранило тот же вес, пока я его переносил с первого тела на второе? Далеко не так, напротив, я уверен в обратном; я знаю, что вес меняется от одной точки к другой и что он больше, например, на полюсе, чем на экваторе. Несомненно разница очень мала и практически я, конечно, не стану ее учитывать; однако безукоризненное определение должно было бы быть математически строгим. Этой строгости не существует. То, что я говорю о весе, применимо, очевидно, к силе пружины динамометра, на изменения показания которого может влиять температура и множество других обстоятельств.

Это еще не все. Нельзя сказать, что вес тела  $P$  приложен к телу  $C$  и прямо уравнивает силу  $F$ . Если что и приложено к телу  $C$ , то это действие  $A$  тела  $P$  на это тело  $C$ ; само же тело  $P$  подвержено, с одной стороны, действию собственного веса, а с другой — реакции  $R$  тела  $C$  на тело  $P$ . В результате, сила  $F$  равна силе  $A$ , потому что она ее уравнивает; сила  $A$  равна  $R$  в силу принципа равенства действия противодействию; наконец, сила  $R$

равна весу  $P$ , потому что она уравнивает эту последнюю. Из этих трех равенств мы выводим как следствие равенство силы  $F$  и веса  $P$ . Мы вынуждены, следовательно, в определение равенства обеих сил вводить сам принцип равенства действия противодействию; в таком случае этот принцип должен рассматриваться как определение, а не как экспериментальный закон.

Для установления равенства обеих сил мы имеем два правила: равенство двух сил, находящихся в равновесии; равенство действия противодействию. Но, как мы рассмотрели выше, эти два правила недостаточны; мы вынуждены прибегнуть к третьему правилу и допустить, что некоторые силы, как, например, вес тела, являются постоянными по величине и направлению. Но это третье правило, как я сказал, является экспериментальным законом; оно справедливо лишь приблизительно. Оно представляет собой плохое определение.

Итак, мы возвращаемся к определению Кирхгофа: сила равна массе, умноженной на ускорение. На этот «закон Ньютона» перестают, в свою очередь, смотреть как на экспериментальный закон, он становится только определением. Но это определение также недостаточно, потому что мы не знаем, что такое масса. Оно нам позволяет, несомненно, рассчитать отношение двух сил, приложенных к одному и тому же телу в разные моменты; но оно нам ничего не говорит об отношении двух сил, приложенных к двум различным телам. Для его дополнения нужно снова прибегнуть к третьему закону Ньютона (равенство действия противодействию), считая его опять же не экспериментальным законом, а определением. Два тела  $A$  и  $B$  действуют одно на другое; ускорение тела  $A$ , умноженное на массу  $A$ , равно действию  $B$  на  $A$ , так же как произведение ускорения  $B$  на его массу равно противодействию тела  $A$  телу  $B$ . Так как по определению действие равно противодействию, массы  $A$  и  $B$  находятся в обратном отношении с ускорениями этих двух тел. Таким образом отношение этих двух масс определено и остается проверить опытным путем, постоянно ли это отношение.



Это было бы очень хорошо, если бы оба тела  $A$  и  $B$  существовали одни и не испытывали бы влияния окружающего их мира. Но ничего подобного; ускорение тела  $A$  не есть результат только действия на него тела  $B$ , но и множество других тел  $C, D, \dots$ . Чтобы применить предыдущее правило, следует разложить ускорение тела  $A$  на многие составляющие и выделить, которая из них вызывается действием тела  $B$ .

Такое разложение было бы еще возможно, если мы допустим, что действие тела  $C$  на  $A$  просто прибавляется к действию  $B$  на  $A$ , считая, что присутствие тела  $C$  не влияет на действие  $B$  на  $A$  или что присутствие тела  $B$  не изменяет действие  $C$  на  $A$ ; следовательно, если бы мы предположили, что два каких-либо тела взаимно притягиваются, что они действуют друг на друга по прямой, их соединяющей, и что это действие зависит только от расстояния между ними; одним словом, если бы мы приняли гипотезу центральных сил.

Известно, что для определения масс небесных тел исходят из совершенно другого принципа. Закон тяготения гласит, что притяжение двух тел пропорционально их массам; если  $r$  — расстояние между ними,  $m$  и  $m'$  — их массы,  $k$  — постоянная, то их притяжение будет

$$\frac{km m'}{r^2}.$$

В таком случае измеряют не массу, отношение силы к ускорению, а тяготеющую массу; не инерцию тела, а его способность притягивать.

Это — не прямой способ, применение которого теоретически не является необходимым. Вполне могло оказаться, что притяжение обратно пропорционально квадрату расстояния, не будучи пропорциональным произведению масс, т. е. что оно равно

$$\frac{f}{r^2}$$

без того, чтобы

$$f = km m'.$$

Если бы это было так, можно было бы тем не менее путем наблюдения относительных движений небесных тел измерить их массы.

Но имеем ли мы право принять гипотезу центральных сил? Строго ли точна эта гипотеза? Есть ли уверенность, что она никогда не будет опровергнута опытом? Кто осмелится это утверждать? И если мы должны отставить эту гипотезу, все здание, возведенное с такой тщательностью, рухнет.

Мы не имеем больше права говорить о составляющей ускорения тела  $A$ , обусловленной действием на него тела  $B$ . Мы не имеем никакого средства отделить это ускорение от того, которое вызывается телом  $C$  или каким-либо другим телом. Правило для измерения масс становится неприменимым.

Что же остается от принципа равенства действия противодействию? Если гипотеза центральных сил отброшена, этот принцип должен, следовательно, формулироваться следующим образом: геометрическая результирующая всех сил, приложенных к различным телам системы, не подверженной никакому внешнему воздействию, будет равна нулю. Или, другими словами, движение центра тяжести этой системы будет прямолинейным и равномерным.

Вот, казалось бы, способ определения массы; положение центра тяжести зависит, очевидно, от значений, придаваемых массам; надо будет расположить эти значения таким образом, чтобы движение центра тяжести было прямолинейным и равномерным; это будет всегда возможно, если третий закон Ньютона справедлив, и это будет возможно вообще только одним способом.

Но систем, не подверженных внешнему действию, не существует; все части Вселенной испытывают более или менее сильно влияние всех остальных частей. Закон движения центра тяжести строго справедлив только в случае его приложения ко Вселенной в целом.

Но тогда следовало для определения величины масс наблюдать за движением центра тяжести Вселенной. Абсурдность этого следствия легко обнаруживается; нам известны лишь относительные

движения; движение центра тяжести Вселенной остается для нас навеки неизвестным.

Не остается ничего, и наши усилия были бесплодными, — мы оказались перед необходимостью прибегнуть к следующему определению, которое, по существу, является признанием нашего бессилия: массы представляют собой коэффициенты, которые удобно вводить в вычисления.

Мы могли бы переделывать наново всю механику, придавая всем массам различные значения. Эта новая механика не была бы в противоречии ни с опытными данными, ни с общими принципами динамики (принципами инерции, пропорциональности сил массам и ускорениям, равенства действия противодействию, прямолинейного и равномерного движения центра тяжести, законом площадей).

Только уравнения этой новой механики были бы менее простыми. Следует условиться: лишь первые члены будут менее простыми, т. е. те, которые мы уже узнали из опыта; может быть возможно изменять массы малых величин, без того чтобы полные уравнения не выиграли и не потеряли в простоте.

Я настаивал на этом обсуждении еще более продолжительное время, чем сам Герц. Я стремился убедительно показать, что Герц не просто искал ссоры с Галилеем и Ньютоном как немец, а наоборот, мы должны сделать вывод, что при помощи классической системы невозможно дать удовлетворительную идею о силе и массе.

## § 2. Различные возражения

Затем Герц задался вопросом, строго ли справедливы принципы механики. Он говорит, что по мнению многих физиков просто невозможно, чтобы даже в самых отдаленных данных опыта можно было обнаружить что-либо такое, что было бы в состоянии внести изменения в твердо установленные принципы механики; и тем не менее то, что вытекает из опыта, может быть в свою очередь исправлено опытом.

После сказанного выше эти опасения покажутся излишними. Принципы динамики первоначально казались истинами, установленными экспериментами; но мы были вынуждены пользоваться ими как определениями. Именно по определению — сила равна произведению массы на ускорение; вот принцип, который в дальнейшем остается вне пределов досягаемости для последующих опытов. Также исходя из этого определения — действие равно противодействию.

Но тогда, возразят нам, эти не подлежащие проверке принципы совершенно лишены значения; опыт не может опровергнуть их, но они не могут нас научить ничему полезному; зачем же тогда изучать динамику?

Такой слишком быстрый приговор был бы несправедлив. В природе не существует совершенно изолированной системы, совершенно не подверженной никакому внешнему воздействию, однако существуют почти изолированные системы.

Если наблюдать за такой системой, можно изучить не только относительное движение ее различных частей, одной по отношению к другой, но и движение ее центра тяжести по отношению к другим частям Вселенной. Тогда можно установить, что движение этого центра тяжести — почти прямолинейно и равномерно в соответствии с третьим законом Ньютона.

Это — экспериментально установленная истина, но она не может быть опровергнута опытом, и действительно, что нам даст более точный опыт? Он нам подтвердит, что закон был лишь приблизительно справедлив, но это мы уже знали.

Теперь объясняется, как опыт мог лежать в основе принципов механики и тем не менее никогда не сможет их опровергнуть.

Но вернемся к аргументации Герца. Классическая система неполна, так как все движения, совместимые с принципами динамики, не осуществлены и даже неосуществимы в природе. Действительно, ведь очевидно, что принципы площадей и движения центра тяжести — не единственные законы, которые управляют явлениями природы? Несомненно, было бы неразумно требовать



от динамики, чтобы она объединила в одной и той же формуле все законы, которые физика открыла или сможет открыть. Но от этого не делается менее справедливым, что следует считать неполной и недостаточной систему механики, где принцип сохранения энергии обойден молчанием.

Герц считает, что его система содержит все существующие в природе движения, но одновременно она содержит также много других движений, которые не существуют в природе. Система, которая исключала бы эти последние или хотя бы часть из них, лучше отражала бы действительные взаимоотношения и в этом смысле была бы, следовательно, более целесообразной. Такой системой будет, например, энергетическая, о которой мы скажем дальше и в которой основной принцип сохранения энергии вводится совершенно естественно.

Может быть не очень легко поймут, что мешает классической системе просто присоединить этот основной принцип к другим принципам этой системы?

Но Герц задает себе еще другой вопрос. Классическая система дает нам картину внешнего мира. Проста ли эта картина? Сохранены ли в ней несущественные черты, произвольно включенные наряду с существенными? Не являются ли силы, которые мы вынуждены ввести, на самом деле бесполезным механизмом, работающим вхолостую?

На этом столе лежит кусок железа; непредупрежденный наблюдатель решит, что раз нет движения, нет и силы. Как же он ошибется! Физика учит нас, что каждый атом железа притягивается всеми другими атомами Вселенной. Более того, каждый атом железа намагничен и, следовательно, подвержен действию всех магнитов Вселенной. Все электрические токи в мире также действуют на этот атом. Я чуть не забыл электростатические силы, молекулярные силы и т. д.

Если бы какие-либо из этих сил действовали одни, их действие было бы огромно; кусок железа разлетелся бы на осколки. К счастью, действуют все силы и уравнивают друг друга таким образом, что не происходит ничего. Ваш непредубежденный

наблюдатель, который видит только одно — кусок железа в состоянии покоя, заключит, очевидно, что все эти силы существуют только в вашем воображении.

Несомненно, во всех этих предположениях нет ничего абсурдного, но система, которая освободит нас от них, уже этим одним будет лучше нашей.

Невозможно, чтобы важность этого замечания не поразила. Впрочем, чтобы показать, что смысл его не чисто искусственный, мне достаточно напомнить о полемике, имевшей место несколько лет назад между двумя крупнейшими учеными — Гельмгольцем и Бертраном — по поводу взаимодействия токов. Бертран, стремясь перевести на классический язык теорию Гельмгольца, натолкнулся на неразрешимые противоречия. Каждый элемент тока должен был подвергаться действию пары, но пара состоит из двух параллельных сил, равных и противоположно направленных. Бертран рассчитал, что каждая из этих двух составляющих должна иметь настолько значительную величину, которая достаточна для разрушения проводника; отсюда он сделал вывод, что эта теория должна быть отброшена. Напротив, Гельмгольц, сторонник энергетической системы, не видел в этом никакой трудности.

Таким образом, по Герцу, классическая система должна быть оставлена: 1) потому, что невозможно дать хорошее определение силы; 2) потому, что она неполна; 3) потому, что она вводит паразитические гипотезы, которые часто способны породить трудности совершенно искусственные, но тем не менее настолько большие, что они могут остановить даже лучшие умы.

## II. ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

### § 1. Различные возражения

Энергетическая система возникла вслед за открытием принципа сохранения энергии. Гельмгольц придал ей определенную форму.

Начнем с определения двух величин, играющих основную роль в этой теории. Эти величины: с одной стороны, — кинетическая энергия или живая сила, с другой стороны, — потенциальная энергия.

Все изменения, которым подвергаются тела в природе, управляемы двумя экспериментальными законами.

1. Сумма кинетической и потенциальной энергии — постоянна. Это — принцип сохранения энергии.

2. Если система тел находится в положении  $A$  в момент времени  $t_0$  и в положении  $B$  в момент времени  $t_1$  — система всегда движется из первого положения во второе таким путем, что среднее значение разности между двумя видами энергии будет иметь наименьшую величину в интервале времени, образуемом моментами  $t_0$  и  $t_1$ .

Это и есть принцип Гамильтона, который является одной из форм принципа наименьшего действия.

Энергетическая теория имеет следующие преимущества перед классической:

1) она более полная, т. е. принципы сохранения энергии и Гамильтона дают нам больше, чем основные принципы классической теории, и исключают некоторые движения, неосуществляемые в природе, но совместимые с классической теорией;

2) она нас освобождает от атомной гипотезы, которую было почти невозможно избежать в классической теории.

Но она вызывает в свою очередь новые трудности; прежде чем говорить о возражениях Герца, я остановлюсь на двух возражениях, пришедших мне в голову.

Определения обоих видов энергии вызвали бы трудности, почти такие же, как и определение силы и массы в первой системе. Тем не менее их было бы преодолеть легче, по крайней мере в самых простых случаях.

Представим себе изолированную систему, состоящую из некоторого числа материальных точек; предположим, что эти точки подвержены действию сил, зависящих только от взаимного расположения и расстояний между ними и не зависящих от их ско-

ростей. В силу принципа сохранения энергии в этой системе должна существовать силовая функция.

В этом простом случае формулировка принципа сохранения энергии исключительно проста. Некоторая величина, доступная проверке опытом, должна оставаться постоянной. Эта величина и есть сумма двух членов; первый зависит только от положения материальных точек и не зависит от их скоростей; второй пропорционален квадрату этих скоростей. Такое разложение может быть произведено только одним способом.

Первый из этих членов, который я обозначу через  $U$ , и будет потенциальной энергией; второй, который я обозначу через  $T$ , будет кинетической энергией.

Очевидно, что если  $(U + T)$  — константа, то какая-либо функция  $(T + U)$  есть тоже постоянная

$$\varphi(T + U).$$

Но эта функция  $\varphi(T + U)$  не будет суммой двух членов: одного, не зависящего от скоростей, и другого, пропорционального квадрату этих скоростей. Среди функций, которые остаются постоянными, только одна обладает этим свойством — это  $T + U$  (или линейная функция  $T + U$ , что ничего не меняет, потому что эта линейная функция всегда может быть приведена к  $T + U$  при помощи замены единицы и начала). Тогда это будет то, что мы назовем энергией; первый член будет потенциальной энергией, а второй — энергией кинетической. Определение обоих видов энергии может быть, следовательно, доведено до конца без всякой двусмысленности.

Так же дело обстоит с определением масс. Кинетическая энергия или живая сила выражается очень просто при помощи масс и относительных скоростей всех материальных точек по отношению к одной из них. Эти относительные скорости доступны наблюдению, и когда мы будем иметь выражение кинетической энергии в функции от этих относительных скоростей, коэффициенты при этом выражении дадут нам массы.



Таким образом, в этом простом случае можно без затруднения определить основные понятия. Но трудности возникают снова в более сложных случаях и, например, в том случае, если силы, вместо того чтобы зависеть только от расстояний, зависят также от скоростей. Так, Вебер полагает, что взаимодействие двух молекул электричества зависит не только от расстояния между ними, но и от скорости и ускорения. Если бы материальные точки взаимно притягивались по аналогичному закону,  $U$  зависело бы от скорости и могло содержать член, пропорциональный квадрату скорости.

Среди членов, пропорциональных квадратам скоростей, как выделить относящиеся к  $T$  или  $U$ ? Каким образом, следовательно, различить обе части энергии?

Более того, как определить собственно энергию? У нас больше нет никаких оснований брать в качестве ее определения выражение  $T + U$ , чем любую другую функцию от  $T + U$ , когда исчезло свойство, характеризующее  $T + U$ , быть суммой двух членов, имеющих особую форму.

Но это еще не все; нужно учитывать не только собственно механическую энергию, но и другие формы энергии: тепло, химическую энергию, электрическую энергию и т. д. Принцип сохранения энергии должен быть записан так:

$$T + U + Q = \text{const},$$

где  $T$  представляет воспринимаемую кинетическую энергию,  $U$  — потенциальную энергию положения, зависящую только от положения тел,  $Q$  — внутримолекулярную энергию в термической, химической или электрической форме. Все шло бы хорошо, если бы эти три члена были абсолютно четко различимы, если бы  $T$  было пропорционально квадрату скоростей,  $U$  — независимо от этих скоростей и от состояния тела,  $Q$  — независимо от скоростей и положений тела и зависимо только от его внутреннего состояния.

Выражение энергии могло бы быть разложено только одним способом на три члена такой формы.

Но это не так. Рассмотрим наэлектризованные тела: электростатическая энергия, вызванная их взаимодействием, будет зависеть, очевидно, от их заряда, т. е. от их состояния, но она будет также зависеть и от их положения. Если эти тела будут в движении, они будут взаимодействовать электродинамически, а электродинамическая энергия будет зависеть не только от их состояния и положения, но и от их скоростей.

Мы, следовательно, не имели больше никакого способа для различения членов, которые должны входить в  $T$ ,  $U$  и  $Q$ , и никакого способа разделить три составляющие полной энергии. Если  $(T + U + Q)$  — постоянна, то то же самое имеет место и для любой функции  $\varphi(T + U + Q)$ .

Если  $(T + U + Q)$  будет иметь особую форму, рассмотренную мною выше, то этой неопределенности не получится среди функций  $\varphi(T + U + Q)$ , остающихся постоянными, найдется только одна, которая будет иметь особую форму, и именно ее я условлюсь называть энергией.

Но, как я уже сказал, это не строго так; среди функций, остающихся постоянными, нет таких, которые могут строго подходить к этой особой форме; как же с этого момента выбирать ту, которая должна называться энергией? У нас нет ничего, в этом выборе руководствоваться нечем.

У нас остается только одна формулировка для принципа сохранения энергии: имеется что-то, что остается постоянным. В такой форме она оказывается в свою очередь недостижимой для проверки опытами и сводится к своего рода тавтологии. Ясно, что если мир управляется законами, будут иметь место какие-то величины, которые останутся постоянными. Как принципы Ньютона, и по аналогичной причине, принцип сохранения энергии, основанный на опыте, не сможет быть им отменен.

Это обсуждение показывает, что переход от классической системы к системе энергетической является прогрессом, но одновременно оно показало, что этот прогресс недостаточен.

Другое возражение мне кажется еще более серьезным: принцип наименьшего действия применим к обратимым явлениям, но

он совершенно неудовлетворителен в случае необратимых явлений. Попытка Гельмгольца распространить его на такого рода явления не удалась и не могла удасться; в этом смысле все еще надо сделать в будущем.

Наиболее подробно Герц развивает другие возражения, имеющие почти метафизический характер.

Если энергия, так сказать, материализована, она должна быть всегда положительна. Однако имеются случаи, когда трудно избежать рассмотрения отрицательной энергии. Рассмотрим, например, вращающийся вокруг Солнца Юпитер; общая энергия будет выражена так:

$$av^2 - \frac{b}{r} + c,$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — три положительные постоянные константы,  $v$  — скорость Юпитера,  $r$  — его расстояние до Солнца.

Так как мы располагаем постоянной  $c$ , мы можем ее предположить достаточно большой, чтобы энергия была положительной; уже даже в этом есть что-то произвольное, что не может удовлетворить наш дух.

Но сверх того представим себе теперь, что какое-либо небесное тело огромной массы и с огромной скоростью пересекает Солнечную систему; когда оно пройдет через систему и снова удалится от нее на огромные расстояния, орбиты планет претерпят значительные пертурбации. Мы можем вообразить, например, что большая ось орбиты Юпитера станет много меньше, но орбита остается ощутимо круглой. Как бы ни была велика постоянная  $c$ , если новая большая ось очень мала, выражение

$$av^2 - \frac{b}{r} + c$$

станет отрицательным, и вновь возникнет трудность, которую мы считали избегнутой тем, что придали  $c$  большое значение. В итоге, мы не можем обеспечить, чтобы энергия оставалась всегда положительной.

С другой стороны, чтобы материализовать энергию, нужно ее локализовать; в отношении кинетической энергии —

это просто, но не так дело обстоит с энергией потенциальной. Где локализовать потенциальную энергию, вызванную притяжением двух небесных тел? В одном из двух? В обоих? В промежуточном пространстве?

В самой формулировке принципа наименьшего действия есть что-то неприемлемое для разума. Чтобы попасть из одной точки в другую, материальная молекула, свободная от воздействия любой силы, но принужденная двигаться по какой-либо поверхности, будет двигаться по геодезической линии, т. е. по кратчайшему пути.

Эта молекула как бы знает точку, куда ее хотят привести, предвидит время, которое у нее займет достижение этой точки, следуя по тому или иному пути, и выбирает затем наиболее подходящий путь. Формулировка представляет нам, так сказать, ее как существо, одушевленное и свободное. Ясно, что следовало лучше заменить эту формулировку менее поражающей, в которой, как говорят философы, конечные цели не будут казаться заменяющими действующие причины.

## § 2. Возражение, относящееся к качению шара по плоскости

Последнее возражение, кажется, наиболее поразившее Герца, имеет несколько отличный характер.

Известно, что называется системой со связями; представим сначала две точки, соединенные твердым металлическим прутком так, что расстояние между ними поддерживается постоянным, или, в более общем случае, представим себе, что какой-либо механизм поддерживает отношение между координатами двух или многих точек системы. Это и есть первый вид связи, которая называется «жесткой связью».

Представим себе теперь, что шар принужден катиться по плоскости. Скорость точки соприкосновения должна быть нулевой; мы имеем, следовательно, второй тип связи, которая выражается отношением не только между координатами различных точек системы, но и их координатами и их скоростями.



Системы, где имеются связи второго типа, обладают удивительным свойством, которое я постараюсь объяснить на только что приведенном простом примере, т. е. на примере шара, катящегося по горизонтальной плоскости.

Пусть  $O$  — точка на горизонтальной поверхности и  $C$  — центр шара.

Чтобы хорошо определить положение движущегося шара, я возьму три неподвижные оси координат  $O_x$ ,  $O_y$  и  $O_z$ , из которых две первые расположены в горизонтальной плоскости, по которой катится шар; возьмем также три оси координат, неизменно связанные с шаром,  $C_\xi$ ,  $C_\eta$  и  $C_\zeta$ .

Положение шара будет полностью определено, когда мы зададим две координаты точки соприкосновения и девять направляющих косинусов подвижных осей по отношению к неподвижным осям. Пусть  $A$  — такое положение шара, при котором точка соприкосновения лежит в точке начала координат  $O$ , а подвижные оси параллельны неподвижным.

Координаты точки соприкосновения будут

$$x = 0, \quad y = 0,$$

а девять направляющих косинусов будут

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{array}$$

Сообщим шару бесконечно малое вращение  $\varepsilon$  вокруг оси  $C_\xi$ ; он придет в положение  $B$ , в котором координаты точки соприкосновения будут

$$x = 0, \quad y = 0,$$

а девять косинусов

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon. \end{array}$$

Но такое вращение невозможно потому, что оно заставит шар скользить, а не катиться по плоскости. Следовательно, невозможно перейти из положения  $A$  в бесконечно близкое соседнее положение  $B$  прямо, так сказать в результате бесконечно малого движения. Но мы увидим, что этот переход может произойти не прямо, т. е. конечным движением.

Будем исходить из положения  $A$ ; заставим шар катиться по плоскости таким образом, что мгновенная ось вращения будет находиться в горизонтальной плоскости и в каждый момент времени параллельна оси  $O_y$ , и остановимся, когда ось  $C_\xi$  станет вертикальной и параллельной  $O_z$ . Мы придем в положение  $D$ , в котором координаты точки соприкосновения станут

$$x = \frac{\pi}{2}R, \quad y = 0,$$

где  $R$  — радиус шара, а девять косинусов будут:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ +1 & 0 & 0. \end{array}$$

В положении  $D$  точка соприкосновения находится на конце оси  $C_\xi$ , которая вертикальна.

Сообщим шару вращение  $\varepsilon$  вокруг оси  $C_\xi$ ; это вращение является поворотом вокруг вертикальной оси, проходящей через точку соприкосновения, оно не включает никакого скольжения, а значит оно совместимо со связями.

Шар попадает в положение  $E$ , в котором точки соприкосновения будут:

$$x = \frac{\pi}{2}R, \quad y = 0,$$

а косинусы

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1 \\ \sin \varepsilon & \cos \varepsilon & 0 \\ \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon & 0. \end{array}$$

Заставим теперь шар катиться таким образом, чтобы ось вращения в каждый момент времени оставалась постоянно параллельной  $O_y$  и, следовательно, чтобы соприкосновение все время имело место на оси  $O_x$ . Остановимся, когда точка соприкосновения вернется в исходную точку  $O$ . Легко видеть, что мы были в положение  $B$ .

Можно, значит, попадать из положения  $A$  в положение  $B$ , проходя через положения  $D$  и  $E$ .

Герц называет голономными такие системы, для которых, если связи не позволяют попадать прямо из некоторого положения в другое бесконечно близкое, то они точно так же не позволяют попадать из одного положения в другое не прямо. Это — системы, имеющие лишь твердые связи.

Как видим, наш шар не есть голономная система.

Итак, оказывается, что принцип наименьшего действия не применим к неголономным системам.

Действительно, из положения  $A$  можно попасть в положение  $B$  не только указанным мною путем, но, несомненно, и многими другими путями; среди этих путей найдется, очевидно, один, который будет соответствовать наименьшему действию; шар должен был бы следовать этим путем при движении из  $A$  в  $B$ ; однако ничего подобного не происходит; каковы бы ни были начальные условия движения, шар никогда не пойдет из  $A$  в  $B$ .

Более того, если шар действительно переходит из положения  $A$  в другое положение  $A'$ , он не всегда последует путем, который будет соответствовать минимуму действия.

Принцип наименьшего действия перестает быть справедливым.

Герц считает, что в этом случае шар, который подчинится этому принципу, уподобится живому существу, которое сознательно преследует определенную цель, тогда как шар, следующий закону Природы, представит собой равномерно катящуюся неодошевленную массу... Но скажут, что подобные связи не существуют в Природе, такое качение без скольжения все же на самом деле является качением с очень маленьким скольжением. Это явление входит в число необратимых явлений, таких, как

трение, еще мало известных и к которым мы еще не умеем применять истинные принципы механики.

Герц отмечает, что качение без скольжения не противоречит ни принципу энергии, ни какому-либо из законов, известных Физике; этот процесс осуществляется в видимом мире с таким большим приближением, что на предпосылке его точного выполнения основаны даже интеграционные машины (планиметры, гармонические анализаторы и т. д.). Поэтому нельзя исключать существование этого процесса как невозможное... Является ли он таким или может быть осуществлен лишь приблизительно — трудности не исчезнут. От каждого основного закона нашей системы механики мы должны требовать, чтобы он, будучи применен к задаче с приблизительно точными условиями, всегда давал приблизительно точные результаты, но не совершенно неверные. Впрочем и остальные связи, твердые связи, в природе осуществляются лишь приблизительно; тем не менее их не исключают.

### III. СИСТЕМА ГЕРЦА

Вот какую систему предлагает Герц вместо двух критикуемых теорий. Эта система покоится на следующих гипотезах:

1. В природе имеются лишь системы со связями, свободные от действия любой внешней силы.

2. Если некоторые тела кажутся нам подчиненными каким-либо силам, это значит, что они связаны с другими телами, для нас невидимыми.

Материальная точка, кажущаяся нам свободной, не описывает, тем не менее, прямолинейной траектории. Прежние механики говорили, что точка отклоняется от прямой потому, что она подчиняется какой-то силе; Герц говорит, что она отклоняется потому, что она не свободна, но связана с другими невидимыми точками.

Эта гипотеза на первый взгляд кажется странной. Зачем, кроме видимых тел, вводить невидимые гипотетические тела? Но, отвечает Герц, обе старые теории также вынуждены пред-



полагать, кроме видимых тел, какие-то невидимые сущности; классическая теория вводит силы, энергетическая — энергию; но эти невидимые сущности, сила и энергия, имеют неизвестную таинственную природу; гипотетические же сущности, которые предполагаю я, имеют, наоборот, совершенно такую же природу, как и видимые тела. Не проще ли это и естественнее?

По этому поводу можно спорить и утверждать, что сущности старинных теорий должны быть сохранены как раз по причине их таинственной природы. Уважать эту таинственность значит признать свое невежество, и поскольку наше невежество несомненно, не следует ли лучше признать его, чем скрывать? Но посмотрим дальше, какой вывод делает Герц из своих гипотез.

Движения систем со связями, без внешних сил, управляются единым законом.

Среди движений, совместимых со связями, осуществляется то, для которого сумма масс, умноженных на квадрат ускорений, будет минимальной.

Этот принцип соответствует принципу наименьшего действия, если система голономная, но он более общий, так как применим также к системам неголономным.

Чтобы лучше убедиться в значении этого принципа, возьмем простой пример точки, вынужденной двигаться по поверхности. Здесь мы имеем только одну материальную точку, следовательно, ускорение должно быть минимальным; для этого необходимо, чтобы тангенциальное ускорение было равно нулю. Так как это ускорение равно  $\frac{dv}{dt}$ , где  $v$  — скорость, а  $t$  — время, то отсюда следует, что  $v$  — есть константа, и движение точки равномерно. Нужно, кроме того, чтобы нормальное ускорение было минимальным, а оно равно  $\frac{v^2}{\rho}$ , где  $\rho$  — радиус кривизны траектории, или равно  $\frac{v^2}{R \cos \varphi}$ , где  $R$  — радиус кривизны нормального сечения поверхности и  $\varphi$  — угол между плоскостью касательной к траектории и нормалью к поверхности.

При этом скорость предполагается известной по величине и направлению. Следовательно,  $v$  и  $R$  известны. Надо также, чтобы

$\cos \varphi$  равнялся единице, тогда касательная поверхность будет нормальна к поверхности, т. е. материальная точка будет описывать геодезическую линию.

Чтобы дать теперь понять, как можно объяснить движение систем, которые представляются нам подчиненными некоторым силам, я возьму еще один простой пример, а именно — регулятор с шарами. Это хорошо известный прибор состоит из параллелограмма на шарнирах  $ABCD$ : на противоположных углах  $B$  и  $D$  укреплены шары значительной массы; верхний угол  $A$  неподвижен, на нижнем углу  $C$  имеется кольцо, которое может скользить вдоль неподвижного вертикального стержня  $AX$ ; всему прибору сообщено вращательное движение вокруг стержня  $AX$ .

К кольцу  $C$  подвешен металлический прут  $T$ .

Центробежная сила стремится отклонить шары и, следовательно, поднять кольцо и прут  $T$ . Значит этот прут подвергается тяге, которая тем сильнее, чем быстрее вращение.

Предположим теперь наблюдателя, который видит только прут, и представим себе, что шары, стержень  $AX$  и параллелограмм сделаны из материала, невидимого для него. Этот наблюдатель будет констатировать наличие тяги, действующей на прут  $T$ , но так как он не увидит то, что ее производит, то этот наблюдатель припишет указанную тягу таинственной причине — некоей «силе», некоему притяжению, — действующей от точки  $A$  на прут.

Итак, по Герцу, каждый раз, когда мы представляем себе какую-либо силу, мы оказываемся обманутыми аналогичной иллюзией. Тогда возникает вопрос: можно ли вообразить такую шарнирную систему, которая имитирует систему сил, определяемую каким-либо законом или хотя бы представляет ее с достаточным приближением? Ответ должен быть положительным; я удовольствуюсь тем, что назову одну теорему г. Кёнига, которая сможет послужить основой для иллюстрации этого факта.

Вот эта теорема: всегда можно себе представить такую шарнирную систему, одна точка которой описывает кривую или какую-либо алгебраическую поверхность, или в более общем

случае можно представить такую шарнирную систему, что в силу наложенных на нее связей координаты различных точек этой системы будут подчинены произвольно заданным любым алгебраическим соотношениям.

Только гипотезы, к которым мы придем, могут оказаться очень сложными.

Впрочем это не первая попытка, предпринятая в этом направлении. Невозможно не сделать сближения между гипотезами Герца и теорией лорда Кельвина о жиростатической упругости.

Как известно, лорд Кельвин стремился объяснить свойства эфира, не прибегая ни к каким силам. Он даже придал своей гипотезе определенную форму и представляет эфир с помощью одной из тех механических моделей, которые любят англичане. Английские ученые, довольные тем, что сумели воплотить свои идеи, сделать их осязаемыми, не испуганы усложнениями этих моделей, в которых все возрастает количество прутков, шатунов, кулис, как в механической мастерской.

Опишем, чтобы дать о ней представление, модель, представляющую жиростатический эфир. Эфир как бы образован из своего рода сетки. Каждая ячейка этой сетки есть тетраэдр. Каждая из граней этого тетраэдра образована двумя стержнями, одним сплошным, а другим полым, заключенными один в другом: эта грань растяжима, но не сгибаема.

В каждой ячейке находится прибор, состоящий из трех стержней, неподвижно скрепленных один с другим и образующих трехгранник. Каждый из этих трех стержней опирается на две противоположные грани тетраэдра и, наконец, на каждом из них имеется четыре жироскопа.

В только что описанной мной системе нет потенциальной энергии, а только кинетическая энергия тетраэдров и жироскопов. Тем не менее, построенная таким образом среда будет вести себя как среда упругая; она будет передавать вертикальные волны в точности так же, как эфир.

Я добавлю еще одну вещь: с шарнирными системами такого типа, включающими жироскопы, можно не только имитировать

все силы, которые мы находим в природе, но также и те, которые природа не смогла бы осуществить; именно в этом состоит цель, которую поставил перед собой лорд Кельвин; он хотел объяснить некоторые свойства эфира, которые, как ему казалось, были не в состоянии объяснить обычные гипотезы.

Известно, что ось жироскопа стремится сохранить определенное направление в пространстве: если она отклоняется от этого направления, то стремится в него вернуться, как если бы она была побуждаема к этому некой управляющей силой. Эта кажущаяся сила, которая стремится поддерживать направление жироскопа, не уравновешивается, как реальные силы, противодействием, равным и противоположно направленным. Она, следовательно, не подчиняется закону действия и противодействия и его следствиям, таким, как закон площадей, которым подчинены естественные силы.

Понятно тогда, что жиростатическая гипотеза, освобождающая от этого ограничительного правила, могла бы помочь разобраться в фактах, которые не могли быть объяснены обычными гипотезами, подчиняющимися этому правилу.

Что же в конце концов следует думать о теории Герца? Несомненно интересная, она все же не удовлетворяет меня полностью потому, что оставляет слишком большое место гипотезе.

Герц избежал некоторых возражений, которые его тревожили; но не создается впечатления, что он устранил их все.

Трудности, которые обсуждались нами пространно в начале этой статьи, могли бы быть резюмированы следующим образом: принципы динамики были изложены различными способами, но ни разу не было достаточно четко разграничено, что такое определение, что — экспериментальная истина и что — математическая теорема. В системе Герца также нет такого четкого разграничения и, сверх того, введен четвертый элемент — гипотеза.

Однако его способ изложения полезен уже тем, что он нов, он заставляет нас думать, освободиться от старых представлений. Мы не можем еще видеть все сооружение целиком; имеет значение уже то, что имеется новая перспектива, что на это сооружение смотрят с новой точки зрения.