295. **Заключительное замечание к первой книге**

Как уже было сказано в предварительном замечании (1), в рассуждениях этой книги совершенно исключен опыт. Следовательно, если в дальнейшем встретятся полученные результаты, то мы будем знать, что они получены не из опыта, а из законов нашего созерцания и мышления, вместе с рядом произвольных установлений.

В целом несомненно, что образование наших представлений и их развитие происходило лишь с учетом возможного опыта; но не менее истинным является то, что один только опыт должен дать решение вопроса о ценности или неценности наших рассуждений. Однако правильность или неправильность наших рассуждений не может быть подтверждена или опровергнута никаким возможным будущим опытом.

КНИГА ВТОРАЯ

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛЬНЫХ СИСТЕМ [26]

Предварительное замечание. В настоящей, второй книге под временем, пространством и массой мы будем понимать 296.
знаки для предметов внешнего опыта, свойства которых, впрочем, не противоречат свойствам ранее введенных нами одинаково названных величин, рассматривавшихся в качестве форм нашего внутреннего созерцания или введенных по определению.

Поэтому наши суждения о соотношениях между временем, пространством и массой должны удовлетворять не только требованиям нашего ума, но вместе с тем должны соответствовать и возможному, в частности, будущему опыту. Эти утверждения основываются поэтому не только на законах нашего созерцания и мышления, но, кроме того, и на предшествующем опыте. Все, что дает нам этот опыт, поскольку он не содержится в основных понятиях, мы выражаем одним общим высказыванием, которое и представляем как основной закон. После этого вторичная апелляция к опыту не должна более иметь места. Вопрос о правильности наших положений совпадает, таким образом, с вопросом о правильности или всеобщей значимости этого единственного закона.

Раздел 1

ВРЕМЯ, ПРОСТРАНСТВО, МАССА

297. Время, пространство и масса ни в каком смысле не доступны для нашего опыта; для него доступны лишь определенные промежутки времени, определенные пространственные величины и определенные массы.

Каждая определенная масса, пространственная величина или промежуток времени могут являться результатом определенного опыта. Мы делаем понятия массы, времени и пространства символами предметов внешнего опыта, устанавливая, при помощи каких чувственных восприятий мы фиксируем определенные промежутки времени, пространственные величины и массы. Соотношения между временами, пространствами и массами будут являться тогда в дальнейшем соотношениями лишь между этими чувственными восприятиями.

298. Установление 1. Продолжительность времени мы определяем при помощи хронометра числом биений маятника. Единицу продолжительности мы устанавливаем путем произвольного соглашения. В качестве признака определенного момента нам служит его временное расстояние от момента, установленного произвольно.

Судя по опыту, это установление не содержит ничего, что мешало бы нам пользоваться временем как всегда независимым и непрерывно изменяющимся переменным. Это установление является также определенным и однозначным, исключая ту неопределенность, которую нам никогда не удастся устранить из нашего опыта.

299. Установление 2. Пространственные отношения мы определяем по правилам практической геометрии при помощи масштабов. Единицу длины мы устанавливаем произвольным соглашением. В качестве признака определенного места в пространстве служит нам его относительное положение в неподвижной системе координат, установленной по отношению к небу неподвижных звезд, в остальном же эта система координат вводится произвольно. При применении всех высказываний Эвклидовой геометрии к определенным

таким путем пространственным отношениям мы не придем, как указывает опыт, к противоречиям. Наше установление является также определенным и однозначным, исключая ту неопределенность, которую нам никогда не удастся устранить из нашего опыта.

Установление 3. Массы движущихся осязаемых тел мы 300.
определяем при помощи весов. В качестве единицы массы служит нам масса произвольно выбранного тела.

Масса осязаемых тел, определяемая при помощи этого установления, обладает свойствами, которые мы приписываем массам, определенным понятиями. Именно, она может быть разделена на любое число одинаковых массовых частиц, из которых каждая является неуничтожимой и неизменной и может служить как признак для того, чтобы одна точка пространства в некоторое время приводилась в однозначно определенную связь с другой точкой пространства в любое другое время. Это установление является также определенным и однозначным в отношении осязаемых тел, за исключением той неопределенности, которую нам никогда не удастся устранить из нашего опыта.

Дополнение к установлению 3. Впрочем, мы до- 301.
пускаем предположение, что наряду с осязаемыми телами существуют также другие тела, которые мы не можем ощущать, двигать и класть на весы, и к которым, следовательно, установление 3 неприменимо.

Массы таких тел могут быть определены лишь гипотетически. Что касается этих гипотетически принимаемых масс, то в нашей власти не наделять их свойствами, которые противоречили бы свойствам идеально определенных масс.

Примечание 1. Предыдущие три установления не являются 302.
новыми определениями для уже ранее определенных величин времени, пространства и массы. Наоборот, они представляют законы отображения, посредством которых мы внешний опыт, т. е. конкретные чувственные восприятия, переводим на язык символов нашей внутренней картины (ср. введение) и посредством которых мы переводим обратно необходимые следствия этой картины в область возможных чувственных ощущений и восприятий. Только через эти

три установления символы времени, пространства и массы становятся частями наших представлений о внешних предметах. Только через эти три установления делаются они подчиненными дальше идущим требованиям, чем мысленно-необходимым требованиям нашего ума.

303. Примечание 2. Неопределенность, которую содержат наши установления и которую мы в них признаем, не является, таким образом, неопределенностью нашей картины, а также наших законов отображения, но она является неопределенностью самого отображаемого внешнего опыта. Мы можем поэтому сказать, что посредством фактического определения при помощи наших чувств мы не можем точнее установить время, чем оно может быть измерено при помощи лучших часов, не можем точнее определить положение, чем при помощи неподвижной системы координат, связанной с небом неподвижных звезд, не можем точнее определить массу, чем при помощи лучших весов.

304. Примечание 3. На вопрос о том, даны ли через наши установления истинные или абсолютные меры времени, пространства и массы, следует, по-видимому, ответить отрицательно, так как наши установления содержат, очевидно, случайности и произвол. В действительности, однако, этот вопрос выпадает из нашего рассмотрения и не касается его правильности, если бы даже мы захотели придать ему ясный смысл и ответили бы на него отрицательно.

Достаточно, что наши установления определяют такие меры, которые позволяют однозначно выражать результаты прежних и будущих опытов. Если бы мы установили другие меры, то форма наших положений соответственно изменилась бы, однако таким образом, что опытные данные как прежних, так и будущих опытов остались бы теми же.

МАТЕРИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

305. Объяснение. Под материальной системой отныне будем разуметь систему конкретных масс, свойства которой не противоречат свойствам идеализированных материальных систем. В естественной материальной системе известные положения и перемещения возможны, другие невозможны, причем совокупность возможных положений и перемещений удовлетворяет условиям непрерывности (121). В естественной свободной системе связи не зависят от положения системы относительно всех не принадлежащих ей масс и не зависят от времени (122).

306. Замечание. Как показывает опыт, определенным таким образом понятиям соответствует действительное содержание. Во-первых, опыт показывает нам, что между реальными массами существуют связи, и именно непрерывные связи. Следовательно, существуют материальные системы в смысле (305).

Мы можем даже утверждать, что другие связи, кроме непрерывных, в природе не имеют места, и что, следовательно, каждая естественная система материальных точек есть материальная система.

Во-вторых, опыт показывает нам, что связи материальной системы могут быть независимы от ее положения относительно других систем и от ее абсолютного положения вообще. Мы можем даже утверждать, что эта независимость наблюдается всегда, когда материальная система пространственно достаточно удалена от всех других систем. Существуют, следовательно, системы, которые имеют только внутренние связи, и мы обладаем также общим методом для изучения и построения таких систем.

Наконец, опыт учит нас, что абсолютное время не влияет на процессы систем природы, которые подчиняются лишь внутренним связям. Каждая такая система подчинена только лишь закономерным связям (119) и является, таким образом, свободной системой. Существуют, следовательно, системы, свободные в смысле (305), и мы можем сконструировать их независимо от тех положений, которые излагаются ниже о свободных системах.

307. Примечание. Закономерные связи свободных систем образуют свойства последних, существующие независимо от времени.

Задача экспериментальной физики — выбрать из бесконечного мира явлений такие конечные группы масс, которые могут существовать самостоятельно как свободные системы, и вывести из этих явлений, протекающих во времени и в связи с другими системами, их независимые от времени свойства.

Раздел 2

ОСНОВНОЙ ЗАКОН

308. В качестве основной задачи механики мы рассматриваем изучение явлений и зависимых от времени свойств материальных систем, выводимых из независимых от времени свойств последних. Для решения этой задачи мы имеем следующий, и только следующий, принятый на основе опыта, основной закон.

309. Основной закон. Всякая свободная система пребывает в своем состоянии покоя или равномерного движения вдоль прямейшего пути.

Systema omne liberum perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directissimam.

310. Замечание 1. Основной закон содержит утверждение, которое относится только к свободным системам. Так как, однако, каждая часть свободной системы может быть несвободной, то из основного закона можно вывести следствия, которые будут относиться и к несвободным системам.

311. Замечание 2. Совокупность следствий, которые можно извлечь из основного закона о свободной системе и о ее несвободных частях, образует содержание механики. Других причин движения, кроме тех, которые вытекают из основного закона, наша механика не знает. Знание основного закона, соответственно нашему пониманию последнего, есть не только необходимое, но также и достаточное условие для решения задач механики и это есть существенная часть нашего утверждения.

312. Замечание 3 (определение). Каждое движение какой-нибудь материальной системы или ее частей, которое происходит в согласии с основным законом, мы называем естественным движением системы в противоположность всем мыслимым и возможным движениям последней (257), (258). Механика, следовательно, имеет дело с естественными движениями свободных материальных систем и их частей.

Замечание 4. Мы считаем явления телесного мира механически, а следовательно, и физически объяснимыми, когда их можно рассматривать как необходимые следствия основного закона и независимых от времени свойств материальных систем. 313.

Замечание 5. Полное объяснение явлений телесного мира требует, таким образом: 1) их механического или физического объяснения; 2) объяснения основного закона; 3) объяснения не зависящих от времени свойств телесного мира. 314.

Однако второе и третье из этих объяснений мы не причисляем к области физики.

ОБОСНОВАННОСТЬ ОСНОВНОГО ЗАКОНА

Основной закон мы рассматриваем как вероятный результат всеобщего опыта, говоря точнее, основной закон является гипотезой или утверждением, заключающим в себе большое количество опытов и не отвергающимся никаким опытом, и который, однако, высказывает больше, чем может быть выявлено в настоящее время путем надежного опыта. Что касается отношения естественных материальных систем к основному закону, то их можно разделить на три класса. 315.

1. Первый класс охватывает такие системы тел или части систем, которые удовлетворяют условиям свободной системы по непосредственному результату опыта и в отношении которых основной закон находит применение без дальнейших оговорок. Сюда относятся, например, твердые тела, движущиеся в пустом пространстве, или идеальные жидкости, движущиеся в замкнутых сосудах. Из опытов над такими системами тел и выводится основной закон. В отношении этого первого класса систем основной закон представляет голый факт опыта. 316.

2. Второй класс охватывает такие системы тел, которые тогда и только тогда подчиняются предпосылкам основного закона или которые тогда и только тогда следуют основному закону, когда к непосредственному чувственному опыту прибавляются некоторые гипотезы о их природе. 317.

а) Сюда принадлежат, во-первых, такие системы, которые, по-видимому, не удовлетворяют условию непрерывности в отдельных положениях, т. е. те системы, в которых происходят удары в самом широком смысле слова.

Здесь достаточна в высшей степени вероятная гипотеза, что все прерывности являются кажущимися и исчезают, как только мы принимаем во внимание достаточно малые пространственные и временные элементы.

б) Сюда, во-вторых, принадлежат такие системы, в которых действуют силы дальнодействия, силы теплоты и другие не всегда полностью понятые причины движения.

Если мы приводим в состояние покоя осязаемые тела таких систем, то они не остаются в этом состоянии, но после освобождения снова начинают двигаться; следовательно, они не подчиняются, видимо, основному закону. Однако здесь можно ввести гипотезу, что осязаемые тела не являются единственными массами, их видимые движения не являются единственными движениями таких систем, но могут существовать еще другие скрытые движения в системах, которые снова сообщаются осязаемым телам, как только мы их вновь освободим. Об этих скрытых движениях можно всегда сделать такие предположения, чтобы полные системы подчинялись основному закону.

В отношении этого второго класса естественных систем основной закон носит характер довольно вероятной и, насколько можно судить, всегда допустимой гипотезы.

318. 3. Третий класс содержит такие системы тел, движения которых нельзя представить как необходимые следствия основного закона и для которых не могут быть даны определенные гипотезы, подчиняющие их основному закону. Сюда относятся, например, такие системы, которые содержат живые существа. Однако наше незнание всех принадлежащих сюда систем настолько велико, что мы не имеем основания утверждать, что невозможно введение соответствующих гипотез и что явления в этих системах противоречат основному закону.

В отношении этого третьего класса системы тел основной закон носит, таким образом, характер лишь допустимой гипотезы.

Примечание. Если допустимо принять, что в природе нет 319.
никаких свободных систем, которые не подчинялись бы основному закону, то допустимо рассматривать вообще каждую систему именно как такую свободную систему или как часть такой системы; при этих предпосылках в природе не будет в действительности существовать никакой системы, движения которой не определились бы при помощи ее связей и основного закона.

ОГРАНИЧЕНИЕ ОСНОВНОГО ЗАКОНА

В системе тел, которая подчиняется основному закону, не суще- 320.
ствует никаких новых движений, а также никаких причин новых движений, но только продолжение уже существующих движений, определенных простейшим способом. Едва ли можно отказаться то того, чтобы не признать такую систему тел неживой, или мертвой.

Если бы мы захотели распространить это положение на всю природу как всеобщую свободную материальную систему и сказать, что вся природа следует с одинаковой скоростью по прямейшему пути, то мы оказались бы в противоречии со здравым смыслом и естественным чувством.

Поэтому более разумно ограничить вероятную значимость основного закона неживой системой. Это совпадает с утверждением, что основной закон, примененный к системам третьего класса (318), является маловероятной гипотезой.

В дальнейшем это соображение не принято во внимание (и нет 321.
необходимости принимать его во внимание), потому что, как мы видели, основной закон и в отношении этих систем представляет гипотезу, если и не вероятную, то во всяком случае допустимую.

Если бы можно было доказать, что живые системы противоречат основному закону, то они выделились бы в результате этого из механики. Одновременно наша механика потребовала бы тогда некоторого дополнения в отношении тех несвободных систем, которые сами хотя и являются неживыми, однако представляют собой части таких свободных систем, которые содержат живые существа. Это допол-

нение могло бы быть дано согласно опытам в следующем виде: живые системы не могут оказывать на неживые системы иного влияния, чем то, которое могло бы быть оказано неживой системой. В соответствии с этим возможно заменить каждую живую систему неживой, которая может представить ее в рассматриваемой проблеме и задание которой необходимо для того, чтобы рассматриваемую проблему сделать чисто механической.

322. Примечание. В обычном представлении механики подобная оговорка считается излишней, и принимается за истину тот факт, что основной закон одинаково охватывает как живую, так и неживую природу. Это допустимо в обычном изложении, так как здесь мы оставляем для сил, входящих в основные законы, самое широкое поле действия и оставляем за собой право провести позже исследование за пределами механики — являются ли силы живой и мертвой природы различными, и какие свойства отличают одни от других. В нашем же изложении следует соблюдать большую осторожность, так как большое число опытов, которые прежде всего относятся к неживой природе, уже включено в основной закон, и возможность более позднего разграничения становится значительно более узкой.

АНАЛИЗ ОСНОВНОГО ЗАКОНА

323. Выбранная формулировка основного закона намеренно примыкает непосредственно к формулировке первого закона движения Ньютона. Эта формулировка содержит три независимых положения, а именно:

1) свободная система не следует другим возможным путям, кроме прямейшего пути;

2) различные свободные системы описывают за одинаковые промежутки времени пропорциональные друг другу длины путей;

3) измеряемое часами время (298) возрастает пропорционально длине пути какой-нибудь движущейся свободной системы.

Только первые два положения содержат опытные факты большой общности. Третье же оправдывает лишь наше произвольное

установление об измерении времени и содержит специальный опыт, а именно, что хронометр в определенном отношении ведет себя как свободная система, хотя, строго говоря, он не является таковым.

МЕТОД ПРИМЕНЕНИЯ ОСНОВНОГО ЗАКОНА

Если ставится определенный вопрос относительно движения 324.
материальной системы, то из следующих трех случаев неизбежно должен иметь место один.

1. Вопрос может быть поставлен таким образом, что основной закон является достаточным для определенного ответа на него. В этом случае проблема является определенной механической проблемой, решение которой получается в результате применения основного закона.

2. Вопрос может быть поставлен таким образом, что основной 325.
закон непосредственно не является достаточным для определенного ответа на него, однако постановка вопроса допускает введение одного или нескольких предположений, при помощи которых делается возможным применение основного закона.

Если возможно одно такое допущение и если мы предполагаем, что проблема является механической, то это допущение правильно; следовательно, проблема может рассматриваться как определенная механическая проблема, решение которой получается в результате применения дополнительного допущения и основного закона.

Если возможно несколько допущений и если мы предполагаем, что проблема вообще является механической, то должно иметь место одно из этих допущений; проблема может рассматриваться как неопределенная механическая проблема и применение основного закона к различным возможным допущениям дает возможное решение.

3. Вопрос может быть поставлен таким образом, что основной 326.
закон не является достаточным для ответа и что никакие допущения, при помощи которых применение основного закона сделалось бы возможным, не могут быть добавлены. В этом случае в самой постановке вопроса должно содержаться противоречие с основным зако-

ном или со свойствами систем, к которым относится вопрос; следовательно, поставленный вопрос вообще не может рассматриваться как механическая проблема.

ПРИБЛИЖЕННОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ОСНОВНОГО ЗАКОНА

327. Замечание. Если из данных уравнений условий системы вместе с основным законом вытекают уравнения, которые имеют форму уравнений условий, то для определения движения системы безразлично, рассматриваем ли мы эти первоначальные уравнения условий или рядом с ними и вместо них выведенные уравнения условий в качестве уравнений связей системы.

Действительно, если мы отбросим из ряда первоначальных уравнений условий все те, которые вытекают аналитически из оставшихся и из выведенных уравнений условий, то оставшимся первоначальным и выведенным уравнениям удовлетворяют только возможные перемещения, хотя, в общем, и не все перемещения, которые были возможны в соответствии с первоначальными уравнениями. Путь, который был прямейшим при первоначальном более широком многообразии, будет тем более таковым при теперешнем более ограниченном многообразии. И так как среди этого более ограниченного многообразия должны оказаться естественные пути, то они будут являться прямейшими среди тех, которые возможны согласно теперешним уравнениям условий, что и требовалось доказать.

328. Следствие 1. Если из опыта мы знаем, что система удовлетворяет фактически некоторым уравнениям условий, то для применения основного закона безразлично, являются ли эти связи первоначальными, т. е. необъяснимыми дальше физически (313), или они являются такими связями, которые могут быть представлены как необходимые следствия других связей и основного закона, которые, следовательно, допускают механическое объяснение.

329. Следствие 2. Если из опыта мы знаем, что определенные уравнения условий материальной системы удовлетворяются только приближенно, а не точно, то так же допустимо рассматривать эти уравнения условий как приближенное представление истинных

связей; тогда мы будем получать, в результате применения основного закона, приближенные представления о движении системы, хотя несомненно, что эти приближенные уравнения условий представляют не первоначальную непрерывную закономерную связь, а могут рассматриваться только как приближенные следствия неизвестных связей и основного закона.

Примечание. На следствии 2 основывается каждое прак- 330.
тическое применение нашей механики. Ибо для всех связей между обычными ощущаемыми массами, которые открывает физика и использует механика, достаточно точное исследование показывает, что они имеют только приближенное значение и поэтому могут быть только производными связями. Мы вынуждены искать в мире атомов последние первоначальные связи, а они нам неизвестны. Но если бы даже они были и известны, то мы должны были бы отказаться от их использования для практических целей и должны были бы поступить так, как мы поступаем. Ибо действительное овладение каждой проблемой требует всегда ограничения рассмотрения чрезвычайно малым числом переменных, в то время как обращение к связям атомов сделало бы необходимым введение бесконечного числа переменных. Тот факт, что мы можем, однако, применять основной закон в указанном нами смысле, не является наряду с основным законом новым фактом опыта, но является необходимым следствием самого основного закона [27].

Раздел 3

ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНЫХ СИСТЕМ. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ДВИЖЕНИЯ

I. ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

Теорема. Естественное движение свободной системы яв- 331.
ляется однозначно определенным через задание положения и скорости системы в определенное время, ибо через положение и направ-

ление скорости путь системы однозначно определен (161). Постоянная скорость системы на ее пути определяется величиной скорости в начальный момент.

332. Следствие 1. Посредством наличного состояния (261) свободной системы однозначно определяются ее будущие состояния и ее предшествующие состояния во все моменты времени.

333. Следствие 2. Если в каком-нибудь положении скорость системы может обращаться (что допустимо с точки зрения уравнений условий), то система будет пробегать положения своего предыдущего движения в обратной последовательности.

334. Замечание 1. В свободной голономной системе (123) всегда существует естественное движение, которое переводит систему в заданное время из произвольно заданного начального положения в произвольно заданное конечное положение. Ибо естественный путь между обоими положениями всегда возможен (192); на этом пути всякая скорость является допустимой, следовательно, также и такая, которая позволяет системе пройти заданный отрезок в заданное время.

335. Примечание. Замечание 1 остается верным, если вместо времени перехода поставить скорость системы на ее пути или энергию системы.

336. Замечание 2. Свободная система, которая не является голономной, не может быть переведена из каждого возможного начального положения в каждое возможное конечное положение при помощи естественного движения (162).

337. Теорема. Естественное движение свободной голономной системы определяется через задание двух положений, в которых система должна находиться в два определенные момента времени, ибо через это задание определяется путь системы и скорость на этом пути.

338. Примечание 1. Определение естественного движения через задание двух его положений является, вообще говоря, многозначным; оно будет однозначным, если расстояние обоих положений не превышает известной конечной меры, а длина описанного пути должна быть порядка этого расстояния (167, 172, 176, 190).

Примечание 2. Естественное движение свободной голономной системы определяется двумя положениями системы и промежутком времени перехода, или скоростью системы на ее пути, или энергией системы. 339.

II. СОХРАНЕНИЕ ЭНЕРГИИ

Теорема. Энергия находящейся в произвольном движении свободной системы не изменяется со временем. 340.

Ибо энергия определяется (282) массой системы, которая не меняется, а также скоростью, которая тоже не меняется.

Примечание 1. Из трех отдельных положений, на которые мы разложили основной закон (323), мы используем для доказательства данной теоремы лишь второе и третье. 341.

Мы можем сделать третье ненужным и сформулировать теорему независимо от определенного характера измерения времени, если мы представим ее в такой форме: отношение энергий каких-нибудь двух любых движений свободной системы не изменяется со временем.

Примечание 2. Закон сохранения энергии есть необходимое следствие основного закона. Наоборот, из закона сохранения энергии вытекает второе отдельное положение этого закона, но не первое, и, следовательно, не весь закон. Можно было бы мыслить естественные системы, для которых имела бы силу теорема о сохранении энергии и которые, тем не менее, не двигались бы по прямейшим путям. Например, можно было бы мыслить, что теорема о сохранении энергии имеет значимость также для живых систем и все-таки последние, несмотря на это, не подчинялись бы нашей механике. Наоборот, возможно представить естественную систему, которая движется по прямейшему пути и для которой, однако, закон сохранения энергии не применим. 342.

Примечание 3. В последнее время высказывают мнение, что энергия движущейся системы связана с определенным местом и перемещается от места к месту. Поэтому энергию сравнивают с материей как в этом смысле, так и в смысле неразрушимости. 343.

Такое понимание энергии очевидно далеко уклоняется от представлений развиваемой здесь механики. С равным правом, однако не с большим, можно сказать: энергия движущейся системы существует в месте системы, как можно сказать: скорость движущегося тела связана с местом последнего. Этот последний способ выражения, однако, никогда не применяется.

III. НАИМЕНЬШЕЕ УСКОРЕНИЕ

344. Теорема. Свободная система движется так, что величина ее ускорения в каждый момент является наименьшей; речь идет об ускорениях, которые согласуются с мгновенным положением, мгновенной скоростью и связями системы. Ибо квадрат величины ускорения равен, согласно (280) и (281),

$$v^4c^2+\dot{v}^2.$$

Так как теперь для естественного движения $\dot{v}=0$ и, следовательно, v имеет постоянное значение, а c имеет наименьшее значение, совместимое с данным направлением движения и связями системы, то ускорение само принимает наименьшее значение, согласующееся с указанными ограничивающими обстоятельствами.

345. Примечание 1. Сформулированное в предыдущей теореме свойство естественного движения определяет это движение однозначно, и поэтому эта теорема может полностью заменить основной закон. Ибо если выражение $v^4c^2+\dot{v}^2$ должно быть наименьшим, то прежде всего должно быть $\dot{v}=0$, следовательно, система проходит путь с постоянной скоростью; далее, или $v=0$, но тогда система находится в покое, или c должно иметь наименьшее возможное для направления пути значение, тогда путь будет прямейшим.

346. Примечание 2. Теорема (344), представленная как основной закон, имеет перед используемой формой также и то преимущество, что она формулирует закон как единое неделимое утверждение, а не как внешнее объединение в одно предложение отдельных положений. Однако используемая форма имеет то преимущество, что она позволяет сделать смысл нашего закона более ясным и отчетливым.

IV. КРАТЧАЙШИЙ ПУТЬ

Теорема. Естественный путь свободной голономной системы 347.
между какими-нибудь двумя достаточно близкими положениями короче, чем какой-нибудь другой возможный путь между теми же положениями. Ибо в голономной системе прямейший путь между достаточно близкими положениями является одновременно кратчайшим (190), (176).

Примечание 1. Если отбросить ограничения в отношении 348.
достаточной близости положений, то уже нельзя утверждать, что естественный путь короче, чем все другие пути, а также, что он короче, чем все соседние пути; однако всегда имеет место утверждение, содержащееся в предыдущей теореме, что вариация длины пути исчезает (190), (171) при переходе к любому близкому возможному пути.

Примечание 2. Предыдущая теорема соответствует прин- 349.
ципу наименьшего действия в форме Якоби. Ибо если мы назовем через m_ν — массу, ds_ν — длину пути какой-либо ν-той точки из n точек системы в определенный момент времени, то теорема выражает, что вариация интеграла

$$\int ds=\frac{1}{\sqrt{m}}\int\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu ds_\nu^2}$$

исчезает при естественном движении системы, а это и есть форма Якоби для принципа наименьшего действия.

Примечание 3. Для того чтобы представить отношение 350.
между теоремой (347) и принципом Якоби, мы можем сказать: соответственно обычному пониманию механики, эта теорема представляет собой частный случай теоремы Якоби, а именно случай, когда силы не действуют.

По нашему мнению, наоборот, предпосылки полной теоремы Якоби следует считать более узкими, а теорема Якоби является специальной формой выражения нашей теоремы.

351. Примечание 4. Теорема (347) не содержит теорему о сохранении энергии ни как предпосылку, ни как следствие, являясь полностью от нее независимой. Вместе с теоремой об энергии она может вполне заменить основной закон, однако лишь для голономных систем. Применяя эту теорему к другим системам, мы также получим определенные движения, но эти движения будут противоречить основному закону (194) и, следовательно, дали бы неправильное решение поставленных механических проблем.

V. КРАТЧАЙШЕЕ ВРЕМЯ

352. Теорема. Естественное движение свободной голономной системы приводит систему из данного начального положения в достаточно близкое конечное положение за более короткое время, чем какое-нибудь другое возможное движение с одинаковым постоянным значением энергии.

Ибо если для всех сравниваемых движений энергия и, следовательно, скорость вдоль пути одинаковы, то время движения пропорционально длине пути. Следовательно, оно наименьшее для кратчайшего пути, которым является естественный путь.

353. Примечание. Если отбросить ограничения относительно достаточной близости положений, то время перехода не будет больше с необходимостью наименьшим, но оно всегда сохраняет свойство быть одинаковым для естественного пути и всех бесконечно близких к нему возможных путей (348).

354. Следствие 1. Для естественного пути свободной голономной системы между данными достаточно близкими концевыми положениями временной интеграл энергии меньше, чем для каких-нибудь других возможных движений с тем же самым постоянным значением энергии. Ибо указанный интеграл равен произведению из данного постоянного значения энергии на промежуток времени перехода.

355. Примечание 1. Теорема (352), в форме следствия (354), соответствует принципу наименьшего действия Мопертюи. Если нужно более точно выразить отношение этой теоремы к принципу Мопертюи, то мы должны воспользоваться (350).

356. Примечание 2. Следствие (354), а также теорема (352) предполагают для сравниваемых друг с другом движений постоянство энергии со временем. Вместе с предположением, что естественное движение находится среди сравниваемых, они достаточны для определения естественного движения и могут заменить основной закон, но только для голономных систем. Их предпосылки, примененные к другим системам, привели бы к неправильным механическим решениям.

357. Следствие 2. Свободная голономная система из своего начального положения в заданное время переносится естественным движением на большее прямейшее расстояние, чем каким-нибудь возможным движением, которое происходит с тем же постоянным значением энергии.

VI. НАИМЕНЬШИЙ ВРЕМЕННОЙ ИНТЕГРАЛ ЭНЕРГИИ

358. Теорема. Временной интеграл энергии при переходе свободной голономной системы из данного начального положения в достаточно близкое конечное положение меньше для естественного движения, чем для любого другого возможного движения, которое переводит систему в одинаковое время из данного начального положения в заданное конечное положение.

Именно, если мы сравним сначала движения на одном и том же пути длины S, то среди них временной интеграл энергии достигает минимума для тех движений, для которых скорость v является постоянной. Ибо, так как сумма величин vdt имеет заданное значение S, то сумма величин v^2dt достигнет тогда и лишь тогда наименьшего значения, если все v равны. Если, однако, скорость v постоянна, то временной интеграл энергии равен $\frac{1}{2}mS^2/T$, где T есть продолжительность перехода. Так как T дано, то для различных путей системы временной интеграл энергии получается как квадрат длины пути; первая величина, таким образом, как

и последняя, имеет минимальное значение для естественного пути.

359. Примечание 1. Если отбросить ограничения о достаточно близких положениях, то временной интеграл энергии не необходимо имеет минимум, однако его вариация всегда исчезает при переходе к другим рассматриваемым движениям (348).

360. Примечание 2. Предыдущая теорема (358) соответствует принципу Гамильтона. Если мы желаем точно сформулировать отношение этой теоремы к принципу Гамильтона, то должны поступить так же, как в (350).

361. Примечание 3. Теорема (358) и следствие (354) согласованы между собой в том, что они среди известных классов возможных движений выделяют естественное движение благодаря одному и тому же признаку, именно, минимальному значению временного интеграла энергии. Однако они существенно различаются друг от друга вследствие того, что рассматривают совершенно различные классы возможных движений.

362. Примечание 4. Теорема о сохранении энергии есть необходимое следствие теоремы (358) и поэтому теорема эта, будучи представлена как принцип, может полностью заменить основной закон, однако лишь применительно к голономным системам. Если отбросить ограничение о голономности системы, то мы получим также определенные, но находящиеся в противоречии с основным законом, движения материальных систем.

363. Обзор (347)—(362). Если мы используем (347), (352), (354), (358), выражающие свойства естественного движения, как принципы для полного или частичного определения этого движения, то мы делаем происходящие в настоящее время изменения в состоянии системы зависимыми от таких особенностей движения, которые могут наступить лишь в будущем и которые часто в жизни человека являются желательными для достижения определенной цели. Это обстоятельство иногда приводило физиков и философов к тому, чтобы усмотреть в законах механики выражение сознательного намерения в отношении будущих целей, свя-

занного с предвидением наиболее целесообразных средств. Такое понимание, однако, не необходимо и даже недопустимо.

Что такое понимание этих принципов не необходимо, 364.
вытекает из того, что свойства естественного движения, являющиеся как бы проявлением цели, на самом деле устанавливаются нами как необходимые следствия закона, в котором не содержится никакого выражения предвидения будущего.

Что указанное понимание принципов недопустимо, следует из 365.
того, что свойства естественного движения, которые являются обозначением стремления к будущему результату, имеются не у всех естественных движений. Если бы природа действительно имела цель достигать кратчайшего пути, наименьшей затраты энергии, кратчайшего времени, то невозможно было бы понять, как могут существовать системы, в которых эта цель хотя и достижима, но природа постоянно терпит неудачу в этом отношении.

Если желают видеть выражение определенной воли в том, 366.
что системы среди всех возможных элементов пути выбирают всегда прямейший, то это слишком свободное понимание. В этом случае выражение определенной воли можно было бы видеть в том, что естественная система среди всех возможных движений выбирает не произвольные движения, но только такие, которые отмечены особыми признаками и которые определимы заранее.

Аналитическое представление. Дифференциальные уравнения движения

Объяснение. Под дифференциальными уравнениями дви- 367.
жения системы мы понимаем дифференциальные уравнения, в которых время является независимым переменным, а координаты системы — зависимыми переменными, и которые вместе с начальным положением и начальной скоростью однозначно определяют движение системы (331).

Задача 1. Представить дифференциальные уравнения движе- 368.
жения свободной системы в прямоугольных координатах последней.

В (155) мы имели дифференциальные уравнения прямейшего пути системы в прямоугольных координатах. В эти уравнения мы введем вместо длины пути время t в качестве независимой переменной. По основному закону $ds/dt = v$ независимо от t и, следовательно, от s; поэтому мы имеем

$$\dot{x}_\nu = x'_\nu \cdot v, \quad \ddot{x}_\nu = x''_\nu \cdot v^2.$$

Если мы умножим уравнение (155d) на mv^2 и напишем для сокращения X_ι вместо $mv^2\Xi_\iota$, то получим для решения задачи $3n$ уравнений

$$m_\nu \ddot{x}_\nu + \sum_{\iota=1}^{i} x_{\iota\nu} X_\iota = 0, \tag{a}$$

которые вместе с i уравнениями (ср. (155b))

$$\sum_{\nu=1}^{3n} x_{\iota\nu}\ddot{x}_\nu + \sum_{\nu=1}^{3n}\sum_{\mu=1}^{3n} \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu}\dot{x}_\nu \dot{x}_\mu = 0 \tag{b}$$

определяют $3n+i$ величин $\ddot{x}_\nu$ и X_ι как однозначные функции x_ν и $\dot{x}_\nu$.

369. Примечание 1. Уравнения движения свободной системы в форме (368) называются обычно уравнениями Лагранжа первого рода.

370. Примечание 2. Каждое отдельное уравнение (368) дает, после того как определим X_ι, компоненту ускорения системы вдоль определенной прямоугольной координаты системы.

371. Задача 2. Выразить дифференциальные уравнения движения свободной системы в обобщенных координатах p_ρ.

Дифференциальные уравнения прямейшего пути, выраженные через p_ρ, мы находим в (158c). В эти последние уравнения вместо длины пути введем время как независимую переменную, а также заметим, что по основному закону

$$\dot{p}_\rho = p'_\rho v, \quad \ddot{p}_\rho = p''_\rho v^2.$$

Следовательно, если мы уравнения (158) умножим на mv^2 и заменим $P_\varkappa$ через $mv^2\Pi_\varkappa$, то получим r уравнений

$$m\left\{\sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma}\ddot{p}_\sigma + \sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{\tau=1}^{r}\left(\frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\rho}\right)\dot{p}_\sigma\dot{p}_\tau\right\} + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho}P_\varkappa = 0, \tag{a}$$

которые вместе с k уравнениями (ср. (158b))

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{\varkappa\rho}\ddot{p}_\rho + \sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r}\frac{\partial p_{\varkappa\rho}}{\partial p_\sigma}\dot{p}_\rho\dot{p}_\sigma = 0 \tag{b}$$

определяют $r+k$ величин $\ddot{p}_\rho$ и $P_\varkappa$ как однозначные функции p_ρ и $\dot{p}_\rho$.

Примечание. Используя соотношение (277), мы запишем 372.
уравнения движения (371a) в форме

$$mf_\rho + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho}P_\varkappa = 0.$$

Если мы предположим, что величины $P_\varkappa$ определены, то каждое из этих уравнений определяет компоненту ускорения системы вдоль координаты p_ρ, выраженную в функции мгновенных положений и скоростей системы.

Следствие 1. Если мы выразим при помощи (291a) компо- 373.
ненту ускорения через энергию, то уравнения движения свободной системы примут вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\rho}\right) - \frac{\partial_p E}{\partial p_\rho} + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho}P_\varkappa = 0.$$

Примечание 1. Дифференциальные уравнения в этой форме 374.
называются обобщенными уравнениями Лагранжа второго рода (ср. (369)).

Примечание 2. Если координата p_ρ является свободной, 375.
то она не встречается в уравнениях условий системы (140); соответ-

ствующие величины p_{χ_ρ} равны нулю, и уравнения движения, отнесенные к v_ρ, принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\rho}\right)-\frac{\partial_p E}{\partial p_\rho}=0.$$

В голономной системе (144) всегда можно уравнения движения представить в этой простой форме.

376. Следствие 2. Уравнения движения свободной голономной системы, для которой имеем r свободных координат p_ρ, можно записать в виде $2r$ уравнений (289), (375)

$$q_\rho=\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\rho}, \qquad \text{(a)}$$

$$\dot{q}_\rho=\frac{\partial_p E}{\partial p_\rho}, \qquad \text{(b)}$$

из которых первые содержат лишь определения, а последние содержат опытные факты. Уравнения движения в этой форме можно понимать как $2r$ дифференциальных уравнений первого порядка для $2r$ величин p_ρ и q_ρ. Эти уравнения вместе с $2r$ начальными значениями определяют величины p_ρ и q_ρ как функции времени.

377. Примечание 1. Уравнения (376a и b) можно назвать уравнениями движения в форме Пуассона.

378. Примечание 2. Из уравнений (376a и b) следует два соотношения:

$$\frac{\partial_p \dot{q}_\rho}{\partial p_\sigma}=\frac{\partial_p q_\sigma}{\partial p_\rho} \text{ и } \frac{\partial_p q_\rho}{\partial p_\sigma}=\frac{\partial_p \dot{q}_\sigma}{\partial \dot{p}_\rho},$$

которые обладают простым физическим смыслом. Оба соотношения содержат элементы опыта и действительны для всякого возможного движения системы; а следовательно, могут быть использованы при определенных обстоятельствах для проверки основного закона.

Третье аналогичное соотношение, выведенное только из (376a), было бы только следствием наших определений.

379. Следствие 3. Уравнения движения свободной голономной системы для любых из r координат p_ρ можно записать в форме $2r$ уравнений (289), (290), (292), (375):

$$\dot{p}_\rho=\frac{\partial_q E}{\partial q_\rho}, \qquad \text{(a)}$$

$$\dot{q}_\rho=-\frac{\partial_q E}{\partial p_\rho}, \qquad \text{(b)}$$

из которых первые содержат лишь определение, а последние экспериментальные факты. Уравнения движения в этой форме можно рассматривать как $2r$ дифференциальные уравнения первого порядка, которые вместе с $2r$ начальными данными определяют величины p_ρ и q_ρ как функции времени.

380. Примечание 1. Уравнения (379, a и b) обычно называют уравнениями движения свободной системы в форме Гамильтона.

381. Примечание 2. Из уравнений (379) следуют два взаимных соотношения:

$$\frac{\partial_q \dot{q}_\rho}{\partial p_\sigma}=\frac{\partial_q \dot{q}_\sigma}{\partial p_\rho}, \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{\partial_q \dot{p}_\rho}{\partial p_\sigma}=-\frac{\partial_q \dot{q}_\sigma}{\partial p_\rho}, \qquad \text{(b)}$$

которые обладают простым физическим смыслом. Оба соотношения содержат элементы опыта и выделяют естественные движения из всех возможных движений. Они могут, таким образом, при особых обстоятельствах подтвердить обратной проверкой основной закон. Третье аналогичное соотношение, которое может быть выведено только из (379a), было бы только следствием наших определений и, таким образом, не имело бы механического смысла. Нужно отметить, что уравнения (378a) и (381a) представляют различные утверждения, а не одно и то же в различной форме.

Внутреннее принуждение системы

382. Теорема. Система материальных точек, между которыми не существует связей, остается в состоянии покоя или равномерного движения вдоль прямого пути. Ибо для такой системы прямой путь есть одновременно прямейший.

383. Следствие 1. Свободная материальная точка пребывает в состоянии покоя или равномерного движения вдоль прямого пути (закон инерции Галилея или первый закон Ньютона).

384. Следствие 2. Ускорение системы материальных точек, между которыми не существует связей, равно нулю. Связи между точками материальной системы можно, таким образом, понимать как причину, вследствие которой ускорение отличается от нуля.

385. Определение. Изменение, которое вызывается в ускорении совокупностью связей материальной системы, называется принуждением. Это изменение называют также внутренним принуждением или просто принуждением системы. Принуждение измеряется разностью между действительным ускорением системы и ускорением того естественного движения, которое имело бы место при снятии всех уравнений условий системы. Оно равно разности первых и последних.

386. Следствие 1. Внутреннее принуждение системы есть, как и ускорение, векторная величина, отнесенная к системе.

387. Следствие 2. В свободной системе внутреннее принуждение равно ускорению системы. Здесь оно является просто ускорением, но в другом понимании (382).

388. Теорема 1. Величина принуждения для естественного движения свободной системы в каждый данный момент меньше, чем для какого-нибудь другого возможного движения, которое в рассматриваемый момент имеет общими с естественным движением положение и скорость. Ибо это утверждение различается лишь по форме от теоремы (344) (см. (387)).

389. Следствие 1. Каждая новая связь, прибавляемая к существующим, увеличивает принуждение системы. Снятие какой-нибудь связи изменяет естественное движение так, что принуждение уменьшается.

390. Примечание 1. Теорема (388) соответствует принципу наименьшего принуждения в форме Гаусса. Чтобы точно выразить отношение к нему, следует поступить так же, как и в (350).

Примечание 2. Принцип Гаусса и закон инерции (383) 391.
вместе могут вполне заменить основной закон и притом для всех систем, ибо они вместе выражают теорему (344).

Теорема 2. Принуждение при естественном движении сво 392.
бодной системы расположено всегда перпендикулярно к каждому возможному или виртуальному перемещению (111) системы из ее положения в данный момент.

Ибо компоненты принуждения вдоль координат p_ρ свободной системы (по 387) равны f_ρ. Следовательно, их можно записать в соответствии с (372) в форме

$$-\frac{1}{m}\sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho}P_\varkappa,$$

т. е. они являются перпендикулярными, в соответствии с (250), каждому возможному перемещению системы.

Символическое выражение. Если обозначить через δp_ρ 393.
изменение координат p_ρ для какого-нибудь произвольного возможного или виртуального перемещения системы, то уравнение

$$\sum_{\rho=1}^{r} f_\rho \delta p_\rho = 0 \qquad \text{(a)}$$

дает символическое выражение теоремы (249). Ибо это уравнение заменяет эту теорему (249) и является символическим, поскольку оно употребляется как символ для бесконечно многих уравнений. Если мы применяем прямоугольные координаты и обозначим через δx_ν изменение x_ν для какого-нибудь возможного или виртуального перемещения, то это уравнение принимает следующий вид:

$$\sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \ddot{x}_\nu \delta x_\nu = 0. \qquad \text{(b)}$$

Примечание 1. Теорема (392) соответствует принципу 394.
д'Аламбера. Уравнения (393a и b) соответствуют обычному изложению этого принципа. Чтобы точно выразить отношение между

этим принципом и теоремой, мы должны были бы поступить так, как в (350).

395. Примечание 2. Из условия, что принуждение расположено перпендикулярно к каждому виртуальному перемещению системы, вытекают согласно (250) уравнения движения свободной системы в форме (372).

Принцип д'Аламбера, следовательно, может сам по себе всегда заменить основной закон, и при этом для всех систем.

Однако использованный нами основной закон имеет перед последним принципом преимущество, состоящее в том, что смысл его более простой и ясный.

396. Следствие 1. В свободной системе ускорение всегда направлено перпендикулярно к каждому возможному перемещению системы из ее мгновенного положения.

397. Следствие 2. При движении свободной системы ускорение всегда расположено перпендикулярно к направлению действительного мгновенного движения.

398. Следствие 3. При движении свободной системы компоненты ускорения в каждом возможном направлении постоянно равны нулю.

399. Следствие 4. Компоненты ускорения свободной системы в направлении любой свободной координаты системы постоянно равны нулю.

400. Теорема. Свободная система движется так, что компоненты ускорения в направлении каждой координаты абсолютного положения всегда равны нулю, какова бы ни была внутренняя связь между точками системы. Ибо какой бы ни была связь системы, каждая координата ее абсолютного положения есть свободная координата (142).

401. Следствие. Если мы выберем координаты свободной системы произвольно, однако так, чтобы среди них находилось шесть координат абсолютного положения (19), то мы можем без знания связи системы или без полного знания ее всегда написать шесть дифференциальных уравнений движения системы.

402. Особый выбор координат. Сделаем следующий выбор координат абсолютного положения, что всегда допустимо для каждой системы [28].

Обозначим через α_1, α_2, α_3 средние арифметические значения тех прямоугольных координат всех материальных частиц, которые соответственно параллельны x_1, x_2, x_3. Величины α_1, α_2, α_3 мы рассматриваем как прямоугольные координаты точки осредненного положения системы, которую мы называем центром тяжести системы.

Проведем через центр тяжести три прямые, параллельные трем осям координат; через эти три прямые и все материальные частицы проведем плоскости и обозначим через ω_1, ω_2, ω_3 среднее арифметическое значение углов всех плоскостей, проходящих через эти прямые с какой-нибудь одной из них. Шесть величин α и ω являются независимыми друг от друга переменными, изменение которых с необходимостью влечет изменение положения системы и которые не определяются только конфигурацией системы. Мы можем, следовательно, эти шесть величин принять в качестве координат абсолютного положения (21) и мы делаем их таковыми, если наряду с ними введем еще координаты конфигурации.

Если мы как-либо изменим α и ω, в то время как остальные координаты будем считать фиксированными, то система будет двигаться, как твердое тело.

Поэтому мы получаем из чисто геометрических оснований для изменения прямоугольных координат, если ν будет пробегать все значения от 1 до n (13), следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} dx_{3\nu} &= d\alpha_1 + (x_{3\nu-1} - \alpha_2)\, d\omega_3 - (x_{3\nu-2} - \alpha_3)\, d\omega_2, \\ dx_{3\nu-1} &= d\alpha_2 + (x_{3\nu-2} - \alpha_3)\, d\omega_1 - (x_{3\nu} - \alpha_1)\, d\omega_3, \\ dx_{3\nu-2} &= d\alpha_3 + (x_{3\nu} - \alpha_1)\, d\omega_2 - (x_{3\nu-1} - \alpha_2)\, d\omega_1. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

Отсюда, если рассматривать x_ν как функции всех этих координат, найдем значения частных производных x_ν по α и ω; так например,

$$\frac{\partial x_{3\nu}}{\partial \alpha_1} = 1, \qquad \frac{\partial x_{3\nu}}{\partial \alpha_2} = 0, \qquad \frac{\partial x_{3\nu}}{\partial \alpha_3} = 0, \qquad \text{(b)}$$

$$\frac{\partial x_{3\nu}}{\partial \omega_1} = 0, \qquad \frac{\partial x_{3\nu}}{\partial \omega_2} = -(x_{3\nu-2} - \alpha_3), \qquad \frac{\partial x_{3\nu}}{\partial \omega_3} = x_{3\nu-1} - \alpha_2. \qquad \text{(c)}$$

403. Следствие 1. На основе замечания, что ускорения системы по координатам α_1, α_2, α_3 должны равняться нулю (400), получены три уравнения:

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \ddot{x}_{3\nu} = 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \ddot{x}_{3\nu-1} = 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \ddot{x}_{3\nu-2} = 0.$$

Ибо, по (242) и (275), ускорение по координате α_1 центра тяжести равняется

$$\sum_{\nu=1}^{3n} \frac{\partial x_\nu}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{m_\nu}{m} \ddot{x}_\nu,$$

следовательно, согласно (402b) оно равняется

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{m_\nu}{m} \ddot{x}_{3\nu};$$

соответствующие выражения имеются для α_2 и α_3.

404. Примечание. Три уравнения (403) после двукратного интегрирования выражают ту теорему, что центр тяжести свободной системы должен находиться в равномерном и прямолинейном движении, т. е. выражают так называемый закон движения центра тяжести.

405. Следствие 2. На основании замечания, что ускорения системы по координатам ω_1, ω_2, ω_3 должны исчезнуть (400), мы получим три уравнения:

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_{3\nu-2}\ddot{x}_{3\nu-1} - x_{3\nu-1}\ddot{x}_{3\nu-2}) = 0,$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_{3\nu}\ddot{x}_{3\nu-2} - x_{3\nu-2}\ddot{x}_{3\nu}) = 0,$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_{3\nu-1}\ddot{x}_{3\nu} - x_{3\nu}\ddot{x}_{3\nu-1}) = 0,$$

ибо согласно (242) и (275) ускорение по ω_1 равно

$$\sum_{\nu=1}^{3n} \frac{\partial x_\nu}{\partial \omega_1} \cdot \frac{m_\nu}{m} \ddot{x}_\nu.$$

Следовательно, на основании (402c), оно равно

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{m_\nu}{m} \{(x_{3\nu-2} - \alpha_3)\ddot{x}_{3\nu-1} - (x_{3\nu-1} - \alpha_2)\ddot{x}_{3\nu-2}\}$$

или, в результате использования (403),

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{m_\nu}{m} (x_{3\nu-2}\ddot{x}_{3\nu-1} - x_{3\nu-1}\ddot{x}_{3\nu-2}).$$

Аналогичные выражения имеем и для ускорения по ω_2 и ω_3.

406. Примечание. Уравнения (405) содержат так называемый закон площадей.

Интегрирование этих трех уравнений приводит непосредственно к следующим дифференциальным уравнениям первого порядка:

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_{3\nu-2}\dot{x}_{3\nu-1} - x_{3\nu-1}\dot{x}_{3\nu-2}) = \text{const},$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_{3\nu}\dot{x}_{3\nu-2} - x_{3\nu-2}\dot{x}_{3\nu}) = \text{const},$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_{3\nu-1}\dot{x}_{3\nu} - x_{3\nu}\dot{x}_{3\nu-1}) = \text{const},$$

геометрический смысл которых состоит в следующем (чем и оправдывается название закона): если мы соединим начало координат с каждой материальной частицей системы радиусом-вектором, то сумма проекций площадей, описываемых этими радиусами-векторами, на три координатные плоскости возрастает пропорционально времени.

407. Примечание 1 (от (402) до (406)). Закон сохранения центра тяжести и закон площадей мы ввели как особые случаи общей

теоремы (400). Мы не имели бы на это никакого права, если бы (как это иногда делается) рассматривали в качестве существенного содержания этих законов тот факт, что они дают интегралы уравнений движения.

Такая точка зрения кажется нам уже потому недопустимой, что результат теоремы площадей лишь в переносном смысле можно назвать интегралом. В качестве существенного содержания этих принципов мы рассматриваем (как нам кажется, с большим правом) то, что они дают соотношения, имеющие всеобщее значение независимо от особенностей связей системы.

408. Примечание 2 (от (402) до (406)). При выводе теоремы о центре тяжести и теоремы площадей как особого случая теоремы (400) мы не воспользовались всеми свойствами, которыми обладают по определению α и ω.

Указанные теоремы мы могли бы вывести также и при использовании других координат, например, координат, которые имеют с α и ω одинаковые направления, но не тождественны им.

Вообще при произвольном выборе координат мы не всегда получим шесть таких уравнений, которые давали бы новый физический смысл или были полностью независимыми от (405) и (403); это были бы уравнения, которые получаются из уравнений (403) и (405) в результате введения выбранных координат. Однако для всех этих различных форм теорема (400) дает общее выражение и физический смысл.

Голономные системы

409. Замечание. Если для голономной системы известно прямейшее расстояние (217), то уравнение прямейшего пути можно представить в конечной форме (225). Эти пути являются естественными путями, если система свободная, и все движения, при которых она перемещается вдоль этого пути с постоянной скоростью, являются естественными движениями.

Уравнения движения свободной голономной системы можно представить, следовательно, в конечной форме.

410. Задача. Представить уравнения движения свободной голономной системы при помощи прямейших расстояний.

Пусть S есть прямейшее расстояние системы, представленное как функция свободных координат $p_{\rho 0}$ и $p_{\rho 1}$, ее начального и конечного положений; t_0 — момент времени, в который система проходит начальное положение, а t_1 — момент времени, в который она проходит конечное положение.

Тогда $t_1 - t_0$ есть продолжительность перехода, следовательно,

$$v = \frac{S}{t_1 - t_0} \tag{a}$$

есть постоянная скорость системы на ее пути.

Следовательно, ее энергия будет

$$E = \frac{1}{2} m \frac{S^2}{(t_1 - t_0)^2}, \tag{b}$$

и ее количества движения $q_{\rho 0}$ и $q_{\rho 1}$ в моменты времени t_0 и t_1 будут:

$$\left.\begin{aligned} q_{\rho 0} &= m \frac{S}{t_1 - t_0} \sqrt{a_{\rho\rho 0}} \cos \widehat{sp_{\rho 0}}, \\ q_{\rho 1} &= m \frac{S}{t_1 - t_0} \sqrt{a_{\rho\rho 1}} \cos \widehat{sp_{\rho 1}}. \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

Для уравнений прямейшего пути мы имеем две формы уравнений (224a) и (226a). Если мы умножим последние на $mS/(t_1 - t_0)$ или, что то же самое (в соответствии с b), на $\sqrt{2mE}$, то получим следующие четыре группы r уравнений:

$$q_{\rho 1} = \frac{1}{2} \frac{m}{t_1 - t_0} \frac{\partial S^2}{\partial p_{\rho 1}}, \tag{d}$$

$$q_{\rho 0} = -\frac{1}{2} \frac{m}{t_1 - t_0} \frac{\partial S^2}{\partial p_{\rho 0}}, \tag{e}$$

$$q_{\rho 1} = \sqrt{2mE} \frac{\partial S}{\partial p_{\rho 1}}, \tag{f}$$

$$q_{\rho 0} = -\sqrt{2mE} \frac{\partial S}{\partial p_{\rho 0}}. \tag{g}$$

Следовательно, наша задача вполне разрешается и притом несколькими способами. Ибо если мы рассматриваем t_1 как переменное время и, следовательно, $p_{\rho 1}$ — как координаты положения, изменяющегося со временем, то r уравнений (e) определяют r координат как конечные функции t_1.

То же самое дают уравнения (g), если мы прибавим к ним еще соотношения между E и t_1, т. е. уравнения (b). $2r$ величин $p_{\rho 0}$ и $q_{\rho 0}$ играют при этом роль $2r$ произвольных постоянных. При подобном же методе рассмотрения уравнения (d) или (f) и (b) дают нам уравнения движения системы, а именно, как дифференциальные уравнения первого порядка, в которых r величин $p_{\rho 0}$ играют роль произвольных постоянных.

Или, если рассматривать, что является не менее допустимым, момент t_0 как переменное время, следовательно, положение 0 как переменное положение, то уравнения (d), а также и (f) и (b) представляют уравнения движения в конечной форме с моментом времени t_0 как независимым переменным и с $p_{\rho 0}$ как зависимыми переменными. $p_{\rho 1}$ и $q_{\rho 1}$ являются $2r$ произвольными постоянными. Одновременно уравнения (e), а также (g) и (b) представляют, кроме того, уравнения движения в виде дифференциальных уравнений первого порядка, в которых $p_{\rho 1}$ играет роль r произвольных постоянных.

411. Следствие 1. Если положим

$$\sqrt{2Em} \cdot S = V \tag{a}$$

и будем рассматривать V как функцию $p_{\rho 0}$, $p_{\rho 1}$, то можно естественные движения системы представить в виде

$$q_{\rho 1} = \frac{\partial V}{\partial p_{\rho 1}}, \tag{b}$$

$$q_{\rho 0} = -\frac{\partial V}{\partial p_{\rho 0}}, \tag{c}$$

$$t_1 - t_0 = \frac{\partial V}{\partial E}. \tag{d}$$

Ибо уравнения (b) и (c) совпадают с уравнениями (410 f и g) и уравнения (d) следуют из уравнения (a) и (410 b).

Примечание. Функция V является Гамильтоновой характеристической функцией системы. Такая функция имеется, следовательно, лишь для голономных систем. Характеристическая функция, соответственно ее механическому смыслу, дает удвоенное значение временнóго интеграла энергии, который имеет место, когда система с заданной энергией переходит из данного начального в заданное конечное положение, и который рассматривается как функция этой энергии и координат начального и конечного положения. Ибо, согласно уравнениям (411a) и (410b), функция V по своему значению определяется уравнением 412.

$$V = 2E(t_1 - t_0),$$

формальное же ее выражение будет дано тогда, когда мы в правой части уравнения продолжительность перехода $t_1 - t_0$ выразим как функцию E, $p_{\rho 1}$ и $p_{\rho 0}$.

Теорема. Характеристическая функция V свободной голономной системы удовлетворяет дифференциальным уравнениям первого порядка 413.

$$\frac{1}{2m} \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma 1} \frac{\partial V}{\partial p_{\rho 1}} \frac{\partial V}{\partial p_{\sigma 1}} = E,$$

$$\frac{1}{2m} \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma 0} \frac{\partial V}{\partial p_{\rho 0}} \frac{\partial V}{\partial p_{\sigma 0}} = E.$$

Они получаются умножением уравнений (227) для прямейшего расстояния на $2mE$ с учетом уравнения (411a).

Следствие 2. Если положим 414.

$$\frac{mS^2}{2(t_1 - t_0)} = P, \tag{a}$$

и будем рассматривать P как функцию $p_{\rho 0}$, $p_{\rho 1}$, t_0 и t_1, то уравнения

$$q_{\rho 1} = \frac{\partial P}{\partial p_{\rho 1}} \tag{b}$$

и

$$q_{\rho 0} = -\frac{\partial P}{\partial p_{\rho 0}}$$

будут представлять естественные движения системы.

Энергию E можно получить из P непосредственно уравнениями

$$E = -\frac{\partial P}{\partial t_1} = \frac{\partial P}{\partial t_0}. \qquad \text{(d)}$$

Ибо уравнения (b) и (c) соответствуют уравнениям (410 d и e), а уравнения (d) следуют из уравнений (a) и (410b).

415. Примечание. Введенная функция P является Гамильтоновой главной функцией системы. Она обозначена самим Гамильтоном через S. Такая функция существует лишь для голономной системы.

Главная функция, соответственно ее механическому смыслу, дает значение временного интеграла энергии при переходе системы в заданное время из заданного начального в заданное конечное положение, рассматриваемое как функция времени перехода, а также координат начального и конечного положения. Ибо, согласно уравнениям (414a) и (410b), функция P, что касается ее величины, выражается уравнением

$$P = E(t_1 - t_0),$$

а что касается ее формы, то она получается тогда, когда в правой части мы представим E как функцию $p_{\rho 1}$, $p_{\rho 0}$, t_1 и t_0.

416. Теорема. Главная функция свободной голономной системы удовлетворяет следующим дифференциальным уравнениям первого порядка:

$$\frac{1}{2m}\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma 1}\frac{\partial P}{\partial p_{\rho 1}}\frac{\partial P}{\partial p_{\sigma 1}} = -\frac{\partial P}{\partial t_1},$$

$$\frac{1}{2m}\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma 0}\frac{\partial P}{\partial p_{\rho 0}}\frac{\partial P}{\partial p_{\sigma 0}} = \frac{\partial P}{\partial t_0}.$$

Последние получаются, если уравнения (227) мы умножим на (410b):

$$\frac{mS^2}{2(t_1 - t_0)} = E,$$

и примем во внимание соотношения (414 a и d).

Примечание к (411)—(416). Подобно тому как в (232)—(236) 417.
мы рассматривали, исходя из дифференциальных уравнений (227), функции, родственные прямейшему расстоянию и эквивалентные ему в аналитическом отношении, но не имевшие столь же простого геометрического смысла, мы можем точно так же, исходя из дифференциальных уравнений (413) и (416), придти к функциям, родственным характеристической и главной функциям, полезным в аналитическом отношении и даже имеющими известные преимущества перед последними, но физический смысл которых несколько затуманен математической формой выражения. Эти функции уместно было бы назвать главной и характеристической функциями Якоби.

Впрочем ясно, что даже в характеристической и главной функциях содержится только слегка завуалированный простой смысл прямейшего расстояния, так что введение этих функций наряду с прямейшим расстоянием имеет небольшое значение для вполне известных свободных систем.

Динамические модели

Определение. Материальная система называется динами- 418.
ческой моделью другой системы, если можно представить связи первой системы через такие координаты, что удовлетворяются следующие условия:

1) число координат первой системы равно числу координат второй системы;

2) при подходящем согласовании координат обеих систем существуют одинаковые уравнения условий;

3) при указанном согласовании координат выражения для величины перемещений в обеих системах являются соответственно согласованными.

Согласованные друг с другом координаты обеих систем называются соответственными.

Соответственными положениями, перемещениями и т. д. называются такие положения, перемещения и т. д. обеих систем, к которым принадлежат одинаковые значения соответственных координат и их изменения.

419. Следствие 1. Если одна система есть модель другой системы, то и наоборот — вторая система есть модель первой.

Если две системы являются моделями третьей, то они являются также моделями одна другой. Модель модели данной системы является также моделью первоначальной системы.

Все системы, которые являются моделями друг друга, называются динамически подобными.

420. Следствие 2. Свойство одной системы быть моделью другой не зависит от выбора координат одной или другой системы, хотя при специальном выборе координат это свойство выступает с большей отчетливостью.

421. Следствие 3. Система еще не вполне определяется только тем, что она является моделью заданной системы. Бесконечно многие, физически полностью различные системы могут быть моделью одной и той же системы. Одна и та же система может быть моделью бесконечного множества систем, совершенно различных между собой.

Ибо координаты масс обеих систем, которые являются моделями друг друга, могут быть по своему числу совершенно различными и совершенно различными функциями соответственных координат.

422. Следствие 4. Модели голономной системы являются сами голономными системами. Модели неголономных систем сами являются неголономными системами.

423. Замечание. Чтобы голономная система была моделью другой, достаточно выбрать такие свободные координаты обеих систем, чтобы выражения перемещения обеих систем были одинаковыми.

Теорема. Если две модели имеют в определенное время 424.
соответственные друг другу состояния, то они имеют соответственные состояния и в каждый другой момент времени.

Ибо благодаря уравнениям условий системы, выражению для величины перемещения (164) и начальным значениям координат и их изменений (332) изменение этих координат является определенным в любое время, какой бы функцией координат ни являлось положение масс системы.

Следствие 1. Чтобы предвидеть характер естественного 425.
движения материальной системы, достаточно знание модели этой системы. Модель при известных условиях может быть значительно проще самой системы, движение которой она представляет.

Следствие 2. Если некоторые величины есть соответствен- 426.
ные координаты материальных систем, являющихся моделями друг друга, и если доступны наблюдению только эти соответственные координаты, то все эти системы не являются различными друг от друга в отношении ограниченного наблюдения, но проявляются как одинаковые системы, каким бы различным в них ни было число и связь материальных точек.

Поэтому невозможно только из наблюдения естественного движения свободной материальной системы, т. е. без прямого определения ее масс (300), получить более полное знание связи системы, чем это требуется для того, чтобы отнести модель к самой системе.

Примечание 1. Если мы допустим, что кроме непосред- 427.
ственно, т. е. определяемых весами, масс, в системах природы могут существовать еще другие гипотетические массы (301), то вообще невозможно проникнуть глубже в познание связей естественной системы, чем это требуется для того, чтобы отнести модель к самой системе. Невозможно будет, вообще говоря, продвинуться в познании связей естественных систем дальше указания модели действительных систем.

Фактически мы не можем знать, совпадают ли системы, которые мы рассматриваем в механике, с действительными системами

природы, которые мы желаем познать, в чем-либо другом, кроме того, что одни являются моделями других.

428. Примечание 2. Отношение динамической модели к системе, моделью которой она считается, такое же, как отношение образов, которые создает наш ум о вещах, к самим вещам. Именно, если мы будем рассматривать состояние модели как отображение состояния системы, то следствия отображения, которые должны наступить по законам этого отображения, будут одновременно отображением следствий, которые должны появиться у первоначального предмета по законам этого первоначального предмета. Соответствие между умом и природой может, таким образом, сравниваться с соответствием между двумя системами, которые являются моделями одна другой, и мы можем даже дать себе отчет об этом соответствии, если примем, что ум имеет способность образовывать действительные динамические модели вещей и оперировать с ними.

Раздел 4.

ДВИЖЕНИЕ НЕСВОБОДНОЙ СИСТЕМЫ

429. Предварительное замечание 1. По нашему представлению каждая несвободная система есть часть большей свободной системы. Несвободные системы, для которых это положение не выполняется, не могут быть получены. Такую несвободную систему мы будем называть частичной системой, а свободную систему, часть которой она составляет, будем называть полной системой.

430. Предварительное замечание 2. Рассматривая часть свободной системы как несвободную систему, мы предполагаем, что остальная система нам неизвестна, так что непосредственное применение основного закона становится невозможным. Этот недостаток нашего знания мы должны восполнить посредством каких-нибудь специальных указаний. Такие указания можно

сделать различным образом. Не исчерпывая всех возможностей, мы укажем только две формы, которые имели до сих пор в развитии механики особое значение.

Первая форма есть та, при которой мы обозначаем движение несвободной системы как ведомое; вторая форма является такой, при которой мы говорим, что движение несвободной системы подвергается влиянию сил.

I. ВЕДОМАЯ НЕСВОБОДНАЯ СИСТЕМА

Определение. Ведомым движением несвободной системы 431.
называется каждое движение, которое система имеет тогда, когда остальные массы полной системы совершают вполне определенные предписанные движения. Систему, которая выполняет ведомое движение, называют ведомой системой.

Добавление 1. Возможным движением ведомой системы 432.
называется каждое движение последней, которое не противоречит связям полной системы и определенным движениям остальных масс системы.

Добавление 2. Естественным движением ведомой системы 433.
называется каждое движение последней, которое вместе с определенными движениями остальных масс образует естественное движение полной системы.

Задача. Представить аналитически возможное движение 434.
ведомой системы.

Пусть r величин p_ρ будут обобщенные координаты рассматриваемой частичной системы и $\mathfrak{r}$ величин $\mathfrak{p}_\rho$ — какие-нибудь координаты остальных масс полной системы. $r+\mathfrak{r}$ величин p_ρ и $\mathfrak{p}_\rho$ есть координаты полной системы, связи которых представляются уравнениями вида

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{\varkappa\rho}\dot{p}_\rho + \sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{p}_{\varkappa\rho}\dot{\mathfrak{p}}_\rho = 0, \qquad \text{(a)}$$

где $p_{\varkappa\rho}$ и $\mathfrak{p}_{\varkappa\rho}$ могут быть функциями как p_ρ, так и $\mathfrak{p}_\rho$.

Если теперь движения масс, координаты которых $\mathfrak{p}_\rho$ определены, то тогда все $\mathfrak{p}_\rho$ являются известными функциями времени.

В таком случае часть уравнений (a) выполняется тождественно при помощи этих функций, а часть принимает форму r уравнений

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{x\rho}\dot{p}_\rho + p_{xt} = 0 \qquad \text{(b)}$$

или

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{x\rho}dp_\rho + p_{xt}dt = 0,$$

которые называются уравнениями условий ведомой системы и в которых $p_{x\rho}$ и p_{xt} являются теперь функциями лишь p_ρ и времени t. Все возможные движения ведомой системы удовлетворяют этим уравнениям и все движения, которые им удовлетворяют, есть возможные движения.

435. Примечание 1. Если ведомая система есть система голономная, то дифференциальные уравнения (b) и (c) можно заменить таким же числом конечных уравнений между r координатами и временем t. Возможные положения ведомой голономной системы можно представить через координаты, которые не подчиняются другим условиям, кроме того, что некоторые из них являются заданными функциями времени.

436. Примечание 2. Уравнения условий ведомой системы вообще содержат, следовательно, время и поэтому они не удовлетворяют требованию закономерности (119).

Наоборот, если мы рассматриваем теперь любую систему, уравнения которой, согласно обычному способу выражения механики, содержат в явном виде время и, выражаясь нашим языком, являются незакономерными, то ее можно рассматривать в качестве ведомой системы, следовательно, в качестве системы, которая вместе с другими неизвестными массами удовлетворяет условиям закономерности.

Если это предположение допустимо, то проблема делается определенной механической проблемой (325).

Если же это предположение при особых формах уравнений условий недопустимо, то эти уравнения условий содержат уже противоречие с основным законом или с его предпосылками, и все

отнесенные к системе вопросы не составят, следовательно, механической проблемы (326).

Примечание 3. К ведомым системам основной закон непо- 437.
средственно неприложим, ибо понятие прямейшего пути определено лишь для закономерных связей (120).

Внутренние связи ведомой системы, однако, незакономерны и, следовательно, должны быть найдены другие признаки, которые отличали бы естественные движения ведомой системы от других возможных движений.

Теорема 1. Ведомая система, подобно свободной системе, 438.
движется так, что величина ее ускорения остается для действительного движения меньше, чем для любого другого движения, которое удовлетворяет уравнениям условий системы и которое в данный момент совпадает по положению и скорости с действительным движением.

Ибо квадрат величины ускорения (275) полной системы равен сумме квадратов соответствующих величин для рассматриваемой частичной системы и для остальной части полной системы, умноженных на массы этих частичных систем и деленных на массу полной системы. Эта сумма по (344) должна быть минимальной.

Второе слагаемое уже известно и предполагается такой функцией времени, для которой выполняется минимум суммы (436). Следовательно, этот минимум достигается тогда и только тогда, когда первое слагаемое есть также минимум.

Теорема 2. Подобно свободной системе, ведомая голономная 439
система движется так, что временной интеграл энергии при переходе между двумя достаточно близкими соседними положениями для действительного движения меньше, чем для какого-нибудь другого движения, которое удовлетворяет уравнениям условий и переводит систему за равное время из заданного начального положения в конечное.

Ибо временной интеграл энергии полной системы равен сумме соответствующих величин для рассматриваемой частичной системы и для остальной части полной системы. Эта сумма по (358) должна быть минимальной.

Второе слагаемое предполагается уже определенным и таким, которое обеспечивает минимум суммы; этот минимум выполняется лишь тогда, когда первое слагаемое также делается минимумом.

440. Примечание 1. Обе предыдущие теоремы (438) и (439) содержат, очевидно, приспособление теорем (344) и (358) к особым предпосылкам этого раздела. При помощи обычного способа выражения механики мы можем их содержание выразить в такой форме: закон наименьшего ускорения и принцип Гамильтона сохраняют значение и в том случае, когда уравнения условий системы явно содержат время.

441. Примечание 2. Законы сохранения энергии, кратчайшего пути и кратчайшего времени (340), (347), (352) не могут быть прямо применены к условиям ведомой системы. В обычном способе выражения механики это положение принимает такую форму: принцип энергии и принцип наименьшего действия теряют свое значение, если уравнения условий системы явно содержат время.

442. Задача. Составить дифференциальные уравнения движения ведомой системы.

Пусть m — масса, p_ρ — координаты и f_ρ — ускорения вдоль p_ρ ведомой системы. Пусть далее $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{p}_\rho$ — те же величины для остальных материальных точек полной системы.

Величины p_ρ и $\mathfrak{p}_\rho$ могут служить также координатами полной системы. В этом случае компоненты ускорения полной системы вдоль этих координат можно обозначить как f'_ρ и $\mathfrak{f}'_\rho$. Тогда движение полной системы однозначно определяется через h уравнений условий вида (434a) и через $r+\mathfrak{r}$ уравнений движения вида (372):

$$(m+\mathfrak{m})\,f'_\rho+\sum_{\varkappa=1}^{h} p_{\varkappa\rho}P_\varkappa=0, \tag{a}$$

$$(m+\mathfrak{m})\,\mathfrak{f}'_\rho+\sum_{\varkappa=1}^{h} \mathfrak{p}_{\varkappa\rho}P_\varkappa=0. \tag{b}$$

По предположению мы считаем $\mathfrak{p}_\rho$ уже известными функциями времени, при помощи которых уравнения (b) выполняются тождественно и при введении которых в h уравнений условий полной

системы последние переходят в k уравнений условий (434b) ведомой системы. Далее мы имеем, согласно (255),

$$(m+\mathfrak{m})\,f'_\rho=mf_\rho. \tag{c}$$

В соответствии с этим мы получаем r уравнений движения

$$mf_\rho+\sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho}P_\varkappa=0, \tag{d}$$

и k уравнений условий

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{\varkappa\rho}\dot{p}_\rho+p_{\varkappa t}=0; \tag{e}$$

$(r+k)$ этих уравнений уже не содержат неизвестных масс полной системы и, следовательно, они достаточны для определения $r+k$ величин $\ddot{p}_\rho$ и $P_\varkappa$. Таким образом, эти $(r+k)$ уравнений и представляют решение поставленной задачи.

443. Следствие 1. Дифференциальные уравнения движения ведомой системы имеют ту же форму, что и дифференциальные уравнения свободной системы.

Говоря языком обычной механики, можно сказать, что законность этой формы не зависит от того, содержат ли уравнения условий время в явном виде или нет. Поэтому уравнения движения ведомой системы допускают такие же преобразования, как и уравнения движения свободной системы ((368) и далее). Однако эта форма теряет применимость, когда все координаты предполагаются свободными.

444. Следствие 2. Естественное движение ведомой системы является однозначно определенным посредством задания положения и скорости системы в определенный момент времени (ср. (331)).

445. Замечание. Подобно свободной системе, в ведомой системе принуждение равно ее ускорению.

Ибо если совокупные уравнения условий ведомой системы снимаются, то материальные точки системы делаются свободными точками и ускорение естественного движения системы становится равным нулю (385).

446. Теорема 1. Для естественного движения ведомой системы, как и для свободной системы, величина принуждения в каждый момент меньше, чем для какого-нибудь другого возможного движения, которое в рассматриваемый момент времени имеет положение и скорость, одинаковые с естественным движением. Теорема эта следует из (445) и (438).

447. Теорема 2. Как при естественном движении свободной системы, так и при естественном движении ведомой системы направление принуждения перпендикулярно к каждому возможному или виртуальному перемещению системы из ее мгновенного положения. Эта теорема следует из (445) и (442), как и в (392).

448. Примечание Обе предыдущие теоремы (446) и (447) содержат приспособление теорем (388) и (392) к особым условиям ведомой системы. Их содержание на языке обыкновенной механики выражается так: принцип наименьшего принуждения Гацеса и принцип д'Аламбера сохраняют свое значение и для случая, когда уравнения условий содержат явно время.

449. Замечание. Если координаты $\mathfrak{p}_\rho$ полной системы, входящие вместе с p_ρ в уравнения (437а), являются постоянными, то уравнения условий ведомой системы принимают вид

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{\varkappa\rho}\dot{p}_\rho = 0,$$

где $p_{\varkappa\rho}$ времени не содержит. Ведомая система в этом случае является закономерной, однако, вообще говоря, она остается несвободной, ибо $p_{\varkappa\rho}$ могут быть функциями абсолютного положения, в то время как в уравнениях условий свободной системы они не зависят от абсолютного положения.

В таких несвободных закономерных системах понятие прямейшего пути сохраняет свое значение. Поэтому и основной закон применим к таким системам и, следовательно, для них сохраняют свое значение все теоремы для движений свободных систем, за исключением тех, которые относились к абсолютному положению, т. е. все, за исключением теоремы (400) и ее следствий [29].

II. СИСТЕМА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛ [30]

Определение. Две материальные системы называются непосредственно или прямо соединенными, если одна или несколько координат одной системы длительно равны одной или нескольким координатам другой. 450.

Две системы называются соединенными, если их координаты можно выбрать так, что соединение систем будет прямым. Соединенные системы, не подходящие под данное определение, называются косвенно соединенными.

Следствие 1. Соединение двух систем есть взаимоотношение между обеими системами, которое существует независимо от нашей воли и, в частности, от выбора координат. Однако является ли существующее соединение прямым или косвенным, зависит от выбора координат, и, следовательно, это вопрос нашего произвольного определения. 451.

Следствие 2. Соединение, существующее между двумя системами, можно путем определенного выбора координат представить в виде прямого соединения. Дальше мы всегда будем предполагать наличие этого свойства, если специально не оговорено противоположное. 452.

Координаты двух соединенных систем, которые всегда равны, мы называем их общими координатами.

Следствие 3. Каждая из двух соединенных систем является в результате существования этого соединения несвободной системой. Совокупность двух или нескольких несвободных систем образует свободную систему. Если противоположное специально не отмечается, то дальше мы будем предполагать, что две соединенные системы уже образуют свободную систему, без необходимости привлекать третьи системы. 453.

Аналитическое представление. Если p_ρ есть координата одной, а $\mathfrak{p}_\rho$ — координата другой системы, то соединение между обеими системами выражается в том, что для одной или многих пар значений индексов ρ и σ, координаты p_ρ и $\mathfrak{p}_\rho$ делаются равными. Мы можем, однако, без ущерба для общности распределить 454.

индексы таким образом, что совпадающие координаты в обеих системах получают один и тот же индекс. Тогда системы будут соединенными в том случае, когда для одного или нескольких значений ρ имеется постоянно

$$\mathfrak{p}_\rho - p_\rho = 0. \tag{a}$$

Отсюда следует еще два уравнения:

$$\dot{\mathfrak{p}}_\rho = \dot{p}_\rho = 0, \tag{b}$$

$$d\mathfrak{p}_\rho - dp_\rho = 0. \tag{c}$$

455. Определение. Под силой мы понимаем самостоятельно рассматриваемое действие, которое одна из двух соединенных систем оказывает на движение другой вследствие основного закона.

456. Следствие. Каждой силе всегда необходимо соответствует «противосила» (противодействие). Ибо система, обозначенная в определении второй, оказывает на первую систему влияние, которое по самому определению является силой. Сила и противосила равноправны в том смысле, что каждая из них может быть понимаема и как сила и как «противосила».

457. Задача. Получить аналитическое выражение для влияния, которое одна из двух соединенных систем оказывает на движение другой.

Пусть m — есть масса, а r — величина p_ρ координаты первой системы, и пусть k уравнений условий этой системы будут

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{\varkappa\rho}\dot{p}_\rho = 0. \tag{a}$$

Пусть далее $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{p}_\rho$ суть те же величины для второй системы и $\mathfrak{k}$ уравнений условий ее имеют вид

$$\sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{p}_{\varkappa\rho}\dot{\mathfrak{p}}_\rho = 0. \tag{b}$$

Пусть, кроме того, между обеими системами существует несколько, например h уравнений соединения в форме

$$\mathfrak{p}_\rho - \dot{p}_\rho = 0. \tag{c}$$

Рассмотрим теперь действительное движение первой системы под влиянием второй и будем представлять ее как ведомую систему. Так как координаты p_ρ не встречаются в уравнениях (c), то ускорения вдоль них выражаются уравнением (442)

$$mf_\rho + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho}P_\varkappa = 0. \tag{d}$$

Однако для тех p_ρ, которые встречаются в (c), мы должны учитывать также уравнения (c) и, следовательно, умножить коэффициент при $\dot{p}_\rho$ в них, т. е. — 1, на неопределенный множитель, который обозначим P_ρ, и прибавить это произведение к левой части уравнения. Тогда получим

$$mf_\rho + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho}P_\varkappa - P_\rho = 0. \tag{e}$$

Введение h величин P_ρ в уравнения движения увеличивает число неизвестных на h. Для определения этих h величин имеется необходимое число уравнений условий, увеличенных на h уравнений (c), в которых $\mathfrak{p}_\rho$ мы должны написать, как явно заданные функции времени. Если же мы примем, что P_ρ даны нам непосредственно как функции времени, тогда знание второй системы h уравнений (c) вообще не требуется и $k+r$ уравнений (a), (d), (e) достаточны для однозначного определения $k+r$ неизвестных $P_\varkappa$ и $\ddot{p}_\rho$. Таким образом, h множителей P_ρ выражают полностью действие второй системы на первую, и их совокупность можно рассматривать как аналитическое выражение для этого действия.

458. Добавление 1. Если мы хотим представить действие первой системы на вторую в симметричном виде, то нужно записать уравнения соединения в таком виде:

$$\dot{p}_\rho - \dot{\mathfrak{p}}_\rho = 0. \tag{a}$$

Тогда для всех $\mathfrak{p}_\rho$, не входящих в (a), имеем уравнения движения в виде

$$\mathfrak{m}\mathfrak{f}_\rho + \sum_{\varkappa=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{p}_{\varkappa\rho}\mathfrak{P}_\varkappa = 0, \tag{b}$$

в то время как для остальных $\mathfrak{p}_\rho$ они имеют вид

$$\mathfrak{m}\mathfrak{f}_\rho + \sum_{\varkappa=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{p}_{\varkappa\rho}\mathfrak{P}_\varkappa - \mathfrak{P}_\rho = 0, \qquad \text{(c)}$$

где под $\mathfrak{P}_\rho$ следует понимать неопределенные множители уравнений (a).

Совокупность всех $\mathfrak{P}_\rho$ дает нам выражение действий, которое первая система оказывает в каждый момент на движение второй.

459. Добавление 2. Очевидно мы можем все уравнения движения первой системы записать в виде

$$mf_\rho + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho}P_\varkappa - P_\rho = 0, \qquad \text{(a)}$$

и все уравнения движения второй системы в виде

$$\mathfrak{m}\mathfrak{f}_\rho + \sum_{\varkappa=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{p}_{\varkappa\rho}\mathfrak{P}_\varkappa - \mathfrak{P}_\rho = 0, \qquad \text{(b)}$$

если мы устанавливаем, что для всех несоединенных координат величины P_ρ и $\mathfrak{P}_\rho$ должны быть равны нулю.

Совокупность величин P_ρ и $\mathfrak{P}_\rho$ теряет при этом значение как система множителей уравнений (457c) и (458a), но она сохраняет значение как выражение действия, которое одна система оказывает на другую.

460. Аналитическое представление силы. Мы можем поэтому, в соответствии с определением (455), установить, что совокупность величин P_ρ, однозначно определяемых по (459) для всех p_ρ, образует аналитическое определение для силы, с которой система $\mathfrak{p}_\rho$ действует на систему p_ρ.

Соответственно, совокупность величин $\mathfrak{P}_\rho$ образует аналитическое выражение для силы, с которой система p_ρ действует на систему $\mathfrak{p}_\rho$.

Отдельные величины P_ρ и $\mathfrak{P}_\rho$ называются компонентами силы вдоль соответствующих координат p_ρ или $\mathfrak{p}$ или короче — силой вдоль этих координат.

На основании этого определения мы приходим к соответствию с существующим обозначением механики, и необходимость обеспечить это соответствие достаточно оправдывает то, что мы среди многих допустимых определений выбрали именно это.

Следствие 1. Силу, с которой одна система действует на 461.
другую, можно рассматривать как векторную величину, отнесенную ко второй системе, а именно, как векторную величину, компоненты которой по общим координатам вообще отличны от нуля, а по координатам, не являющимся общими, исчезают, и, наконец, компоненты которой по направлениям, не выражающимся изменениями применяемых координат, остаются неопределенными.

Следствие 2. Силу, с которой одна система действует на 462.
другую, можно также рассматривать как векторную величину, отнесенную к первой системе, а именно, как векторную величину, компоненты которой по общим координатам вообще не равны нулю, а по необщим координатам исчезают и, наконец, по направлениям, которые не выражаются через изменения применяемых координат, остаются неопределенными.

Примечание. Рассматривая силу как векторную величину, 463.
отнесенную к системе, видим, что компоненты силы зависят от выбора координат и, следовательно, от нашего произвола. Это происходит потому, что от выбора координат зависит многообразие тех движений, которые мы рассматриваем вообще и в направлении которых мы хотим допустить возможное действие.

Замечание 1. Если некоторая система соединена последова- 464.
тельно с несколькими системами и испытывает от этих систем одинаковые воздействия, то ее движения будут одинаковые, как бы ни были различны между собой эти системы. Поэтому мы можем говорить, согласно определению (455), о движении под действием силы без упоминания других систем, которые ее производят и без которых она немыслима.

Замечание 2. Если некоторая система последовательно 465.
соединена с несколькими системами и совершает при этом одинаковые движения, то она действует на эти системы с одинаковой силой, хотя они могут быть совершенно различными.

Мы можем поэтому говорить, согласно определению (455), просто о силе, которую производит движущаяся система, без упоминания других систем, на которые эта сила действует и без которых она не была бы мыслимой.

466. Замечание 3. Так как все силы, о которых мы говорили, могут производиться только материальными системами, воздействующими на другие материальные системы вследствие основного закона, то все силы имеют известные общие свойства. Источником таких общих свойств являются основной закон и свойства материальных систем.

Действие и противодействие

467. Обозначения 1. Компоненту силы, с которой система $\mathfrak{p}_\rho$ действует на систему p_ρ, будем рассматривать как векторную величину, отнесенную к системе p_ρ, и обозначим ее через P_ρ.

Если мы будем рассматривать эту же силу как отнесенную к системе $\mathfrak{p}_\rho$, то будем обозначать компоненты ее по $\mathfrak{p}_\rho$ через $\mathfrak{P}'_\rho$. Тогда для всех общих координат имеем тождество

$$P_\rho = \mathfrak{P}'_\rho.$$

2. Компоненты силы, с которой система p_ρ действует на систему $\mathfrak{p}_\rho$ и рассматриваемой в качестве векторной величины, отнесенной к системе $\mathfrak{p}_\rho$, мы обозначили в (460) как $\mathfrak{P}_\rho$. Рассматривая ту же силу как векторную величину, отнесенную к системе p_ρ, мы можем ее компоненты по p_ρ обозначить через P'_ρ. Тогда для всех общих координат имеем тождественно:

$$\mathfrak{P}_\rho = P'_\rho;$$

таким образом, силы, действующие на систему, мы обозначаем буквами без штрихов, а силы, производимые системой, буквами со штрихами, поскольку они рассматриваются как векторные величины, отнесенные к самой системе.

468. Теорема. Сила и противосила всегда равны друг другу и противоположны.

Иначе говоря, компоненты обеих сил вдоль каждой из координат равны друг другу и противоположны, и именно, когда мы рассматриваем силу и противосилу как векторные величины, отнесенные к одной или к другой системе.

Действительно, мы можем обе соединенные системы (457) рассматривать как одну единую свободную систему. Масса ее есть $m+\mathfrak{m}$, а координаты p_ρ и $\mathfrak{p}_\rho$.

Уравнения условий ее суть уравнения (457a и b) и уравнения соединения даны в форме (457c). Если мы обозначим множители уравнений (a) через $P^0_\varkappa$, уравнений (b) через $\mathfrak{P}^0_\varkappa$ и уравнений (c) через P^0_ρ, то уравнения движения всей системы (442) принимают форму

$$mf_\rho + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho} P^0_\varkappa - P^0_\rho = 0, \tag{a}$$

$$\mathfrak{m}\mathfrak{f}_\rho + \sum_{\varkappa=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{p}_{\varkappa\rho} \mathfrak{P}^0_\varkappa + P^0_\rho = 0, \tag{b}$$

в которых для координат, не входящих в уравнения соединений, множители P^0_ρ равны нулю.

Движение, представленное через эти уравнения, то же самое, которое мы рассматривали раньше как движение отдельных систем. Одно возможное решение настоящих уравнений мы получим, следовательно, если для f_ρ и $\mathfrak{f}_\rho$ подставим их прежние значения и положим

$$P^0_\varkappa = P_\varkappa, \quad \mathfrak{P}^0_\varkappa = \mathfrak{P}_\varkappa, \tag{c}$$

и, кроме того, в (a)

$$P^0_\rho = P_\rho \tag{d}$$

и в (b)

$$P^0_\rho = -\mathfrak{P}_\rho, \tag{e}$$

Однако, так как уравнениями (a) и (b) неопределенные множители определяются однозначно, то это возможное решение есть одновременно и единственное решение. Поэтому имеют силу уравнения (d) и (e). Из них следует:

$$P_\rho = -\mathfrak{P}_\rho, \tag{f}$$

или, при использовании обозначений (467),

$$P_\rho = -P'_\rho, \quad \mathfrak{P}_\rho = -\mathfrak{P}'_\rho,$$

что и доказывает нашу теорему.

469. Замечание 1. Теорема (468) соответствует третьей аксиоме Ньютона, называемой иногда принципом реакции. Однако содержание нашей теоремы не вполне совпадает с содержанием третьего закона Ньютона, и точнее их отношение можно выразить следующим образом: третья аксиома Ньютона полностью заключает в себе нашу теорему (468). Она содержит, однако, больше. Она применима, вообще говоря, также и к силам, действующим на расстоянии, например, к силам между телами, которые не имеют общих координат. Однако наша механика не исследует подобные действия.

Чтобы, например, указать следствие из нашей теоремы о том, что планета притягивает Солнце с равной силой, как и Солнце планету, необходимо иметь более детальное знание о природе связи между обоими телами.

470. Замечание 2. Можно отметить в качестве сомнительного следующее обстоятельство: может ли более широкая область применения принципа реакции по сравнению с объемом теоремы (468) отнесена по форме и содержанию к основным законам механики и не будет ли исчерпано существенное и имеющее общее значение содержание этого принципа уже в теореме (468).

Что касается формы, то, очевидно, формулировка третьего закона, поскольку он применяется к силам, действующим на расстоянии, дана не совсем ясно. Ибо если действие и противодействие прилагаются к различным телам, то не совсем ясно, что следует понимать под противоположным направлением. Это особенно ясно видно, когда речь идет о взаимодействии между элементами тока.

Что касается содержания, то применение принципа реакции к силам, действующим на расстоянии, представляет для обычной механики, очевидно, опытный факт, точное совпадение которого во всех случаях с фактами опыта становится сомнительным.

Так, например, в электродинамике почти установлено, что взаимодействие между движущимися магнитами не всегда точно подчиняется принципу реакции.

Сложение сил

Теорема. Если данная система одновременно соединена с несколькими системами, то сила, с которой действует совокупность остальных систем на данную систему, равна сумме сил, с которыми отдельные системы действуют на данную. 471

Именно, пусть первая система массы m с координатами p_ρ, уравнения условий которой выражены k уравнениями вида

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{\varkappa\rho}\dot{p}_\rho = 0, \tag{a}$$

будет одновременно соединена с системами 2, 3 и т. д., координаты которых $\mathfrak{p}''_\rho$, $\mathfrak{p}'''_\rho$ и т. д.

Если мы сначала рассмотрим системы 2, 3 и т. д. как отдельные системы, то уравнения соединения для каждой общей координаты p_ρ запишутся так:

$$\mathfrak{p}''_\rho - \dot{p}_\rho = 0, \tag{b}$$

$$\mathfrak{p}'''_\rho - \dot{p}_\rho = 0, \tag{c}$$

и т. д.

Если мы теперь будем рассматривать совокупность систем 1, 2, 3 и т. д. как свободную и если мы опять обозначим множители уравнений (a) через $P_\varkappa$, (b) через P''_ρ, (c) через P'''_ρ, то получим уравнения движения первой системы в виде

$$mf_\rho + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho}P_\varkappa - P''_\rho - P'''_\rho - \ldots = 0, \tag{d}$$

где P''_ρ, P'''_ρ и т. д. точно так же, как и $P_\varkappa$, есть однозначно определенные величины. Величины P''_ρ, P'''_ρ и т. д. представляют компоненты сил, с которыми отдельные системы 2, 3 и т. д., действуют на систему 1. Если мы рассмотрим, с другой стороны,

системы 2, 3, ... как одну систему, то одинаковые, в соответствии с уравнениями (b), (c) и т. д., величины $\mathfrak{p}''_\rho$, $\mathfrak{p}'''_\rho$ и т. д. можно рассматривать как единую координату $\mathfrak{p}_\rho$ последней и вместо тех уравнений соединений появляется тогда для каждой общей координаты $\mathfrak{p}_\rho$ одно уравнение

$$\dot{\mathfrak{p}}_\rho - \dot{p}_\rho = 0. \tag{e}$$

Если P_ρ является коэффициентом последнего и если обозначим через $P^0_\varkappa$ коэффициенты уравнений (a), которые соответствуют теперешней системе уравнений движения, то они получают форму

$$mf_\rho + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho} P^0_\varkappa - P_\rho = 0. \tag{f}$$

P_ρ представляет компоненту совокупной силы, с которой совокупность остальных систем 2, 3, ... действует на первую систему.

Одно возможное решение уравнений (f) мы получаем поэтому, подставляя, на основе прежних решений,

$$P^0_\varkappa = P_\varkappa, \tag{g}$$

$$P_\rho = P''_\rho + P'''_\rho + \dots \tag{h}$$

Однако так как существует одно единственное возможное решение, то предыдущее решение (h) и будет таковым. Следовательно, уравнение (h), которое содержит наше утверждение, имеет силу необходимости.

472. Следствие 1. Любое количество сил, которые действуют на систему или от системы исходят, можно понимать как одну единственную силу, и именно как такую силу, которая, будучи рассматриваема в качестве векторной величины, отнесенной к системе, равна сумме данных сил. Если мы представляем таким способом несколько сил, то это значит, что мы их складываем. Результат сложения мы называем также результирующей отдельных сил.

473. Следствие 2. Каждую силу, которая действует на систему или которая от системы исходит, можно понимать в виде суммы любого числа сил, а именно, такого количества сил, сумма которых как векторных величин, отнесенных к системе, равна данной силе

Такое представление сил мы назовем разложением силы. Силы, которые возникают в результате такого разложения, мы называем компонентами первоначальной силы.

Примечание. Геометрические компоненты силы вдоль координат можно одновременно понимать как компоненты ее в смысле (473). 474.

Определение. Сила, которая исходит от отдельной материальной точки или которая действует на отдельную материальную точку, называется элементарной силой. 475.

Примечание. Элементарная механика под силами обыкновенно понимает лишь элементарные силы. В противоположность этому, рассматривавшаяся нами до сих пор обобщенная форма сил называется Лагранжевой формой сил. Элементарные силы можно соответственно называть Галлилеевыми или Ньютоновыми силами. 476.

Следствие 1. Каждую элементарную силу можно представить через геометрическое перемещение точки, т. е. через данный по величине и направлению отрезок. Ибо каждая элементарная сила есть векторная величина, отнесенная к отдельной точке. 477.

Следствие 2. Сложение элементарных сил, которые прилагаются к той же самой точке, происходит по правилам геометрического сложения и разложения отрезков. 478.

В частности, две силы, приложенные к одной точке, складываются в одну силу, которая по величине и направлению представляется диагональю параллелограмма, стороны которого представляют по величине и направлению данные силы (параллелограмм сил).

Следствие 3. Каждая Лагранжева сила может быть представлена как сумма элементарных сил, а также и разложена на элементарные силы. Ибо каждое перемещение системы может быть понимаемо как сумма перемещений ее отдельных точек. 479.

Следствие 4. Компоненты сил вдоль прямоугольных координат системы, на которую действует сила или от которой сила исходит, можно понимать непосредственно как элементарные силы, которые действуют на отдельные материальные точки системы. 480.

Движение под действием сил

481. Задача 1. Определить движение материальной системы под действием заданной силы.

Решение следует непосредственно из (457). Если P_ρ — заданные компоненты действующей силы по p_ρ, то следует использовать r уравнений движения

$$mf_\rho + \sum_{\varkappa=1} p_{\varkappa\rho} P_\varkappa = P_\rho.$$

Эти уравнения вместе с k уравнениями условий системы достаточны для однозначного определения $r+k$ величин $\ddot{p}_\rho$ и $P_\varkappa$.

482. Примечание 1. Уравнения движения системы, на которую действуют силы, имеют в прямоугольных координатах форму $3n$ уравнений

$$m_\nu \ddot{x}_\nu + \sum_{\iota=1}^{i} x_{\iota\nu} X_\iota = X_\nu,$$

если под X_ν понимаются компоненты силы по x_ν, а в остальном используются обозначения (368).

483. Примечание 2. Если координата p_ρ является свободной координатой, то соответствующие уравнения принимают простую форму:

$$mf_\rho = P_\rho.$$

Если в голономной системе все координаты p_ρ свободные, то все уравнения движения системы принимают эту простейшую форму и этих r уравнений достаточно для определения r величин $\ddot{p}_\rho$.

484. Следствие. Естественное движение системы от определенного начального момента времени является однозначно определенным при помощи положения и скорости системы в этот начальный момент, а также через задание действующих на систему сил для каждого момента времени, начиная от начального (ср. (331), (444).

Теорема. Ускорение, которое сообщается системе несколькими силами, действующими на систему, равно сумме ускорений, которые производятся отдельно действующими силами. Ибо уравнения движения (481) являются линейными относительно f_ρ и $P_\varkappa$. 485.

Если, следовательно, система значений $f_{\rho 1} P_{\varkappa 1}$, $f_{\rho 2} P_{\varkappa 2}$ и т. д. есть решение уравнений движения для сил $P_{\rho 1}$, $P_{\rho 2}$ и т. д., то система значений $f_{\rho 1} + f_{\rho 2} + \ldots$, $P_{\varkappa 1} + P_{\varkappa 2} + \ldots$ есть решение для силы $P_{\rho 1} + P_{\rho 2} + \ldots$

Примечание. Содержание предыдущей теоремы можно представить также в виде утверждения, что несколько одновременно действующих сил не мешают друг другу в отношении производимых ими ускорений. Не получив особого названия, эта теорема всегда принималась и использовалась как принцип со времени Галилея. 486.

Ускорение, сообщаемое системе результирующей силой, равно сумме ускорений, которые были бы сообщены системе компонентами силы, если бы они действовали отдельно (472, 473). 487.

Теорема. Если сила, как векторная величина, расположена перпендикулярно к каждому возможному перемещению материальной системы, то она не оказывает влияния на движение системы, и наоборот. 488.

Ибо если π — одна из таких сил, то ее компоненты π_ρ по p_ρ имеют вид (250)

$$\pi_\rho = \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho} \gamma_\varkappa.$$

Если эта сила действует на систему наряду с силой P, то уравнения движения можно записать в форме

$$mf_\rho + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho} (P_\varkappa - \gamma_\varkappa) = P_\rho.$$

При решении этих уравнений относительно $\ddot{p}_\rho$ и $P_\varkappa$ только $P_\varkappa$ оказываются увеличенными на $\gamma_\varkappa$; $\ddot{p}_\rho$, которые одни определяют движение, остаются неизменными.

Наоборот, если прибавление компоненты π_ρ к правой части уравнения (481) не изменяет f_ρ, но изменяет лишь $P_\varkappa$, то π_ρ можно записать в форме

$$\pi_\rho = \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho}\gamma_\varkappa.$$

Сила π расположена, следовательно, перпендикулярно к каждому возможному перемещению системы (250).

489. Примечание. Предыдущая теорема выражает условие, которому подчиняется та часть силы, рассматриваемой в качестве векторной величины, которая зависит от выбора координат и, следовательно, от нашего произвола (463); ибо эта часть безусловно не должна проявляться в действительном движении.

490. Следствие. Хотя из знания силы, действующей на систему, можно сделать однозначное заключение о движении системы, однако из движения системы нельзя сделать однозначного заключения о силе, которая влияет на систему.

491. Задача. Определить силу, которую производит материальная система при заданном движении.

По (467) мы обозначим через P'_ρ компоненты искомой силы по координате p_ρ; тогда из (468) и (481) следует:

$$P'_\rho = -mf_\rho - \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho}P_\varkappa,$$

где f_ρ мы рассматриваем как заданные величины, удовлетворяющие уравнениям условий. Величины $P_\varkappa$ так же определяются, если задана некоторая система, с которой соединена рассматриваемая.

Однако поскольку известно лишь движение системы p_ρ, величины $P_\varkappa$ остаются неизвестными. Таким образом, сила, которую производит движущаяся система, не вполне определяется заданием движения системы, но содержит неопределенное слагаемое, компоненты которого имеют форму

$$\pi_\rho = \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho}\gamma_\varkappa$$

и которое, следовательно, расположено перпендикулярно к каждому возможному перемещению системы.

Примечание. Хотя не все компоненты силы, действующей 492.
на систему, однозначно определяются движением системы, однако компоненты силы в направлении каждого возможного перемещения системы однозначно определяются ее движением.

Следствие. Компоненты силы, производимой движущейся 493.
системой, однозначно определяются ее движением в направлении каждой свободной координаты. А именно, если p_ρ свободная координата, то исчезают $p_{\varkappa\rho}$, а следовательно, и неопределенные члены и, таким образом, компоненты силы по p_ρ могут быть записаны в формах:

$$P'_\rho = -mf_\rho = \qquad (291)\ (a)$$

$$= \frac{\partial_p E}{\partial p_\rho} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\rho}\right) = \qquad (291a)\ (b)$$

$$= \frac{\partial_p E}{\partial p_\rho} - \dot{q}_\rho = \qquad (291b)\ (c)$$

$$= -\frac{\partial_q E}{\partial p_\rho} - \dot{q}_\rho. \qquad (294)\ (d)$$

Внутреннее принуждение

Теорема. Ускорение системы материальных точек, между 494.
которыми не существует связей, происходит в направлении действующей на систему силы и его величина равна величине силы, деленной на массу системы.

Ибо если между n точками системы не существует связей, то для каждой из $3n$ прямоугольных координат системы имеем, согласно (482),

$$\frac{m_\nu}{m}\ddot{x}_\nu = \frac{X_\nu}{m};$$

Левая часть уравнения представляет собой компоненту ускорения системы по x_ν (275).

Следствие. Ускорение отдельной материальной точки про- 495.
исходит в направлении силы, действующей на точку, и его вели-

чина равна величине силы, деленной на массу точки (второй закон Ньютона).

496. Примечание. Если существуют связи между точками материальной системы, на которую действует сила, то ускорение системы отклоняется от ускорения, данного теоремой (494). Как причину этого отклонения мы можем, таким образом, рассматривать связи системы, а само отклонение можно обозначать согласно (385) как внутреннее принуждение системы.

497. Задача. Определить внутреннее принуждение системы, которая движется под действием сил.

Действительные компоненты ускорения системы по обобщенным координатам p_ρ есть f_ρ. Компонента, которая имела бы место по снятии уравнений условий, будет P_ρ/m (494), разность обеих величин, т. е.

$$z_\rho = f_\rho - \frac{P_\rho}{m}, \qquad \text{(a)}$$

и представляет, следовательно, компоненту принуждения по p_ρ.

Для определения величины принуждения вообще недостаточно знания компонент последнего по p_ρ (245).

Для прямоугольных координат получаем компоненты принуждения по x_ν в виде

$$z_\nu = \frac{1}{m}(m_\nu \ddot{x}_\nu - X_\nu). \qquad \text{(b)}$$

Таким образом величина z принуждения получается как положительный корень уравнения (244):

$$mz^2 = \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{1}{m_\nu}(m_\nu \ddot{x}_\nu - X_\nu)^2 = \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \left(\ddot{x}_\nu - \frac{X_\nu}{m_\nu}\right)^2. \qquad \text{(c)}$$

498. Теорема 1. Величина принуждения для материальной системы, находящейся под действием сил, как и для свободной системы в каждый момент времени меньше для естественного движения, чем для какого-нибудь другого, которое в рассматриваемый

момент времени имеет то же самое положение и скорость, что и естественное движение.

Ибо необходимыми и достаточными условиями того, чтобы при данных значениях X_ν величина $\frac{1}{2}mz^2$ была минимальной, является, как и в (155), система $3n$ уравнений:

$$m_\nu \ddot{x}_\nu - X_\nu + \sum_{i=1}^{i} x_{i\nu} X_i = 0,$$

где X_i обозначают i неопределенных множителей, которые вместе с $3n$ величинами $\ddot{x}_\nu$ однозначно определяются из этих $3n$ уравнений и i уравнений условий системы.

Написанные уравнения дают те же самые значения $\ddot{x}_\nu$ и X_i как уравнения движения естественного движения (482).

499. Примечание. Теорема (498) содержит полный Гауссов принцип наименьшего принуждения. Мы можем поэтому теорему (388) рассматривать как частный случай теоремы (498). Однако, согласно нашей точке зрения, мы предпочитаем рассматривать теорему (388) как общую, а теорему (498) как приспособление последней к особым более сложным условиям.

500. Теорема 2. Направление принуждения при естественном движении системы под действием силы, как и при естественном движении свободной системы, расположено перпендикулярно к каждому возможному или виртуальному перемещению системы из ее мгновенного положения. Ибо вследствие (497a) и [(481) компоненты принуждения по p_ρ можно записать в форме

$$z_\rho = -\frac{1}{m}\sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho} P_\varkappa.$$

Принуждение, как векторная величина, расположено, следовательно (250), перпендикулярно к каждому возможному перемещению системы.

501. Символическое выражение. Если обозначить через δp_ρ изменение координаты p_ρ для какого-нибудь любого возможного

перемещения системы, то можно вышеприведенную теорему записать в виде символического уравнения (ср. (393))

$$\sum_{\rho=1}^{r}\left(f_\rho-\frac{P_\rho}{m}\right)\delta p_\rho=0, \tag{a}$$

которое при применении прямоугольных координат принимает форму

$$\sum_{\nu=1}^{3n}(m_\nu\ddot{x}_\nu-X_\nu)\,\delta x_\nu=0. \tag{b}$$

502. Примечание. Теорема (500) содержит полностью принцип д'Аламбера. Уравнения (501a) и (501b) выражают обычную формулировку последнего. Об отношении теоремы (500) к (392) можно заметить то же самое, как и в (499).

503. Следствие 1. Компонента ускорения материальной системы в направлении каждого возможного движения равна компоненте действующей силы вдоль того же направления, деленной на массу системы. Ибо компонента принуждения в направлении каждого возможного перемещения исчезает.

504. Следствие 2. Компонента ускорения материальной системы в направлении ее действительного движения равна компоненте действующей силы вдоль того же направления, деленной на массу системы.

505. Следствие 3. Компонента ускорения материальной системы по каждой свободной координате системы равна компоненте действующей силы вдоль того же направления, деленной на массу системы.

506. Теорема. При естественном движении системы под действием сил компонента ускорения по каждой координате абсолютного положения всегда равна компоненте действующей силы по тому же направлению, деленной на массу системы, какова бы ни была внутренняя связь системы.

507. Следствие 1. Если мы выберем координаты системы в остальном произвольные, так, чтобы среди них находились шесть координат абсолютного положения, то можно при

знании действующих на систему сил, но без знания внутренних связей системы, написать шесть уравнений движения системы.

508. Следствие 2. Если мы примем, в частности, в отношении координат абсолютного положения то же условие, как в (402), и применим теорему (506) к направлению трех координат α_1, α_2, α_3, то получим три уравнения:

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\ddot{x}_{3\nu}=\sum_{\nu=1}^{n} X_{3\nu},$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\ddot{x}_{3\nu-1}=\sum_{\nu=1}^{n} X_{3\nu-1},$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\ddot{x}_{3\nu-2}=\sum_{\nu=1}^{n} X_{3\nu-2}.$$

Эти три уравнения можно интерпретировать следующим способом: центр тяжести движется так, как будто вся масса системы сосредоточилась в нем и на него действуют все элементарные силы; это — так называемый расширенный принцип центра тяжести (ср. (404)).

509. Следствие 3. Применительно к направлению трех координат абсолютного положения ω_1, ω_2, ω_3 теорема (506) дает еще три уравнения:

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu(x_{3\nu-2}\ddot{x}_{3\nu-1}-x_{3\nu-1}\ddot{x}_{3\nu-2})=\sum_{\nu=1}^{n}(x_{3\nu-2}X_{3\nu-1}-x_{3\nu-1}X_{3\nu-2}),$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu(x_{3\nu}\ddot{x}_{3\nu-2}-x_{3\nu-2}\ddot{x}_{3\nu})=\sum_{\nu=1}^{n}(x_{3\nu}X_{3\nu-2}-x_{3\nu-2}X_{3\nu}),$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu(x_{3\nu-1}\ddot{x}_{3\nu}-x_{3\nu}\ddot{x}_{3\nu-1})=\sum_{\nu=1}^{n}(x_{3\nu-1}X_{3\nu}-x_{3\nu}X_{3\nu-1}).$$

Эти три уравнения выражают так называемый расширенный принцип площадей (ср. (406)).

Энергия, работа

510. Определение. Увеличение энергии системы, являющееся следствием действия на систему силы, называется работой силы.

Работу, которую сила производит в определенное время, измеряется приращением энергии системы за это время. Возможное уменьшение энергии вследствие действия сил мы рассматриваем как отрицательное приращение. Работа силы, таким образом, может быть положительной или отрицательной.

511. Следствие. В то время как действующая на систему сила производит известную работу, развиваемая системой противосила производит всегда противоположно равную работу.

Ибо последняя работа равна приращению энергии той системы, с которой соединена рассматриваемая. Следовательно, сумма энергий обеих систем является постоянной.

512. Теорема. Работа, которая производится действующей на систему силой на определенном элементе пути, равна произведению из элемента пути и компоненты силы в его направлении.

Действительно, приращение энергии dE в течение времени dt, за которое описывается элемент пути ds, будет (283)

$$dE = mv\dot{v}dt = m\dot{v}ds.$$

Однако по (280) $\dot{v}$ есть компонента ускорения системы в направлении ее пути, следовательно, по (504) $m\dot{v}$ является компонентой силы в направлении пути.

513. Примечание. Работа с равным правом равна произведению величины силы на компоненту элемента пути вдоль направления силы.

514. Примечание 2. Если в течение прохождения элемента пути ds координата p_ρ испытывает изменение dp_ρ, то работа действующей силы представится уравнением

$$dE = \sum_{\rho=1}^{r} P_\rho \delta p_\rho.$$

Ибо компонента силы в направлении элемента пути равна (247)

$$\sum_{\rho=1}^{r} P_\rho \frac{dp_\rho}{ds}.$$

515. Следствие 1. Сила, которая действует на систему, производит положительную или отрицательную работу, смотря по тому, будет ли угол, который она образует со скоростью системы, меньше или больше прямого угла.

Если сила расположена перпендикулярно к направлению движения, то она работы не производит.

516. Следствие 2. Сила, которая действует на покоящуюся систему, работы не производит.

Равновесие, статика

517. Определение. Мы скажем, что две или несколько сил, которые действуют на одну и ту же систему, находятся в равновесии, если каждая из них уничтожает действие другой, т. е. если под влиянием обеих или всех этих сил система движется так, как если бы ни одна из них не существовала.

518. Теорема. Две или несколько сил находятся в равновесии, если их сумма расположена перпендикулярно к каждому возможному (виртуальному) перемещению системы из ее мгновенного положения, и наоборот. Теорема следует непосредственно из (471) и (488).

519. Символическое выражение. Если мы обозначим через P'_ρ, P''_ρ и т. д. компоненты отдельных сил по p_ρ, через δp_ρ — изменения p_ρ для какого-нибудь возможного перемещения системы, то можно требование предшествующей теоремы записать в виде символического уравнения

$$\sum_{\rho=1}^{r} (P'_\rho + P''_\rho + \ldots)\,\delta p_\rho = 0.$$

Ср. (393), (501).

520. Примечание. Предыдущая теорема содержит принцип виртуальных скоростей (перемещений, моментов), а уравнение (519) дает обычную аналитическую формулировку этого принципа.

521. Следствие 1. Если несколько сил, приложенных к системе, находятся в равновесии, то сумма производимых силами работ исчезает при каждом возможном (виртуальном) перемещении системы из ее мгновенного положения, и наоборот (принцип виртуальной работы).

Ибо если запишем уравнение (519) в форме

$$\sum_{\rho=1}^{r} P'_\rho \delta p_\rho + \sum_{\rho=1}^{r} P''_\rho \delta p_\rho + \ldots = 0,$$

то утверждение получается по (514).

522. Следствие 2. Если две или больше сил, приложенных к системе, находятся в равновесии, то сумма их компонент вдоль каждого возможного движения системы исчезает.

523. Следствие 3. Если две или больше сил, приложенных к системе, находятся в равновесии, то сумма их компонент вдоль каждой свободной координаты исчезает.

524. Теорема. Если две или больше сил, приложенных к системе, находятся в равновесии, то сумма их компонент в направлении каждой координаты абсолютного положения исчезает, какой бы ни была внутренняя связь системы.

525. Примечание. Без знания внутренних связей системы мы можем все же всегда написать шесть необходимых уравнений условий для равновесия системы. Если мы выберем в качестве координат абсолютного положения шесть величин α_1, α_2, α_3, ω_1, ω_2, ω_3, которые мы ввели в (402), то из предыдущей теоремы можно вывести те шесть уравнений, которые соответствуют принципам центра тяжести и площадей и которые Лагранж рассматривает в § 1 и 2 третьего раздела первой части Mécanique Analytique.

526. Замечание 1. Если две или больше сил находятся в равновесии в определенном положении системы при определенной скорости, то они будут находиться в равновесии в том же положении системы и при какой угодно другой скорости. Ибо условие равновесия не содержит действительных скоростей системы.

527. Замечание 2. Если две или больше сил находятся в равновесии будучи приложены к некоторой покоящейся системе, то система и далее пребывает в состоянии покоя, и наоборот, если система пребывает в покое, несмотря на действие двух или нескольких сил, то силы эти находятся в равновесии.

528. Следствие 1. Если две силы, одновременно приложенные к покоящейся системе, не нарушают ее покоя, то они имеют противоположно равные компоненты в направлении каждого возможного движения системы.

529. Если две силы, последовательно прилагаемые к одной и той же покоящейся системе и действующие одновременно с одними и теми же другими силами, не изменяют состояния покоя системы, то они имеют одинаковые компоненты вдоль каждого возможного движения системы.

530. Примечание. На последних двух следствиях базируется статическое сравнение сил.

Машины и внутренние силы

531. Определение. Система, масса которой рассматривается малой по сравнению с массами систем, с которыми она соединена, называется машиной.

Таким образом, машина в отношении ее действий на движение других систем может быть вполне определена ее уравнениями условий; знание выражения энергии машины (в ее координатах) не необходимо.

Машина называется простой, если она имеет только одну степень свободы движения.

532. Теорема. Пока машина движется с конечной скоростью, силы, действующие на машину, взаимно уравновешиваются.

Ибо если бы эти силы дали компоненту в направлении какого-нибудь возможного движения, то компонента ускорения в этом направлении, по причине исчезающе малых масс, была бы бесконечно большой (504).

533. Следствие. Между компонентами сил, действующих на машину по ее координатам, имеется некоторое количество однородных линейных уравнений, число которых равно числу свобод движения машины.

Простая машина представляется через одно единственное однородное линейное уравнение между силами, действующими по ее координатам.

534. Замечание 1. Если машины соединены по всем своим координатам с двумя или более материальными системами, то установленная таким образом механическая связь между последними может быть представлена аналитически при помощи однородных линейных дифференциальных уравнений между координатами связанных систем.

Ибо мы можем в уравнениях условий машины заменить координаты последней одинаковыми с ними координатами связанных систем.

Наоборот, мы можем поэтому каждую совокупность однородных линейных уравнений между координатами двух или нескольких систем рассматривать физически как механическую связь заданного вида, которую мы обозначаем как соединение этих систем посредством машины.

535. Следствие. Если две или больше систем связаны машиной, то работа, произведенная каждой системой, противоположна и равна сумме работ, произведенных остальными системами.

При соединении систем посредством машины работа, таким образом, не производится. Ибо силы, произведенные системами, поддерживают равновесие машины и, следовательно, сумма работ, совершенных ими, равна нулю.

536. Замечание 2. Каждая материальная система может быть представлена как составленная разнообразными способами из двух или большего количества систем, которые соединены посредством машины.

Ибо если мы разделим массу системы на несколько частей и если p'_ρ будут координаты первой части, p''_ρ — координаты второй части и т. д., то мы можем рассматривать уравнения условий

полной системы, которые содержат только p'_ρ, как уравнения условий первой частичной системы, а те уравнения, которые содержат только p''_ρ, как уравнения условий второй частичной системы, и т. д.

Уравнения же условий полной системы, которые содержат смешанно p'_ρ, p''_ρ и т. д., понимаются как уравнения машин, соединяющих частичные системы.

Силы, которые производятся машинами и действуют на соединенные ими частичные системы, при указанной выше концепции мы обозначаем как внутренние силы системы.

537. Следствие 1. Каждая совокупность внутренних сил может заменить часть связей системы. А именно, если мы опускаем те уравнения условий всей системы, которые изображают машины между частичными системами, и сохраняем в то же время производимые машинами силы, то системы будут двигаться, как и раньше.

538. Следствие 2. Совокупная связь системы может быть разложена и заменена некоторым числом элементарных сил, которые действуют на отдельные материальные точки системы. Ибо мы можем рассматривать отдельные точки как частичные системы, а всю систему — как совокупность этих частичных систем, соединенных посредством машин.

539. Следствие 3. Внутренние силы, которые полностью или частично заменяют связь системы, будучи приложимы к первоначальной системе, находятся всегда в равновесии. Ибо по (532) они находятся в равновесии у машин, которые образуют части первоначальной системы.

540. Примечание. Именно в результате этого последнего соображения и производится в обычном изложении переход от законов равновесия (принцип виртуальных скоростей) к законам движения (принцип д'Аламбера).

Измерение сил

541. Развитые выше соображения приводят к трем независимым методам непосредственного измерения тех компонент сил, которые вообще оказывают действие на физические явления. В результате применения каждого из этих трех методов силы могут быть пре-

вращены из расчетных величин в объекты непосредственного опыта, т. е. в знаки определенных связей между чувственными ощущениями и восприятиями вещей.

542. В первом методе силу определяют при помощи масс и движений системы, которой эта сила производится.

Физически этот метод называется измерением силы по ее происхождению. Он применяется, например, при предположении, что одинаково напряженные пружины, одинаковое количество взрывчатого вещества и т. д. при прочих равных условиях производят равные силы.

543. Во втором методе сила определяется при помощи масс и движений системы, на которую она действует. В физике этот метод обозначается как динамическое измерение силы. Он применялся, например, Ньютоном, когда он выводил силы, действующие на планеты, из их движения.

544. В третьем методе сила определяется тем, что ее приводят в равновесие с известными силами.

Этот метод называется статическим. На нем базируются, например, все измерения силы при помощи весов.

545. Примененные для определения одной и той же силы, при соблюдении выведенных нами отношений, эти три различных метода должны при всех условиях привести к одинаковым результатам, если, впрочем, основной закон, на который опираются наши соображения, действительно правильно охватывает весь возможный механический опыт.

Раздел 5.

СИСТЕМЫ СО СКРЫТЫМИ МАССАМИ

I. ЦИКЛИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

546. Определение 1. Циклическими координатами системы называют свободные координаты системы, когда длина бесконечно малого перемещения системы не зависит от значения координат, а зависит лишь от их изменений.

547. Примечание 1. Циклические координаты существуют, ибо достаточно, например, взять прямоугольную координату системы, если она является свободной. Циклические координаты всегда могут быть введены, когда возможны такие бесконечно малые перемещения системы, которые не влекут за собой изменения распределения масс в пространстве, но только лишь циклические перестановки масс между собой. Отсюда и происходит их название. Однако циклические координаты могут появляться также и в других случаях, как это показывает пример прямоугольных координат.

548. Примечание 2. Энергия системы не зависит от значения ее циклических координат, но лишь от скорости изменения их со временем.

549. Определение 1. Материальная система называется циклической системой, если ее энергия является с достаточным приближением однородной квадратичной функцией скоростей изменения ее циклических координат [31].

Циклическая система называется моноциклической, дициклической и т. д., смотря по тому, имеет ли она одну, две и т. д. циклических координат.

В циклической системе не циклические координаты называются также параметрами; скорость изменения циклической координаты называется также циклической интенсивностью.

550. Примечание 1. Условие, которое нужно приблизительно выполнить для циклических систем, не может быть вообще строго выполнено за исключением случая, когда система обладает лишь циклическими координатами.

Ибо если некоторая величина является координатой системы, то ее изменение выражает перемещение по крайней мере одной материальной точки системы; энергия этой точки, следовательно, будет квадратичной функцией скорости изменения этой координаты; соответственно этому и для энергии системы имеет силу то же самое положение. Поэтому энергия любой системы со строгой необходимостью содержит скорости изменения всех величин, которые вообще являются координатами системы. Таким образом,