Раздел 5

ПУТИ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ [24]

I. ПРЯМЕЙШИЕ ПУТИ

151. Определение 1. Элемент пути материальной системы называется более прямым, чем другой, если он имеет меньшую кривизну.

152. Определение 2. Прямейшим элементом пути называется возможный элемент пути, являющийся более прямым, чем все другие возможные элементы путей, которые имеют с ним общее положение и направление.

153. Определение 3. Путь называется прямейшим, если все элементы его прямейшие.

154. Аналитическое представление. Все элементы пути, среди которых есть прямейший элемент, имеют общими положение и направление, т. е. имеют одинаковые значения координат и первых производных от координат по независимым переменным. Кривизна их выражается через вторые производные от координат; благодаря им и различаются элементы пути. Ясно, что вторые производные должны быть такими функциями координат и первых производных, которые обращали бы кривизну прямейшего элемента в минимум.

Уравнения, которые выражают это условие, должны выполняться для всех положений прямейшего пути; они, таким образом, являются одновременно дифференциальными уравнениями такого пути.

155. Задача 1. Выразить дифференциальные уравнения прямейшего пути в прямоугольных координатах материальной системы.

Возьмем в качестве независимого переменного длину пути. Так как имеются в виду возможные пути, то $3n$ величин x'_ν, согласно (128) и (100), подчиняются i уравнениям:

$$\sum_{\nu=1}^{3n} x_{\iota\nu} x'_\nu = 0. \tag{a}$$

Следовательно, $3n$ величин x''_ν подчиняются i уравнениям:

$$\sum_{\nu=1}^{3n} x_{\iota\nu} x''_\nu + \sum_{\nu=1}^{3n} \sum_{\mu=1}^{3n} \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu} x'_\nu x'_\mu = 0, \tag{b}$$

которые получаются из (a) посредством дифференцирования.

Предполагая (b) непротиворечивыми, мы должны так определить x''_ν, чтобы они обращали кривизну c (106), или, что то же самое, $\frac{1}{2}c^2$ в минимум, а именно:

$$\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{m_\nu}{m} x''^2_\nu \tag{c}$$

должно принять минимальное значение.

По правилам дифференциального исчисления поступаем следующим образом: умножаем каждое из уравнений (b) на неопределенный множитель, который для ι-го уравнения обозначим Ξ; далее суммируем частные производные по каждой из величин x''_ν левой части полученных уравнений с частными производными, взятыми по той же величине от формы (c), которую следует привести к минимуму; приравниваем полученные суммы нулю и получаем $3n$ уравнений вида

$$\frac{m_\nu}{m} x''_\nu + \sum_{\iota=1}^{i} x_{\iota\nu} \Xi_\iota = 0, \tag{d}$$

которые с i уравнениями (b) дают для определения величин x''_ν и Ξ_ι $3n+i$ линейных однородных уравнений; следовательно, имея в виду (c), найдем наименьшую кривизну. Выполнение уравнения (d) для всех положений возможного пути является, таким образом, необходимым условием для того, чтобы путь был прямейшим, и уравнения (d) являются, следовательно, искомыми дифференциальными уравнениями прямейшего пути.

156. Примечание 1. Уравнения (d) представляют также и достаточные условия минимума, ибо вторые производные

$$\frac{\partial^2 c^2}{\partial x''_\nu \partial x''_\mu}$$

исчезают, коль скоро ν и μ различные; если же ν и μ равны, то они необходимо положительны. Следовательно, значение кривизны не может иметь других значений, кроме минимума. Выполнение уравнений (d) для всех положений возможного пути есть, следовательно, достаточное условие того, чтобы путь был прямейшим.

157. Примечание 2. Имея в виду (72), можно уравнения (d) записать так:

$$\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\,\frac{d}{ds}\cos\widehat{sx_\nu} = -\sum_{\iota=1}^{i} x_{\iota\nu}\Xi_\iota.$$

Уравнения (d) дают, следовательно, представление о том, как должно меняться направление вдоль пути, чтобы путь был прямейшим; именно, каждое из этих уравнений дает изменение наклона пути относительно прямоугольной координаты.

158. Задача 2. Выразить в обобщенных координатах дифференциальные уравнения прямейшего пути материальной системы.

Возьмем в качестве независимого переменного длину пути. Координаты p_ρ и их производные p'_ρ удовлетворяют k уравнениям (130)

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{\varkappa\rho}p'_\rho = 0, \qquad \text{(a)}$$

а величины p''_ρ — уравнениям

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{\varkappa\rho}p''_\rho + \sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r}\frac{\partial p_{\varkappa\rho}}{\partial p_\sigma}p'_\rho p'_\sigma = 0. \qquad \text{(b)}$$

Среди всех значений p''_ρ, удовлетворяющих этим уравнениям, имеются те, которые обращают кривизну c или $\frac{1}{2}c^2$, а следовательно и правую часть уравнения (108c), в минимум. Если мы поступим по правилам дифференциального исчисления, как в (155), т. е. введем множитель $\Pi_\varkappa$, на который умножим $\varkappa$-е из уравнений (b), то получим необходимое условие минимума в виде r уравнений

$$\sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma}p''_\sigma + \sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{\tau=1}^{r}\left(\frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\rho}\right)p'_\sigma p'_\tau + \sum_{\varkappa=1} p_{\varkappa\rho}\Pi_\varkappa = 0, \qquad \text{(c)}$$

где ρ для каждого уравнения получает определенное значение от 1 до r. Вместе с уравнениями (b) они образуют $r+k$ неоднородных линейных уравнений для определения $r+k$ величин p''_ρ и $\Pi_\varkappa$, а затем по (108) определяется наименьшая кривизна. Выполнение уравнений (c) для всех положений пути является необходимым условием для того, чтобы путь был прямейшим.

159. Примечание 1. Выполнение уравнений (c) является вместе с тем и достаточным условием для минимума кривизны, а следовательно, и для прямейшего пути. Ибо (108) есть лишь трансформация (106) для кривизны. Следовательно, здесь, как и в (156), найдем, что уравнения (c) достаточны для минимума кривизны, т. е. для прямейшего пути.

160. Примечание 2. Согласно (75) имеем

$$\sqrt{a_{\rho\rho}}\cos\widehat{sp_\rho} = \sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma}p'_\sigma,$$

следовательно,

$$\frac{d}{ds}\left(\sqrt{a_{\rho\rho}}\cos\widehat{sp_\rho}\right. = \sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma}p''_\sigma + \sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{\tau=1}^{r}\frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau}p'_\sigma p'_\tau.$$

Поэтому уравнения (158) можно записать в таком виде:

$$\frac{d}{ds}\left(\sqrt{a_{\rho\rho}}\cos\widehat{sp_\rho}\right. = \frac{1}{2}\sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{\tau=1}^{r}\frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\rho}p'_\sigma p'_\tau - \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho}\Pi_\varkappa.$$

Уравнения (158d) дают, следовательно, представление о том, как должно меняться направление вдоль пути, чтобы путь оставался прямейшим. Именно, каждое из этих уравнений дает изменение наклона пути относительно определенной координаты p_ρ.

161. Теорема. Из данного положения в данном направлении возможен один и только один прямейший путь. Ибо если задано положение и направление, то уравнения (158) и (155) определяют, и притом однозначно, значения для изменения направления; следовательно, они через данные величины однозначно определяют начальное положение и направление в ближайшем элементе пути; таким же образом — для следующего элемента и т. д. до бесконечности.

162. Следствие. Вообще невозможно провести прямейший путь между двумя любыми положениями.

Ибо множество возможных перемещений из данного положения равно числу свобод движения системы. Многообразие возможных направлений в одном положении и поэтому многообразие прямейших путей из него на единицу меньше. Многообразие положений, которые достигаются из данного положения прямейшими путями, также точно равно числу степеней свободы. Однако многообразие возможных положений может равняться числу применяемых координат, а поэтому вообще число их больше, чем число направлений.

163. Замечание 1. Для того чтобы все прямейшие пути материальной системы, положения которой отмечаются при помощи p_ρ, можно было представить через уравнения только между этими координатами, не является необходимым знание каких-либо $3n$ функций, полностью определяющих положение отдельных точек системы как функции p_ρ. Для этого достаточно, чтобы наряду с уравнениями условий системы, выраженными через p_ρ, были даны $\frac{1}{2}r(r+1)$ величин $a_{\rho\sigma}$ как известные функции от p_ρ.

Ибо дифференциальные уравнения прямейшего пути (158d) могут быть записаны явно, когда наряду с $p_{\varkappa\rho}$ заданы $a_{\rho\sigma}$ как функции p_ρ.

164. Замечание 2. Для того чтобы прямейший путь материальной системы, положение которой определяется через p_ρ, выразить через уравнения между p_ρ, достаточно, наряду со знанием уравнений условий между p_ρ, знание любого бесконечно малого

возможного перемещения как функции этих координат p_ρ и их изменений.

Именно, если ds является указанной длиной в требуемой форме, то будет иметь место (57):

$$a_{\rho\sigma}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 ds^2}{\partial dp_\rho \partial dp_\sigma}.$$

165. Замечание 3. Для того чтобы знать значение кривизны в каждом положении прямейшего пути, недостаточно знания $\frac{1}{2}r(r+1)$ функций $a_{\rho\sigma}$. Необходимо еще знание $\frac{1}{4}r^2(r+1)^2$ функций $a_{\rho\sigma\lambda\mu}$.

Знание положения всех отдельных точек как функций p_ρ также не является необходимым для определения кривизны.

II. КРАТЧАЙШИЕ И ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПУТИ

166. Определение 1. Кратчайшим путем материальной системы между двумя ее положениями называется возможный путь, длина которого меньше, чем длина какого-нибудь другого бесконечно близкого пути между теми же положениями.

167. Замечание 1. Определение это не исключает того, что между двумя положениями можно построить несколько кратчайших путей. Кратчайший из этих путей называется абсолютно кратчайшим путем. Он есть одновременно кратчайший путь, который вообще возможен между этими положениями.

168. Замечание 2. Между какими-нибудь двумя возможными положениями материальной системы всегда возможен по крайней мере один кратчайший путь. Ибо возможные пути между возможными положениями всегда существуют (114); среди них, следовательно, есть и абсолютно кратчайший путь, т. е. тот, который короче, чем соседние пути. Эти последние он должен иметь вследствие предположенной непрерывности (115) и (121).

169. Замечание 3. Кратчайший путь между двумя положениями есть одновременно кратчайший путь между двумя любыми промежуточными положениями этого пути. Каждая часть кратчайшего пути есть также кратчайший путь.

170. Замечание 4. Длина кратчайшего пути различается лишь на бесконечно малую величину высшего порядка от длины всех соседних путей между теми же положениями. Длина же перемещения, которое переводит соседний путь в кратчайший, есть бесконечно малая величина первого порядка.

171. Определение 2. Геодезическим путем материальной системы называется каждый путь, длина которого между двумя любыми положениями отличается лишь на величину бесконечно малую высшего порядка от длины любого другого бесконечно близкого соседнего пути между теми же положениями.

172. Замечание 1. Каждый кратчайший путь между двумя положениями есть геодезический путь.

Следовательно, определение (171) не содержит внутреннего противоречия, ибо существуют пути, удовлетворяющие этому определению.

173. Замечание 2. Между двумя любыми возможными положениями всегда возможен по крайней мере один геодезический путь (168), (172).

174. Замечание. 3. Геодезический путь не является обязательно кратчайшим путем между какими-либо двумя его положениями.

Из определений нельзя заключить, что каждый геодезический путь является также кратчайшим путем, и простые примеры показывают, что существуют геодезические пути, которые не являются одновременно кратчайшими путями между данными концевыми положениями. Такие примеры могут заимствоваться уже из геометрии отдельных материальных точек, т. е. из обычной геометрии, и могут, следовательно, рассматриваться как известные.

175. Замечание 4. Если между двумя положениями существует один единственный геодезический путь, то он является в то же время кратчайшим и именно абсолютно кратчайшим. В противном случае возникает по (168) и (172) противоречие с предположением.

176. Замечание 5. Геодезический путь есть всегда кратчайший путь между любыми двумя достаточно близкими соседними его

положениями, находящимися на конечном расстоянии друг от друга.

Пусть между двумя любыми положениями рассматриваемого геодезического пути будет некоторое количество других геодезических путей. С одним из этих путей должен совпадать абсолютно кратчайший путь (172) между этими положениями. Если теперь мы будем сближать оба положения вдоль рассматриваемого геодезического пути, то длина этого пути и одновременно длина абсолютно кратчайшего пути будут стремиться к нулю, в то время как остальные геодезические пути остаются конечными. По крайней мере, начиная от некоторого конечного расстояния между положениями, геодезический путь, вдоль которого оба положения сближаются, должен совпасть с абсолютно кратчайшим из них.

Аналитическое представление. Необходимым и достаточным аналитическим условием геодезического пути является требование, чтобы интеграл элементов пути (99), а именно 177.

$$\int ds,$$

взятый между какими-нибудь двумя положениями пути, имел вариацию, равную нулю, если координатам положений пути сообщают любые непрерывные вариации, предполагая лишь, что: 1) эти вариации исчезают на пределах интеграла и 2) вариации координат и их дифференциалы удовлетворяют уравнениям условий системы. Необходимое и достаточное условие для этого получается из дифференциальных уравнений, которым должны удовлетворять координаты пути, рассматриваемые как функции любой переменной, и которые, следовательно, будут дифференциальными уравнениями геодезического пути.

Выполнение этих дифференциальных уравнений для всех точек возможного пути является одновременно необходимым условием (172) того, чтобы путь был кратчайшим и, следовательно, эти дифференциальные уравнения являются одновременно дифференциальными уравнениями кратчайшего пути. Исчезание вариации интеграла, однако, не является достаточным условием 178.

того, чтобы путь между двумя конечными положениями был кратчайшим. Для этого необходимо, чтобы для каждой допустимой вариации координат вторая вариация интеграла была существенно положительной. Для достаточно близких соседних положений пути, которые удовлетворяют дифференциальные уравнения, это условие (по (176)) всегда выполняется автоматически.

179. Задача 1. Представить в прямоугольных координатах дифференциальные уравнения геодезического пути материальной системы.

$3n$ прямоугольных координат x_ν, которые мы сперва рассматриваем как функции любой переменной, должны до и после вариации удовлетворять i уравнениям (по (128))

$$\sum_{\nu=1}^{3n} x_{\iota\nu}\, dx_\nu = 0. \tag{a}$$

$3n$ вариаций δx_ν связаны, следовательно, i уравнениями, получаемыми из (a) варьированием:

$$\sum_{\nu=1}^{3n} x_{\iota\nu}\, d\delta x_\nu + \sum_{\nu=1}^{3n}\sum_{\mu=1}^{3n} \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu}\, \delta x_\mu\, dx_\nu = 0. \tag{b}$$

Так как длина ds элемента пути зависит не от x_ν, а только от dx_ν, то ее вариация есть:

$$\delta\, ds = \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{\partial ds}{\partial dx_\nu}\, \delta dx_\nu = \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{\partial ds}{\partial dx_\nu}\, d\delta x_\nu.$$

Предпосылая это, следует положить

$$\delta \int ds = \int \delta\, ds = 0. \tag{c}$$

По правилам вариационного исчисления мы умножим каждое уравнение (b) на пока произвольные функции ξ_ι от координат x_ν и складываем сумму левых сторон полученных уравнений, которая равна нулю, с вариациями элементов интеграла. Интегрированием по частям мы исключаем дифференциалы вариаций; наконец, полагаем равными нулю множители при произвольных вариациях δx_ν. Таким образом, получаем $3n$ дифференциальных уравнений вида

$$d\left(\frac{\partial ds}{\partial dx_\nu}\right) + \sum_{\iota=1}^{i} x_{\iota\nu}\, d\xi_\iota - \sum_{\iota=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{3n}\left(\frac{\partial x_{\iota\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu}\right)\xi_\iota\, dx_\mu = 0, \tag{d}$$

которые вместе с уравнениями (a) образуют $3n+i$ уравнений для определения $3n+i$ функций x_ν и ξ_ι. Эти дифференциальные уравнения являются необходимыми условиями для исчезновения вариации интеграла. Всякий геодезический путь удовлетворяет этим же уравнениям, следовательно, это есть искомое решение задачи.

Примечание 1. Дифференциальные уравнения (179) являются 180.
также и достаточными условиями для того, чтобы путь был геодезическим. Ибо если они выполняются, то вариация интеграла $\int ds$ равна членам, которые при интегрировании по частям остаются под знаком интеграла; следовательно, обозначив через 0 и 1 верхний и нижний пределы, будем иметь

$$\delta \int ds = \sum_{\nu=1}^{3n}\left[\left(\frac{\partial ds}{\partial dx_\nu} + \sum_{\iota=1}^{i} x_{\iota\nu}\xi_\iota\right)\delta x_\nu\right]_0^1.$$

Если мы допустим, таким образом, что для двух каких-нибудь положений пути вариации δx_ν исчезают, то исчезает также вариация интеграла между теми же положениями, как пределами этого интеграла, и поэтому требуемое для геодезических путей достаточное аналитическое условие выполнено согласно (177).

Примечание 2. Если мы пользуемся в качестве независи- 181.
мой переменной длиной пути, то, принимая во внимание (55) и (100), можно уравнения (179d) после деления на ds записать так:

$$\frac{m_\nu}{m}\, x''_\nu + \sum_{\iota=1}^{i} x_{\iota\nu}\xi'_\iota - \sum_{\iota=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{3n}\left(\frac{\partial x_{\iota\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu}\right)\xi_\iota x'_\mu = 0, \tag{a}$$

которые вместе с i уравнениями, полученными в результате дифференцирования (179a), т. е.

$$\sum_{\nu=1}^{3n} x_{\iota\nu} x''_\nu + \sum_{\nu=1}^{3n} \sum_{\mu=1}^{3n} \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu} x'_\nu x'_\mu = 0, \tag{b}$$

определяют $3n+i$ неоднородных линейных уравнений для определения $3n+i$ величин x''_ν и ξ'_ι и, таким образом, определяют эти величины как однозначные функции x_ν, x'_ν и ξ_ι.

182. Примечание 3. Имея в виду (72), уравнения (181a) можно записать в такой форме:

$$\sqrt{\frac{m_\nu}{m}} \frac{d}{ds} (\cos \widehat{s x_\nu}) = - \sum_{\iota=1}^{i} x_{\iota\nu} \xi'_\iota + \sum_{\mu=1}^{3n} \sum_{\iota=1}^{i} \left(\frac{\partial x_{\iota\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu} \right) \xi_\iota x'_\mu.$$

Уравнения (181a) дают, следовательно, представление о том, как должно изменяться направление при заданном начале, для того чтобы путь был геодезическим. Именно, каждое отдельное уравнение дает изменение наклона относительно определенной прямоугольной координаты.

183. Задача 2. Выразить дифференциальные уравнения геодезического пути материальной системы в ее обобщенных координатах p_ρ.

r координат p_ρ связаны k уравнениями (130)

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{\varkappa\rho} dp_\rho = 0 \tag{a}$$

и, следовательно, r вариации связаны уравнениями

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{\varkappa\rho} d\delta p_\rho + \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} \frac{\partial p_{\varkappa\rho}}{\partial p_\sigma} \delta p_\sigma dp_\rho = 0. \tag{b}$$

Длина бесконечно малого перемещения ds зависит теперь не только от дифференциалов dp_ρ, но также от самих p_ρ. Следовательно,

$$\delta ds = \sum_{\rho=1}^{r} \frac{\partial ds}{\partial dp_\rho} d\delta p_\rho + \sum_{\rho=1}^{r} \frac{\partial ds}{\partial p_\rho} \delta p_\rho.$$

Предпосылая это, следует положить, что

$$\delta \int ds = \int \delta ds \tag{c}$$

должен быть равен нулю.

Поступая по правилам вариационного исчисления точно так, как в (179), и обозначая множитель $\varkappa$-го уравнения через $\pi_\varkappa$, получим r дифференциальных уравнений вида

$$d\left(\frac{\partial ds}{\partial dp_\rho}\right) - \frac{\partial ds}{\partial p_\rho} + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho} d\pi_\varkappa - \sum_{\varkappa=1}^{k} \sum_{\sigma=1}^{r} \left(\frac{\partial p_{\varkappa\sigma}}{\partial p_\rho} - \frac{\partial p_{\varkappa\rho}}{\partial p_\sigma} \right) \pi_\varkappa dp_\sigma = 0,$$

которые вместе с уравнениями (a) дают $r+k$ дифференциальных уравнений для $r+k$ функций p_ρ и $\pi_\varkappa$. Эти уравнения, являющиеся необходимыми условиями для исчезновения вариации, выполняются, следовательно, для всех положений геодезического пути; таким образом, они содержат решение поставленной задачи.

184. Примечание 1. Дифференциальные уравнения (183d) являются также достаточными условиями для того, чтобы путь был геодезическим. Ибо если они выполняются, то вариация длины пути (ср. (180)) удовлетворяет условию

$$\delta \int ds = \sum_{\rho=1}^{r} \left[\left(\frac{\partial ds}{\partial dp_\rho} + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho} \pi_\varkappa \right) \delta p_\rho \right]_0^1$$

Если мы допускаем, таким образом, что для каких-нибудь двух положений пути вариации δp_ρ исчезают, то исчезает и вариация интеграла между теми же положениями как пределами, и поэтому для геодезического пути требуемые аналитические условия выполняются (177).

185. Примечание 2. Если в качестве независимой переменной выберем длину пути, то найдем r уравнений геодезического пути, получающихся вследствие того, что мы (183d) делим на

ds и для ds подставляем его значение, выраженное через p_ρ и dp_ρ, согласно (57d):

$$\sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma} p''_\sigma + \sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{\tau=1}^{r}\left(\frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\rho}\right) p'_\sigma p'_\tau + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho}\pi'_\varkappa - \\ - \sum_{\varkappa=1}^{k}\sum_{\sigma=1}^{r}\left(\frac{\partial p_{\varkappa\sigma}}{\partial p_\rho} - \frac{\partial p_{\varkappa\rho}}{\partial p_\sigma}\right)\pi_\varkappa p'_\sigma = 0, \tag{a}$$

которые вместе с вытекающими из (183a) k уравнениями

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{\rho\varkappa} p''_\rho + \sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r}\frac{\partial p_{\varkappa\rho}}{\partial p_\sigma} p'_\rho p'_\sigma = 0 \tag{b}$$

дают $r+k$ неоднородных линейных уравнений для $r+k$ величин p''_ρ и $\pi'_\varkappa$ представляют вместе с тем эти величины как однозначные функции p_ρ, p'_ρ и $\pi_\varkappa$.

186. Примечание 3. Введя в качестве независимого переменного длину пути и имея в виду уравнения (92), получим уравнения (185a) в виде

$$\frac{d}{ds}\left(\sqrt{a_{\rho\rho}}\cos\widehat{sp_\rho}\right) = \frac{1}{2}\sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{\tau=1}^{r}\frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\rho} p'_\sigma p'_\tau - \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho}\pi'_\varkappa + \\ + \sum_{\varkappa=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r}\left(\frac{\partial p_{\varkappa\sigma}}{\partial p_\rho} - \frac{\partial p_{\varkappa\rho}}{\partial p_\sigma}\right)\pi_\varkappa p'_\sigma,$$

т. е. получим уравнения, характеризующие изменения направления геодезического пути с изменением его длины. А именно, каждое отдельное уравнение указывает, как изменяется наклон относительно соответствующей координаты p_ρ.

187. Замечание 1. Геодезический путь не может быть определен только заданием положения и направления одного его элемента, ибо из данного положения в данном направлении возможно провести бесконечное число геодезических путей. Если для некоторого положения пути даны p_ρ, p'_ρ и k величин $\pi_\varkappa$, то они по (185) однозначно определяют ближайший элемент и, следовательно, продолжение пути возможно однозначно определенным образом. Задание направлений пути в этом заданном положении дает только величины p_ρ и p'_ρ и, следовательно, не удовлетворяет условиям геодезического пути, но допускает, если нет налицо особых отношений, k-кратную бесконечность геодезических путей.

188. Замечание 2. Если дифференциальные уравнения рассмотренной системы не допускают интеграла, то из $2r$ величин p_ρ и p'_ρ, которые определяют положение и направление в нем, $2r-k$ величин могут быть выбраны произвольно, а именно, r величин и $r-k$ величин. Эти $2r-k$ произвольных величин вместе с k произвольными величинами $\pi_\varkappa$ в данном положении могут рассматриваться как $2r$ произвольных постоянных, которые вместе с дифференциальными уравнениями (185a) определяют геодезический путь и которые также должны содержаться в интегралах тех уравнений, ибо по (173) возможно связать каждое возможное положение системы с каждым другим через геодезический путь. Именно, если дифференциальные уравнения системы не допускают конечных соотношений между p_ρ, то каждая мыслимая система значений этих величин является также возможной системой значений; следовательно, произвольное начальное и конечное положение системы определяется через $2r$ произвольных значений этих координат.

189. Замечание 3. Для каждого интеграла дифференциальных уравнений материальной системы число постоянных, которые определяют геодезический путь, уменьшается на 2.

Именно, если уравнения условий дают l конечных уравнений между p_ρ, то можно из r координат принять за произвольные лишь $r-l$, и, следовательно, из $2r$ величин p_ρ и p'_ρ произвольных будет только $2r-l-k$. В этом случае дифференциальные уравнения могут быть приведены, в результате умножения на подходящие множители и сложения, к такому виду, что l из них дают непосредственно интегрируемые уравнения, а именно, те уравне-

ния, которые получаются в результате дифференцирования l конечных соотношений. Для каждого такого уравнения с индексом λ имеем

$$\frac{\partial p_{\lambda\sigma}}{\partial p_\rho} - \frac{\partial p_{\lambda\rho}}{\partial p_\sigma} = 0.$$

Следовательно, в этом случае соответствующие величины π_λ исчезают из (125a), и все p''_ρ и $\pi'_\varkappa$ однозначно определяются через $k - l$ значений остальных $\pi_\varkappa$. В общем, следовательно, остаются еще $2r - 2l$ произвольных определяющих элементов; два элемента исчезли для каждого конечного уравнения.

Впрочем, эти $2r - 2l$ произвольных постоянных все же достаточны, как это и должно быть, чтобы каждое возможное положение связать с каждым другим возможным положением посредством геодезического пути; ибо если между p_ρ существует l конечных уравнений, то достаточно провести путь так, чтобы два его положения имели общими $r - l$ координат с каждым данным положением. Совпадение для остальных координат будет иметь место само по себе.

III. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПРЯМЕЙШИМИ И ГЕОДЕЗИЧЕСКИМИ ПУТЯМИ

190. Теорема. Для голономных систем каждый прямейший путь есть геодезический, и наоборот.

Для доказательства воспользуемся прямоугольными координатами. Если система голономная, то имеется i уравнений условий, которые через умножение на подходяще выбранные множители и через сложение в необходимом порядке получат интегрируемую форму, т. е. левые части их совпадут с точными дифференциалами интегралов уравнений условий. Для каждой системы значений ι, μ, ν имеем тогда

$$\frac{\partial x_{\iota\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu} = 0, \qquad \text{(a)}$$

и дифференциальные уравнения геодезического пути будут тогда в соответствии с (181a)

$$\frac{m_\nu}{m} x''_\nu + \sum_{\iota=1}^{i} x_{\iota\nu} \xi'_\iota = 0. \qquad \text{(b)}$$

Эти последние отличаются только по обозначению от уравнений прямейшего пути (155d):

$$\frac{m_\nu}{m} x''_\nu + \sum_{\iota=1}^{i} x_{\iota\nu} \Xi_\iota = 0, \qquad \text{(c)}$$

так как ни ξ_ι, ни Ξ_ι не встречаются в остальных уравнениях. Каждый возможный путь, который после подходящего определения ξ_ι удовлетворяет первому из этих уравнений, будет удовлетворять и второму, если положим $\Xi_\iota = \xi'_\iota$. Точно так же, каждое решение уравнений (c) является одновременно решением уравнений (b). Удовлетворение уравнениям (b) и (c) является достаточным условием того, чтобы путь был геодезическим или также прямейшим.

Следствие 1. В голономной системе между какими-нибудь 191.
двумя возможными положениями в возможном направлении возможен лишь единственный геодезический путь (161).

Следствие 2. В голономной системе между какими-нибудь 192.
двумя возможными положениями возможен по крайней мере один прямейший путь (173).

Теорема. Если в материальной системе каждый геодезиче- 193
ский путь есть одновременно и прямейший, то система голономная, ибо из каждого возможного положения в данном направлении, по (161), возможен лишь единственный прямейший путь, следовательно, в соответствии с предпосылкой, единственный геодезический путь.

Точно так же, согласно (173), каждое возможное положение может быть достигнуто одним из этих путей. Следовательно, число свобод движения системы равно числу ее независимых координат, т. е., согласно (146), система голономная.

194. Следствие. Если система не голономная, то каждый геодезический путь, вообще говоря, не является в то же время прямейшим. Это следует из того, что в каждом направлении здесь возможно провести лишь один прямейший, но много геодезических путей ((161) и (187)).

195. Замечание. В неголономных системах каждый прямейший путь, вообще говоря, не является геодезическим. Это положение будет доказано, коль скоро мы укажем такую систему, в которой прямейшие пути не находятся среди геодезических. Примем ради простоты, что между r координатами p_ρ системы имеется лишь одно единственное неинтегрируемое уравнение условий, и пусть оно имеет вид

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{1\rho} p'_\rho = 0. \qquad \text{(a)}$$

Предположим, что каждый прямейший путь есть в то же время и геодезический, тогда возможно было бы для каждой возможной системы значений p_ρ и p'_ρ так определить по крайней мере одну систему значений p''_ρ, чтобы одновременно удовлетворить как уравнениям (158c), так и (185a). Поэтому для всех возможных p_ρ и p'_ρ должны быть удовлетворены уравнения, которые получаются от попарного вычитания указанных уравнений:

$$p_{1\rho}(\Pi_1 - \pi'_1) + \pi_1 \sum_{\sigma=1}^{r} \left(\frac{\partial p_{1\sigma}}{\partial p_\rho} - \frac{\partial p_{1\rho}}{\partial p_\sigma}\right) p'_\sigma = 0.$$

Это есть r уравнений для величины $(\Pi_1 - \pi'_1)/\pi_1$; они совместны друг с другом лишь тогда, когда для всех пар значений ρ и τ удовлетворяется уравнение

$$\frac{1}{p_{1\rho}} \sum_{\sigma=1}^{r} \left(\frac{\partial p_{1\sigma}}{\partial p_\rho} - \frac{\partial p_{1\rho}}{\partial p_\sigma}\right) p'_\sigma = \frac{1}{p_{1\tau}} \sum_{\sigma=1}^{r} \left(\frac{\partial p_{1\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{\partial p_{1\tau}}{\partial p_\sigma}\right) p'_\sigma.$$

Если теперь в $r-1$ этих друг от друга независимых уравнений одну из величин p'_ρ выразим при помощи уравнений (a) через остальные, то отношения между последними будут совершенно произвольными величинами. Коэффициент при каждой такой величине должен равняться нулю. Мы получим, таким образом, как необходимое следствие нашего предположения $(r-1)^2$ уравнений, связывающих r функций $p_{1\rho}$ и их r^2 первых частных производных. В особых случаях эти уравнения могут быть совокупно удовлетворены, ибо они удовлетворяются, если уравнения (a) интегрируемые. Однако вообще мы не имеем права предполагать функции $p_{1\rho}$ подчиненными даже одному единственному условию и вообще, следовательно, наше предположение было недопустимо. Этим самым утверждение доказано.

196. Выводы (от (190) до (195)). В голономных системах понятия геодезического и прямейшего пути совпадают; в неголономных системах эти понятия имеют в общем совершенно различные значения.

Раздел 6

О ПРЯМЕЙШЕМ РАССТОЯНИИ В ГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМАХ

197. Предварительные замечания. 1. В этом отделе мы будем иметь дело лишь с голономными системами. Поэтому мы можем пользоваться здесь только свободными координатами p_ρ, число которых равно числу r свобод движения системы и, следовательно, не зависит от нашего произвола.

198. 2. Так как в этом случае прямейший путь и геодезический совпадают (196), то r общих дифференциальных уравнений этих путей можно записать в таком виде:

$$d\left(\sqrt{a_{\rho\rho}} \cos \widehat{sp_\rho}\right) = \frac{\partial ds}{\partial p_\rho},$$

которые получены из (186) или из (160), принимая во внимание, что для выбранных координат величины $p_{x\rho} = 0$.

199. 3. Вследствие того же замечания, мы получаем для вариации длины пути, которая удовлетворяет предыдущим дифференциальным уравнениям, следовательно, для длины геодезического пути, на основании (184):

$$\delta \int ds = \sum_{\rho=1}^{r} \left[\frac{\partial ds}{\partial dp_\rho} \delta p_\rho \right]_0^1$$

или, учитывая (92),

$$\delta \int ds = \sum_{\rho=1}^{r} \left[\sqrt{a_{\rho\rho}} \cos \widehat{sp_\rho}\, \delta p_\rho \right]_0^1,$$

в которых величины δp_ρ означают вариацию координат концевых положений, а $\cos \widehat{sp_\rho}$ — косинусы направлений концевых элементов рассматриваемого геодезического пути.

I. ПОВЕРХНОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ

200. Определение. Под поверхностью положений мы понимаем вообще непрерывно связанную совокупность положений. В частности, совокупность возможных положений голономной системы есть такая поверхность, которая характеризуется тем, что координаты принадлежащих ей положений удовлетворяют единственному конечному уравнению.

Совокупность положений, принадлежащих одновременно двум или нескольким поверхностям, мы определяем как пересечение этих поверхностей.

201. Примечание 1. Через каждое положение поверхности можно провести бесконечное множество путей. Мы говорим, что эти пути принадлежат поверхности, или лежат на поверхности. То же самое можно сказать об элементе пути и вообще о бесконечно малых перемещениях.

202. Примечание 2. Путь, который не принадлежит поверхности, имеет с ней, вообще говоря, конечное число общих положений. Ибо путь аналитически представляется $r-1$ уравнениями между координатами его положений, а поверхность — через единственное уравнение. По предположению, первые уравнения независимы от последнего. Следовательно, все они образуют r уравнений для r координат общих положений, которые и дадут конечное число действительных решений.

Примечание 3. Из каждого положения поверхности возможно провести $(r-1)$-кратное многообразие бесконечно малых перемещений на поверхности. 203.

Так как из r независимых изменений координат, которые характеризуют перемещение, $r-1$ можно выбрать произвольно, то r-ая координата определяется тем, что перемещение должно принадлежать данной поверхности.

Теорема 1. Всегда возможно определить одно и только одно направление, которое перпендикулярно к $r-1$ различным бесконечно малым перемещениям системы (197) из того же самого положения. Пусть $d_\tau p_\rho$ — изменение координаты p_ρ для τ-го из указанных $r-1$ перемещений, пусть δp_ρ — изменение для координат p_ρ любого другого перемещения. Если последнее должно быть перпендикулярным к указанным перемещениям, то необходимым и достаточным условием этого является то, чтобы выполнялись $r-1$ уравнений вида (58): 204.

$$\sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma} d_\tau p_\rho \delta p_\sigma = 0.$$

Они представляют $r-1$ неоднородных линейных уравнений для $r-1$ отношений δp_ρ между собой; следовательно, они могут быть удовлетворены при помощи систем значений этих отношений. В особых случаях может возникнуть неопределенность; например, она должна возникнуть в том случае, если какие-нибудь три из $r-1$ перемещений выбраны так, что каждое перемещение, перпендикулярное к двум из них, будет перпендикулярно также и к третьему.

Теорема 2. Если направление перпендикулярно к $r-1$ различным перемещениям, которые принадлежат поверхности в этом положении, то оно будет перпендикулярно и к любому пере- 205.

мещению, которое принадлежит поверхности в этом положении.

Перемещения, принадлежащие поверхности в данном положении, характеризуются тем, что соответствующие dp_ρ удовлетворяют единственному линейному однородному уравнению, получающемуся при помощи дифференцирования уравнения поверхности. Если $r-1$ систем значений $d_\tau p_\rho$ удовлетворяют этому уравнению, то ему удовлетворяют также величины

$$dp_\rho = \sum_{\tau=1}^{r-1} \lambda_\tau d_\tau p_\rho,$$

где λ_τ есть произвольные множители. dp_ρ принадлежат, следовательно, к произвольному перемещению на поверхности; причем каждое перемещение на поверхности может быть представлено в этой форме, так как правая часть написанного уравнения содержит $r-1$-кратное многообразие.

По предположению (204)

$$\sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma} d_\tau p_\rho \delta p_\sigma = 0;$$

умножая эти уравнения на λ_τ и складывая, получаем

$$\sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma} dp_\rho \delta p_\sigma = 0,$$

что и требовалось доказать (58).

206. Определение. Перемещение из данного положения поверхности называется перпендикулярным, если оно перпендикулярно к каждому перемещению, принадлежащему поверхности в данном положении.

207. Следствие 1. В каждом положении поверхности существует одно и только одно направление, перпендикулярное к поверхности.

208. Следствие 2. В каждом положении поверхности всегда возможно построить один и только один прямейший путь, перпендикулярный к поверхности.

Определение 1. Семейством поверхностей мы называем совокупность поверхностей, уравнения которых (200) различаются лишь через значения входящих в них констант. 209.

Обозначение. Каждое семейство поверхностей может быть представлено уравнением вида 210.

$$R = \text{const},$$

которое получается решением уравнения одной из поверхностей относительно изменяющихся констант и в котором правая часть обозначает значения этих констант, а левая есть функция координат p_ρ. Каждой поверхности этого семейства соответствует определенное значение стоящей справа константы, т. е. определенное значение функции R. Поверхности, для которых значения R отличаются лишь на бесконечно малые величины dR, называются соседними или смежными поверхностями.

Определение 2. Ортогональной траекторией семейства поверхностей называется путь, который это семейство пересекает перпендикулярно, т. е. который расположен перпендикулярно к каждой поверхности семейства в общих положениях (202). 211.

Теорема. Чтобы путь был ортогональной траекторией семейства 212.

$$R = \text{const}, \tag{a}$$

необходимо и достаточно, чтобы он в каждом его положении удовлетворял r уравнениям вида

$$\sqrt{a_{\rho\rho}} \cos \widehat{sp_\rho} = f \frac{\partial R}{\partial p_\rho}, \tag{b}$$

в которых $\widehat{sp_\rho}$ есть наклон пути в отношении координаты p_ρ, а f есть функция p_ρ, изменяющаяся при изменении положения и идентичная для всех r уравнений.

Мы конструируем в рассматриваемом положении пути бесконечно малое перемещение, длина которого равна $d\sigma$, при прохождении которого p_ρ должно измениться на δp_ρ, а R — на δR, и ко-

торое должно образовать с рассматриваемым путем угол $\widehat{s\sigma}$. Если мы умножим уравнения (b) на δp_ρ и сложим, то получим по (78a) и (85)

$$\delta\sigma \cos \widehat{s\sigma} = \sum_{\rho=1}^{r} f \frac{\partial R}{\partial p_\rho} \delta p_\rho = f \delta R. \qquad \text{(c)}$$

Если перемещение $\delta\sigma$ принадлежит поверхности семейства (a), т. е. той поверхности, которая имеет рассматриваемое положение, общее с путем, то $\delta R = 0$, следовательно, $\widehat{s\sigma} = 90°$. Направление пути поэтому перпендикулярно к пересекаемой поверхности (206), и уравнения (b) дают достаточное условие для того, чтобы это выполнялось для каждого положения. Они дают также и необходимые условия, так как (исключая особые случаи) в каждом положении лишь одно единственное направление удовлетворяет поставленному требованию.

213. Добавление 1. Расстояние по перпендикуляру между двумя смежными поверхностями рассматриваемого семейства в каком-нибудь положении равно fdR. Ибо если возьмем теперь перемещение $\delta\sigma$, которое по величине и направлению будет совпадать с частью перпендикулярной траектории, которая расположена между обеими поверхностями, то $\delta\sigma$ совпадает с рассматриваемым расстоянием, а $\widehat{s\sigma} = 0$ и, следовательно, утверждаемое вытекает из уравнения (212c).

214. Добавление 2. Встречаемая в уравнениях ортогональных траекторий величина f получается как корень уравнения

$$\frac{1}{f^2} = \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma} \frac{\partial R}{\partial p_\rho} \frac{\partial R}{\partial p_\sigma}.$$

Это уравнение получается подстановкой в выражение (88) значений направляющих косинусов по (212b). Корень выбираем в зависимости от того, будем ли мы брать положительное направление траектории по возрастающим или убывающим значениям R.

II. ПРЯМЕЙШЕЕ РАССТОЯНИЕ

Определение. Прямейшим расстоянием между двумя положениями голономной системы называется длина соединяющего их прямейшего пути. 215.

Примечание. Два положения могут иметь более чем одно прямейшее расстояние. Среди них имеются длины кратчайших путей, а следовательно также и длина абсолютно кратчайшего пути. Если говорят о прямейшем расстоянии двух положений как об однозначно определенном, то имеют в виду длину абсолютно кратчайшего пути. 216.

Аналитическое представление. Прямейшее расстояние двух положений можно представить как функцию этих положений. Пусть исходное положение, отмечаемое значком 0, имеет координаты $p_{\rho 0}$, а конечное, отмечаемое цифрой 1, имеет координаты $p_{\rho 1}$; направление прямейшего пути будем считать положительным от 0 к 1. Прямейшее расстояние является тогда функцией этих $2r$ величин и обозначается через S. Символ S называется аналитическим выражением прямейшего расстояния, или просто прямейшим расстоянием. 217.

Примечание 1. Функция S есть, вообще говоря, многозначная функция ее независимых переменных. Из ветвей этой функции одна и только одна ветвь исчезает одновременно с исчезающей разностью между $p_{\rho 1}$ и $p_{\rho 0}$. Об этой ветви (216) речь идет тогда, когда говорится об S как об однозначно определенной функции. 218.

Примечание 2. Функция S есть симметричная функция относительно $p_{\rho 1}$ и $p_{\rho 0}$ в том смысле, что она не меняет своего значения, если $p_{\rho 1}$ и $p_{\rho 0}$ меняют одновременно свои значения для всех ρ, ибо при этой замене мы меняем лишь начальное и конечное положения. 219.

Замечание. Если прямейшее расстояние системы дается в каких-нибудь свободных координатах ее, то все прямейшие пути вместе с тем выражаются также через эти координаты, причем сведения о том, каким образом положение отдельных мате- 220.

риальных точек зависит от выбранных координат, для нас не необходимы.

Ибо прямейшее расстояние каких-нибудь двух соседних положений системы является одновременно длиной бесконечно малого перемещения между ними; если, однако, это последнее может быть представлено при помощи выбранных координат, то высказанное утверждение оправдывается в соответствии с (163).

221. Задача. Получить из прямейшего расстояния системы выражение для длины ее бесконечно малого перемещения.

В S вместо $p_{\rho 0}$ подставим p_ρ, а вместо $p_{\rho 1}$ подставим $p_\rho + dp_\rho$ и предположим dp_ρ весьма малым. Мы видели уже (57d), что расстояние обоих положений представляется как корень из однородной квадратической функции dp_ρ. Сама S не допускает разложения в ряд по возрастающим степеням dp_ρ, однако S^2 допускает, и в этом разложении первыми не уничтожающимися членами должны быть квадратные члены. Следовательно, если обозначим при помощи черты, что в соответствующей функции должно быть положено $p_{\rho 0} = p_{\rho 1} = p_\rho$, то получим для расстояния обоих положений, т. е. для величины перемещения,

$$ds^2 = \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} \frac{\overline{\partial^2 S^2}}{\partial p_{\rho 1} \partial p_{\sigma 1}} dp_\rho dp_\sigma,$$

следовательно, функции $a_{\rho\sigma}$ есть

$$a_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\overline{\partial^2 S^2}}{\partial p_{\rho 1} \partial p_{\sigma 1}}.$$

Таким же вычислением получаем

$$a_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\overline{\partial^2 S^2}}{\partial p_{\rho 0} \partial p_{\sigma 0}}.$$

Этими выражениями $a_{\rho\sigma}$ можно пользоваться для того, чтобы косвенно получить из функции S прямейшие пути. Следующая теорема прямо приводит к достижению той же цели.

222. Теорема. Поверхность, все положения которой имеют одинаковое прямейшее расстояние от данного положения, пересекается

ортогонально всеми прямейшими путями, которые проходят через данное положение.

Пусть $p_{\rho 0}$ — координаты данного положения, а $p_{\rho 1}$ — координаты любого положения поверхности. Мы переходим от этого положения к другому положению поверхности, для которого $p_{\rho 1}$ изменилось на $dp_{\rho 1}$; при этом прямейшее расстояние от фиксированного положения, по предположению, не изменилось. Однако соответственно (199) оно должно измениться на $\sum_{\rho=1}^{r} \sqrt{a_{\rho\rho 1}} \cos \widehat{sp_{\rho 1}} dp_{\rho 1}$, если $\widehat{sp_{\rho 1}}$ обозначает угол, который образует прямейший путь в положении 1 с направлением p_ρ. Следовательно, имеем

$$\sum_{\rho=1}^{r} \sqrt{a_{\rho\rho 1}} \cos \widehat{sp_{\rho 1}}\, dp_{\rho 1} = 0.$$

Это уравнение показывает, что прямейший путь расположен перпендикулярно к перемещению $dp_{\rho 1}$ (85) и (78a). Так как это имеет силу для любого перемещения, которое принадлежит поверхности в положении 1, то отсюда и следует утверждение (206).

223. Следствие 1. Прямейшие пути, проходящие через данное положение, являются ортогональными траекториями семейства поверхностей, удовлетворяющих условию, что все их положения имеют одинаковое прямейшее расстояние от данного положения.

224. Следствие 2. Все прямейшие пути, которые проходят через фиксированное положение 0, удовлетворяют r уравнениям

$$\sqrt{a_{\rho\rho 1}} \cos \widehat{sp_{\rho 1}} = \frac{\partial S}{\partial p_{\rho 1}}, \qquad \text{(a)}$$

в которых $p_{\rho 1}$ — координата переменного положения пути, а $\cos \widehat{sp_{\rho 1}}$ — направляющий косинус пути в этом положении. Действительно, уравнения (a) есть уравнения ортогональных траекторий семейства поверхностей, которое представляется уравнением

$$S = \text{const}. \qquad \text{(b)}$$

Если бы S являлась произвольной функцией координат $p_{\rho 1}$, то, согласно (212), уравнение ортогональных траекторий было бы

$$\sqrt{a_{\rho\rho 1}}\cos \widehat{sp}_{\rho 1} = f\frac{\partial S}{\partial p_{\rho 1}}, \qquad \text{(c)}$$

а перпендикулярное расстояние между соседними поверхностями было бы равно fdS. По природе же нашей функции S (217, 222) это расстояние равно самому dS. Следовательно,

$$f = 1$$

и уравнение (c) принимает вид (a).

225. Примечание 1. Уравнение (224a), являющееся дифференциальным уравнением первого порядка, можно рассматривать как дифференциальное уравнение прямейшего пути в конечной форме, коль скоро $p_{\rho 0}$ будем рассматривать как переменную величину, а $2r$ величин $p_{\rho 1}$ и $\widehat{sp}_{\rho 1}$ как константы.

В самом деле, если мы определим из этих уравнений ряд положений 0 таким образом, что при фиксированном значении $p_{\rho 1}$ значения $\widehat{sp}_{\rho 1}$ остаются неизменными, то мы получим такие положения 0, исходя из которых прямейшие пути, проведенные в положение 1, будут иметь в этом положении фиксированное направление. Так как этим свойством может обладать лишь один единственный прямейший путь, то все определенные таким образом положения должны принадлежать этому пути, который, следовательно, и представляется уравнениями (224a).

226. Примечание 2. В доказательстве теоремы (222) мы с равным правом можем рассматривать положение 1 как фиксированное, а положение 0 как переменное. В этом случае вместо уравнений (224a) будут иметь место уравнения

$$\sqrt{a_{\rho\rho 0}}\cos \widehat{sp}_{\rho 0} = -\frac{\partial S}{\partial p_{\rho 0}}.$$

Различие в знаке правой части объясняется тем, что теперь переход из фиксированного положения, согласно (217), является переходом в отрицательном направлении. Уравнения (226a), как и

уравнения (224a), представляют дифференциальные уравнения прямейшего пути. Они представляют собой дифференциальные уравнения прямейших путей, проходящих через фиксированное положение $p_{\rho 1}$, и одновременно они представляют конечные уравнения определенного пути, проходящего через положение $p_{\rho 0}$ и образующего в нем с координатами углы $\widehat{sp}_{\rho 0}$.

Следствие 3. Прямейшее расстояние S системы удовлетворяет как функция $p_{\rho 0}$ дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка: 227.

$$\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma 0}\frac{\partial S}{\partial p_{\rho 0}}\frac{\partial S}{\partial p_{\sigma 0}} = 1, \qquad \text{(a)}$$

и как функция $p_{\rho 1}$ — дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка:

$$\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma 1}\frac{\partial S}{\partial p_{\rho 1}}\frac{\partial S}{\partial p_{\sigma 1}} = 1. \qquad \text{(b)}$$

Эти уравнения следуют из (214) и (224d). Они получаются также и непосредственно подстановкой направляющих косинусов прямейшего пути, выражаемых через S согласно (224a) и (226a) в уравнение (88), которому удовлетворяет угол, образуемый любым направлением с координатами.

Теорема. Если построить во всех положениях некоторой поверхности прямейшие пути, перпендикулярные к этой поверхности, и отложить вдоль этих путей равные длины, то получим новую поверхность, которая будет пересекать все эти прямейшие пути также ортогонально. 228.

Положения первоначальной поверхности обозначим через 0, а положения построенной заново поверхности через 1. Пусть $\widehat{sp}_{\rho 0}$ и $\widehat{sp}_{\rho 1}$ — углы, образованные некоторым прямейшим путем с координатами на первой и, соответственно, на второй поверхности. Если мы перейдем от рассматриваемого прямейшего пути к смежному, то длина прямейшего пути изменится, согласно (199),

на

$$\sum_{\rho=1}^{r} \sqrt{a_{\rho\rho 1}} \cos \widehat{sp_{\rho 1}} dp_{\rho 1} - \sum_{\rho=1}^{r} \sqrt{a_{\rho\rho 0}} \cos \widehat{sp_{\rho 0}} dp_{\rho 0},$$

где $dp_{\rho 1}$ и $dp_{\rho 0}$ обозначают изменения p_ρ в положениях 1 и 0. Согласно построению, это изменение равно нулю, и точно так же, согласно построению, будем иметь

$$\sum_{\rho=1}^{r} \sqrt{a_{\rho\rho 0}} \cos sp_{\rho 0} dp_{\rho 0} = 0,$$

так как путь расположен перпендикулярно к первоначальной поверхности.

Поэтому имеем также

$$\sum_{\rho=1}^{r} \sqrt{a_{\rho\rho 1}} \cos \widehat{sp_{\rho 1}}\, dp_{\rho 1} = 0.$$

Так как $dp_{\rho 1}$ могут обозначать любое перемещение на поверхности положений 1, то тем самым теорема наша доказана.

229. Следствие 1. Ортогональные траектории произвольного семейства поверхностей, каждая из которых во всех ее положениях имеет то же самое перпендикулярное прямейшее расстояние от смежных поверхностей, являются прямейшими путями.

230. Следствие 2. Если R является функцией r координат p_ρ такого свойства, что уравнение

$$R = \text{const} \tag{a}$$

представляет семейство поверхностей, каждая из которых имеет одинаковое перпендикулярное прямейшее расстояние dR от смежной поверхности во всех ее положениях, то уравнения

$$\sqrt{a_{\rho\rho}} \cos \widehat{sp_\rho} = \frac{\partial R}{\partial p_\rho} \tag{b}$$

будут уравнениями ортогональных траекторий, т. е. уравнениями прямейших путей, а именно, дифференциальными уравнениями первого порядка для этих путей.

Действительно, если бы R была совершенно произвольной функцией p_ρ, то уравнения (212b) представляли бы перпендикулярные траектории семейства (a) и, согласно (213), перпендикулярное расстояние между двумя соседними поверхностями было бы равно fdR. Соответственно нашей особой предпосылке это расстояние является постоянным и равно dR. Следовательно, $f = 1$. Поэтому уравнения (212b) переходят в указанные выше уравнения (b).

Следствие 3. Если уравнение 231.

$$R = \text{const}$$

представляет собой семейство поверхностей такого характера, что каждая из них имеет во всех своих положениях одинаковое перпендикулярное прямейшее расстояние dR от смежной поверхности, то функция R должна удовлетворять следующему дифференциальному уравнению:

$$\sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma} \frac{\partial R}{\partial p_\rho} \frac{\partial R}{\partial p_\sigma} = 1.$$

Это уравнение вытекает из (214) и (230). Оно получается также непосредственно, если подставить в уравнение (88) значения направляющих косинусов прямейшего пути согласно (230b).

Теорема 1. (Положение, обратное следствию (231)). Если 232.
функция R удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma} \frac{\partial R}{\partial p_\rho} \frac{\partial R}{\partial p_\sigma} = 1,$$

то уравнение

$$R = \text{const}$$

представляет семейство поверхностей такого свойства, что каждая из них имеет во всех своих положениях одинаковое перпендикулярное прямейшее расстояние от смежной поверхности, а именно, расстояние, измеряемое изменением R.

Действительно, если бы R была совершенно произвольной функцией, то ортогональные траектории семейства были бы представлены уравнениями (212b) и перпендикулярное расстояние двух соседних поверхностей в каждом положении было бы fdR. Однако из специальной предпосылки, которой мы подчинили функцию R, следует (214), что $f=1$, и таким образом утверждение доказано.

233. Теорема 2. Если функция R от p_ρ является любым решением дифференциальных уравнений

$$\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma}\frac{\partial R}{\partial p_\rho}\frac{\partial R}{\partial p_\sigma}=1, \tag{a}$$

то уравнения

$$\sqrt{a_{\rho\rho}}\cos\widehat{sp_\rho}=\frac{\partial R}{\partial p_\rho} \tag{b}$$

являются уравнениями прямейших путей.

Эта теорема непосредственно следует из (230) и (232).

234. Примечание. Хотя каждый путь, который представляется уравнениями (233b), является прямейшим, однако обратное утверждение, т. е. что каждый прямейший путь представим в такой форме, вообще говоря, не имеет места. Многообразие прямейших путей, которые содержатся в данной форме, зависит от многообразия решений дифференциального уравнения R, т. е. от числа произвольных постоянных.

Если же, в частности, R является полным решением с r произвольными постоянными $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}$ (α_0 — аддитивная постоянная), то возможно все прямейшие пути представить в форме (233b). Ибо правые части этих r уравнений (из которых только $r-1$ независимы друг от друга) содержат $r-1$ постоянных, которых достаточно, чтобы сообщить представленному пути в любом положении произвольное направление, определяемое $r-1$ направляющими косинусами. Однако если мы можем произвольно выбирать положение и направление пути в этом положении, то тем самым мы можем представить все прямейшие пути.

235. Теорема 3 (Якоби). Пусть R является полным решением дифференциального уравнения

$$\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma}\frac{\partial R}{\partial p_\rho}\frac{\partial R}{\partial p_\sigma}=1, \tag{a}$$

и пусть его произвольные постоянные, кроме аддитивной, будут $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}$, тогда $r-1$ уравнений

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_\tau}=\beta_\tau \tag{b}$$

представляют конечное уравнение прямейшего пути, причем β_τ есть $r-1$ новых произвольных постоянных.

Для доказательства этого заметим, что пути, представляемые уравнениями (b), являются ортогональными траекториями семейства

$$R=\text{const}. \tag{c}$$

Тогда утверждаемое нами следует из (232) и (229).

Для того чтобы найти направление этого пути, мы продифференцируем уравнения (b) вдоль того же направления, т. е. мы образуем эти уравнения для двух удаленных на ds положений пути, в которых p_ρ различаются на dp_ρ; после этого вычитаем их и делим на ds. Тогда получим $r-1$ уравнений вида

$$\sum_{\sigma=1}^{r}\frac{\partial^2 R}{\partial p_\sigma \partial \alpha_\tau}\frac{dp_\sigma}{ds}=0,$$

или, если согласно (79) и (78), введем направляющие косинусы рассматриваемого элемента пути, то получим

$$\sum_{\rho=1}^{r}\sqrt{a_{\rho\rho}}\cos\widehat{sp_\rho}\sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma}\frac{\partial^2 R}{\partial p_\sigma \partial \alpha_\tau}=0, \tag{d}$$

которые образуют систему $r-1$ линейных неоднородных уравнений для $r-1$ отношений направляющих косинусов.

Заметим, кроме того, что уравнения (a) имеют место для всех значений постоянных α_τ; следовательно, мы можем дифференциро-

вать по этим величинам и, таким образом, получим $r-1$ уравнений

$$\sum_{\rho=1}^{r}\frac{\partial R}{\partial p_\rho}\sum_{\sigma=1}^{r}b_{\rho\sigma}\frac{\partial^2 R}{\partial p_\sigma \partial \alpha_\tau}=0, \qquad \text{(e)}$$

которым должны удовлетворять частные производные функции R вследствие нашей особой предпосылки об этой функции. Если уравнения (b) представляют для рассматриваемых значений α_τ и β_τ определенный путь, то из (d) должны следовать однозначно определенные значения для отношений направляющих косинусов к одному из них. Точно так же однозначно определенные значения должны получиться из уравнений (e) для отношения величин $\frac{\partial R}{\partial p_\rho}$ к одной из них. Если f подлежащий определению множитель, то должно быть

$$\sqrt{a_{\rho\rho}}\cos\widehat{sp_\rho}=f\frac{\partial R}{\partial p_\rho}.$$

Поэтому, согласно (212), рассматриваемый путь является ортогональной траекторией семейства (c), что мы и хотели доказать. Множитель f оказывается равным единице.

Предположение о том, что $r-1$ уравнений (b) для определенных значений α_τ и β_τ дают определенный путь, лишь тогда не имеет места, когда эти уравнения не независимы друг от друга. Но в этом случае и произвольные постоянные будут зависимыми и, следовательно, решение не будет полным, что мы, однако, предполагаем.

236. Задача. Получить из любого полного решения R дифференциального уравнения (235a) прямейшее расстояние S системы.

Под S опять понимаем прямейшее расстояние положений 0 и 1 с координатами $p_{\rho 0}$ и $p_{\rho 1}$. Подставим в $r-1$ уравнений (235b) вместо p_ρ один раз $p_{\rho 0}$ и другой раз $p_{\rho 1}$. Из возникающих $2r-2$ уравнений исключаем β_τ и представляем α_τ как функции $p_{\rho 0}$ и $p_{\rho 1}$. Эти функции симметричны относительно $p_{\rho 0}$ и $p_{\rho 1}$. Они дают именно те значения α_τ, которые они должны иметь, чтобы отмеченные ими пути проходили через заданные положения 0 и 1.

Согласно (224a) и (233b), мы имеем для какого-нибудь положения 1

$$\frac{\partial S}{\partial p_{\rho 1}}=\left(\frac{\partial R}{\partial p_\rho}\right)_1$$

и, согласно (226a) и (233b), для положения 0

$$\frac{\partial S}{\partial p_{\rho 0}}=-\left(\frac{\partial R}{\partial p_\rho}\right)_0.$$

Если мы подставим в правые части этих равенств значения α_τ, выраженные через $p_{\rho 0}$ и $p_{\rho 1}$, а сами p_ρ примем в первом положении равными $p_{\rho 1}$, а во втором положении равными $p_{\rho 0}$, то получим первые производные S по всем независимым переменным как функции этих переменных. Следовательно, S можно найти простой интеграцией.

Раздел 7

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ [25]

1. ВЕКТОРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ОТНЕСЕННЫЕ К СИСТЕМЕ

Определение. Векторной величиной, отнесенной к системе, 237.
называется каждая величина, отнесенная к системе и имеющая такие же математические свойства, как и мыслимое перемещение системы.

Замечание 1. Перемещение системы само является вектор- 238.
ной величиной, отнесенной к системе. Произведение перемещения системы на какую-нибудь ненаправленную величину является также векторной величиной, отнесенной к системе.

Замечание 2. Всякую векторную величину, отнесенную 239.
к системе, можно представить себе геометрически при помощи мыслимого перемещения системы. Направление этого перемещения называется направлением соответствующей векторной величины. Масштаб указанного представления следует выбирать так, чтобы представляемое перемещение было бесконечно малым. Каждый

вектор, отнесенный к системе и изменяющийся с изменением положения системы, можно представлять как бесконечно малое перемещение системы из того положения, которому принадлежит значение этого вектора в данный момент.

240. Замечание 3. Векторная величина, отнесенная к отдельной материальной точке, есть вектор в обычном смысле слова. Всякий вектор, отнесенный к материальной точке, можно представить через ее перемещение, в частности, через бесконечно малое перемещение из ее мгновенного положения.

241. Замечание 4. Под компонентами и редуцированными компонентами вектора понимают такие векторы одинакового рода, которые представляются компонентами и редуцированными компонентами тех бесконечно малых перемещений, которые представляют данный вектор (48, 71).

В дальнейшем редуцированную компоненту вектора в направлении координаты p_ρ мы будем называть короче — компонентой вектора по p_ρ или еще короче — вектором по координате p_ρ.

Там, где не может возникнуть недоразумение, мы будем называть компонентой и редуцированной компонентой величину этой компоненты.

242. Задача 1a. По данным компонентам h_ν вектора вдоль $3n$ прямоугольных координат найти компоненты k_ρ вектора вдоль обобщенных координат p_ρ.

Пусть $d\bar{x}$, есть компонента вдоль x_ν какого-нибудь перемещения, которое представляет данную векторную величину; пусть $d\bar{p}_\rho$ есть компонента того же перемещения вдоль обобщенной координаты p_ρ, тогда связь между ними устанавливается согласно (80). Так как, однако, $d\bar{x}_\nu$ и $d\bar{p}_\rho$ соответственно пропорциональны h_ν и k_ρ, то получаем окончательно

$$k_\rho = \sum_{\nu=1}^{3n} \alpha_{\nu\rho} h_\nu = \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{\partial x_\nu}{\partial p_\rho} h_\nu.$$

243. Задача 1b. По данным компонентам k_ρ вектора вдоль p_ρ найти его компоненты h_ν вдоль прямоугольных координат.

Уравнения (242) дают только r уравнений для $3n$ величин h_ν, из которых они, следовательно, не могут быть определены. Таким образом, вообще говоря, задача является неопределенной. Это объясняется тем, что не все мыслимые положения и перемещения системы можно выразить при помощи p_ρ, но только возможные положения и перемещения.

Задача становится разрешимой только тогда, когда данный вектор является параллельным одному из перемещений, которое можно выразить через p_ρ и их изменения. В этом случае, согласно (81), получаем

$$h_\nu = \sum_{\rho=1}^{r} \beta_{\nu\rho} k_\rho.$$

Задача 2a. По данным компонентам h_ν вектора определить его величину h. 244.

Пользуясь формулой (83), находим

$$h^2 = \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{m_\nu}{m} h_\nu^2.$$

Задача 2b. По данным компонентам k_ρ вектора определить его величину k. 245.

Эта задача, как и (243), является неопределенной.

Решение делается возможным только в том случае, когда, кроме k_ρ, еще известно, что искомый вектор параллелен одному из перемещений, определяемых при помощи p_ρ. В этом случае, согласно (82), будем иметь

$$k^2 = \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma} k_\rho k_\sigma.$$

Задача 3a. По данным компонентам h_ν вектора найти его компоненту вдоль любого перемещения ds. 246.

Пусть ds' есть длина, а $d\bar{x}'_\nu$ — редуцированная компонента перемещения, через которое мы представляем вектор; тогда компонента этого перемещения в направлении ds будет, согласно (48) и (84),

$$ds' \cos \widehat{ss'} = \frac{1}{\partial s} \sum_{\nu=1}^{3n} dx_\nu d\bar{x}'_\nu.$$

Если умножим теперь обе части этого уравнения на отношение величины вектора к длине перемещения, представляющего вектор, то слева получим искомую компоненту, а справа, вместо dx'_ν, появится h_ν и, следовательно, искомая величина окажется равной

$$\sum_{\nu=1}^{3n} h_\nu \frac{dx_\nu}{ds}$$

или, в соответствии с (72),

$$\sum_{\nu=1}^{3n} \sqrt{\frac{m}{m_\nu}}\, h_\nu \cos \widehat{sx_\nu}.$$

247. Задача 3b. По данным компонентам k_ρ вектора найти его компоненту вдоль любого перемещения ds, выражаемого через обобщенные координаты p_ρ.

Применяя метод решения предыдущей задачи, получим, согласно (48) и (85), искомую величину равной

$$\sum_{\rho=1}^{r} k_\rho \frac{dp_\rho}{ds}$$

или, согласно (78) и (79),

$$\sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma} k_\rho \sqrt{a_{\rho\rho}} \cos \widehat{sp_\rho}\,.$$

248. Примечание. Как уже было замечено, через величины k_ρ, вообще говоря, невозможно определить любые компоненты данного вектора; через них определяются компоненты только вдоль тех направлений, которые могут быть выражены через p_ρ, т. е. в каждом возможном направлении.

249. Теорема 1. Для того чтобы вектор, компоненты которого вдоль p_ρ есть k_ρ, являлся перпендикулярным к некоторому перемещению, для которого p_ρ получают приращения dp_ρ, необходимо и достаточно удовлетворить уравнениям

$$\sum_{\rho=1}^{r} k_\rho dp_\rho = 0.$$

Это следует из (85), если принять k_ρ пропорциональными $d\bar{p}'_\rho$.

250. Теорема 2. Для того чтобы вектор, компоненты которого вдоль p_ρ есть k_ρ, был перпендикулярным к любому возможному перемещению системы, необходимо и достаточно подчинить r величин k_ρ следующим условиям:

$$k_\rho = \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho} \gamma_\varkappa,$$

в которых $p_{\varkappa\rho}$ берутся из уравнений условий системы (130), а $\gamma_\varkappa$ есть неопределенные множители.

Это следует из (148) и (150), если k_ρ представим через $d\bar{p}_\rho$.

251. Замечание 1. Векторы, отнесенные к одной и той же системе, подчиняются тем же законом сложения и разложения, как и мыслимые перемещения системы.

Сложение векторов, отнесенных к одной и той же системе, следует, таким образом, правилам алгебраического сложения.

252. Замечание 2. Векторы, отнесенные к различным системам, рассматриваются как величины разнородные; они не могут ни составляться, ни складываться.

253. Замечание 3. Векторная величина, отнесенная к данной системе, может быть рассматриваема как векторная величина, отнесенная к другой системе, частью которой является данная система.

254. Задача 1. Одна и та же векторная величина один раз рассматривается отнесенной к частичной системе, а другой раз к полной системе. Из компонент h_ν по прямоугольным координатам x_ν в первом случае нужно вычислить компоненты h'_ν по соответствующим координатам x'_ν во втором случае.

Пусть масса частичной системы есть m, а масса полной системы — m'. Несмотря на то, что координаты частичной системы x_ν совпадают с координатами полной системы x'_ν, мы все же будем различать их. Если сообщим теперь частичной системе любое перемещение, которое совпадает с перемещением полной системы, то для общих координат $dx'_\nu = dx_\nu$, а для остальных координат

полной системы $dx'_\nu = 0$. Так как, согласно (73), $m'd\bar{x}'_\nu = m_\nu dx'_\nu$ и $md\bar{x}_\nu = m_\nu dx_\nu$, то $m'd\bar{x}'_\nu = md\bar{x}_\nu$. Для вектора, представляемого при помощи рассматриваемых перемещений, компоненты вдоль x_ν и $\bar{x}'_\nu$ соответственно пропорциональны $d\bar{x}_\nu$ и $d\bar{x}'_\nu$. Следовательно, как решение задачи получаем

$$m'h'_\nu = mh_\nu$$

для индекса ν, общего обеим системам, а для остальных значений ν

$$h'_\nu = 0.$$

255. Задача 2. Одна и та же векторная величина один раз рассматривается отнесенной к частичной системе, а другой раз к полной системе. Исходя из компонент k_ρ вдоль обобщенных координат p_ρ, нужно вычислить компоненты k'_ρ вдоль соответствующих координат p'_ρ.

Пусть масса частичной системы есть m, а масса полной системы — m'. Несмотря на то, что координаты p_ρ частичной системы являются одновременно координатами полной системы, мы для ясности будем последние обозначать через p'_ρ.

Аналогично (254), как решение задачи получаем

$$m'k'_\rho = mk_\rho$$

для общих координат, а для остальных

$$k'_\rho = 0.$$

Без указанных предположений задача становится неопределенной.

II. ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ

256. Объяснение 1. Движением системы из данного начального положения в конечное положение называется переход системы из начального положения в конечное, учитывая время и характер перехода (27).

При каждом определенном движении система пробегает, таким образом, определенный путь, и именно в определенные времена она пробегает определенные длины пути.

Объяснение 2. Любое движение системы вдоль мыслимого 257.
пути называется мыслимым движением системы (11).

Объяснение 3. Любое движение системы вдоль возможного 258.
пути называется движением системы (112).

Объяснение 4. Кинематика, или наука о чистом движении, имеет дело с мыслимыми и возможными движениями системы. 259.

Кинематика почти совпадает с геометрией, если рассматриваются только закономерные системы (119) и (120). Если же рассматриваются и незакономерные системы, следовательно, в уравнения условий системы входит явно время, то кинематика становится более общей, чем геометрия. Однако мы не считаем необходимым входить в собственно кинематические рассмотрения, а ограничимся здесь некоторым числом основных понятий.

Аналитическое представление. Движение системы 260.
аналитически можно представить, выражая путь, пройденный системой, при помощи времени t как независимого переменного, е. т. координаты положения системы представляем как функции времени.

Производные по времени будем обозначать, согласно Ньютону, точкой, поставленной над соответствующей величиной.

Скорость

Определение. Мгновенный способ движения системы назы- 261.
вается скоростью системы.

Скорость определяется через изменение положения системы за бесконечно малое время и через само это время. Она измеряется через отношение этих величин, независимо от их абсолютного значения. Положение и скорость системы, взятые вместе, мы называем состоянием системы.

Следствие. Скорость системы можно рассматривать как 262.
векторную величину, отнесенную к системе. Направление ско-

рости совпадает с направлением рассматриваемого в данный момент элемента пути. По величине скорость равна первой производной от описываемого пути по времени.

Величина скорости называется также скоростью системы вдоль ее пути, или, там, где исключено недоразумение, просто скоростью.

263. Определение 2. Движение системы, при котором скорость не меняет своей величины, называется равномерным.

264. Примечание. Прямолинейное движение есть движение системы вдоль прямого пути. В этом случае скорость не меняет своего направления.

265. Задача 1. Выразить величину скорости, ее компоненты и приведенные компоненты вдоль прямоугольных координат через скорости изменения этих координат.

Величина скорости определяется как положительный квадратный корень уравнения

$$mv^2 = m\frac{ds^2}{dt^2} = \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \dot{x}_\nu^2.$$

Поэтому (241) компоненты скорости вдоль x_ν равны

$$\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\,\dot{x}_\nu,$$

а приведенные компоненты в том же направлении равны

$$\frac{m_\nu}{m}\,\dot{x}_\nu.$$

266. Примечание. Величина скорости системы есть среднее квадратичное из величин скорости всех ее частиц.

267. Задача 2. Выразить величину скорости, ее компоненты и ее приведенные компоненты в направлении обобщенных координат p_ρ через скорости изменения $\dot{p}_\rho$ этих координат.

Преобразованием (265) при помощи (57) получим величину скорости как положительный квадратный корень уравнения

$$v^2 = \sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma}\dot{p}_\rho\dot{p}_\sigma.$$

Соответственно этому (241) компоненты в направлении p_ρ равны

$$\frac{1}{\sqrt{a_{\rho\rho}}}\sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma}\dot{p}_\sigma,$$

а приведенные компоненты в том же направлении, или компоненты вдоль p_ρ, равны

$$\sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma}\dot{p}_\sigma.$$

Импульс

Определение. Произведение из массы системы на ее скорость называется количеством движения, или импульсом, системы. 268.

Импульс системы является, следовательно, векторной величиной, отнесенной к системе. Компоненты импульса вдоль какой-нибудь координаты обычно называют просто импульсом системы вдоль этой координаты (241).

Обозначение. Импульс системы вдоль обобщенной координаты p_ρ будем обозначать через q_ρ. 269.

Задача 1. Выразить импульс q_ρ системы вдоль p_ρ через скорости изменения координат. 270.

Из (268) и (267) находим

$$q_\rho = m\sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma}\dot{p}_\sigma.$$

Задача 2. Выразить скорости изменения обобщенных координат $\dot{p}_\rho$ через импульсы системы вдоль этих координат. 271.

Разрешая предыдущие уравнения, найдем:

$$\dot{p}_\rho = \frac{1}{m}\sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma}q_\sigma.$$

Примечание. Скорость и количество движения системы есть такие векторы, отнесенные к системе, которые всегда параллельны возможным перемещениям системы (243) и (245). 272.

Ускорение

273. Определение. Мгновенный характер изменения скорости системы называется ускорением системы.

Ускорение системы определяется через изменение скорости за бесконечно малое время и само это время. Оно измеряется отношением обеих величин, независимо от абсолютного значения этих величин.

274. Следствие. Ускорение системы можно рассматривать как векторную величину, отнесенную к системе. Если мы представим из данного положения два перемещения системы, из которых одно представляет скорость в данный момент, а другое в смежный момент времени, то разность этих перемещений и есть изменение скорости. Следовательно, направление этой разности есть направление ускорения, а величина ускорения выразится отношением длины этого нового перемещения к дифференциалу времени.

275. Задача 1. Выразить величину ускорения f и его компоненты вдоль прямоугольных координат через производные по времени от этих координат.

Компоненты скорости вдоль x_ν в момент t и в момент $t+dt$ есть (265)

$$\frac{m_\nu}{m}\dot{x}_\nu \quad \text{и} \quad \frac{m_\nu}{m}\dot{x}_\nu+\frac{m_\nu}{m}\ddot{x}_\nu dt,$$

следовательно, компоненты разности скоростей есть $\frac{m_\nu}{m}\ddot{x}_\nu dt$; отношение этой разности ко времени дает компоненты ускорения вдоль x_ν:

$$\frac{m_\nu}{m}\ddot{x}_\nu.$$

Величина ускорения получается как положительный квадратный корень уравнения (см. (244))

$$mf^2=\sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \ddot{x}_\nu^2.$$

Примечание. Величина ускорения материальной системы 276.
есть среднее квадратическое из величин ускорений ее частиц.

Задача 2. Представить компоненты f_ρ ускорения системы 277.
вдоль обобщенных координат через производные по времени от этих координат.

Согласно (242) получаем

$$f_\rho=\sum_{\nu=1}^{3n}\frac{m_\nu}{m}\alpha_{\nu\rho}\ddot{x}_\nu.$$

Подставим сюда, как и в (108),

$$\ddot{x}_\nu=\sum_{\sigma=1}^{r}\alpha_{\nu\sigma}\ddot{p}_\sigma+\sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{\tau=1}^{r}\frac{\partial\alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\tau}\dot{p}_\sigma\dot{p}_\tau.$$

После преобразований, аналогичных (108), находим

$$f_\rho=\sum_{\sigma=1}^{r}a_\sigma\ddot{p}_\sigma+\sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{\tau=1}^{r}\left(\frac{\partial a_{\sigma\rho}}{\partial p_\tau}-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\rho}\right)\dot{p}_\sigma\dot{p}_\tau.$$

Примечание 1. Компоненты ускорения являются, следова- 278.
тельно, вообще линейными функциями вторых производных координат, квадратичными функциями первых производных координат и произвольными функциями самих координат.

Примечание 2. Ускорение системы не обязательно должно 279.
быть параллельным возможному перемещению, которое может быть выражено через координаты p_ρ. Поэтому компоненты f_ρ, вообще говоря, недостаточны для определения величины ускорения и его компонент вдоль прямоугольных координат (243) и (245). Напротив, величины f_ρ являются достаточными для определения компонент ускорения вдоль любого возможного перемещения системы (248).

Задача 3. Найти компоненты ускорения вдоль пути. 280.

Согласно (72), направляющие косинусы пути равны $\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\frac{dx_\nu}{ds}$,

следовательно, принимая во внимание (265), они равны $\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\frac{\dot{x}_\nu}{v}$.

Отсюда следует, согласно (246) и имея в виду (275), для искомых тангенциальных компонент ускорения

$$f_t = \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{m_\nu}{m} \frac{\dot{x}_\nu \ddot{x}_\nu}{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s},$$

где s обозначает длину пути.

281. Замечание. Если разложим ускорение системы на две компоненты: одну вдоль направления пути, а другую в направлении, перпендикулярном к пути, то последняя равна произведению кривизны пути на квадрат скорости системы.

Принимая в (107) в качестве независимого переменного время t, получим

$$mv^4c^2 = \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \ddot{x}_\nu^2 - m\ddot{s}^2.$$

Следовательно, пользуясь (275) и (280), найдем

$$v^4c^2 = f^2 - f_t^2.$$

Если назовем вторую компоненту радиальной или центростремительной f_r, то вследствие взаимной перпендикулярности f_r и f_t

$$f^2 = f_t^2 + f_r^2,$$

следовательно, находим окончательно

$$f_r = cv^2.$$

Энергия

Определение. Половина произведения массы системы на
282. квадрат ее скорости называется энергией системы.

Задача 1. Выразить энергию E системы через скорости изме-
283. нения прямоугольных координат.

Согласно (265), получаем

$$E = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \dot{x}_\nu^2.$$

Следствие 1. Энергия системы равна сумме энергии ее 284.
материальных частиц.

Следствие 2. Если рассматривать полную систему состоящей 285.
из отдельных частичных систем, то энергия полной системы равна сумме энергий частичных систем.

Задача 2. Выразить энергию системы через скорости изме- 286.
нения обобщенных координат и через импульсы вдоль этих координат.

Принимая во внимание (267), (270) и (271), последовательно получаем:

$$E = \frac{1}{2} m \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma} \dot{p}_\rho \dot{p}_\sigma, \tag{a}$$

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^{r} q_\rho \dot{p}_\rho, \tag{b}$$

$$E = \frac{1}{2m} \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma} q_\rho q_\sigma. \tag{c}$$

Примечание (от (261) до (286)). Скорость, импульс, уско- 287.
рение и энергия системы определены независимо от аналитического представления, в частности, независимо от выбора координат системы.

Употребление частных производных

Обозначения (ср. (90)). Через $\partial_p E$ будем обозначать частную 288.
производную энергии E только в том случае, когда координаты p_ρ и скорости их изменения $\dot{p}_\rho$ рассматриваются как независимые друг от друга переменные, определяющие энергию (286).

Через $\partial_q E$ будем обозначать частную производную энергии E только в том случае, когда координаты p_ρ и импульсы q_ρ вдоль этих координат рассматриваются как независимые друг от друга переменные, определяющие энергию (286c).

Применение одного из этих двух обозначений исключает другое. Через ∂E будем обозначать как обычно, какой-нибудь вид частной производной E, т. е. первый вид, или второй, или какой-нибудь третий; причем это обозначение будем применять там, где исключена возможность недоразумения.

289. Замечание 1. Импульсы q_ρ системы вдоль координат p_ρ можно выразить при помощи частных производных энергии системы по скоростям изменения координат.

Действительно, согласно (285a) и (270), получаем (ср. (91))

$$q_\rho = \frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\rho}.$$

290. Замечание 2. Скорости изменения $\dot{p}_\rho$ координат p_ρ могут быть представлены как частные производные энергии системы по соответствующим импульсам.

Действительно, согласно (286c) и (271), получаем (ср. (94))

$$\dot{p}_\rho = \frac{\partial_q E}{\partial q_\rho}.$$

291. Замечание 3. Компоненты f_ρ ускорения системы можно представить как частные производные энергии системы.

Действительно, согласно (286a), находим

$$\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\rho} = m \sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma} \dot{p}_\sigma,$$

следовательно,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\rho}\right) = m \sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma} \ddot{p}_\sigma + m \sum_{\sigma=1}^{r} \sum_{\tau=1}^{r} \frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau} \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau.$$

Затем, согласно тому же уравнению (286a),

$$\frac{\partial_p E}{\partial p_\rho} = \frac{1}{2} m \sum_{\sigma=1}^{r} \sum_{\tau=1}^{r} \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\rho} \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau.$$

Вычитая из первого уравнения второе и сравнивая с (277), находим

$$m f_\rho = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\rho}\right) - \frac{\partial_p E}{\partial p_\rho}, \tag{a}$$

или, приняв во внимание (289),

$$m f_\rho = \dot{q}_\rho - \frac{\partial_p E}{\partial p_\rho}. \tag{b}$$

292. Замечание 4. Если мы изменим координату p_τ дважды на одну и ту же бесконечно малую величину, сохраняя при этом первоначальные значения: в одном случае — скоростей изменения координат, а в другом — импульсов вдоль координат, то энергия системы получит равные и противоположные изменения.

Действительно, умножив уравнения (95a) на mds и разделив на dt^2, получим

$$\frac{\partial_p E}{\partial p_\tau} = -\frac{\partial_q E}{\partial p_\tau}.$$

293. Теорема. Если положение системы испытывает дважды одно и то же бесконечно малое изменение при условии сохранения первоначальных значений: в одном случае — скоростей изменения координат, а в другом — импульсов вдоль координат, то энергия системы в обоих случаях получает равное и противоположное изменение.

Действительно, в первом случае изменение энергии будет

$$\delta_p E = \sum_{\tau=1}^{r} \frac{\partial_p E}{\partial p_\tau} \delta p_\tau,$$

а во втором случае

$$\delta_q E = \sum_{\tau=1}^{r} \frac{\partial_q E}{\partial p_\tau} \delta p_\tau.$$

Отсюда находим, принимая во внимание замечание 4:

$$\delta_p E = -\delta_q E.$$

294. Следствие. Компоненты ускорения системы вдоль координат системы p_ρ возможно представить в форме (см. (291b) и (292))

$$m f_\rho = \dot{q}_\rho + \frac{\partial_q E}{\partial p_\rho}.$$

295. **Заключительное замечание к первой книге**

Как уже было сказано в предварительном замечании (1), в рассуждениях этой книги совершенно исключен опыт. Следовательно, если в дальнейшем встретятся полученные результаты, то мы будем знать, что они получены не из опыта, а из законов нашего созерцания и мышления, вместе с рядом произвольных установлений.

В целом несомненно, что образование наших представлений и их развитие происходило лишь с учетом возможного опыта; но не менее истинным является то, что один только опыт должен дать решение вопроса о ценности или неценности наших рассуждений. Однако правильность или неправильность наших рассуждений не может быть подтверждена или опровергнута никаким возможным будущим опытом.

КНИГА ВТОРАЯ

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛЬНЫХ СИСТЕМ [26]

Предварительное замечание. В настоящей, второй книге под временем, пространством и массой мы будем понимать 296.
знаки для предметов внешнего опыта, свойства которых, впрочем, не противоречат свойствам ранее введенных нами одинаково названных величин, рассматривавшихся в качестве форм нашего внутреннего созерцания или введенных по определению.

Поэтому наши суждения о соотношениях между временем, пространством и массой должны удовлетворять не только требованиям нашего ума, но вместе с тем должны соответствовать и возможному, в частности, будущему опыту. Эти утверждения основываются поэтому не только на законах нашего созерцания и мышления, но, кроме того, и на предшествующем опыте. Все, что дает нам этот опыт, поскольку он не содержится в основных понятиях, мы выражаем одним общим высказыванием, которое и представляем как основной закон. После этого вторичная апелляция к опыту не должна более иметь места. Вопрос о правильности наших положений совпадает, таким образом, с вопросом о правильности или всеобщей значимости этого единственного закона.