

Лабораторная работа № 1.22

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННОЙ ПОСТОЯННОЙ С ПОМОЩЬЮ ВЕСОВ КАВЕНДИША

И. Я. ШЕЙНМАН

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Фундаментальные физические константы играют важнейшую роль в современной физике. В 1966 году была основана специальная международная организация CODATA (Committee on Data for Science and Technology), одной из задач которой является организация научного сотрудничества для систематизации и улучшения методик эксперимента по определению фундаментальных констант, анализ результатов и предоставление информации о полученных значениях [1]. На сегодняшний день большинство из фундаментальных постоянных измерены с очень высокой точностью. Например, элементарный заряд, постоянная Планка, число Авогадро определены с относительной погрешностью 10^{-8} , постоянная Больцмана - 10^{-6} . Удивительно, но на общем фоне значение гравитационной постоянной, которая входит в закон всемирного тяготения, известно с достаточно большой относительной погрешностью, составляющей 10^{-4} . Серьезные усилия, по определению гравитационной постоянной предпринимаются и в наше время [2 - 4].

Гравитационную постоянную иногда называют кавендишевой и это не случайно. В 2008 г. исполняется 210 лет опытам Г. Кавендиша по определению средней плотности Земли [5]. Идея использовать крутильные весы с пробными массами, примененная Г. Кавендишем в его эксперименте, легла в основу современных методов определения гравитационной постоянной.

Второй сын герцога Чарльза Девонширского Генри Кавендиш имел одну великую страсть, и этой страстью была наука. Получив значительное наследство, он все свое состояние тратил на научные исследования, организовав собственную лабораторию. В 29 лет он удостоился избрания в члены Лондонского Королевского общества и почти сорок лет исследований посвятил электрическим явлениям [6]. Кроме того Генри Кавендиш известен своими трудами по химии и термодинамике. Организованная в 1869 г. физическая лаборатория Кембриджского университета была названа в его честь.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Определение гравитационной постоянной тремя методами: методом ускорения, методом равновесия и методом резонанса.

ЗАДАЧИ

1. Определение ускорения маленьких свинцовых шариков при гравитационном взаимодействии с большими свинцовыми шарами.
2. Определение периода и коэффициента затухания свободных колебаний крутильных весов.
3. Определение угла, соответствующего положению равновесия крутильных весов, когда большие свинцовые шары максимально приближены к стеклянному корпусу весов.

ОПИСАНИЕ ЛАБОРАТОРНОЙ УСТАНОВКИ

Лабораторная работа выполняется на установке фирмы RHYWE [1] для определения гравитационной постоянной. Весы Кавендиша, изображенные на рис. 1, представляют собой коромысло 1, подвешенное на тонкой вольфрамовой нити 2.

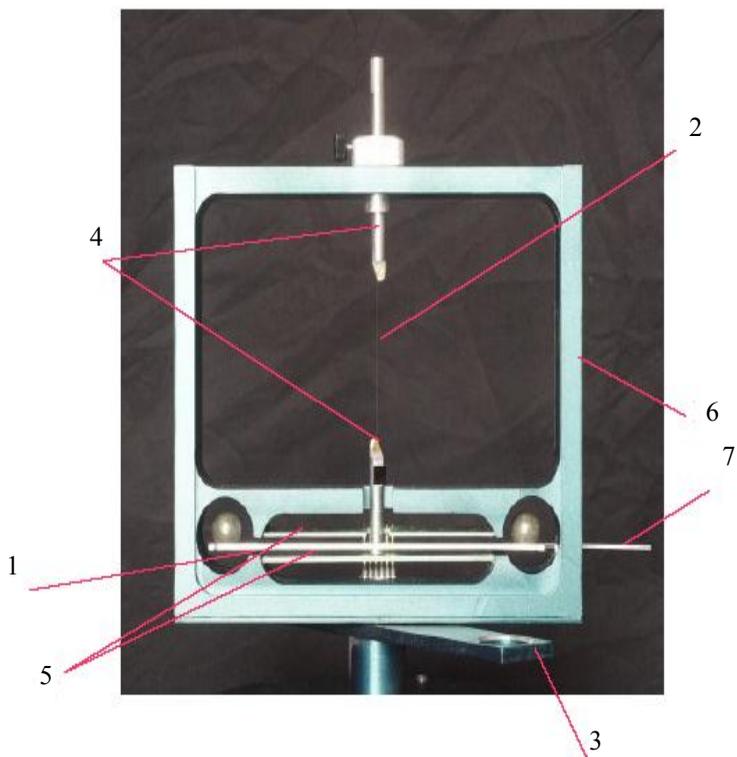


Рис. 1. Весы Кавендиша. Обозначено:

1 – коромысло с маленькими свинцовыми шариками, 2 – вольфрамовая нить, 3 – коромысло, на края которого помещаются большие свинцовые шары (поворотный рукав), 4 – крепление нити, 5 – сенсорные датчики для измерения угла поворота коромысла 3, 6 – рамка корпуса весов, 7 – стопор.

На концах коромысла расположены маленькие свинцовые шарики одинаковой массы. Коромысло вместе с подвесом 2 и сенсорными датчиками 5

помещено в корпус 6, имеющий съемные стенки, выполненные из стеклянных пластин. На поворотный рукав 3 помещают большие свинцовые шары одинаковой массы. Когда угол между коромыслом и поворотным рукавом составляет $\pi/2$, гравитационные силы между большими и маленькими шарами уравновешены, система находится в положении равновесия и нить не скручена. Назовем это положение весов исходным. При отклонении поворотного рукава от исходного положения, равновесие нарушается, маленькие шарики начинают ускоряться в направлении к большому шару, коромысло поворачивается, нить закручивается, и в системе возникают затухающие колебания вокруг нового положения равновесия, отклоняющегося от исходного на угол θ_r . Гравитационная постоянная может быть определена как по динамическим характеристикам колебательной системы при выведении ее из положения равновесия, так и по значению угла, соответствующему новому положению равновесия.

МЕТОД УСКОРЕНИЯ

Пусть весы находятся в исходном положении. Быстро переместим поворотный рукав с большими шарами таким образом, чтобы большие шары максимально приблизились к маленьким, но не касались стеклянного корпуса весов. Назовем такое положение поворотного рукава крайним. Маленькие шары ускорятся в направлении больших шаров за счет гравитационного взаимодействия. Зная ускорение a маленьких шаров, массу большого шара M и расстояние между центрами большого и малого шаров R можно определить гравитационную постоянную G :

$$G = \frac{aR^2}{2M} \quad (1)$$

Формула для расчета R и числовые значения параметров приведены в Таблице 1.

Экспериментально ускорение можно определить, построив зависимость смещения маленького шарика s от исходного положения s_0 от времени t . Если в начальный момент времени t_0 шарик покоился, то для равноускоренного движения справедливо

$$s(t) - s_0 = \frac{a(t - t_0)^2}{2}. \quad (2)$$

Таким образом, ускорение можно определить как угловой коэффициент зависимости смещения шарика от $(t - t_0)^2$ на ее линейном участке.

Датчики 5 позволяют измерить угол закручивания нити θ при повороте коромысла весов. Смещение шарика можно определить по формуле

$$s(t) - s_0 = d(\theta(t) - \theta_0), \quad (3)$$

где d – расстояние между осью вращения коромысла и центром маленького шарика.

Метод равновесия

Когда поворотный рукав с большими шарами находится в одном из крайних положений и веса находятся в равновесии, крутящий момент нити и момент гравитационной силы равны:

$$\begin{aligned} 2(F_{G1} - F_{G2} + F_{G3})d &= \frac{4\pi^2}{T^2} I\theta_D, \\ F_{G1} - F_{G2} + F_{G3} &= \frac{GM}{R^2} [(m - m_h)(1 - f_1) + m_b f_2] \end{aligned}, \quad (4)$$

где F_{G1} – сила притяжения между ближайшими большим и малым шарами, F_{G2} – сила притяжения между большим шаром и дальним малым шаром, F_{G3} – сила притяжения между большим шаром и коромыслом с двумя отверстиями, T – период свободных колебаний крутильных весов, I – момент инерции

колебательной системы, m – средняя масса маленького свинцового шарика, $m_h = \rho V$, ρ - плотность материала коромысла весов, V – объем отверстия в коромысле для шарика, m_b - масса коромысла весов, f_1, f_2 – коэффициенты, учитывающие геометрический фактор. Вывод формул для расчета сил F_{G1} , F_{G2} , F_{G3} приведен в [7], формулы для расчета момента инерции I , коэффициентов f_1, f_2 и числовые значения параметров приведены в Таблице 1.

Таблица 1

Характеристики крутильных весов

Параметр	Обозначение, расчетная формула	Значение	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
Параметры малых шаров				
m_1	масса	0.014573 кг	0.000001 кг	6.88E-05
m_2	масса	0.014545 кг	0.000001 кг	6.88E-05
d_{s1}	диаметр	0.013452 м	0.000048 м	3.57E-03
d_{s2}	диаметр	0.013468 м	0.000048 м	3.56E-03
DM	расстояние между внешними границами шаров при расположении на коромысле	0.146766 м	0.000066 м	4.50E-04
m	средняя масса	0.014559 кг	0.000001 кг	4.86E-05
d	$(DM - (d_{s1} + d_{s2})/2)/2$	0.066653 м	0.000037 м	5.57E-04
Параметры больших шаров				
M_1	масса	1.038500 кг	0.001000 кг	9.63E-04
M_2	масса	1.038600 кг	0.001000 кг	9.63E-04
d_{L1}	диаметр	0.056120 м	0.000090 м	1.60E-03
d_{L2}	диаметр	0.056290 м	0.000170 м	3.02E-03
M	средняя масса	1.038550 кг	0.000707 кг	6.81E-04
Геометрические параметры				
W	расстояние между стеклянными стенками корпуса	0.035100 м	0.000100 м	2.85E-03
G_1	зазор между большим шаром и корпусом в крайнем положении	0.000700 м	0.000200 м	0.285714286
G_2	зазор между большим шаром и корпусом в крайнем положении	0.000200 м	0.000200 м	1
R	$W/2 + (d_{L1} + d_{L2})/4 + (G_1 + G_2)/2$	0.046103 м	0.000158 м	3.42E-03
f_1	$R^3 / (R^2 + (2d)^{3/2})$	0.034916	0.000320	0.009168681

Параметры коромысла весов				
m_b	масса	0.007174 кг	0.000010 кг	1.39E-03
L_b	длина	0.145000 м	0.005000 м	0.034482759
W_b	ширина	0.012730 м	0.000300 м	0.023566379
T_b	толщина	0.001520 м	0.000010 м	0.006578947
r_h	радиус отверстия	0.004575 м	0.000010 м	2.19E-003
ρ_{Al}	плотность алюминия	2700 кг / м ³	50 кг / м ³	0.018518519
m_h	«масса» отверстия	0.000270 кг	0.000005 м	0.02013278
I_b	Момент инерции коромысла $M_b(L_b^2 + W_b^2) / 12$	1.267E-5 кг м ²	8.671E-7 кг м ²	0.068453166
I_{ss}	Момент инерции маленького шара $= m_1(d^2 + 2(d_{s1}/2)^2/5)$ $+ m_2(d^2 + 2(d_{s2}/2)^2/5)$	0.000130 кг м ²	1.442E-7 кг м ²	1.11E-03
I_h	Момент инерции отверстий $2 * (m_h r_h^2 / 2 + m_h (d/2)^2)$	6.051E-7 кг м ²	1.220E-8 кг м ²	0.020163017
I	Момент инерции крутильных весов $= I_b + I_{ss} - I_h$	0.000142 кг м ²	8.790E-7 кг м ²	0.006192674
d'	d/R	1.445757 кг м ²	5.005E-3 кг м ²	3.46E-3
Γ'	$L_b/(2R)$	1.572583 кг м ²	5.449E-2 кг м ²	3.47E-2

Период колебаний крутильных весов и угол θ_D определяются экспериментально. Тогда значение гравитационной постоянной можно вычислить по формуле:

$$G = \frac{2\pi^2}{T^2} I \theta_D \frac{R^2}{Md[(m - m_h)(1 - f_1) + m_b f_2]} \quad (5)$$

Угол θ_D можно измерить непосредственно, дождавшись установления равновесия, однако характеристики весов таковы, что для достижения равновесия требуется значительный промежуток времени (около 1 часа). Кроме того, для повышения точности измерений необходимо определить θ_D для двух крайних положений поворотного рукава: при смещении его от исходного положения по часовой стрелке (θ_{D1}) и против часовой стрелки (θ_{D2}). В этом случае искомое значения угла определяется как

$$\theta_D = (\theta_{D1} - \theta_{D2}) / 2. \quad (6)$$

При выполнении данной лабораторной работы предлагается определить положение равновесия, анализируя зависимость угла от времени при совершении системой затухающих колебаний, что требует значительно меньшего времени.

Пусть коромысло крутильных весов совершает свободные затухающие колебания вокруг положения равновесия. За начальный момент времени примем момент, соответствующий точке поворота. Зависимость угла от времени описывается выражением

$$\theta(t) = \theta_D + (\theta_1 - \theta_D) e^{-\lambda t} [\cos(2\pi t / T) + \lambda / \omega \sin(2\pi t / T)] \quad (7)$$

Делая замену

$$x = e^{-\frac{1}{2}\lambda T} \quad (8)$$

из (8) получим:

$$\begin{aligned} x &= -(\theta_{n+2} - \theta_{n+1}) / (\theta_{n+1} - \theta_n) \\ \theta_D &= \frac{x\theta_n + \theta_{n+1}}{1+x} \\ \theta_n &= \theta(t_n), \quad t_n = (n-1)T/2, \quad n = 1, N \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, для оценки угла равновесия крутильных весов достаточно иметь три последовательные точки поворота в зависимости угла от времени на графике свободных затухающих колебаний.

Метод резонанса

Пусть система совершает свободные колебания. Выберем за начальный момент времени точку поворота. В каждой точке поворота будем поочередно перемещать поворотный рукав с большими шарами в одно из двух крайних положений. Пусть θ_c – угол, соответствующий исходному положению весов.

Каждый раз, когда поворотный рукав будет занимать одно из крайних положений, угол, соответствующий равновесию, системы будет принимать значения $\theta_e \pm \theta_D$. Зависимость угла от времени имеет вид:

$$\theta(t) = \theta_e - \theta_D + (\theta_1 - (\theta_e - \theta_D)) e^{-\lambda t} [\cos(2\pi t / T) + \lambda / \omega \sin(2\pi t / T)]. \quad (10)$$

Рассматривая последовательно точки поворота получим:

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \theta_e - \theta_D - x(\theta_1 - (\theta_e - \theta_D)) \\ \theta_3 &= \theta_e + \theta_D - x(\theta_2 - (\theta_e + \theta_D)) \\ &\dots \\ \theta_D &= \frac{(-1)^n [(\theta_{n+1} - \theta_e) + x(\theta_n - \theta_e)]}{1 + x} \end{aligned} \quad (11)$$

Исключив θ_e , получим выражения для угла, соответствующего отклонению положения равновесия от исходного, когда поворотный рукав занимает одно из крайних положений:

$$\theta_D = \frac{(-1)^n [x\theta_n + (1-x)\theta_{n+1} - \theta_{n+2}]}{2(1+x)}, \quad n = 1, N. \quad (12)$$

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

ПОДГОТОВКА ВЕСОВ К РАБОТЕ

1. Регулируя наклон подставки, добейтесь горизонтального положения основания весов, используя показания уровня, расположенного на подставке прибора. Пузырек воздуха в окошке уровня должен располагаться строго по центру.

2. Проверьте подключение USB – кабеля к компьютеру.

3. Проверьте расположение коромысла весов и поворотного рукава. Коромысло весов с маленькими шариками должно располагаться напротив стопорной щели и фиксироваться стопором, поворотный рукав при этом

составляет угол $\pi/2$ с коромыслом.

4. Включите компьютер, запустите программу для обработки экспериментальных данных Cavendish.exe (иконка программы помещена на рабочем столе). Документация на программу приведена в [7].

5. При наладке установки весы были откалиброваны. Детальное описание процедуры калибровки приведено в [7]. Проверьте калибровку весов. Убедитесь, что пределы измерений угла установлены в диапазоне ± 70 мрад. Пределы измерения угла устанавливаются кнопкой set-up. Исходя из геометрических параметров и конструкции весов, можно оценить, что максимально возможный угол поворота коромысла составляет 75 мрад, угол поворота коромысла в ходе колебательного процесса в экспериментах по измерению гравитационной постоянной существенно меньше. Установите начало отсчета. Для этого воспользуйтесь кнопкой справа от кнопки RESET. Нажатие кнопки для установки нуля принимает в качестве нулевого угла отсчета текущее положение коромысла весов. Таким образом, установите значение нулевого угла, соответствующего расположению коромысла напротив стопорной щели.

ПРОВЕДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

ОСТОРОЖНО ОДНОВРЕМЕННО поместите большие свинцовые шары на поворотный рукав. Избегайте толчков, поскольку подвес коромысла может легко порваться, а замена нити занимает значительное время. Инструкция по замене вольфрамовой нити приведена в [7].

Изучение свободных колебаний коромысла весов

Переместите поворотный рукав в одно из крайних положений. Период свободных колебаний весов составляет около 200 с. Для успешного определения коэффициента затухания и угла равновесия системы достаточно данных, полученных в течение 5 периодов для каждого из двух крайних

положений поворотного рукава, что в сумме составит около получаса.

Выставьте предел измерений времени на tool-bar программы 2000 секунд. Нажмите кнопку RECORD для записи экспериментальных данных. Осторожно и быстро удалите стопор, не раскачивая весы. На графике отображается зависимость угла поворота коромысла весов от времени. По истечении пяти периодов колебаний остановите расчет. Сохраните данные в файл в удобном для Вас формате, воспользовавшись кнопкой SAVE.

Нажмите кнопку RESET, очистив экран для нового эксперимента, осторожно переведите поворотный рукав в другое крайнее положение и проведите аналогичный эксперимент и запись данных.

Метод резонанса.

Очистите экран для нового эксперимента, затем нажмите кнопку RECORD для записи экспериментальных данных. Дождитесь первой точки поворота на графике и быстро и осторожно переместите поворотный рукав в новое крайнее положение. Повторяйте эту процедуру в каждой точке поворота в течение пяти периодов колебаний. Не допускайте прикосновения и тем более ударов поворотного рукава о стеклянный корпус весов. Сохраните результаты эксперимента и остановите запись. Распечатки таблиц с результатами измерений приложите к отчету. Для завершения работы закройте программу, выключите компьютер. Одновременно снимите большие шары с поворотного рукава, установите поворотный рукав перпендикулярно стеклянным стенкам корпуса весов. Осторожно установите коромысло напротив стопорной щели и закрепите стопором.

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ

1. Начальный участок первого эксперимента используйте для определения гравитационной постоянной методом ускорения. Результаты измерений представьте в виде таблицы 2.

Таблица 2

Метод ускорения

$t, \text{с}$	$(t - t_0)^2, \text{с}^2$	$\theta, \text{град}$	$s - s_0, \text{м}$

Постройте график зависимости смещения шарика от $(t - t_0)^2$. Для оценки углового коэффициента воспользуйтесь графическим методом или методом парных точек [8]. Вычислите гравитационную постоянную по формуле (1), оцените погрешность результата.

2. Первые два набора экспериментальных данных используйте для определения гравитационной постоянной методом равновесия.

Для первого набора данных постройте графики зависимости угла от времени и занесите в таблицу точки поворота.

Таблица 3

Свободные колебания, точки поворота.

n	$t_n = (n-1)T/2, \text{с}$	$T, \text{с}$	$\theta_n, \text{град}$

Вычислите среднее значение периода колебаний, оцените погрешность. Разбейте данные Таблицы 3 на тройки и занесите в Таблицу 4.

Таблица 4

Свободные колебания, расчет коэффициента затухания.

n	$\theta_n, \text{град}$	$\theta_{n+1}, \text{град}$	$\theta_{n+2}, \text{град}$	x_n

По формуле (9) определите коэффициент затухания колебаний, найдите

среднее значение, оцените погрешность. Разбейте данные Таблицы 3 на пары, занесите в Таблицу 5 и по формуле (9) оцените угол θ_D , найдите среднее значение, оцените погрешность.

Таблица 5

Свободные колебания, расчет угла равновесия.

n	θ_n , мрад	θ_{n+1} , мрад	θ_D , мрад

Повторите для данных, соответствующих другому крайнему положению поворотного рукава. По формуле (5), определите θ_D , по формуле (4) вычислите гравитационную постоянную, оцените погрешность результата.

3. Постройте график зависимости угла от времени для последнего набора экспериментальных данных (метод резонанса). Заполните таблицу, аналогичную Таблице 3, определите период колебаний. Заполните Таблицу 6 и рассчитайте по формуле (12) угол θ_D .

Таблица 6

Резонанс, расчет угла равновесия θ_D

n	θ_n , мрад	θ_{n+1} , мрад	θ_{n+2} , мрад	θ_{Dn} , мрад

В расчетах используйте среднее значение x , полученное при обработке экспериментов по свободным колебаниям для двух крайних положений поворотного рукава. Рассчитайте гравитационную постоянную по формуле (6) и оцените ее погрешность, как погрешность косвенного измерения.

4. Сравните все три результата измерения гравитационной постоянной между собой и с табличным значением. Проанализируйте возможные причины возникновения погрешностей.

Литература

1. <http://www.codata.org/index.html>
2. Сагитов М. У. и др. Новое определение кавендишевой гравитационной постоянной // ДАН СССР, 1979. Т. 245. № 3. С. 567-569.
3. M. Rossi and L. Zaninetti. Linear And Nonlinear Effects On The Newtonian Gravitational Constant As Deducted From The Torsion Balance //Int. J. Mod. Phys. A. 2007. Vol. 22(29). P. 5391-5400
4. G. Lamporesi, A. Bertoldi, L. Cacciapuoti, M. Prevedelli, and G. M. Tino. Determination of the Newtonian Gravitational Constant Using Atom Interferometry// Phys. Rev. Lett. 2008. 100, 050801.
5. Cavendish H. Experiments to determine the density of the earth // Phil. Trans. of Royal Soc. of London. 1798. Vol.88. P.469-526.
6. Филонович С.Ф. Генри Кавендиш. // Квант, 1981, № 10.
7. TEL-RP2111 Computerized Cavendish Balance. [http:// www.telatomic.com](http://www.telatomic.com)