

THEORIA MOTVS
CORPORVM
SOLIDORVM SEV RIGIDORVM

EX
PRIMIS NOSTRAE COGNITIONIS PRINCIPIIS
STABILITA

ET AD OMNES MOTVS,
QVI IN HVIVSMODI CORPORA CADERE POSSVNT,
ACCOMMODATA.

AVCTORE
LEONH. EVLERO
ACADEMIAE REGIAE SCIENT. BORVSSICAE DIRECTORE
ACADEMIAE IMPER. PETROPOL. SOCIO HONORARIO
ET ACADEMIARVM SCIENT. REGIARVM PARISINAE
ET LONDINENSIS MEMBRO



ROSTOCHII ET GRYPHISWALDIAE
LITTERIS ET IMPENSIS A. F. ROSE. MDCCLXV

Л. ЭЙЛЕР

ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ,

ВЫВЕДЕННАЯ ИЗ ПЕРВОНАЧАЛЬНЫХ
ПРИНЦИПОВ НАШЕГО ПОЗНАНИЯ
И ПРИМЕНЕННАЯ КО ВСЕМ ДВИЖЕНИЯМ,
КОТОРЫЕ МОГУТ ИМЕТЬ
ЭТОГО РОДА ТЕЛА [47]



ВВЕДЕНИЕ, СОДЕРЖАЩЕЕ НЕОБХОДИМЫЕ ПОЯСНЕНИЯ И ДОПОЛНЕНИЯ О ДВИЖЕНИИ ТОЧЕК

Глава I

О ДВИЖЕНИИ ВООБЩЕ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1

1. Подобно тому как покой—это постоянное пребывание в одном и том же месте, совершенно так же движение—это постоянная перемена места. О теле, которое, согласно наблюдению, постоянно находится в одном и том же месте, говорят, что оно пребывает в состоянии покоя; о теле же, которое с течением времени постоянно меняет место своего пребывания, говорят, что оно движется.

ПОЯСНЕНИЕ 1

2. Хотя понятия покоя и движения сами по себе и кажутся совершенно ясными, тем не менее, для того чтобы лучше их разобрать, следует внимательно рассмотреть отдельные понятия, положенные в их

основании. И прежде всего перед нами встает понятие места. Что собственно представляет собой место? На этот вопрос не так легко ответить. Представляя себе неизмеримое пространство, в котором находится вселенная, отдельные части его, занятые телами, называют местами этого пространства: ведь в силу своего протяжения каждое тело необходимо должно занимать и совершенно заполнять равную ему часть пространства.

Однако понятие пространства мы можем воспринять лишь с помощью абстракции: для этого мы должны мысленно удалить все тела, и уже то, что, по нашему представлению, после этого остается, мы называем пространством.

Мы, следовательно, полагаем, что после удаления тел их протяжение все-таки остается, — представление, которое философами по многим основаниям оспаривается. Далее, этот вопрос как будто нельзя было бы еще считать разрешенным, пока не будет поставлена и схожая идея движения. Но мы, решительно отвергая подобного рода сомнительные абстракции, должны рассматривать вещи в том виде, в каком они непосредственно воспринимаются нашими чувствами; в соответствии с этим мы о движении любого тела будем судить лишь на основании одного признака, а именно — относя его к другим телам, расположенным по соседству с ним: до тех пор, пока по отношению к последним данное тело сохраняет неизменным свое положение, мы обычно говорим,

что это тело пребывает на одном и том же месте; а когда оно перешло в другое положение, мы говорим, что оно переменяло свое место.

Пояснение 2

3. Поскольку, таким образом, мы определяем положение любого тела путем сопоставления его с положением других окружающих тел, которые в это время сохраняют неизменным свое расположение, наше суждение, опирающееся на геометрические представления, не может нас ввести в заблуждение. А именно, положение тела определяется с помощью расстояний от нескольких различных точек, причем для данной цели недостаточно одной или даже двух точек. В самом деле, если я скажу, что точка O находится на расстоянии a от точки A , то этим положение первой точки еще ни в коем случае не будет определено. Ведь существует целая сферическая поверхность, описанная вокруг точки A как центра, радиусом, равным a , в любой точке которой одинаково может находиться точка O , и следовательно, в смысле положения все точки сферической поверхности ничем друг от друга не отличаются. Если же я скажу, что точка O находится на расстоянии a от точки A и на расстоянии b от точки B , то в этом случае надо будет представить себе две сферические поверхности: одну, описанную около A радиусом a , и другую, описанную около B радиусом b . Так как обе эти поверхности дают в сечении круг, то отдель-

ные точки последнего будут расположены таким образом, что они будут находиться на расстоянии a от точки A и на расстоянии b от точки B . Таким образом точка O будет безусловно лежать на окружности этого круга, но где именно — это остается еще невыясненным.

Предположим еще, что точка O , сверх того, находится на расстоянии c от третьей точки C , причем точка C не лежит на одной прямой линии с точками A и B . Описанная около точки C радиусом c сферическая поверхность пересечет упомянутый выше круг все-таки в двух точках, поэтому и в данном случае мы все еще будем находиться в сомнении, в какой именно из этих точек находится точка O ; мы будем, следовательно, в неизвестности только относительно двух точек. Отсюда мы заключаем, что если нам известны расстояния точки O от каких-либо четырех точек A , B , C и D , не лежащих в одной плоскости, то положение точки O является уже вполне определенным.

Зачастую, однако, бывает достаточно и трех точек, а именно, если одна из этих точек, равно удовлетворяющих заданному условию, исключается по какому-либо иному основанию.

П Р И М Е Ч А Н И Е

4. Так как приведенное выше определение положения любой точки является чисто геометрическим, то оно не может вызвать каких-либо сомнений: ис-

ходя из него, мы и будем выводить наши рассуждения о покое и движении. Но то, что здесь было изложено о положении точек, может быть легко применено к каким угодно телам; ведь понятие покоя или движения может быть приурочено к телам лишь постольку, поскольку его относят к отдельным точкам этих тел.

Однако, какое бы понятие покоя или движения мы ни построили, мы не сможем его тотчас же просто применить к какому-либо целому телу, так как возможно, что в последнем некоторые точки находятся в покое, другие же в большей или меньшей степени движутся.

Поэтому представляется совершенно необходимым сначала исследовать природу покоя или движения только на точках. Такую постановку вопроса вовсе не следует считать как бы нереальной в силу того соображения, что понятие о точках является чисто абстрактным и что некоторые даже сомневаются в возможности приписать им движение либо покой. Как бы ни разрешались эти спорные вопросы, во всяком случае приходится допустить, что в покоящемся или движущемся теле можно себе представить существование точек, которые либо находятся в состоянии покоя, либо движутся. Разве это не дает основания для того, что подобные точки можно считать элементами тела?

Равным образом ничто не препятствует кому угодно при желании представить себе вместо этих

точек действительные элементы тела, которые могут быть либо бесконечно малыми, либо во всяком случае очень малыми. И тут дело сводится к тому же самому, и потому здесь не может возникнуть никаких сомнений. Точно так же ничто не препятствует тому, чтобы считать реальными точки A , B , C и D , к которым я относил положение точки O , так как они являются границами, существующими в действительных телах, от которых и ведется счет расстояний.

Если только не стать на точку зрения совершенного отрицания существования тел, — при таких условиях рассуждение было бы для нас бесплодным, — ни в коем случае не следует недооценивать значения подобного метода для облегчения исследования.

О П Р Е Д Е Л Е Н И Е 2

5. Если точка O находится постоянно на одном и том же расстоянии от четырех или большего числа точек, сохраняющих неизменными взаимные свои расстояния, то говорят, что она по отношению к ним находится в покое.

По отношению к ним она сохраняет неизменным свое положение.

С л е д с т в и е 1

6. Если A — твердое тело, постоянно сохраняющее неизменной свою форму, то сколь бы мало оно ни было, всегда можно допустить существование в нем не только четырех, но и сколь угодно боль-

шого числа точек, сохраняющих неизменными взаимные свои расстояния.

Следствие 2

7. Поэтому, если точка O сохраняет неизменным свое положение по отношению к упомянутому телу A , что может иметь место лишь в том случае, когда расстояния этой точки от всех точек тела A остаются неизменными, то говорят, что точка O находится в покое по отношению к телу A .

Следствие 3

8. Итак, здесь мы имеем реальное определение покоя, не связанное с какими-либо сомнительными или нереальными представлениями, но опирающееся на понятие некоторого тела, по отношению к которому точка находится в покое; при этом не ясно, что представляет собой так называемый абсолютный покой, отделенный от понятия подобного тела.

Пояснение 1

9. Правда, здесь, на пороге механики, нам не следует беспокоиться по поводу абсолютного покоя, о котором мы вообще не знаем, существует ли он и в каком именно виде: ведь мы в механике будем подвергать исследованию лишь то, что мы постигаем с помощью наших чувств. Всюду, где у нас идет речь о покое, наше представление о нем всегда связано с некоторым телом, по отношению к которому

согласно нашему определению, тело — или же, еще лучше, точка — находится в покое. Так, мореходы считают находящимися в покое те тела, которые сохраняют неизменным свое положение по отношению к кораблю; точно так же и мы, находясь на суше, обычно приписываем состояние покоя телам, сохраняющим неизменным свое положение по отношению к поверхности Земли. То обстоятельство, что корабль находится в движении, приводит мореходов не к большей ошибке, чем нас, так как, согласно учению астрономов, и Земля сама тоже движется. В установленном здесь понятии покоя мы меньше всего интересуемся вопросом о том, находится ли в покое само по себе то тело, по отношению к которому мы констатируем состояние покоя. И пока точка O сохраняет неизменным свое положение по отношению к телу A , мы говорим, что она находится в состоянии покоя по отношению к последнему: мы не вносим сюда никакого иного смысла, который вышел бы за пределы этих слов.

Вопрос о покое или движении самого тела A был бы, конечно, совершенно новым, требующим иного разрешения. Однако он ничего не прибавил бы к приведенному выше определению.

Так, на корабле по отношению к последнему находится в покое все то, что по отношению к нему не изменяет своего положения; при этом совершенно безразлично, находится ли самый корабль в покое или же он движется.

ПОЯСНЕНИЕ 2

10. Таким образом изложенное здесь понятие покоя должно быть отнесено к категории отношений, так как оно основывается не на положении одной только точки O , которой мы приписываем состояние покоя, но оно устанавливается на основании сопоставления точки O с каким-либо другим внешним телом A . Поэтому на случай, если бы мы когда-нибудь в будущем дошли до того, что узнали бы, существует ли абсолютный покой и какова его природа, мы для отличия введенное здесь понятие будем называть относительным покоем.

Вместе с тем отсюда тотчас же явствует возможность того, что та самая точка, которая находится в покое относительно тела A , по отношению к другим телам не будет находиться в покое, но будет совершать различные движения. Так, например, тело, находящееся в состоянии покоя на корабле, совершает то или иное движение по отношению к Солнцу или другим небесным телам. Отсюда ясно, что рассматриваемые нами свойства покоя или движения не изменяют ничего в самом теле или в точке O , так как эти состояния могут существовать одновременно, — в зависимости от того, к какому телу будет отнесено положение точки.

ПРИМЕЧАНИЕ

11. Все вышеизложенное должно быть равным образом распространено и на понятие места. В са-

мом деле, если покой есть пребывание на одном и том же месте, то, для того чтобы это определение сохранило свою силу и для относительного покоя, следует сказать так: точка O , которая должна быть в покое относительно тела A , должна по отношению к последнему оставаться в одном и том же месте. И так как точка будет оставаться в неизменном положении относительно тела A , то, значит, одно и то же место обязательно совпадает с одним и тем же положением. И это понятие места, подобно понятию покоя, тоже является относительным, так что относительное место есть некоторое известное определенное положение по отношению к какому-либо телу.

Существует ли другое, более естественное понятие места, мы еще не знаем; если подобное понятие существует, такое место следует назвать абсолютным.

Относительному месту в том его виде, как мы его здесь определили, не следует приписывать неподвижности, как это обыкновенно делают: ведь если тело, по отношению к которому мы установили какое-нибудь место, само находится в движении, то неизбежно допустить, что вместе с ним движется и данное место. Если же кто-либо считает, что тела, сохраняющие неизменными свои места по отношению к неподвижным звездам, находятся в состоянии абсолютного покоя, то для него абсолютное место — это известное и определенное положение относительно неподвижных звезд. Но в какой мере отнесение к не-

подвижным звездам больше соответствует природе вещей, чем отнесение к каким-либо другим телам, этот вопрос для нас и теперь еще неясен.

О П Р Е Д Е Л Е Н И Е 3

12. Если точка O постоянно изменяет свое положение относительно какого-либо тела A , форма которого все время остается неизменной, то говорят, что она движется относительно тела A .

Очевидно, форму тела следует принять неизменной, с тем чтобы любые произвольно взятые в нем четыре точки, к которым относят точку O , сохраняли неизменными взаимные свои расстояния.

С л е д с т в и е 1

13. Все, что нами выше было сказано об относительном покое, может быть легко перенесено на относительное движение. В самом деле, когда точка O сохраняет неизменным свое положение относительно тела A , то говорят, что она находится в покое; если же она постоянно изменяет свое положение относительно этого тела, то говорят, что она имеет относительное движение.

С л е д с т в и е 2

14. Легко видеть, что одна и та же точка O может находиться в покое относительно тела A и одновременно двигаться относительно тела B .

Таким образом понятие движения, подобно понятию покоя, является относительным и не вызывает ни малейшего изменения в самой точке O .

Следствие 3

15. Итак, движение и покой противоположны друг другу лишь по названию, но не по существу дела, так как их можно одновременно приписать одной и той же точке, — в зависимости от того, с каким телом ее сопоставляют. Движение отличается от покоя не в большей мере, чем одно движение от другого.

Следствие 4

16. Итак, движение и покой неправильно относят к состояниям тел: ведь в тех случаях, когда в состоянии какого-либо предмета происходит изменение, следует считать, что самый предмет как-либо изменился. Между тем в теле не происходит никаких изменений от того, будет ли ему приписано движение или покой.

Пояснение 1

17. Таким образом совершенно рушится то знаменитое различие между движением и покоем, которое философы обычно приводят как чрезвычайно существенное для тел, — если, конечно, исходить из относительности движения и покоя. Правда, философы возразят, что условия коренным образом из-

меняются, когда речь идет об абсолютном движении и покое, но что представляет собой абсолютные движение и покой, этого они удовлетворительно определить не могут.

Если бы они пожелали вывести эти понятия из отношения к неподвижным звездам, то от этого движение и покой не перестанут быть относительными: ведь в данном случае будет лишь то отличие от наших определений, что здесь предлагают иное, но все же определенное тело, по отношению к которому и устанавливаются покой или движение. Однако отсюда еще не видно, каким образом здесь может получиться что-либо для самого тела, для которого устанавливаются этот покой или движение.

Вообще говоря, я ни в коем случае не отрицаю, что существует различие между движением и покоем или между телом движущимся и телом, находящимся состоянии покоя, — да ведь и вся механика занята установлением этого различия. Но в то же время я с полным основанием отрицаю то, что движение и покой связаны хотя бы с каким-нибудь внутренним изменением тела. Пусть философы обсудят, к какому виду предикатов следует отнести движение и покой, но во всяком случае их меньше всего можно назвать качествами. В то же время нет никаких препятствий к тому, чтобы отнести их к числу отношений: ведь когда одну и ту же вещь сравнивают то с одними, то с другими предметами, от этого внутренняя ее сущность не претерпевает никаких изменений.

Пояснение 2

18. После того как мы дали определение понятия места, опираясь при этом на наше чувственное восприятие, мы теперь встречаемся также с понятием времени, которое включается в понятие покоя и движения. В самом деле, если покоем называют *постоянное пребывание* на одном и том же месте, то ведь этих выражений *постоянное* и *пребывание* нельзя понять без представления о времени. Понятие движения требует, конечно, более развернутого представления о времени, исходя из которого можно было бы себе также представить деление его на равные и неравные части. В самом деле, когда точка O изменяет свое положение относительно тела A , это изменение можно установить, лишь определив его величину за любой промежуток времени. Следовательно, если бы у нас, как некоторые склонны думать, не было других средств для определения времени, кроме как из рассмотрения движения, то мы не могли бы признать ни времени без движения, ни движения без времени; следовательно, мы никак не могли бы познать ни того, ни другого. Правда, делить время на части мы научились из наблюдения движения, а именно движения Солнца, но, мне кажется, и без помощи движения мы имеем представление о том, что такое *до* и *после*, а отсюда, повидимому, само собой вытекает понятие последовательности.

И хотя более детальным изучением времени мы обязаны рассмотрению движения, отсюда еще не сле-

дует, что время само по себе представляет собой не что иное, как лишь то, что мы воспринимаем. Что представляют собой два равных промежутка времени, это понимает всякий, хотя бы в течение этих промежутков, может быть, и не произошло равных изменений, на основании которых можно было бы прийти к заключению о равенстве этих промежутков времени.

Поэтому, независимо от споров, какие могут вести философы по поводу течения времени, нам следует для изучения движения применить некоторую меру времени; при этом следует допустить, что время протекает независимо от движения, так что можно себе представить отдельные части его, между которыми существует равенство или же неравенство в любой пропорции. Кто отказал бы нам в этой возможности, тот вообще уничтожил бы возможность какого-либо познания движения.

Поэтому да будет нам позволено ввести в расчет время наравне с линиями и другими геометрическими величинами.

О П РЕ Д Е Л Е Н И Е 4

19. *Пространство, проходимое точкой при ее движении, называется ее путем; так как последний представляет собой линию, то он может быть прямолинейным либо криволинейным.*

В первом случае движение называется *прямолинейным*, во втором — *криволинейным*.

С л е д с т в и е 1

20. Так как мы пока имеем только понятие относительного движения, то путь или линию, описываемую точкой, следует относить к тому телу, по отношению к которому определяется движение.

С л е д с т в и е 2

21. Само же упомянутое тело, независимо от того, находится ли оно в покое или в движении, поскольку последнее обстоятельство не принимается в расчет, рассматривается как бы находящимся в неподвижном состоянии, и по отношению к нему следует отмечать направление и расположение пути, описываемого точкой.

С л е д с т в и е 3

22. Таким образом изучение описываемого точкой пути сводится к рассмотрению трех случаев, из которых первый имеет место, когда движение прямолинейно, и следовательно, путь представляет собой прямую линию. Второй случай имеет место, когда путь представляет собой какую-либо кривую линию, но целиком расположенную в одной плоскости. Третий случай—это тот, когда кривая линия не лежит в одной плоскости.

П о я с н е н и е 1

23. Уже в геометрии принимают, что при движении точки описывается линия; последнее само по себе настолько ясно, что как будто не требует до-

казательства. В самом деле, если точка, бывшая раньше в A , находится теперь в B , то она необходимо должна была переместиться по некоторой сплошной линии, простирающейся от A до B ; в противном случае пришлось бы утверждать, что она внезапно исчезла в точке A и затем заново возникла в точке B ; поскольку последнее было бы чудом, а не движением оно не является предметом нашего исследования. Что касается до тех лиц, которые не желают признавать движения, то, по их мнению, они дают более ясное представление об этом явлении, когда утверждают, что рассматриваемая точка уничтожается в отдельных точках наблюдаемого пути и тотчас же заново возрождается в следующих точках: выходит так, будто перемещение с одного места на другое труднее понять, чем попеременные исчезновение и возникновение.

Но так как, с иной точки зрения, движение может быть и покоем, то они и о последнем должны утверждать то же самое, а именно, что тело на одном и том же месте постоянно уничтожается, а затем внезапно возрождается; так как это мнение не отличается от той точки зрения, согласно которой сохранение тел рассматривается как постоянное их воспроизведение, то мнение это мало отличается от обычного вульгарного воззрения.

Но ведь в действительности совершенно не бывает такого момента времени, когда бы тело не существовало, поэтому и нельзя сомневаться в том, что оно постоянно существует, причем это постоянное

существование тел следует допускать как при их движении, так и при их покое. Отсюда следует, что точка может перейти из одного предельного положения в другое, лишь пробежав последовательно всю линию, простирающуюся от первого положения до второго.

Пояснение 2

24. Предположим, что точка прошла линию $APQB$ (рис. 1); так как точка не может быть одновременно в A и B , то она неизбежно появится в B уже после того, как она побывала в A . Но те явления, которых



Рис. 1.

мы не можем себе представить существующими одновременно, приводят нас к понятию времени, и так как точка по-

бывала в A , то мы считаем, что до B она может прийти лишь по истечении некоторого времени.

То же относится и к промежуточным точкам P и Q ; так как точка дошла раньше до P , чем до Q , и раньше до Q , чем до B , то отсюда мы и заимствуем деление времени: отсюда следует, что время, за которое точка проходит от A до P , меньше того времени, за которое она проходит от A до Q , а последнее, в свою очередь, меньше того времени, за которое она проходит от A до B . Отсюда ясно, что время есть величина, делимая и поддающаяся измерению, причем мы можем не только одно значение этой

величины назвать большим или меньшим, чем другое, но мы в состоянии указать части ее, которые либо будут равны между собой, либо будут неравны, находясь в некотором определенном отношении. В самом деле, так как время есть некоторая величина, мы неизбежно должны принять, что время, за которое тело проходит от A до P , либо равно, либо больше, либо меньше времени, за которое оно дальше проходит от P до Q , или, как можно еще иначе выразиться, между этими двумя промежутками времени необходимо должно быть некоторое определенное соотношение. Вот почему я с полнейшим правом выдвигаю положение, что время как величина, делимая и поддающаяся измерению, может быть введено в расчет.

О П Р Е Д Е Л Е Н И Е 5

25. Равномерным или однообразным называется такое движение, при котором в равные времена проходятся равные пути. Если же в равные времена проходятся неравные пути или равные пути проходятся в неравные времена, то движение называется неравномерным.

С л е д с т в и е 1

26. Итак, если точка движется равномерно, то за удвоенное время она проходит удвоенный путь, за утроенное время — утроенный путь, и вообще пройденные пути находятся в таком же отношении друг к другу, как затраченные на это промежутки времени, и наоборот.

Следовательно, если за время t пройден путь s , а за время T — путь S , то имеет место соотношение

$$t:T = s:S.$$

Следствие 2

27. При неравномерном движении создаются иные условия, и пройденные пути s и S уже не относятся между собой, как промежутки времени t и T .

Разумеется, здесь идет речь о некотором относительном движении, понятие которого у нас только и имеется, причем безразлично, является ли это движение прямолинейным или криволинейным.

Следствие 3

28. Точное разделение времени мы можем получить из равномерного движения; ведь мы можем геометрически разделить путь на части, а отсюда получится аналогичное разделение времени на равные или неравные части.

Примечание 1

29. Отсюда ясно, что деление времени на части не является чисто умственной операцией, как обыкновенно утверждают те, которые помещают время только в нашем сознании, не отделяя понятия времени от самого времени.

В самом деле, если бы время представляло собой не что иное, как последовательность наступающих друг за другом явлений, и если бы вне нашего сознания не существовало никаких средств для измерения

времени, то нам ничто не помешало бы при всяком движении считать равными те части времени, в течение которых проходятся равные пути, так как они кажутся следующими друг за другом через равные промежутки. Следовательно, мы могли бы с одинаковым основанием рассматривать любое движение как равномерное. Однако сама природа вещей достаточно убедительно свидетельствует, что равномерное движение существенно отличается от неравномерного; следовательно, равенство промежутков времени, на котором это основывается, представляет собой нечто большее, чем содержание наших понятий. В силу этого следует прийти к выводу, что равенство времени имеет под собой определенное основание, находящееся вне нашего сознания; и, повидимому, мы скорее познаем его извне — из наблюдения над равномерным движением.

П р и м е ч а н и е 2

30. Если точка движется равномерно — так, что в равные времена она проходит равные пути, — то о ней говорят, что она движется одинаково быстро. Отсюда мы узнаем, что значит *двигаться одинаково быстро*. Если две точки A и B находятся в равномерном движении, причем A за отдельные промежутки времени t проходит пути, равные s , а B за такие же промежутки времени проходит пути, равные σ , и если при этом $s > \sigma$, то говорят, что точка A движется быстрее, чем B , точка же B движется медленнее, чем A .

Отсюда мы заключаем, что значит *быстрее* и *медленнее*. Если, далее, точка *A* за один и тот же промежуток времени проходит вдвое или втрое больший путь, чем точка *B*, то говорят, что она движется *вдвое или втрое быстрее*.

Указанным путем нашему уму уясняется смысл того, что выражается словом „быстрее“, хотя мы по существу еще не давали никаких определений.

Здесь дело идет об абстрактном понятии, которое служит как бы основанием для того, что мы понимаем под словом *быстрее*; это понятие называется *быстротой* или *скоростью*, и ниже мы даем ему определение.

О П Р Е Д Е Л Е Н И Е 6

31. При равномерном движении отношение путей к промежуткам времени, в течение которых они проходятся, называется *быстротой* или *скоростью*.

Следовательно, скорость измеряется частным, которое получается при делении пути на время.

С л е д с т в и е 1

32. Итак, если при равномерном движении за время, равное t , проходит путь, равный s , то скорость равна $\frac{s}{t}$. Если скорость обозначить буквой v , то

$$v = \frac{s}{t}.$$

Следствие 2

33. При наличии трех установленных таким образом величин — пути, равного s , времени, равного t , и скорости, равной v , по любым двум из них третья величина может быть найдена так:

$$1) \quad v = \frac{s}{t},$$

$$2) \quad t = \frac{s}{v},$$

$$3) \quad s = tv.$$

Следствие 3

34. Если, кроме того, имеется и другое равномерное движение, при котором за время T проходит путь, равный S , то, обозначив скорость через V , мы получим следующие хорошо известные пропорции:

$$1) \quad v : V = \frac{s}{t} : \frac{S}{T},$$

$$2) \quad t : T = \frac{s}{v} : \frac{S}{V},$$

$$3) \quad s : S = tv : TV.$$

Пояснение 1

35. Здесь может, пожалуй, возникнуть сомнение по поводу того, каким образом можно делить путь на время, так как ведь это — величины разнородные, и следовательно, невозможно указать, сколько раз промежуток времени, например в 10 минут, содержится в пути длиной, например в 10 футов.

Но ведь в данном случае речь идет не об абсолютном делении, а лишь о сравнительном, так как понятие скорости не содержит в себе ничего абсолютного. В самом деле, под скоростью понимают только величину относительную: если скорость какого-либо определенного равномерного движения мы будем считать известной и примем ее за единицу, то у всякого другого равномерного движения скорость выразится некоторым числом, и следовательно, никаких дальнейших трудностей здесь не возникнет. Так, например, предположим, что скорость равномерного движения, при котором за время t проходится путь, равный s , принята за единицу, т. е. положим, что $\frac{s}{t} = 1$; тогда скорость другого равномерного движения, где путь, равный S , проходится за время, равное T , будет выражаться таким числом, которое относится к единице так, как $\frac{S}{T}$ относится к $\frac{s}{t}$, т. е. она выразится числом, равным

$$\frac{St}{Ts} = \frac{S}{s} \frac{t}{T},$$

сомножители же последнего выражения, $\frac{S}{s}$ и $\frac{t}{T}$, представляют собой действительные отношения.

Пояснение 2

36. Но указанное выше затруднение исчезает также и в том случае, если мы сведем все к отвлеченным числам. В самом деле, если для измерения

путей мы изберем определенную длину в качестве единицы и точно так же для времен изберем в качестве единицы определенный промежуток времени и если мы будем постоянно пользоваться этой мерой, то все пути и времена выразятся в отвлеченных числах, и тогда для деления первых на вторые не будет никаких препятствий.

Таким образом приведенные выше отношения, конечно, пропорциональны скоростям, и так как от нашего выбора зависит, какую скорость принять за единицу, то нам ничто не препятствует избрать в качестве единицы именно ту скорость, при которой указанное отношение равно единице. Если мы прибегнем к этому приему, то приведенные выше отношения $\frac{s}{t}$ и $\frac{S}{T}$ будут действительно обозначать некоторые скорости. Однако и простые отношения тоже удовлетворяют цели, а в случае нужды их в каждом отдельном случае легко привести к отвлеченным числам.

П р и м е ч а н и е

37. Приведенное понятие о скорости мы вывели из равномерного движения. Однако оно не в меньшей мере применимо и к неравномерному движению.

Конечно, если в равномерном движении скорость повсюду одна и та же, то в неравномерном движении ее следует считать изменяющейся.

В самом деле, мы скоро покажем, что при любом движении, сколь бы неравномерно оно ни было, можно

считать, что отдельные мельчайшие элементы пути проходятся как бы при равномерном движении; следовательно, этим способом можно в любой произвольной точке пути указать скорость, с какой пробегается этот воображаемый очень малый участок пути.

Таким образом скорость можно рассматривать как некоторое особое свойство движения, независимое от описанного пути, так как в каждой произвольной точке последнего дается определенная скорость.

В силу этого *скорость* можно определить и таким образом, что она является определенной мерой движения, благодаря которой при этом движении обеспечивается прохождение определенного пути за определенное время.

Вообще же, подобно тому как здесь мы рассматриваем какое-то относительное движение, точно так же и скорость движения здесь является относительной; следует считать, что в одной и той же точке и в один и тот же момент времени она различна, в зависимости от того, к какому телу отнесено движение. Таким образом может получиться, что тело, движущееся на корабле, имеет по отношению к кораблю совершенно иную скорость, чем по отношению к берегу.

О П Р Е Д Е Л Е Н И Е 7

38. Если движение прямолинейное, то направление движения тоже представляет собой прямую линию, — ту самую прямую, по которой и проис-

ходит движение. Если же движение криволинейное, то направление движения в какой-либо точке дается касательной к кривой.

Поэтому говорят, что при криволинейном движении направление движения постоянно изменяется, между тем как при прямолинейном оно всегда остается одним и тем же.

С л е д с т в и е 1

39. Следовательно, направление движения определяется по углу, который оно образует с одной или двумя неподвижными прямыми линиями.

А именно, если движение происходит в одной плоскости, то достаточно знать угол, образуемый с одной неподвижной прямой линией; если же движение происходит не в одной и той же плоскости, то следует знать угол наклона его к двум неподвижным прямым линиям.

С л е д с т в и е 2

40. При криволинейном движении, если только известна кривая, описываемая движущимся телом, направление движения в отдельных точках определяется тем же способом, с помощью которого определяются касательные.

П р и м е ч а н и е

41. Подобно тому как нельзя себе представить какое-либо движение без скорости, точно так же нельзя себе представить его без направления, В са-

мом деле, так как точка, даже за очень короткий промежуток времени, переходит с одного места на другое, то частное от деления этого отрезочка пути на промежуток времени дает скорость, а положение этого пути дает направление движения.

В состоянии покоя всякая скорость исчезает, и движение, скорость которого равна нулю, переходит в покой; однако о покое не следует утверждать, что при нем исчезает направление, но скорее следует считать, что в этом случае самый вопрос о направлении теряет смысл; в самом деле, коль скоро мы заявляем, что точка находится в покое, вопрос о направлении уже не имеет места.

Движение характеризуется всеми теми обстоятельствами, которые необходимы для его определения, а именно, можно поставить следующие вопросы:

1. *В каком месте очутится точка по истечении определенного промежутка времени?*

2. *Какой отрезок или какой путь она пройдет за это время?*

3. *Какова будет величина скорости в каждый момент времени?*

4. *Каково будет направление ее движения?*

Так как скорость и направление являются понятиями, выведенными из понятия движения, то их мы определим тотчас же, как только в отдельных случаях дадим ответ на первый вопрос.

Для того чтобы изложить это яснее, мы в соответствии с приведенным выше разделением рассмот-

рим три рода движения. Сначала мы примем, что точка движется по прямой линии; во вторую очередь мы примем, что описанный путь представляет собой кривую линию, однако расположенную в одной и той же плоскости; и наконец, в-третьих, мы исследуем тот род движения, при котором путь, описываемый движущейся точкой, не лежит в одной и той же плоскости.

Задача 1

42. Точка движется по прямой линии. Свести общее определение ее движения к вычислениям.

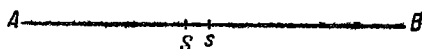


Рис. 2.

Решение

Весь вопрос сводится к тому, чтобы для любого момента времени указать место, в котором находится точка. Итак, пусть будет AB прямая линия (рис. 2), по которой движется точка; пусть начало движения ее будет в A и пусть по истечении времени, равного t , точка достигнет S .

Тогда $AS = s$ представит собой путь, пройденный за время t . Теперь, если дано уравнение, связывающее t и s , — уравнение, с помощью которого можно по одной из этих величин определить другую, — то здесь уже известно все, что необходимо для определения движения.

Действительно, если прибегнуть к дифференцированию, то для элемента времени dt определится пройденный в течение его элемент пути ds , а дробь

$$\frac{ds}{dt}$$

представит собой скорость точки в S ; ведь известно, что эта дробь дает конечную величину. Следовательно, если обозначить скорость в S через v , то мы получим равенство

$$\frac{ds}{dt} = v,$$

с помощью которого можно определить скорость для каждого заданного момента времени в любом месте пути.

Направление же движения повсюду будет совпадать с самой прямой линией AB .

С л е д с т в и е 1

43. Если для отдельных элементов времени дана скорость тела v и, таким образом, установлено соотношение между t и v , то отсюда можно определить и пути s , пройденные за отдельные промежутки времени, пользуясь соотношением

$$ds = v dt,$$

интегрирование которого даст выражение для самого пути

$$s = \int v dt.$$

Следствие 2

44. Равным образом, если известна скорость v в отдельных точках пути или если дано соотношение между s и v , то отсюда определяется время t , в течение которого пройден путь s , с помощью дифференциального уравнения

$$dt = \frac{ds}{v},$$

из которого получается

$$t = \int \frac{ds}{v}.$$

Следствие 3

45. Если движение равномерное, то скорость $\frac{ds}{dt}$ будет постоянной величиной; если положим последнюю равной c , то

$$ds = c dt,$$

а после интегрирования:

$$s = ct,$$

так как при $t = 0$ путь s тоже обращается в нуль.

Следовательно, и обратно, если соотношение между s и t таково, что из него для $\frac{ds}{dt}$ определяется постоянная величина, то движение равномерно.

Пояснение

46. Когда мы говорим, что по истечении времени t наша точка находится в S , то это выражение

допустимо лишь при условии, что мы от слова „находится“ отделяем понятие о пребывании и задержке. В просторечии выражение „находиться на каком-либо месте“ имеет обычно тот же смысл, что и „оставаться на месте“, вследствие чего приобретает наибольшую доказательную силу против существования вообще какого-либо движения следующий старый софизм: „Когда тело движется, то оно движется либо на том месте, где оно находится, либо на том, где оно не находится“. В действительности нельзя утверждать ни того, ни другого, и потому приходят к выводу, что тело вовсе не в состоянии двигаться. Первого, конечно, никак нельзя утверждать, если „на месте, где оно находится“, означает то же самое, что „на месте, где оно пребывает, т. е. покоится“. Если бы вместо слова „находится“ поставить слово „проходит“, то всякие затруднения были бы устранены, ибо там, где тело проходит, оно, без сомнения, передвигается. Однако указанное выражение кажется недостаточно сильным, чтобы одновременно оттенить существование тела, или точки, в тот момент, когда оно, или она, проходит через S ; и в то же время понятие существования, примененное к любому месту, повидимому содержит в себе некоторый оттенок задержки, который совершенно чужд движению.

Поэтому, если мы не хотим этой терминологией устранить вообще возможность какого-либо движения в природе, то мы должны остерегаться того, чтобы

с выражением „быть, находиться или существовать в определенном месте“ связывать представление о каком-либо „пребывании“. Я буду пользоваться этим выражением только в том смысле, что оно будет означать лишь прохождение через какое-либо место и не более того, — если, конечно, тело находится в движении.

Некоторые философы, пренебрегшие этим различием, составили себе совершенно превратные представления о движении. В самом деле, понимая движение как последовательное пребывание тела в различных местах, они приписывают ему и некоторую задержку в отдельных местах, откуда оно потом внезапно переходит на другие места. Если этим толкованием они стремятся избежать трудностей, которых они опасаются при „существовании без задержки на том же месте“, то им еще в гораздо большей степени следует опасаться указанных внезапных перескоков. В то время когда последний происходит, ведь они не могут указать, где в этот самый момент находится тело; и если бы существовало какое-либо основание для подобного мнения, то оно скорее послужило бы аргументом для отрицания всякого движения, чем доводом в пользу таких принципов, которые извращают природу движения.

ЗАДАЧА 2

47. Точка движется по кривой линии, которая, однако, полностью лежит в одной плоскости.

Свести общее определение движения к вычислениям пользуясь двумя координатами.

РЕШЕНИЕ

Ввиду того что тело, по отношению к которому рассматривается движение, считается неподвижным, мы можем считать неподвижной и плоскость, в которой лежит путь, проходимый точкой. В этой плоскости мы берем две произвольные оси OA и OB

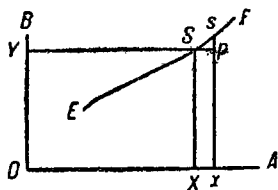


Рис. 3.

(рис. 3), наклоненные друг к другу под прямым или косым углом, и к ним будем относить движение. Пусть тогда ESF будет путь, описываемый точкой, а E — начальная точка движения. Все исследование сводится теперь к тому, чтобы указать на кривой место S , где будет находиться точка по истечении времени t .

Обозначим весь путь, пройденный за этот промежуток времени, т. е. линию ES , через s , проведем из точки S две линии SY и SX , соответственно параллельные осям OA и OB , и назовем координаты $OX = SY = x$ и $XS = OY = y$. Если мы можем указать значения x и y для времени t , то мы знаем также и место S ; кроме того, соотношение между x и y выразит и природу кривой ESF . Далее, если мы обозначим угол AOB , образуемый обеими осями,

через ζ , то мы получим соответствующий элементу времени dt элемент пути

$$Ss = ds = \sqrt{dx^2 + 2 dx dy \cos \zeta + dy^2},$$

откуда определится скорость в S , равная $\frac{ds}{dt}$. Для определения направления движения найдем угол, образуемый последним с осью OA ; тангенс последнего равен $\frac{dy \sin \zeta}{dx + dy \cos \zeta}$, а синус равен $\frac{dy \sin \zeta}{ds}$. Если же требуется определить и угол, образуемый направлением, движения Ss с другой осью OB , то его тангенс равен $\frac{dx \sin \zeta}{dy + dx \cos \zeta}$, а синус равен $\frac{dx \sin \zeta}{ds}$ [48].

Следствие 1

48. Подобно тому как место S кривой определяется координатами $OX = x$ и $XS = y$, точно так же и следующее место s определяется из его элементов dx и dy , а именно, за промежуток времени dt точка передвинется из S вдоль OA на отрезочек dx и вдоль OB на отрезочек dy .

Следствие 2

49. Это сложное перемещение вдоль отрезочков dx и dy воспроизводит действительное перемещение из S в s по отрезочку $Ss = ds$, определяя как самую величину его, так и его направление.

Следствие 3

50. Если бы движущаяся точка за промежуток времени dt действительно прошла отрезочки dx и dy ,

то соответствующие скорости были бы равны $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$.

Исходя из этих лишь воображаемых скоростей, можно определить не только истинную скорость на отрезочке $Ss = ds$, но также и ее направление.

Следствие 4

§1. Если угол $AOB = \zeta$ между осями OA и OB будет прямой, то расчет крайне упрощается. В этом случае, значит, из элементов dx и dy определяется

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

а тангенс угла, образуемого направлением Ss с неподвижной прямой OA , равен

$$\frac{dy}{dx}.$$

Примечание 1

§2. Приведенное выше рассуждение, согласно которому движение точки, проходящей за промежуток времени dt отрезочек пути $Ss = ds$, мы представляем себе разложенным на два каких-то движения по направлениям OA и OB , является чисто геометрическим, так как в самом движении оно ничего не изменяет. Определяя скорости $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ этого сложного движения, мы достигаем того преимущества, что получаем возможность определить не только истинную

скорость движения $\frac{ds}{dt}$, но также и направление движения, что в большинстве случаев бывает очень полезно при вычислениях. Ведь скорость и направление представляют собой вещи, совершенно различные по своей природе, а между тем указанным путем мы можем и то и другое определить с помощью двух скоростей, т. е. с помощью величин однородных. Однако мы только в уме разлагаем движение точки для каждого элемента времени dt на два движения вдоль заданных направлений и приводим скорость каждого из них; мы делаем это не в силу того, будто точка фактически проделывает двойное движение, что, конечно было бы несообразно, но лишь потому, что подобное представление приводит нас к действительному познанию.

Изложенным выше приемом мы можем воспользоваться в том случае, когда каким-либо иным путем уже установлено, что движение точки должно происходить в одной и той же плоскости. Если же последнее неизвестно, тогда разложение следует произвести по каким-либо трем неподвижным осям. В этом случае представляется целесообразным разложить заданное движение на три движения, направленные параллельно этим осям.

ПРИМЕЧАНИЕ 2

53. Описанное разложение движения, происходящего в одной плоскости, опирается на обычный метод, согласно которому кривые линии относят к

каким-либо двум осям, параллельно которым и проводят координаты. Но так как выбор этих прямолинейных осей зависит от нашего произвола, то ясно, что одно и то же движение в процессе вычисления может быть выражено на бесчисленное множество ладов. И хотя для любого времени как для скорости, так и для направления должны получиться одни и те же значения, — разложение движения является совершенно произвольным. Движение, при котором за промежуток времени dt точка проходит отрезочек $Ss = ds$, может быть — по крайней мере, в уме — бесчисленными способами разложено на два движения, смотря по тому, будут ли в качестве осей приняты те или иные линии. Однако во всех случаях получается согласие в том отношении, что любые две скорости $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$, взятые вместе, как бы различны они ни были, всегда дают одну и ту же действительную скорость $\frac{ds}{dt}$, а также одно и то же направление, т. е. положение касательной, проведенной в S .

Это бесконечное многообразие, поскольку оно введено геометрией, не содержит в себе ничего такого, что должно вызывать удивление; но в то же время в каждом отдельном случае имеет большое значение тот или иной выбор осей координат, с тем чтобы возможно больше облегчить процесс вычислений.

ЗАДАЧА 3

54. *Описанный точкой путь не лежит в одной и той же плоскости. Свести к вычислениям общее определение движения, пользуясь тремя координатами*

РЕШЕНИЕ

Тело, по отношению к которому определяется движение и которое принимается неподвижным, дает

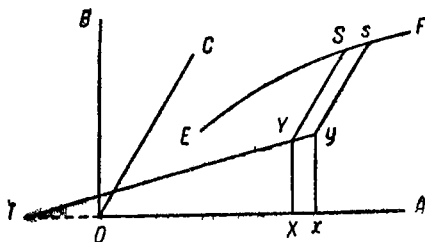


Рис. 4.

три неподвижных направления, которые простираются в длину, ширину и глубину. Так как выбор этих направлений предоставлен нашему произволу, то мы для облегчения вычислений выберем их так, чтобы они были взаимно перпендикулярны. Итак, пусть OA , OB и OC (рис. 4) будут три оси, из которых две первые пусть лежат в плоскости чертежа, а третью, OC , представим себе проведенной перпендикулярно к этой плоскости. Движущаяся точка описала линию ESF , расположенную каким-либо образом вне плоскости чертежа, и за время t она прошла по ней от E до S . Опустим из последней точки перпенди-

куляр SU на плоскость AOB , а из точки U — перпендикуляр UX на ось OA . Пусть прямоугольные координаты будут $OX = x$, $XU = y$ и $US = z$; они будут соответственно параллельны трем осям; два уравнения, связывающие между собой эти величины, определяют природу кривой ESF , так что если можно будет указать их значения для времени t , то тем самым определится и место S , в котором тогда будет находиться движущаяся точка.

Если теперь обозначить пройденный за время t путь ES через s , то по дифференциалам dx , dy и dz , соответствующим промежутку времени dt , можно будет судить о величине элемента пути $Ss = ds$, пройденного точкой за этот промежуток времени. А именно

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

а отсюда скорость движения в S будет равна $\frac{ds}{dt}$.

Что касается направления движения Ss , то оно определится тем же путем. В самом деле, если продолжить прямую линию UY до пересечения ее с прямой AO в точке T , то

$$XT = \frac{y dx}{dy};$$

если, далее, представить себе плоскость, проходящую через YT и перпендикулярную плоскости AOB , то на ней будет лежать элемент Ss ; последний, будучи продолжен, образует с YT угол, тангенс которого равен $\frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, а синус равен $\frac{dz}{ds}$. Далее, направле-

ние Ss образует с линией, проведенной через S параллельно AO , угол, косинус которого равен $\frac{dx}{ds}$, а с линиями, проведенными через S параллельно OB и OC , она образует углы, косинусы которых соответственно равны $\frac{dy}{ds}$ и $\frac{dz}{ds}$.

В изложенном содержится полное определение движения.

С л е д с т в и е 1

55. Таким образом элемент пути Ss рассматривается здесь как диагональ параллелепипеда, ребра которого dx , dy и dz соответственно параллельны трем неподвижным осям. Из этих ребер диагональ $Ss = ds$ определяется таким образом, что

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

так как параллелепипед берется здесь прямоугольным.

С л е д с т в и е 2

56. Обычно представляют себе, что пока движущаяся точка за промежуток времени dt проходит элемент пути Ss , она перемещается по направлению, параллельному OA , на отрезочек dx , по направлению, параллельному OB , — на отрезочек dy и по направлению, параллельному OC , — на отрезочек dz .

С л е д с т в и е 3

57. Если это сложное перемещение рассматривать, хотя бы только в уме, как действительное движение,

то $\frac{dx}{dt}$ дает выражение скорости движения по направлению OA , $\frac{dy}{dt}$ — скорости движения по направлению OB и $\frac{dz}{dt}$ — скорости движения по направлению OC .

Следствие 4

58. С помощью этих трех лишь воображаемых скоростей вычисляется не только действительная скорость в S , которая равна $\frac{ds}{dt}$, но и направление движения; с помощью же их интегралов определяется и все движение.

Примечание 1

59. Для сокращения вычислений я здесь принял, что три оси OA , OB и OC взаимно перпендикулярны, но их можно было бы, как и в предыдущем случае, предположить наклоненными друг к другу под любыми косыми углами. Однако природа косоугольных тел большинству обычно не настолько знакома, чтобы здесь можно было предположить, что их свойства достаточно известны по их элементам: поэтому, стремясь избежать сложных вычислений, мы будем впредь постоянно с полным правом применять прямоугольные оси.

Если бы, однако, последние были косоугольными, то, положив углы $AOB = \zeta$, $AOC = \eta$, $BOC = \theta$,

и обозначив параллельные им координаты через x , y и z , мы с помощью более сложной формулы

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2dx dy \cos \zeta + 2dx dz \cos \eta + 2dy dz \cos \theta}$$

выразили бы в очень неудобной форме элемент Ss , а также его положение, т. е. направление движения.

ПРИМЕЧАНИЕ 2

60. Поскольку направление трех хотя бы взаимно перпендикулярных осей OA , OB и OC может быть изменено на бесчисленное число ладов, постольку и движение может быть представлено неограниченным количеством способов.

Даже в тех случаях, когда точка движется по прямой линии или по кривой, расположенной в одной плоскости, движение может быть представлено с помощью трех подобных осей, но, конечно, в этих случаях следует отдать предпочтение изложенным выше более простым способам.

Отсюда ясно, что одно и то же движение можно всегда бесчисленным количеством способов разложить на три движения, а установив для каждого из них соответствующую скорость, можно из их соединения определить не только действительную скорость движения точки, но также и направление этого движения; это оказывается чрезвычайно полезным для вычислений, так как этим путем устраняется необходимость в довольно неприятных исследованиях, касающихся кривизны описанного пути, а также

и двойкой кривизны, — в том случае, когда движение происходит не в одной и той же плоскости. Названные три скорости, которые мы в уме считаем как бы сообщенными движущейся точке, облегчают все дело. Так как я в предыдущих частях механики не пользовался этим приемом, я там приходил к слишком запутанным вычислениям.

Ввиду того что подобное разложение движения, хотя бы и произведенное только в уме, представляет столь большую важность, оно заслуживает того, чтобы посвятить ему особое определение.

О П Р Е Д Е Л Е Н И Е 8

61. Говорят, что движение разложено, если отрезочек, пройденный в течение элемента времени, рассматривается как диагональ параллелограмма или параллелепипеда, стороны которого имеют заданные направления, и если точке приписывают одновременно два или три движения вдоль этих сторон с соответствующими скоростями.

П Р И М Е Ч А Н И Е 1

62. Все, что мы здесь говорим о как бы элементарном движении по бесконечно малому отрезочку, можно перенести и на конечное движение, если только последнее является равномерным и прямолинейным. Вообще же мы ограничиваемся элементарным движением, так как только элемент кривой можно считать прямолинейным отрезочком, а движение на

нем равномерным. Для того же, чтобы сделать сказанное более понятным, я разъясню это применительно к конечному равномерному и прямолинейному движению, после чего уже будет чрезвычайно легко перейти к элементарному движению.

Пояснение 1

63. Предположим, что точка, равномерно двигаясь, за время t пройдет прямую линию SV (рис. 5), так что ее скорость будет равна $\frac{SV}{t}$, и представим себе построенный на SV произвольный параллелограмм $SAVB$, диагональю которого является SV . Тогда мы можем мысленно разложить движение на два движения вдоль сторон SA и SB таким образом, что скорость первого равна $\frac{SA}{t}$, скорость второго равна $\frac{SB}{t}$, причем оба движения равномерны. Это сложное (двойное) движение с этими составляющими скоростями дает не только действительную скорость $\frac{SV}{t}$, но и действительное направление движения; поэтому, для того чтобы знать это движение, достаточно определения упомянутых двух составляющих скоростей. Не следует, однако, полагать, что подоб-

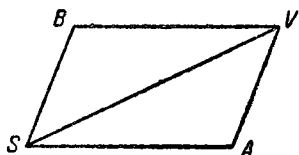


Рис. 5.

ное разложение имеет под собой какое-либо механическое основание: скорее можно считать достоверным, что больше чем одно движение в одной и той же точке существовать не может. Разложение это следует рассматривать как возникшее в результате чисто геометрических воззрений, как совершенно чуждое природе движения, введенное в механику только для облегчения вычислений.

Пояснение 2

64. Пусть движущаяся точка равномерно проходит за время t прямую линию SV (рис. 6), и это

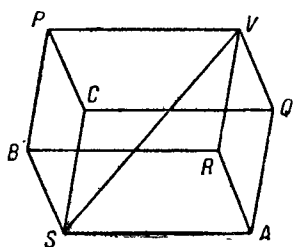


Рис. 6.

движение требуется разложить по трем направлениям. Проведем параллельно этим направлениям из обеих конечных точек S и V прямые линии SA , SB , SC и VP , VQ , VR и продолжим их настолько, чтобы каждая из них пересекла

плоскость, которую мы представим себе проведенной на другом конце прямой через два других направления.

Таким образом получится параллелепипед, диагональю которого является SV , и движение по линии SV , скорость которого равна $\frac{SV}{t}$, мысленно разложится на три движения вдоль SA , SB и SC , ско-

рости которых соответственно будут равны $\frac{SA}{t}$, $\frac{SB}{t}$ и $\frac{SC}{t}$. С помощью этих скоростей получается не только действительная скорость вдоль диагонали SV , но и направление движения по отношению к трем осям.

Аналогичным образом можно произвести разложение на три скорости, направленные по трем любым осям, и в том случае, когда SV представляет собой элемент любой кривой линии, пройденный в течение промежутка времени dt .

ПРИМЕЧАНИЕ 2

65. При изложенных выше определениях движения я следовал применяющемуся в геометрии методу, сводящемуся к тому, что природу кривых линий выражают двумя или тремя координатами, причем первое имеет место, когда кривая целиком лежит в одной плоскости, а второе — когда она не может расположиться в одной плоскости.

Этот метод в том виде, как он впервые выявился, привел нас к указанному замечательному разложению движения по двум или трем заданным направлениям, которое должно получить самое широкое применение во всей механике, так как наличие составляющих скоростей дает одновременно возможность установить направление движения и наклон, определение которых обычно служит источником немалых трудностей для вычислений.

Но так как в геометрии кривые линии, часто не без значительных упрощений для вычислений, относят к некоторой неподвижной точке, то представляется целесообразным аналогичным образом представить и разложение движения и притом не только в том случае, когда движение происходит в одной плоскости, но и в том случае, когда оно выходит за пределы одной плоскости.

Этот прием обычно применяют с большим успехом астрономы, определяя движение планет по отношению к какой-либо точке с помощью углов, описанных вокруг этой точки, и расстояний от последней; при этом, если движение происходит не в одной плоскости, то они принимают еще в расчет линию узлов и наклон орбиты к некоторой определенной плоскости. Поэтому, без риска выйти за пределы нашей темы, мы вкратце в общих чертах покажем здесь и этот способ интерпретации движения [49].

Задача 4

66. *Движение происходит в одной плоскости. Дать общее определение его с помощью углов, проведенных около определенной неподвижной точки.*

Решение

Пусть AS (рис. 7) будет путь, описываемый точкой в одной плоскости. Изберем в последней неподвижную точку O , — ту, которая представляется наиболее удобной для определения движения, и проведем

из нее прямую линию OA к начальной точке движения; тогда движение будет вполне известно, если по истечении любого времени, равного t , когда точка будет находиться в S , можно определить еще угол $AOS = \varphi$ и расстояние $OS = z$. Отсюда определится природа кривой AS , а дифференциалы дадут возможность найти как скорость, так и направление движения.

В самом деле, если точка за промежуток времени dt пройдет от S до s , причем угол AOS получит приращение $SOs = d\varphi$, а расстояние OS — приращение $Sp = dz$, то, положив всюду полный синус равным единице, мы получим

$$Sp = z d\varphi$$

и

$$Ss = \sqrt{dz^2 + z^2 d\varphi^2}.$$

Отсюда скорость в S равна

$$\frac{\sqrt{dz^2 + z^2 d\varphi^2}}{dt},$$

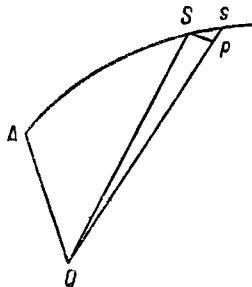


Рис. 7.

а направление определится по углу ASO или по углу Ssp , у которого тангенс равен

$$\frac{z d\varphi}{dz} [\text{50}].$$

Следствие 1

67. Так как движущаяся точка за время, равное t , описывает около O угол AOS и находится от этой точки на расстоянии $OS = z$, то ее движение можно

рассматривать как бы составленным из двух движений, одного — углового, около неподвижной точки O , и другого — прямолинейного, в результате которого точка удаляется или приближается к точке O .

Следствие 2

68. Так как за промежуток времени dt угол $\angle AOS = \varphi$ увеличивается на элемент $d\varphi$, то дробь

$$\frac{d\varphi}{dt}$$

выражает угловую скорость; так как, далее, dz представляет собой приращение расстояния $OS = z$, то дробь

$$\frac{dz}{dt}$$

выражает собой скорость удаления от точки O .

Следствие 3

69. Если известны обе эти скорости — как угловая скорость, так и скорость удаления, — то отсюда можно определить не только истинную скорость точки, но и ее направление, а сверх того, и самую кривую AS , описанную при движении точки.

Задача 5

70. *Точка движется не в одной плоскости. Выразить с помощью углов ее движение как по отношению к некоторой определенной плоскости, так и по отношению к некоторой заданной неподвижной точке на этой плоскости.*

РЕШЕНИЕ

Пусть плоскость чертежа представляет ту плоскость, к которой следует относить движение, и пусть на ней точка O (рис. 8) будет упомянутая неподвижная точка, которую можно принять как бы

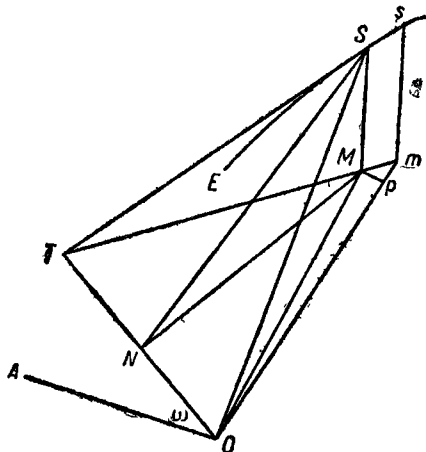


Рис 8.

за центр. Пусть точка движется каким-либо образом вне этой плоскости по линии ES и по истечении времени t доходит до S . Опустим из последней точки перпендикуляр SM на плоскость и проведем прямые линии MO и SO .

Пусть OA представляет собой избранное в данной плоскости неподвижное направление; тогда ясно, что к заданному времени t положение точки S

будет определено, если будут даны: 1) угол $AOM = \varphi$, 2) угол $MOS = \psi$ и 3) расстояние $OM = z$. Для того чтобы облегчить это определение, проведем в S к кривой касательную линию, которая пересечет неподвижную плоскость в точке T ; если провести линию OT ; то последняя явится линией пересечения плоскости, в которой точка теперь движется, с плоскостью, принятой в качестве неподвижной. Обычно линию OT называют линией узлов; для определения ее к рассматриваемому моменту времени служат угол $AOT = \omega$ и угол ϱ наклона плоскости OST к принятой плоскости. Если для какого-либо определенного момента времени, кроме угла $AOM = \varphi$ и расстояния $OM = z$, известны еще и эти два угла ω и ϱ , то легко может быть указано местоположение точки S , т. е. угол $MOS = \psi$ и расстояние $OS = \frac{z}{\cos \psi}$.

Проведем теперь из M перпендикуляр MN к прямой OT и прямую линию SN ; так как угол $TOM = \varphi - \omega$, то

$$MN = z \sin (\varphi - \omega),$$

а

$$ON = z \cos (\varphi - \omega).$$

Далее, мы имеем угол $MNS = \varrho$, откуда

$$MS = z \sin (\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho$$

и

$$NS = \frac{z \sin (\varphi - \omega)}{\cos \varrho};$$

следовательно,

$$OS = \frac{z}{\cos \varrho} \sqrt{\sin^2(\varphi - \omega) + \cos^2(\varphi - \omega) \cos^2 \varrho}$$

или

$$OS = \frac{z}{\cos \varrho} \sqrt{1 - \cos^2(\varphi - \omega) \sin^2 \varrho} \quad [51].$$

Теперь определяется и угол $MOS = \psi$ таким образом, что

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{MS}{OM} = \sin(\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho.$$

Ввиду того что угол $AOT = \omega$ и угол наклона, равный ϱ , в такой же мере принадлежат и следующей точке S , в которой движущаяся точка очутится по истечении промежутка времени dt , как и точке S , — то при дифференцировании угла ψ элементы ω и ϱ можно считать постоянными величинами. Отсюда получается

$$\frac{d\psi}{\cos^2 \psi} = d\varphi \cos(\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho;$$

но, согласно общим правилам дифференциального исчисления,

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{\cos^2 \psi} &= (d\varphi - d\omega) \cos(\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho + \\ &+ \frac{d\varrho}{\cos^2 \varrho} \sin(\varphi - \omega). \end{aligned}$$

Из равенства этих величин получается

$$\frac{d\omega}{\operatorname{tg}(\varphi - \omega)} = \frac{d\varrho}{\sin \varrho \cos \varrho} = d \ln \operatorname{tg} \varrho.$$

Это уравнение дает отношение между мгновенным перемещением линии узлов OT и изменением угла наклона ϱ . Определив $MOS = \psi$ с помощью уравнения

$$\operatorname{tg} \psi = \sin (\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho,$$

можно получить и величину расстояния

$$OS = \frac{z}{\cos \psi}.$$

С л е д с т в и е 1

71. Так как, согласно выведенному выше уравнению

$$\frac{d\omega}{\operatorname{tg} (\varphi - \omega)} = \frac{d\varrho}{\sin \varrho \cos \varrho},$$

углы ω и ϱ связаны один с другим, то ясно, что в тех случаях, когда угол $AOT = \omega$ не изменяет своей величины, угол наклона ϱ также всегда сохраняет свое значение; в этом случае, значит, движение точки происходит в одной и той же плоскости. Итак, критерий того, что движение происходит в одной и той же плоскости, проходящей через неподвижную точку O , заключается в том, что углы ω и ϱ должны быть постоянными.

С л е д с т в и е 2

72. Пока движущаяся точка проходит по плоскости, принятой за неподвижную, она находится на самой линии узлов OT , и следовательно, тогда

$$\operatorname{tg} (\varphi - \omega) = 0;$$

потому как бы ни изменялся угол наклона ϱ , здесь

будет иметь место равенство $d\omega = 0$, т. е. линия узлов останется в покое.

Следствие 3

73. Если же угол $TOM = \varphi - \omega$ будет равен прямому, то, в силу того что $\operatorname{tg}(\varphi - \omega) = \infty$, как бы линия узлов ни двигалась, $d\rho$ будет равен нулю, т. е. угол наклона за элемент времени dt не изменится.

Примечание

74. Если бы мы пожелали таким способом выразить элемент пути Ss и с его помощью — скорость движения, то формула оказалась бы слишком сложной; то же было бы и при определении направления движения.

Для устранения этого неудобства вычисление может быть произведено другим способом. А именно, для данного времени нужно найти положение линии узлов OT , т. е. угол $AOT = \omega$ и угол наклона $MNS = \rho$, далее — угол $TOS = \sigma$ в плоскости TOS , в которой уже должно происходить движение точки, и наконец расстояние $OS = v$. При этих условиях получается:

$$ON = v \cos \sigma,$$

$$SN = v \sin \sigma,$$

$$SM = v \sin \sigma \sin \rho$$

и

$$MN = v \sin \sigma \cos \rho.$$

Отсюда определяется угол $SOM = \psi$, а именно

$$\sin \psi = \sin \sigma \sin \rho.$$

Далее, так как

$$\operatorname{tg} TOM = \operatorname{tg} \sigma \cos \varrho,$$

а угол TOM равен $\varphi - \omega$, то дифференциалы $d\omega$ и $d\varrho$ связаны один с другим таким образом, что мы имеем

$$\frac{d\omega}{\operatorname{tg} \sigma \cos \varrho} = \frac{d\varrho}{\sin \varrho \cos \varrho}$$

или

$$d\omega = \frac{d\varrho \operatorname{tg} \sigma}{\sin \varrho}.$$

После этого элемент пути определяется в следующем виде:

$$Ss = \sqrt{dv^2 + v^2 d\sigma^2},$$

а скорость равна

$$\frac{1}{dt} \sqrt{dv^2 + v^2 d\sigma^2},$$

направление движения Ss в плоскости TOS наклонено к прямой OS под таким углом, что его тангенс равен

$$\frac{v d\sigma}{dv}.$$

В астрономии, где подобное разложение очень часто применяется, угол TOS обычно называют *аргументом широты*, а угол SOM — *широтой*. Если же, далее, угол TOM , тангенс которого равен $\operatorname{tg} \sigma \cos \varrho$, прибавить к долготе узла $AOT = \omega$, то эту сумму, т. е. угол AOM , называют *долготой*.



Глава II

О ВНУТРЕННИХ НАЧАЛАХ ДВИЖЕНИЯ [52]

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9

75. Внутренние начала движения охватывают все то, что заключается в самих телах и в чем следует искать причину их покоя или движения.

При этом исключаются все внешние причины, которые могут каким-либо образом повлиять на движение или покой тел.

Пояснение 1

76. После того как в предыдущей главе я изложил способ приводить исследование движения, взятого в общем виде, к вычислениям, я теперь предполагаю остановиться на вопросе о причинах движения. В самом деле, будет ли тело покоиться или двигаться, будет ли оно пребывать в покое или придет в движение и будет каким-либо образом продолжать

последнее, — эти явления необходимо должны быть последствиями каких-либо определенных причин. Несомненно, по отношению к покою и движению в теле ни в коем случае нельзя допустить, чтобы здесь что-либо могло происходить случайно, т. е. без всякой причины.

Но в чем бы ни состояла эта причина, она либо должна заключаться в самом теле, о котором идет речь, либо ее следует искать вне последнего.

Отсюда следует установить два рода начал, обуславливающих движение тел, из которых одни я буду называть *внутренними*, а другие — *внешними*. К *внутренним*, следовательно, я отношу все то, что заключается в самом теле и что является причиной движения или покоя; все же то, что воздействует на тело извне и влияет на его состояние движения или покоя, следует отнести к *внешним* началам. Но так как во вселенной все тела в каком-либо направлении соприкасаются с другими телами и, следовательно, находятся во взаимной теснейшей связи, то в этой связи трудно отделить друг от друга то, что должно быть отнесено к внешним и что к внутренним началам. Поэтому, для того чтобы при настоящем исследовании не сбиться с правильного пути, нам следует, по крайней мере в уме, удалить все окружающие тела; тогда налицо останется как бы в единственном числе только то тело, о котором идет речь.

Следует попытаться определить, как будет себя вести подобное тело, находясь в покое или же в

движении, и отсюда определить внутренние начала движения, которые следует тщательно отличать от внешних.

Пояснение 2

77. Но, в то время как я собираюсь рассмотреть тело, изолированное указанным образом, стоящее вне какой-либо связи с другими телами и как бы существующее в единственном числе во вселенной, некоторые философы тотчас же воскликнут, что эта гипотеза содержит в себе противоречие: ведь все тела в мире настолько тесно связаны друг с другом, что с удалением одного из них все это цельное построение рушится.

Однако здесь вовсе не идет речь о том, чтобы изъять одно тело из вселенной, и, как бы ни влияла на какое-либо тело его связь с остальными телами, даже и философу не возбраняется поразмыслить над вопросом, что случилось бы с данным телом, если бы остальные тела на него совершенно не влияли. В этом случае философ не будет утверждать, что это действительно случится, он только установит, что из фактически происходящего следует приписать внешним причинам.

Философы постоянно прибегают к подобного рода абстракциям: если бы они вздумали их запретить, не осталось бы путей к познанию истины. Но если дозволено рассматривать какое-либо тело таким образом, как если бы оно совершенно не находилось под

влиянием других тел, то ведь создается такое же точно положение, как если бы других тел совершенно не существовало. Следовательно, зачем же нужно рассматривать как существующие все прочие тела, кроме исследуемого, если они на него совершенно не влияют?

После этих соображений отпадают всякие препятствия к тому, чтобы рассматривать какое-либо тело как нечто вполне изолированное — совершенно так, как если бы были устранены все прочие тела вселенной.

Но если бы настоящая гипотеза кого-либо все-таки смущала, пусть он оставит все тела на своих местах, но согласится с нашим допущением, что от этих тел не исходит никакого влияния на то тело, которое мы собираемся исследовать.

Аксиома 1

78. Всякое тело, взятое безотносительно ко всем прочим телам, находится либо в покое, либо в движении.

Речь здесь идет об абсолютном покое и об абсолютном движении.

Пояснение 1

79. Опираясь на чувственное восприятие, мы до сих пор не знали другого вида покоя или движения, как только по отношению к другим телам, почему мы и называли как покой, так и движение относительными.

Теперь, если мы мысленно устраним все тела, кроме одного, то исчезнет и связь последнего с другими телами, с помощью которой мы до сих пор судили о покое или движении; тогда прежде всего возникает вопрос: может ли и теперь иметь место наше суждение о движении или покое, или же нет? Ведь это суждение составлялось у нас исключительно в результате сопоставления положения рассматриваемого тела с другими телами; следовательно, с устранением этих последних и наше суждение по необходимости должно отпасть. Но хотя о покое или о движении какого-либо тела мы узнаем только по его отношению к другим телам, отсюда еще нельзя делать того вывода, что эти вещи сами по себе представляют собой не больше чем чисто умозрительное отношение и что в самих телах не содержится решительно ничего такого, что соответствовало бы нашим понятиям покоя и движения.

Ведь и размеров тела мы не можем узнать иначе, как путем сравнения его с другими телами. Но если даже удалить предметы, с которыми мы произвели сравнение, в теле все-таки останется как бы основа его размеров, так как если оно расширится до большего объема или сожмется до меньшего, то придется считать, что в нем произошло некоторое реальное изменение. Точно так же, если бы существовало одно единственное тело, то пришлось бы считать, что оно либо находится в покое, либо движется, так как нельзя предположить, чтобы одновременно могло быть

и то и другое или чтобы не было ни того, ни другого. Отсюда я прихожу к заключению, что движение и покой не представляют собой чего-либо чисто идеального, возникающего только из сравнения, так что в самих телах не заключается ничего, соответствующего им, но что и в случае единственного изолированного тела можно поставить вопрос, находится ли оно в движении или в покое. При этом я меньше всего опасаясь тех философов, которые все сводят к отношениям, так как они приписывают движению столь многое, что даже в движущей силе признают некую субстанцию.

Пояснение 2

80. Итак, если и по поводу отдельного тела, взятого без всякой связи с другими телами или же при полном удалении последних, можно с полным основанием поставить вопрос, находится ли оно в покое или же оно движется, то необходимо принять либо одно, либо другое. Каковы же должны быть этот покой или это движение? Так как здесь не происходит изменения положения по отношению к другим телам, мы этого не в состоянии себе представить без того, чтобы допустить существование абсолютного пространства, в котором наше тело займет определенное место, откуда оно и будет переходить в другие места. Но так как, по мнению тех самых философов, которые наиболее сильно возражают против существования абсолютного пространства, максималь-

ное значение придается тому, находится ли тело в движении или в покое, то пусть они укажут относительно к другим телам, в чем собственно здесь заключается различие. Станут ли они утверждать, что движется именно то тело, которое постоянно меняет свое место по отношению к соседним телам? Но ведь движением могут обладать как раз эти последние, в то время как первое тело будет находиться в покое. Придется ли им произвести сопоставление с более удаленными телами? Но, во-первых, с какими? И почему с одними предпочтительнее, чем с другими?

Наконец они ответят: с такими телами, которые сами по себе находятся в покое. Но тогда я снова ставлю вопрос, если не о том, каким образом мы можем отличать тела, находящиеся сами по себе в покое, то о том, что это собственно значит: „тело само по себе находится в покое“? Ведь дело в том, что здесь мы уже лишены возможности прибегнуть к определению положения тела по отношению к другим телам.

В конце концов они будут вынуждены признать, что сами по себе находятся в покое те тела, которые пребывают в одном и том же месте пространства, а так как из этой формулировки совершенно устранена связь с другими телами, они и придут к абсолютному пространству, по отношению к которому пребывают в покое или же движутся те тела, которые мы считаем находящимися в абсолютном покое или в абсолютном движении.

П Р И М Е Ч А Н И Е

81. Всякий, кто склонен отрицать существование абсолютного пространства, придет в величайшее смущение. В самом деле, вынужденный отбросить абсолютный покой и движение как пустые слова, лишённые смысла, он должен будет не только отбросить законы движения, покоящиеся на этом принципе, но и допустить, что вообще не может быть никаких законов движения.

Ведь если вопрос, который нас привел к этому, — *что происходит в теле, освобожденном от какой-либо связи с прочими телами?* — сам по себе абсурден, то и влияния, которые могут быть вызваны в данном теле другими телами, сами по себе неизвестны и не могут быть определены: пришлось бы утверждать, что все происходит случайно и без всякой причины.

Если бы кто-нибудь захотел этого избежать, то он должен был бы отрицать всякое движение. Однако и на этом он ни в коем случае не мог бы успокоиться, если бы даже им были удачно отражены все доводы, которые были бы приведены против него: он не мог бы даже объяснить, что собственно представляет собой принятый им во всем мире покой.

То обстоятельство, что мы вынуждены спорить с подобными явными нелепостями, представляет собой, повидимому, самое надежное обоснование для нашего мнения.

Аксиома 2

82. Абсолютно покоящееся тело, если оно не подвержено каким-либо влияниям извне, будет оставаться в состоянии покоя вечно.

Пояснение

83. Это положение обыкновенно формулируется применительно к любому телу. Оно само по себе кажется настолько ясным, что как-будто и не нуждается в каком-либо доказательстве. Однако, для того чтобы еще яснее убедиться в его правильности, рассмотрим точку или элемент тела. Если последний в некоторый момент времени находится в состоянии абсолютного покоя, то он в этом состоянии должен оставаться вечно. В самом деле, ведь нет никакого основания, в силу которого он скорее стал бы двигаться в одном направлении, чем во всех остальных направлениях. А так как действие каких бы то ни было внешних сил здесь исключено, то он и не сможет двигаться ни в каком направлении. Хотя, таким образом, настоящая истина опирается на принцип достаточного основания, тем не менее следует признать, что в самой точке или в элементе тела имеется причина, благодаря которой она или он пребывает в состоянии покоя, так что настоящую истину следует признать необходимой.

Но то, что доказано для любой точки, неизбежно имеет силу и для всех точек, вместе взятых, и, следовательно, для любого тела: ведь если отдельные

элементы последнего находятся в покое и сохраняют это состояние в дальнейшем, то никто не может усомниться, что и все тело будет оставаться в покое.

Однако по поводу целого тела может возникнуть сомнение в том, не воздействуют ли друг на друга отдельные, хотя бы и покоящиеся части тела и не вызовут ли они движения? Но если даже допустить последнее, то отсюда еще не следует ничего такого, что противоречило бы нашей аксиоме, поскольку мы освобождаем от всякого внешнего влияния не только все тело в целом, но и отдельные части его. Для нас достаточно, чтобы была принята аксиома в указанном смысле, а именно, что все находящиеся в покое мельчайшие частицы тела, поскольку они друг на друга не воздействуют, будут пребывать и дальше в состоянии покоя.

П Р И М Е Ч А Н И Е

84. Настоящий закон, установленный применительно к абсолютному покою, ни в коем случае не может быть распространен и на относительный покой. Действительно, если тело, по отношению к которому рассматриваемое тельце находилось в покое, получит внезапный толчок, то второе тело уже не останется в покое по отношению к первому телу. Представьте себе шар, который лежит на столе на равномерно движущемся корабле и который находится в состоянии покоя по отношению к кораблю. Если послед-

ний ударится о скалу, то относительный покой шара внезапно прервется и шар начнет двигаться по отношению к кораблю, хотя он не подвергся действию каких-либо внешних причин. Следовательно, приведенный закон ограничивается исключительно только абсолютным покоем.

Поскольку закон этот является необходимым, постольку и отношение тел к любым занимаемым ими местам тоже является необходимым.

Так как этот закон о покое говорит о пребывании на одном и том же месте, то под последним следует подразумевать только абсолютное место; однако это абсолютное место не может быть определено на основании взаимного расположения находящихся по соседству тел, так как в противном случае мы распространили бы свой закон и на случай относительного покоя.

Аксиома 3

85. Тело, находящееся в абсолютном движении, если оно не подвергается какому-либо внешнему воздействию, будет продолжать двигаться равномерно в том же самом направлении.

Пояснение 1

86. Эту аксиому тоже следует считать правильной в применении к мельчайшим частицам тел, уподобляющимся точкам: она применима только к таким имеющим конечную величину телам, у которых все частицы движутся с одной и той же скоростью в

одном и том же направлении. Действительно, если бы они вначале приобрели неравные скорости или различные направления, то отдельные частицы не могли бы сохранить своего движения, так как в противном случае они отдалились бы друг от друга и цельность тела была бы нарушена. Но этого не приходится опасаться в том случае, когда скорости и направления движения всех частиц тождественны или когда тело столь мало, что в нем не может иметь места подобное неравенство. Поэтому принимают, что подобная телесная точка существует как бы изолированно и, получив некоторое движение, начинает двигаться с заданной скоростью и в заданном направлении; тогда, согласно приведенной аксиоме, она постоянно будет сохранять одну и ту же скорость и одно и то же направление.

Хотя мы это положение приняли в качестве аксиомы, тем не менее его можно без труда и обосновать.

Прежде всего тело не претерпит никакого изменения в направлении своего движения, так как нет никакого основания, почему бы оно от него отклонилось скорее в одну сторону, чем в другую; следовательно, как достоверно то, что покоящееся тело сохраняет свое состояние покоя, так столь же достоверно и то, что тело движущееся сохраняет свое направление.

Что же касается, дальше, скорости, то, если бы она не оставалась постоянно одной и той же, она

должна была бы либо увеличиться, либо уменьшиться. Однако ни того, ни другого нельзя утверждать без противоречия здравому смыслу. В самом деле, если бы скорость увеличилась или уменьшилась, то это должно было бы произойти согласно определенному закону, но каков этот закон — этого нельзя себе никак представить, так как ни один закон не имеет за собой каких-либо преимуществ перед другими. Далее, если бы кто-либо вздумал утверждать, что скорость будет уменьшаться пропорционально времени, то этим он еще не выяснил бы вопроса: ему пришлось бы, сверх того, определить, какая часть скорости исчезает в тот или иной промежуток времени, но какие бы предположения по данному поводу он ни сделал, их ни в коем случае нельзя было бы принять, так как они не имели бы под собой никаких оснований. То же самое относится и к любому иному закону.

Таким образом не остается ничего иного, как допустить, что и скорость, подобно направлению, останется все время неизменной.

Пояснение 2

87. Настоящей аксиоме, равно как и предыдущей, противоречит мнение тех философов, которые утверждают, что всем телам присуща какая-то скрытая сила, дающая им возможность постоянно изменять состояние покоя или движения. Однако это мнение не имеет под собой ровно никаких оснований и

совершенно опровергается уже одним тем, что оно противоречит нашей аксиоме.

Эта аксиома с первого взгляда как-будто идет вразрез с наблюдением, так как при всех испытаниях мы устанавливаем, что движение тел постепенно замедляется и наконец прекращается. Повидимому, отсюда и возникло отрицание возможности вечного движения, между тем как, согласно нашей аксиоме, должно иметь место вечное движение.

Но в упомянутых опытах причина замедления заключается в трении, в сопротивлении воздуха и в других помехах движению, которых невозможно устранить никакими средствами. Внимательно продумав эти обстоятельства, мы как раз из этих опытов сделаем тот вывод, что если бы все названные помехи были устранены, то движение действительно могло бы продолжаться вечно.

И так как мы в своей аксиоме определенно исключили все помехи движению, то упомянутые опытные данные, конечно, уже не противоречат аксиоме, а скорее, наоборот, представляют заметный довод в ее пользу.

Следует остерегаться настоящую аксиому, приуроченную исключительно к абсолютному движению, применять к каким-либо относительным движениям.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10

88. *Когда тело абсолютно находится в покое или движется равномерно и прямолинейно, то говорят, что оно сохраняет свое состояние.*

Следствие 1.

89. Следовательно, обе приведенные выше аксиомы могут быть выражены следующим образом: если тела не находятся под влиянием других тел, то они „сохраняют свое состояние“.

Следствие 2

90. Следовательно, если тело, находившееся раньше в покое, приходит в движение или если тело, находившееся в движении, претерпевает изменение в своей скорости или направлении, то это значит, что тело „изменяет свое состояние“.

Примечание

91. Пребывание в покое или в равномерном и прямолинейном движении вполне правильно названо „состоянием“, так как этим тело определяется само по себе, независимо от чего-либо другого. Действительно, пока тело предоставлено самому себе и не подвержено какому-либо внешнему воздействию, с полным основанием говорят, что оно остается в неизменном состоянии, поскольку наличие изменения состояния должно свидетельствовать о внешнем воздействии.

Пребывание в том же состоянии совершенно отличается от пребывания в том же месте; эти понятия совпадают лишь в том случае, когда тело находится в покое. К данному понятию состояния нас привели установленные выше аксиомы; обратно, понятие сос-

тояния, которое само по себе является произвольным, не могло бы нас привести к познанию наших аксиом. Как раз благодаря этим последним понятие состояния и получило определенный смысл.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11

92. *То свойство тел, в котором заключается причина сохранения ими своего состояния, называется инерцией, иногда также силой инерции.*

СЛЕДСТВИЕ 1

93. Инерция представляет собой истинную причину, вследствие которой тела сохраняют неизменным свое состояние; поскольку эту причину приходится искать в самом теле, ее, без сомнения, следует считать свойством, общим для всех тел.

СЛЕДСТВИЕ 2

94. Следовательно, если задают вопрос, почему абсолютно покоящееся тело продолжает оставаться в покое или почему тело, движущееся равномерно и прямолинейно, сохраняет это движение, — то нельзя указать какой-либо иной причины, кроме его инерции: не следует искать причины этого явления где-либо вне самого тела.

ПРИМЕЧАНИЕ

95. Выражение „инерция“ применяется собственно для обозначения тех свойств тел, в силу которых покоящиеся тела остаются в состоянии

покою, так как в этом состоянии они как бы противодействуют движению; но так как тела, находящиеся в движении, точно так же противодействуют всякому изменению скорости и изменению направления, то упомянутое выражение применяется для обозначения сохранения всякого состояния, будет ли последнее покоем или движением.

Иногда применяют выражение „сила инерции“, так как сила есть нечто, противодействующее изменению состояния. Но если под силой понимать какую-то причину, изменяющую состояние тела, то здесь ее нужно понимать совсем не в этом смысле: проявление инерции в высшей степени отлично от того, какое свойственно, как это будет показано ниже, обычным силам. Поэтому для избежания какой-либо путаницы на этой почве мы опустим слово „сила“ и будем рассматриваемое свойство тел называть просто *инерцией*.

Пояснение

96. Об инерции можно говорить только для случаев абсолютного состояния тел; ее нельзя относить к относительному покою или движению. В самом деле, какое-либо тело может по отношению к другому находиться в любом неравномерном движении или перемещаться по кривой линии, между тем как абсолютно оно будет находиться в покое или в равномерном и прямолинейном движении и, следовательно, будет сохранять свое состояние. И если нам случится

наблюдать тело, которое, как нам достоверно известно, не подвержено никаким внешним силам, но которое проделывает любое неравномерное относительное движение, то мы с полной определенностью можем утверждать, что абсолютно это тело либо находится в покое, либо движется равномерно прямолинейно. Но так как покой или движение тел мы в состоянии узнать лишь по сопоставлению их с другими телами, то чувства никак не могут нам указать абсолютного состояния тел. Поэтому критерий абсолютного состояния, выводимый нами из того обстоятельства, что тела не подвержены никакому внешнему воздействию, имеет величайшее значение в данной науке.

Может, впрочем, случиться, что настоящая аксиома окажется применимой и при относительном движении: это имеет место в том случае, когда тело, по отношению к которому мы определяем движение, само сохраняет свое состояние, т. е. либо находится в абсолютном покое, либо абсолютно движется равномерно и прямолинейно.

ТЕОРЕМА I

97. Если тело, по отношению к которому мы определяем движение других тел, абсолютно находится в покое или движется равномерно и прямолинейно, то аксиомы имеют такую же силу и для относительного покоя или движения, как и для абсолютного.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Рассмотрим два тела, которые оба находятся в абсолютном равномерном и прямолинейном движении; одно из них (рис. 9) пусть проходит за время, равное t , путь

$$Aa = at,$$

а второе — за то же время путь

$$Bb = bt,$$

так что скорость первого равна a , второго равна b . При этом без-

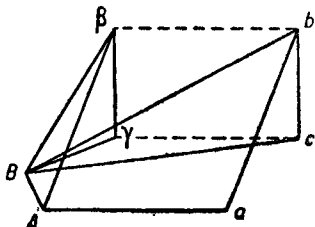


Рис. 9.

различно, лежат ли прямые Aa и Bb в одной плоскости или же нет.

Отнесем теперь движение тела B к телу A , которое мы будем считать как бы находящимся в покое в A ; так как вначале тело B находилось в B , то по истечении времени, равного t , его можно будет считать как бы находящимся в β , при условии, что линия $A\beta$ параллельна и равна ab . Но, принимая во внимание, что

$$b\beta = Aa = at,$$

мы имеем

$$Bb : b\beta = b : a,$$

т. е. отношение $Bb : b\beta$ постоянно.

Дальше, так как угол $Bb\beta$ постоянно сохраняет одно и то же значение, то вид треугольника $Bb\beta$

является вполне определенным, а следовательно, и угол $bB\beta$ является постоянным и не зависит от времени, равно как и отношение Bb к $b\beta$. Положив последнее равным отношению b к β , мы получим

$$B\beta = \beta t.$$

Отсюда следует, что относительное движение тела B таково, что оно из точки B движется по прямой $B\beta$ и проходит за время t путь

$$B\beta = \beta t,$$

т. е. это тело перемещается с постоянной скоростью.

Итак, тело B , которое мы предположили находящимся в абсолютном равномерном и прямолинейном движении, движется по отношению к телу A также равномерно и прямолинейно, если только последнее тело само движется равномерно и прямолинейно.

С л е д с т в и е 1

98. Если положить угол $Bb\beta$ равным ζ и принять во внимание, что этот угол имеет постоянное значение, то даже если линии Aa и Bb и не лежат в одной плоскости, мы во всяком случае будем иметь

$$B\beta = t \sqrt{a^2 - 2ab \cos \zeta + b^2}.$$

Следовательно, скорость относительного движения будет равна

$$\sqrt{a^2 - 2ab \cos \zeta + b^2},$$

а тангенс угла $bB\beta$ равен

$$\frac{a \sin \zeta}{b - a \cos \zeta}.$$

С л е д с т в и е 2

99. Если бы тело A находилось в абсолютном покое, то относительное движение тела B не отличалось бы от абсолютного его движения. Следовательно, если бы во вселенной существовало одно единственное абсолютно покоящееся тело, то, относя к последнему остальные тела, можно было бы определять их абсолютное движение.

С л е д с т в и е 3

100. Если бы во вселенной существовало тело, движущееся равномерно и прямолинейно, к которому можно было бы относить все остальные тела, то по поводу последних, при условии, что они не были бы подвержены какому-либо внешнему воздействию, можно было бы утверждать, что они сохраняют и свое относительное состояние.

С л е д с т в и е 4

101. Таким образом тела вследствие инерции стремятся сохранить не только свое абсолютное, но и относительное состояние, если только то тело, по отношению к которому определяется их состояние, само находится в абсолютном покое или в абсолютном равномерном и прямолинейном движении.

П о я с н е н и е

102. Если бы во вселенной Солнце или, еще лучше, центр Солнца находился в абсолютном покое и если

бы положение всех тел сопоставлялось с ним, то в силу инерции все тела, которые по отношению к этому центру находились бы в покое, и впредь оставались бы в этом состоянии, а те тела, которые двигались бы, продолжали бы перемещаться равномерно и прямолинейно. Таким образом в этом случае их абсолютное движение не отличалось бы от относительного. Если же в покое находился бы не центр Солнца, а—что, вероятно, ближе к действительности, — общий центр тяжести всей системы, то изложенное выше свойство инерции следовало бы отнести к этому центру тяжести.

Однако для определения относительного движения недостаточно принять в качестве неподвижной одну единственную точку, так как с помощью последней можно определить лишь расстояния, но не направления; как выше нами было указано, для этого необходимо иметь три или даже четыре неподвижных точки. В качестве таких неподвижных точек в мировом пространстве обыкновенно принимаются неподвижные звезды. Если правильно предположение о неподвижности звезд, то все тела, которые по отношению к ним находятся в покое или в движении, сохраняли бы в силу инерции это свое состояние.

То же самое имело бы место, если бы все звезды двигались в небесном пространстве равномерно и прямолинейно с равными скоростями по параллельным направлениям. Однако и у самих звезд замечены некоторые небольшие неправильности, которые следует

принимать во внимание при подобного рода суждениях, что, конечно, в очень большой степени осложняет данный вопрос.

П Р И М Е Ч А Н И Е

103. Когда мы рассматриваем такие тела или, — что бы размеры тел не вносили осложнения, — когда мы рассматриваем как бы материальные точки, которые совершенно не подвержены внешнему воздействию, то последние либо будут вечно находиться в покое, либо будут вечно двигаться равномерно прямолинейно и притом не только абсолютно, но и относительно, если только тело, к которому мы их относим, само сохраняет свое абсолютное состояние. Поэтому представляется целесообразным внимательнее исследовать подобное движение, являющееся результатом инерции, и свести его к вычислениям.

Ранее мы в общем виде разобрали три случая, для которых были указаны вычисления для определения движения. Первый случай был тот, когда прямолинейное движение было отнесено к оси, совпадающей с направлением движения. Второй, — при котором движение было отнесено к двум осям, и так как последний оказался применимым к любому движению, происходящему в одной плоскости, то мы его сможем применить и к прямолинейному равномерному движению, являющемуся теперь предметом нашего исследования. Третий случай, являющийся самым широким по своему охвату, при котором мы применили

три оси, охватывает и настоящий рассматриваемый нами вопрос; поэтому нам представляется вполне целесообразным уделить некоторое внимание тому, чтобы исследовать, какой вид примут выведенные раньше общие формулы в случае равномерного прямолинейного движения.

Итак, мы равномерное прямолинейное движение сведем к вычислениям применительно к этим трем случаям и определим, что в каждом движении должно быть отнесено за счет инерции. В том же случае, когда будет установлено, что движение какого-либо тела происходит как-нибудь иначе, причину этого придется искать не в его инерции, а где-нибудь вне данного тела.

Задача 6

104. *Прямолинейное равномерное движение отнесено к одной оси, совпадающей с направлением движения. Определить движение путем вычислений, т. е. указать местонахождение тела в любое время.*

Решение

Будем рассматривать движущееся тело как точку. Пусть начало движения будет в A (рис. 2) и пусть по истечении времени t точка достигнет S , пройдя путь $AS = s$. Так как скорость движения в S равна $\frac{ds}{dt}$, и последняя все время остается неизменной, то, положив последнюю равной c , будем иметь

$$\frac{ds}{dt} = c,$$

а после интегрирования

$$s = ct,$$

т. е. ту самую формулу, которая уже раньше была дана для равномерного движения.

Но для того чтобы представить особенности данного движения в общем виде безотносительно к величине его скорости, достаточно знать, что $\frac{ds}{dt}$ есть величина постоянная, вследствие чего ее дифференциал должен быть равен нулю. Следовательно, если рассматривать элемент времени dt как величину постоянную, то получается $d\frac{ds}{dt} = 0$, а следовательно, если это выражение для однородности пополнить, то

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 0.$$

С л е д с т в и е 1

105. Следовательно, если при прямолинейном движении

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 0,$$

то это движение является также и равномерным; при этом, если оно абсолютное или если оно равносильно абсолютному, то уравнение

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 0$$

является результатом инерции.

СЛЕДСТВИЕ 2

106. Но если при прямолинейном движении не имеет места соотношение

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 0,$$

то это значит, что тельце подчиняется не только инерции, и самое значение величины $\frac{d^2s}{dt^2}$ следует приписать какой-либо внешней причине, поскольку, конечно, движение рассматривается как абсолютное движение.

ЗАДАЧА 7

107. Точка движется равномерно по прямой линии, и ее движение отнесено к двум осям, лежащим в одной плоскости. Установить особенности этого движения, сведя их к вычислениям.

РЕШЕНИЕ

Пусть описываемый точкой путь представляет собой прямую линию EF (рис. 3), лежащую в одной плоскости с осями OA и OB , и пусть по истечении времени t точка находится в S .

Проведем из этой точки параллельно осям линии SY и SX и положим

$$OX = x \quad \text{и} \quad XS = y.$$

Так как линия ESF прямая, то $\frac{dy}{dx}$ представляет собой постоянную величину.

Далее, по истечении промежутка времени dt движущаяся точка достигнет S ; тогда, если положить

$$Xx = Sp = dx \quad \text{и} \quad ps = dy$$

и, кроме того, угол AOB обозначить через ζ , то мы получим

$$Ss = \sqrt{dx^2 + dy^2 + 2 dx dy \cos \zeta}$$

и скорость в S , равную

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + 2 dx dy \cos \zeta}}{dt}.$$

Но так как $\frac{dy}{dx}$ — величина постоянная, то, положив

$$dy = a dx,$$

мы получим для скорости значение

$$\frac{dx}{dt} \sqrt{1 + a^2 + 2a \cos \zeta},$$

которое, согласно принятому условию, тоже представляет собой постоянную величину. Поэтому

$$\frac{dx}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dt}$$

будут также величинами постоянными, а их дифференциалы будут равны нулю.

Итак, в том случае, если движение прямолинейно и равномерно, то при постоянном элементе dt получается

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

и

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Обратно, если последние два уравнения имеют место, то $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$, а также $\frac{dy}{dx}$ представляют собой величины постоянные, откуда следует, что движение происходит равномерно и прямолинейно.

Следствие 1

108. Следовательно, если точка не испытывает никакого внешнего воздействия и движение ее происходит только в силу инерции, то обязательно должны иметь место уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

и

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

так как этими условиями характеризуется прямолинейное равномерное движение.

Следствие 2

109. Поэтому, если равномерное прямолинейное движение разложить по направлениям двух осей OA и OB , то скорости обоих составляющих движений будут постоянны, и наоборот, если эти составляющие движения равномерны, то и действительное движение будет не только равномерным, но и прямолинейным.

СЛЕДСТВИЕ 3

110. Следовательно, и наоборот, если при каком-либо движении, отнесенном к осям OA и OB , не имеет места равенство

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

или

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

или не имеют места оба эти равенства, то это значит, что тело находится не только под действием инерции, но что на него действует еще и какое-то внешнее влияние.

ПРИМЕЧАНИЕ

111. Когда тело, подчиняясь только действию инерции, движется равномерно и прямолинейно, — будь то абсолютно или относительно такого тела, которое само находится в таком же абсолютном состоянии, — то его движение может быть разложено по двум произвольным осям, что, конечно, может быть сделано бесчисленным множеством способов. Оба составляющих движения будут в этом случае всегда равномерными, т. е. они будут такими, как если бы тело в них участвовало в силу инерции.

Замечательная особенность этого разложения заключается в том, что основные положения, связанные с действительным движением, сохраняют силу и для этих, хотя и фиктивных, составляющих движений,

из чего могут быть извлечены максимальные удобства для вычислений.

Еще большая важность этого разложения выяснится ниже, когда нами будет показано, что на эти движения, полученные из разложения и по существу лишь воображаемые, силы влияют совершенно так же, как если бы они были действительными.

Все изложенное выше в общем сохраняет силу и при разложении движения по трем осям, как мы в этом убедимся из нижеследующей задачи.

ЗАДАЧА 8

112. Точка движется равномерно по прямой линии, и ее движение отнесено к трем осям. Установить особенности этого движения, сведя их к вычислениям.

РЕШЕНИЕ

Примем в качестве осей линии OA , OB и OC (рис. 4). Пусть ESF — произвольная прямая линия, проходимая точкой при равномерном движении, и пусть по истечении времени t точка находится в S , для которой координаты, параллельные трем осям, будут $OX = x$, $XY = y$ и $YS = z$, причем последние могут образовывать друг с другом прямые или косые углы. Так как ESF — прямая линия, то и ее проекция TU на плоскость AOB будет прямой, и следовательно, $\frac{dy}{dx}$ будет величиной постоянной.

Аналогично, ввиду того что проекция на плоскость AOC также дает прямую линию, $\frac{dz}{dx}$ будет тоже постоянной величиной. То же можно сказать и о величине $\frac{dz}{dy}$. Обозначив отрезочек пути Ss , пройденный за промежуток времени dt , через ds , мы найдем, что величины $\frac{ds}{dx}$, $\frac{ds}{dy}$ и $\frac{ds}{dz}$ будут тоже постоянны; последнее является результатом того, что ESF представляет собой прямую линию. Вследствие равномерности движения скорость $\frac{ds}{dt}$ постоянна, а потому и $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ и $\frac{dz}{dt}$ будут величинами постоянными. В последнем как раз и содержатся как условие равномерности движения, так и условие прямолинейности пути.

Продифференцировав последние отношения, — приняв dt за величину постоянную, — мы получим следующие три уравнения:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0;$$

этими уравнениями и определяется природа равномерного прямолинейного движения.

С л е д с т в и я 1

113. Следовательно, если точка не подвержена какому-либо внешнему воздействию, то при отнесении ее абсолютного движения к каким-либо трем

осям обязательно будут иметь место три следующих равенства:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

основу которых следует искать в инерции тельца.

С л е д с т в и е 2

114. Если движение равномерно и прямолинейно, то при разложении последнего по трем произвольным неподвижным осям три составляющих движения тоже будут равномерными, так как $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ и $\frac{dz}{dt}$ — величины постоянные.

С л е д с т в и е 3

115. Итак, хотя при абсолютном движении составляющие движения, которые получаются при разложении его по трем неподвижным направлениям, и являются воображаемыми, все же они следуют закону инерции, так что мы можем в настоящей главе рассматривать их как движения действительные.

П р и м е ч а н и е

116. Таковы внутренние начала движения, истекающие из общего свойства, именуемого обычно *инерцией*. С помощью этих начал мы в состоянии определить движение материальных точек, когда последние не подчинены никакому внешнему влиянию. А именно здесь все сводится к тому, что когда

подобное тельце находится в покое, оно вечно сохраняет это состояние покоя; если же оно пришло в какое-либо абсолютное движение, то оно продолжает вечно двигаться прямолинейно с той же скоростью.

Хотя движущиеся тела мы рассматривали здесь как тела бесконечно малые, однако все то, что выше было изложено, может быть применено и к телам любого размера. Но раньше чем перейти к этому, нам необходимо обсудить, какое действие в состоянии произвести внешние силы. Это исследование мы произведем тоже применительно к точкам, т. е. к очень малым телесным частицам.

Глава III

О ВНЕШНИХ ПРИЧИНАХ ДВИЖЕНИЯ, т. е. О СИЛАХ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12

117. *Все, что способно изменять абсолютное состояние тела, называется силой* [53].

Так как под влиянием внутренних причин тело должно было бы сохранять свое состояние, силу следует считать внешней причиной.

Следствие 1

118. Причина, вследствие которой абсолютно покоящееся тело начинает двигаться или же тело, находящееся в абсолютном движении, изменяет свою скорость либо направление, называется силой.

Следствие 2

119. Сила является внешней причиной, которая в состоянии изменить абсолютное состояние тела;

до тех пор, пока не возникнет подобная внешняя причина, тело сохраняет свое абсолютное состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения.

Пояснение

120. В самом теле не существует ничего такого, что стремилось бы изменить его состояние; поэтому мы и утверждаем, что тело до тех пор сохраняет свое состояние, пока оно как бы следует собственному инстинкту и не подпадает под действие какого-либо внешнего фактора.

Следовательно, когда случается, что абсолютное состояние какого-либо тела изменяется, причину этого следует искать, конечно, не в самом теле; ведь в противном случае не могло бы произойти никакого изменения состояния, так как состояние мы именно определили таким образом, что тело сохраняет его до тех пор, пока оно не подвержено действию каких-либо внешних причин. Но той внутренней причиной, вследствие которой тело сохраняет свое состояние, является его инерция, и так как в последней содержится источник всего того, что касается покоя и движения, то, в случае если бы в теле содержалось что-либо такое, что стремилось бы изменить его состояние, — инерция не только была бы совершенно сведена на-нет, но ее никто не мог бы и придумать. Поэтому, если мы словом „сила“ обозначаем только те причины, которые способны изменять абсолютное

состояние тел, то, конечно, нельзя какому бы то ни было телу приписывать силу изменять свое собственное состояние: во всех случаях, когда происходит изменение состояния тела, причина этого, т. е. сила, обязательно находится вне тела.

ПРИМЕЧАНИЕ 1

121. Возникает вопрос: *откуда происходят те силы, под влиянием которых, согласно нашему наблюдению, состояние тел постоянно изменяется? Или же, ввиду того что они не заключаются в самих телах, не следует ли их приписать нематериальным субстанциям?*

Философы обыкновенно рассуждают иначе. Так как состояние тел непрерывно меняется, они полагают, что причина этого изменения заключается в самих телах, а отсюда они приходят к выводу, что отдельные тела обладают силой постоянно изменять свое состояние, — и, таким образом, они совершенно опрокидывают принцип инерции.

Однако в приведенной цепи суждений они допускают значительный скачок: в самом деле, соглашаясь с первой частью, что причина изменения состояния заключается в телах, мы совершенно отвергаем вторую часть, а именно, будто отдельные тела обладают силой изменять свое состояние. Мы, следовательно, устраняем причину изменения состояния только из того тела, состояние которого изменяется, и утверждаем, что ее следует искать в других телах;

мы, таким образом, приписываем телам силу изменять состояние других тел, но не свое собственное состояние.

Это ни в коем случае не должно казаться нелепым, скорее именно из самой этой способности отдельных тел сохранять свое состояние следует, что в них должны заключаться силы изменять состояние других тел. В самом деле, в большой куче тел, если последние не находятся все в состоянии покоя или не движутся все в одном направлении с одинаковыми скоростями, отдельные тела не могут сохранять своего состояния именно потому, что состояние других должно сохраняться неизменным.

Действительно, представим себе два тела A и B , из которых первое вплотную приблизилось ко второму: совершенно невозможно, чтобы тело A продолжало свое движение без того, чтобы одновременно тело B было выведено из своего состояния покоя; равным образом невозможно, чтобы тело B сохранило свое состояние покоя, без того чтобы прекратилось движение тела A . Так как, значит, оба тела не могут одновременно сохранить своего состояния, то должно либо измениться состояние обоих тел, либо одного из них, — и это должно произойти именно потому, что у обоих тел существует стремление к сохранению своего состояния.

Следовательно, способность отдельных тел к сохранению своего состояния порождает силы, вследствие которых изменяется состояние других тел.

ПРИМЕЧАНИЕ 2

122. Далее, если поставить вопрос, почему собственно оба упомянутых тела A и B не могут одновременно сохранить своего состояния, то мы поймем, что причина этого заключается в непроницаемости. В самом деле, если бы оба эти тела могли пройти одно сквозь другое, так что каждое из них предоставило бы другому совершенно свободный проход как бы сквозь свое вещество, то ничто не помешало бы телу A продолжать свое движение, а телу B оставаться в покое; таким образом оба тела подчинялись бы только инерции.

Следовательно, причиной тех сил, вследствие которых изменяется состояние тел, следует считать не только инерцию, но сочетание последней с непроницаемостью. Но так как непроницаемость может быть присвоена лишь телам, а тела обязательно должны обладать инерцией, то непроницаемость уже сама в себе включает инерцию, и, следовательно, будет правильнее одну непроницаемость признать источником тех сил, которые изменяют состояние тел. Поэтому рассматриваемое свойство тел, являющееся первоисточником всех сил, следует подвергнуть более внимательному исследованию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13

123. *Непроницаемость представляет собой то свойство тел, в силу которого в одном и том же*

месте не могут находиться одновременно два или большее количество тел.

Это свойство присуще и самым малым элементам тела, так что даже и таких два элемента не могут находиться в одном и том же месте.

Следствие 1

124. Следовательно, благодаря этому свойству каждое отдельное тело должно находиться вне другого тела, так что тела не могут проникнуть одно в другое даже мельчайшими своими частями.

Следствие 2

125. Так как непроницаемость является необходимым свойством тел, то не существует никакой силы, которая была бы в состоянии втиснуть в одно и то же место два тела; в смысле достижения этого эффекта самая большая сила так же мало состоятельна, как и самая малая сила.

Следствие 3

126. Следовательно, как бы ни изменялось состояние тел под действием сил, никогда два элемента тела или две материальные точки не могут быть под их действием втиснуты в одно и то же место.

Пояснение 1

127. Неправильно указывают в опровержение этого общего свойства тел на известные опыты, согласно которым тела, как будто, проникают друг в друга.

Так, например, говорят, что брошенный шар проникает в глину, но здесь слово „проникать“ употребляют в другом смысле: ведь ни одна часть шара не попадает в такое место, в котором сейчас фактически находится часть глины. Слово „проникать“ здесь употребляется в том смысле, что шар занимает теперь то место, которое раньше было занято глиной. Мы возражаем ведь здесь только против того, что тело может занимать какое-либо место, в котором находится другое тело, а не такое место, в котором раньше находилось другое тело.

Точно так же, когда говорят, что вода проникает в губку, то в действительности вода заполняет только промежутки, т. е. поры в губке, а так как последних прежде не отличали от вещества губки, то и получалось, как будто последняя проницаема. Если же мы внимательно разберемся в этом вопросе, то мы поймем, что даже самая малая частичка губки нигде не существует в том же месте, где и вода.

Совершенно так же складываются условия у тел, которые подвергаются сжатию и занимают меньшее пространство: нигде в одном месте не сходятся две частицы, но только уменьшаются между частицами промежутки, причем вытесняется материя, заполняющая эти промежутки.

Если все это тщательно продумать, то не останется никаких сомнений в том, что тела непроницаемы, т. е. два тела никак не могут одновременно существовать в одном и том же месте.

Пояснение 2

128. Таким образом понятие непроницаемости опирается на понятие *места*, без которого оно совершенно несостоятельно. Ведь если бы место не было чем-то отличным от тела, то мы бы никак не могли понять, что такое непроницаемость. Правда, философы, отрицающие реальность места, говорят, что тела необходимо существуют вне себя, но что, такое „вне“ и „внутри“, когда место без тела — ничто этого они совершенно не определяют. Все то, что мы выше изложили по вопросу об абсолютном покое и движении, в полной мере показывает, что место не является только чистым понятием нашего ума, а из непроницаемости мы теперь совершенно ясно видим, что понятие места содержит в себе больше чем просто взаимное соотношение тел, при котором с уничтожением всех тел уже не оставалось бы больше места для *места*.

Итак, место есть нечто такое, что не зависит от тел, и оно не представляет собой только чистого понятия нашего разума. Однако, какова его реальная природа вне нашего разума, я не решился бы определить, хотя мы и должны признать за ним какую-то реальность. И если философы делят все реально существующее на определенные классы и указывают, что место не может быть отнесено ни к какому из них, то я скорее позволил бы себе полагать, что это деление на классы произведено ими неправильно,

так как они недостаточно исследовали относящиеся сюда вопросы.

Аналогично обстоит дело с понятием *времени*, в котором они не принимают ничего реального, хотя в то же время словам „до“ и „после“ они приписывают немало реальности. Подобно тому как истинное понятие места и пространства содержит в себе больше чем последовательность сосуществующих явлений, так и истинное понятие времени содержит в себе больше чем последовательность явлений, происходящих одно после другого; правда, я готов признать, что эти понятия возникли у нас первоначально именно отсюда.

ПРИМЕЧАНИЕ I

129. После того как мы выяснили значение непроницаемости, я бы не поколебался признать в ней сущность тел; это может показаться безрассудным, так как почти все философы единогласно утверждают, что сущность вещей нам неизвестна. Конечно, я легко соглашаюсь с этим по отношению к специальным видам тел и я далек от мысли, что нам известна, скажем, сущность золота или серебра. Действительно, в чем бы мы ни полагали сущность золота, все таки неизвестно, присуща ли она золоту в любом его состоянии и не свойственна ли она также и другому телу, которое не является золотом; эта-то неизвестность и сведет на-нет наше утверждение.

Но когда речь идет о теле вообще, я подобного возражения не боюсь: ведь тому, кто вздумал бы отрицать, что сущность тел заключается в их непроницаемости, пришлось бы также отрицать или по меньшей мере сомневаться либо в том, что все тела непроницаемы, либо в том, что все непроницаемое представляет собой тело.

В самом деле, ни один философ не будет сомневаться в том, что сущностью всех тел следует признать то свойство, которое присуще всем телам. Но прежде всего наиболее достоверно, что все тела непроницаемы; ведь если бы нашлись такие вещи, которые обладали бы протяжением, а также и инерцией, т. е., будучи предоставлены самим себе, они оставались бы в покое или двигались равномерно и прямолинейно, но при этом эти вещи не обладали бы непроницаемостью, то их никто не причислил бы к телам; ведь не считают же телами тени или изображения, получаемые с помощью оптических приборов. С другой стороны, все то, что является непроницаемым, все обязательно имеет протяжение и обладает инерцией. В самом деле, непроницаемости нельзя себе представить без протяжения. Наконец вещь, обладающая непроницаемостью, не может не быть подвижной, а раз мы допускаем подвижность, то значит, мы должны допустить и инерцию.

Таким образом то, что является непроницаемым, можно с полным основанием считать телом.

ПРИМЕЧАНИЕ 2

130. Более серьезное возражение против изложенного мнения может быть основано на том, что мы не в состоянии постичь сущности непроницаемости, так как последняя по самому своему смыслу необходимо должна охватить много тел. В данном случае я легко соглашаюсь, что определение, согласно которому тело считается непроницаемой субстанцией, не соответствует правилам философского рассуждения: не потому, что мы неправильно сущность тел полагаем в их непроницаемости, а по той причине, что этого определения нельзя понять, если раньше того не дано понятия о теле.

Если бы кто-нибудь спросил, что такое непроницаемая субстанция, и на это ответили бы, что она представляет собой нечто такое, сквозь что не могут проникнуть тела, т. е. другие непроницаемые субстанции, то, конечно, этим вопрос совершенно не был бы разрешен. Но хотя мы это свойство узнаем только из взаимного сравнения тел, однако нет никакого сомнения в том, что основа непроницаемости заложена в некотором внутреннем свойстве каждого тела, так что все тела обладают некоторым определенным свойством, в силу которого они и непроницаемы друг для друга. Это свойство будет, пожалуй, уместно назвать „твердостью“. Благодаря этой твердости создается как бы некоторая материальность, которую с полным основанием и можно было бы принять за сущность тел.

Я, конечно, признаю, что это равносильно тому, как если бы я сказал, что сущность тел заключается в их „телесности“. Тем не менее непроницаемость нас приводит к первоисточнику всех сил, а это чего-нибудь да стоит.

Поэтому на данном вопросе следует остановиться подробнее.

ТЕОРЕМА 2

131. *Если два тела сходятся таким образом, что ни одно из них не может сохранить своего состояния, а равно ни одно из них не может пройти сквозь другое, то они воздействуют друг на друга и вызывают силы, вследствие которых их состояние изменяется.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Так как, согласно условию, тела находятся в таком состоянии, что они могут сохранить последнее лишь в том случае, если они проникнут одно сквозь другое, то ввиду совершенной невозможности подобного взаимного проникновения необходимо должно произойти изменение их состояния. Так как, далее, состояние тел не может изменяться при отсутствии внешних сил, а в предположенном случае подобное изменение произойдет, то, без сомнения, должны существовать силы, которым и следует приписать это действие. Тогда встают следующие вопросы: откуда возникают эти силы? Возникают ли они из непроницаемости или из чего-либо другого? Если допустить,

что они произошли из чего-либо иного, то их возникновения, по крайней мере мысленно, можно было бы избежать, и тогда получилось бы, что при наличии непроницаемости не наступило бы никакого изменения состояния и, следовательно, тела должны были бы пройти одно сквозь другое. Так как последнее противоречит условию, то остается принять, что рассматриваемые силы вызваны непроницаемостью.

Итак, в тех случаях, когда тела, не проникая одно сквозь другое, лишены возможности сохранить свое состояние, силы как раз и порождаются непроницаемостью. Вследствие же сил изменяется состояние тел. Таким образом проникновения не происходит. Когда же эти силы проявляют свое действие, то говорят, что тела действуют друг на друга и одно из них изменяет состояние другого.

С л е д с т в и е 1

132. Следовательно, тела действуют друг на друга в том случае, когда они сходятся так, что каждое из них в отдельности не может сохранить своего состояния, не проходя сквозь другое тело. Отсюда можно вывести определенное понятие о действии тел, которое у большинства авторов обычно является очень неясным.

С л е д с т в и е 2

133. Силы, изменяющие в этом случае состояние тел, порождаются непроницаемостью этих последних; в результате их действия, между прочим, проникно-

вление предотвращается; эти силы всегда имеют такой размер, что их бывает вполне достаточно для осуществления указанной цели.

Следствие 3

134. Размер этих сил определяется, следовательно, не по непроницаемости, которая, конечно, несоизмерима с какой-либо величиной, а по изменению состояния, в результате чего и получается, что тела друг в друга не проникают.

Следствие 4

135. Таким образом эти силы, проистекающие из непроницаемости, возникают лишь настолько, насколько это необходимо для предотвращения проникновения; как бы ни велики были необходимые для этого силы, непроницаемость всегда порождает их в необходимом размере, так как проникновение никоим образом не может быть осуществлено.

Пояснение 1

136. Если какое-нибудь тело, находящееся в состоянии покоя или движущееся равномерно и прямолинейно, выводится из этого состояния другими телами, то непроницаемость этого тела, а равно тел, на него влияющих, порождает силы, необходимые для изменения состояния. В самом деле, если бы данное тело или влияющие на него тела были проницаемы, то не было бы нужды в каких-либо силах; следовательно, последние порождаются не непроницаемостью

одного лишь тела, а двух или большего числа тел совместно. Непроницаемость, очевидно, нельзя себе представить без наличия непреодолимого сопротивления, и потому-то о полном основании мы и считаем ее источником тех сил, которые предотвращают проникновение.

Все изложенное до сих пор приводит нас к выводу, что тела в силу свойственной им инерции сохраняют свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до того момента, пока не возникнет какой-либо угрозы проникновения. Но как только они теряют возможность сохранить свое состояние, — без того, чтобы произошло проникновение, — непроницаемость вызывает столь большие силы, что последние изменяют состояние тел в такой мере, какая необходима для избежания проникновения. А так как мир заполнен телами, состояние которых столь различно, что если бы хотя одно из них могло в течение самого малого промежутка времени сохранить свое состояние, то повсюду произошло бы проникновение, — здесь образуется богатейший источник сил, способных непрерывно изменять состояние тел.

Хотя, таким образом, мы допускаем существование во вселенной как бы бесконечного источника сил, возникающих из тел, тем не менее мы совершенно не согласны с мнением тех, которые приписывают телам стремление к постоянному изменению своего состояния; ведь эти силы не стремятся прямо

изменить состояние тел, — они стремятся только предотвратить взаимное проникновение тел. Если бы этого стремления не существовало, в мире совершенно не было бы подобных сил.

Пояснение 2

137. Тогда здесь возникает вопрос, обязаны ли этому источнику своим происхождением все без исключения силы, действию которых в мире мы изумляемся? Не может ли состояние тел быть изменено какими-либо другими силами, кроме тех, которые порождаются угрозой проникновения?

Прежде всего в задачи механики не входит решать, могут ли духи влиять на тела и изменять их состояние. Правда, в самих телах мы не находим ничего такого, что бы указывало на невозможность действия духов. Однако воздействие на тела не представляется столь тяжелым делом, чтобы его следовало приписать только всемогуществу божественной воли, так как его приходится присвоить самым обычным телам. Скорее мы должны признать, что мы не видим никаких оснований оспаривать у духов их силу воздействия на тела, хотя мы совершенно не в состоянии указать, каким именно образом они действуют.

Очевидно, однако, нужно возражать против того, что тела способны действовать друг на друга иначе, чем это нами было указано выше. В самом деле, если бы они действовали друг на друга и в том случае,

когда не существует никакой опасности проникновения, то они бы действовали друг на друга на расстоянии, и тогда было бы неясно, как этим путем может быть нарушено сохранение состояния. Далее, так как это влияние имело бы своим источником не непроницаемость, то силы должны были бы действовать совершенно одинаково и тогда, когда тела были бы проницаемы; но в таком случае неясно, в чем бы тогда проявлялось действие силы. Поэтому представляется в высшей степени вероятным, что тела не проявляют по отношению друг к другу никаких других сил, кроме тех, которые необходимы для предотвращения проникновения, и если эти силы не могут быть меньше тех сил, какие требуются для настоящей цели, то они также не могут превышать тех сил, которые являются достаточными для этой цели.

Вообще говоря, мы не утверждаем здесь чего-либо определенного, но нужно довольствоваться тем, что найден богатый источник действующих в мире сил. Вместе с тем совершенно ясно, что отсюда происходит и взаимное действие тел, которое многие философы либо совершенно отрицали, либо оставляли в полном мраке.

В каком размере и в каком случае эти силы возникают из непроницаемости и каким образом они изменяют состояние тел, — этого мы не можем определить, раньше чем произведем общее исследование действия сил.

ПРИМЕЧАНИЕ

138. Рассмотрев, таким образом, источник происхождения сил, мы можем с полным основанием считать, что в мире существуют силы, под действием которых состояние тел изменяется. В какой мере подобные силы, действующие на тела, друг друга Уравновешивают, это обычно исследуется в статике или в динамике, где путем их измерения определяют, что отдельные силы не только бывают больше или меньше других сил, но что силы находятся между собой в определенном численном отношении. очевидно, силы следует отнести к категории величин, так как они, как всякая величина, могут быть сравниваемы друг с другом: из статики мы знаем, в каких случаях две силы можно считать равными или находящимися в определенном заданном отношении.

Для того чтобы легче изучить их действие в смысле изменения состояния тел, нам представляется целесообразным не только исходить из рассмотрения бесконечно малых частиц, на которые действуют силы, — как это мы вообще делаем при исследовании движения, — но мы будем также исследовать мгновенное действие сил: мы определим, какое действие производят силы за отдельные элементы времени, так как может случиться, что с течением времени величина сил изменится. Установив принципы для бесконечно малых тел и за бесконечно малый промежуток времени, можно будет без труда путем

интегрирования перейти к движению тел, изменяющемуся в течение конечного промежутка времени.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14

139. Действием какой-либо силы, произведенным над заданным тельцем за малый промежуток времени, называется тот отрезочек пути, на который тельце, находящееся в покое, перемещается или на который движущееся тельце смещается в сторону от пути, который оно прошло бы в силу своей инерции [54].

Следствие 1

140. Настоящее определение действия не является абсолютным; оно связано с определенным телом и определенным временем, причем и то и другое предполагается бесконечно малым. Всякое другое изменение, могущее откуда-либо присоединиться к этому, считается исключенным.

Следствие 2

141. Следовательно, если при заданном тельце и промежуточке времени отрезочек пути остается одним и тем же, то это будет означать, что действие сил будет также одно и то же, а потому и силы следует считать равными. Это будет верно как в случае покоящегося, так и в случае движущегося тельца.

Следствие 3

142. В том случае, когда тельце движется, величина силы измеряется тем отрезочком пути, на который оно смещается в сторону от того пути, который оно прошло бы в результате движения, имевшегося у него уже до того.

Пояснение 1

143. В статике, откуда мы заимствуем измерение сил, тела, к которым приложены силы, предполагаются находящимися в состоянии покоя, поэтому отсюда ничего нельзя извлечь для измерения сил, действующих на движущиеся тела, так что измерение сил в механике является для нас совершенно новым.

Представим себе прежде всего точку, т. е. тельце, находящееся в покое в S (рис. 10), и пусть на него действует некоторая сила, равная p , в направлении $S\sigma$. Тогда действие силы проявится в том, что за данный промежуток времени dt точка пройдет некоторый отрезочек пути

$S — \sigma$

Рис. 10.

$$S\sigma = d\omega.$$

Каким образом этот отрезочек связан с силой p и с промежуточком времени dt , это мы установим позднее. Отмечу лишь здесь, что если бы наше тельце находилось в движении, при котором оно за промежуток времени dt прошло бы путь Ss (рис. 11), равный ds , то мы должны были бы считать,

что на него действует такая же сила, равная p , если за тот же промежуток времени dt оно сместилось бы от s на отрезочек.

$$s\sigma = d\omega.$$

При этом мы предполагаем, что сила p действует на тело в направлении движения Ss .

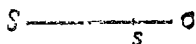


Рис. 11.

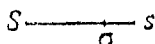


Рис. 12.

Если же сила имеет противоположное направление и если бы под ее влиянием тельце за тот же промежуток времени dt сместилось назад на такой же отрезочек $s\sigma$ (рис. 12), равный $d\omega$, то эту силу следовало бы считать равной прежней, т. е. равной p .

В общем случае, если тельце находится в таком движении, при котором за промежуток времени dt проходит путь Ss (рис. 13), равный ds , и если на это тельце действует сила в направлении SV , то в результате этого тельце по истечении времени dt будет находиться не в s , а в σ ; можно считать,

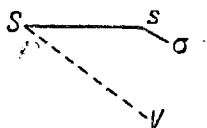


Рис. 13.

что тельце как бы переместилось из s в σ на отрезочек пути $s\sigma$ параллельно направлению силы, хотя в действительности в результате непрерывного действия силы оно, конечно, переместилось из S в σ по прямой линии; и, наконец, силу SV можно считать

равной упомянутой выше силе p , действовавшей на покоящееся тельце в том и только в том случае, если рассматриваемый отрезочек $s\sigma$ равен указанному выше (рис. 10) пути $S\sigma$.

Пояснение 2

144. Для сил, действующих на тела, находящиеся уже в движении, мы даем такое правило их измерения, что считаем их равными тем силам, которые на те же самые тела, находящиеся в покое, за такое же время производят одинаковое действие. Этот прием не требует доказательства, так как он основан на определении, установление которого зависело от нашего свободного выбора. Следовательно, если при любом движении отрезочки пути $s\sigma$ (рис. 11, 12 и 13) оказываются равными отрезочку пути $S\sigma$, на который переместилось за такой же промежуток времени находившееся в покое тельце под влиянием силы p , то силы, действующие в первом случае, мы принимаем равными последней; мы тем меньше можем быть ограничены в свободе такого обозначения, совпадающего с приведенным выше правилом, что это обозначение находится в соответствии с общепринятым способом выражения.

Однако я не утверждаю, что одни и те же воздействия, наблюдаемые нами в мире, порождают в определенном теле одни и те же результаты, независимо от того, находится ли последнее в покое или в движении; я безусловно признаю, что одно и то

же тело совершенно по-разному приводится в движение рекой, в зависимости от того, находится ли оно в покое или в движении. Но как раз этот пример прекрасно подтверждает наше правило, согласно которому мы измеряем силы: в самом деле, утверждая, что одно и то же тело будет приводиться в движение рекой различно, в зависимости от того, находится ли оно в покое или в движении, мы тем самым познаем неравные силы, и в случае движущегося тела мы силу признаем в точности равной той силе, которая дала бы такое же действие над покоящимся телом. Следовательно, когда речь идет о телах, движущихся в реке, в этом случае для каждой степени скорости точно определяется та сила, с которой река фактически воздействует на тело, и эта сила всегда принимается равной той силе, которая произвела бы такое же действие на это тело, если бы последнее находилось в состоянии покоя.

Поэтому приведенное в предыдущих частях механики деление сил на абсолютные и относительные, не имеет собственно сюда отношения, так как здесь приходится в каждом отдельном случае и для каждого момента времени вводить в расчет ту силу, которая воздействует на движущееся тело совершенно так же, как на покоящееся тело. При рассмотрении самих сил в высшей степени важно знать, действуют ли они на движущиеся тела совершенно так же, как на покоящиеся, или же нет.

П Р И М Е Ч А Н И Е

145. Итак, что касается величины сил, действующих на движущиеся тельца, то она определяется по их действию, т. е. по указанному в определении отрезочку пути, совершенно так же, как если бы эти тельца находились в покое.

Если тельце, находящееся в покое в S (рис. 10) под действием силы, равной p , за промежуток времени, равный dt , перемещается на отрезочек пути $S\sigma = d\omega$, то мы будем считать, что то же самое тельце, находящееся в таком движении, при котором оно само по себе за промежуток времени dt прошло бы путь $Ss = ds$ (рис. 11, 12 и 13), находится под влиянием такой же силы p , если оно еще переместится в сторону от пути на такой же отрезочек $s\sigma = d\omega$ по направлению силы; таким образом движение тельца нисколько не изменяет действия силы.

Но если отрезочек пути $s\sigma$ (рис. 11, 12 и 13) больше или меньше отрезочка $S\sigma = d\omega$ (рис. 10), то мы считаем, что наше тельце находится под действием соответственно большей или меньшей силы. Поэтому, если мы в состоянии определить действие каких-либо сил на покоящиеся тельца, то мы имеем возможность определить и действие любых сил на движущиеся тельца, если только в каждом отдельном случае мы правильно определим силы, действующие на движущиеся тельца. Здесь всегда следует придерживаться того правила, что движущееся тельце должно счи-

таться находящимся под действием силы, равной p , если произведенное над ним действие равно тому, какое было бы произведено этой силой за такой же промежуток времени над тем же самым тельцем, находящимся в состоянии покоя.

Посмотрим теперь, каков будет отрезочек пути

$$S\sigma = d\omega,$$

проходимый тельцем, которое раньше покоилось и на которое действуют различные силы. Способ сравнения этих сил излагается в статике.

ТЕОРЕМА 2а

146. *Определенное тельце, находящееся в состоянии покоя, под действием различных сил в течение определенного промежутка времени dt пройдет отрезочки пути, пропорциональные этим силам.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Положим, что под влиянием силы, равной p , тельце за промежуток времени, равный dt , переместится на отрезочек, равный $d\omega$. Пусть, далее, на него одновременно действует в том же направлении и вторая такая же сила, равная p . Тогда под влиянием последней тельце переместится на такой же отрезочек, равный $d\omega$, так как последнее действие нисколько не будет нарушено первым, вызывающим лишь бесконечно малое движение. Таким образом тельце, находящееся под действием силы, равной $2p$, перемес-

тится за промежуток времени, равной dt , на отрезок, равный $2d\omega$.

Равным образом, если на одно покоящееся тельце в одном направлении одновременно действует n сил, из которых каждая порознь равна p , то последние переместят тельце на отрезок, равный $n d\omega$, — какое выражение и представит действие силы, равной np .

С л е д с т в и е 1

147. Следовательно, если одно тельце находится под действием силы, равной p , а другое такое же тельце — под действием силы, равной P , и если за промежуток времени, равный dt , они переместились соответственно на отрезочки $d\omega$ и $d\Omega$, то

$$d\omega : d\Omega = p : P.$$

С л е д с т в и е 2

148. Таким образом произведенные за известный промежуток времени действия пропорциональны силам. При этом мы применяем ту самую меру сил, о которой говорится в статике.

П р и м е ч а н и е 1

149. Приведенное выше доказательство основывается на том, что силы предполагаются действующими лишь в течение бесконечно малого промежутка времени, так что тельце имеет лишь столь бесконечно малое движение, что его можно принять равным нулю. Хотя и может случиться, что тот же самый

толчок, который при покоящемся тельце указывает на силу, равную p , в случае движущегося тельца укажет на другую силу, но это исключение к нашей теореме не имеет отношения. Мы можем представить себе, что на тельце действует несколько сил, как бы поочередно одна за другой, и каждая из этих сил равна p . В таком случае каждая из этих сил в отдельности произведет на тельце такое же действие, как если бы это тельце находилось в покое; при этом бесконечно малое движение ни в малейшей степени не изменит действия сил. Но эта последовательность действия сил, которую мы допустили только мысленно, должна быть совершенно устранена, так чтобы можно было считать, что вся сила действует лишь в течение бесконечно малого промежутка времени dt .

ПРИМЕЧАНИЕ 2

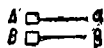
150. Если поставить вопрос, почему определенная сила p вызывает в данном тельце в течение промежутка времени dt определенное действие $d\omega$, то причина этого заключается в том, что тельце обладает некоторой определенной способностью к сохранению покоя, что и составляет его инерцию. Но подобную способность сохранять состояние покоя мы не можем себе представить без известного сопротивления, противодействующего возникновению движения, и чем последнее будет больше или меньше, тем труднее или легче проявиться действию силы.

Так как указанная способность связана с инерцией, то ясно, что последнюю следует отнести к числу величин, так что инерция различных тел может быть различна в зависимости от их размеров. Этого различия мы до сих пор не учитывали: мы исследовали лишь действие сил на одно и то же тельце или же на равные тельца, обладающие, стало быть, равной инерцией. Теперь же мы перейдем к рассмотрению различных тел, что приведет нас к измерению инерции и покажет нам, каким образом в одном теле может быть большая, а в другом — меньшая инерция.

ТЕОРЕМА 3

151. Если на различные покоящиеся тельца действуют одинаковые силы, то действия этих сил за один и тот же промежуток времени обратно пропорциональны инерции этих тел.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



Представим себе покоящееся тельце A (рис. 14), которое под действием силы, равной p , за промежуток времени dt , перемещается на отрезок

$$Aa = d\omega.$$

Другое тельце B , равное первому, влекомое в том же направлении такой же силой p , за тот же промежуток времени dt переместится на такой же отрезок

$$B\beta = d\omega.$$

Пусть теперь эти два тельца срастутся в одно, которое, очевидно, под действием силы, равной $2p$, переместится за промежуток времени, равный dt , на тот же отрезочек $d\omega$. Таким образом удвоенная сила произведет над удвоенным тельцем такое же действие, как единичная сила над единичным тельцем.

Отсюда понятно, что если n телец A срастутся в одно тельце, которое станет nA , и последнее окажется под действием силы, равной np , то оно за промежуток времени, равный dt , переместится на отрезочек, равный $d\omega$.

Если тельце nA под действием силы, равной np , за промежуток времени dt переместится на отрезочек, равный $d\omega$, то, согласно предыдущей теореме, то же тельце nA под действием силы, равной p , за промежуток времени dt переместится на отрезочек, равный $\frac{d\omega}{n}$. Равным образом тельце mA сместится под действием той же силы, равной p , за промежуток времени dt на отрезочек $\frac{d\omega}{m}$. Отсюда следует, что отрезочки пути, при помощи которых мы измеряем действия сил, т. е. $\frac{d\omega}{n}$ и $\frac{d\omega}{m}$, находятся друг к другу в отношении, обратном отношению телец nA и mA , т. е. они обратно пропорциональны инерции этих телец.

Пояснение

152. Так как тельце A имеет определенную инерцию, от которой и зависит действие на него силы,

то два таких тельца, соединенные вместе, представляют собой одно тельце, обладающее удвоенной инерцией, три тельца — утроенной инерцией и т. д.

Обратно, тельце следует считать обладающим удвоенной инерцией, если для его перемещения на данный отрезочек и за данный промежуток времени требуется удвоенная сила.

Отсюда ясно, в каком смысле инерцию можно считать величиной и каким образом в одном теле она может быть большей, а в другом меньшей. А именно, все тельца, перемещающиеся за равные промежутки времени под действием одинаковых сил на равные отрезочки пути, мы считаем, в отношении их инерции, равными друг другу, и из соединения подобных телец могут образоваться какие угодно тела, инерции которых находятся в любом соотношении друг с другом.

Таким образом при определении действия силы очень большое значение имеет величина инерции, вследствие чего в механике ее необходимо особенно внимательно исследовать.

А так как эта величина в настоящей науке вводится обычно под особыми наименованиями, то представляется целесообразным посвятить ей отдельное определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15

153. *Массой тела, или количеством материи, называется величина заключенной в теле инерции, вследствие которой тело стремится сохранить*

свое состояние и противодействовать всякому его изменению.

Следствие 1

154. Массу тела, т. е. количество материи, следует определять не по объему тела, а по величине его инерции, в силу которой оно стремится сохранить свое состояние и противодействует всякому его изменению.

Следствие 2

155. Таким образом о количестве материи судят по инерции. Содержащим в себе больше материи считают не то тело, которое занимает больший объем, а то тело, для смещения которого при данных условиях требуется большая сила.

Следствие 3

156. Предыдущая теорема приводит, следовательно, к тому, что если два покоящихся тела, массы которых равны A и B , приводятся в движение двумя равными силами, то отрезочки пути, которые они проходят за один и тот же промежуток времени, находятся между собой в обратном отношении к их массам.

Примечание

157. Рассмотрение движения привело нас, таким образом, к познанию многих замечательных свойств тел, из которых первым является их инерция, в силу которой они стремятся сохранить свое абсолютное

состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. Сначала мы познакомились с инерцией лишь в общем виде, а теперь для нас становится совершенно ясным, что инерция представляет собой некоторую величину и поддается измерению и что этим путем точно определяется то, что обычно в общезнании слишком неопределенно выражают словами „масса“, или „количество материи“; об этом мы теперь, как будто, составили себе вполне определенное понятие.

Таким образом в телах, помимо их протяжения, содержится еще нечто, что как бы составляет их сущность [55], а именно инерция или масса, которая представляется связанной с твердостью или непроницаемостью, так как никак нельзя себе представить что, кроме материи, могло бы быть непроницаемым.

Материю нельзя себе никак представить также и без протяжения, но в то же время совершенно необязательно, чтобы материя была связана с объемом таким образом, что тела равного объема содержат в себе равные массы, т. е. равные количества материи. В пользу подобного равенства нет ни одного довода, а если мы привлечем на помощь опыт, то найдем, что при наличии тел равного объема в одном может заключаться больше материи, а в другом — меньше.

Правда, на это обычно возражают либо то, что не весь объем заполнен материей, либо то, что содержащаяся в порах материя не принадлежит телу,

однако этим еще ни в коем случае не доказывається, что все равные по своему размеру частицы тел обладают и равной инерцией.

Впрочем, этот особенно трудный вопрос не имеет собственно сюда отношения, хотя и представляется вероятным, что в мире существуют по меньшей мере два вида материи, причем один из них при равном объеме обладает гораздо большей массой, чем другой [56].

ТЕОРЕМА 4

158. Если два тельца, неравных по своей массе, находятся в покое и каждое из них подпадает под действие какой-либо силы, то отрезочки пути, на которые эти тела смещаются в равные промежуточки времени, прямо пропорциональны силам и обратно пропорциональны массам.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть находящееся в покое тельце, масса которого равна A , приводится в движение силой, равной p , и за промежуток времени dt перемещается на отрезочек, равный $d\omega$. Если бы то же самое тельце A было приведено в движение другой силой, равной q , то отрезочек пути, пройденный им за тот же промежуток времени, согласно теореме 2а, равнялся бы $\frac{q d\omega}{p}$. Но если другое находящееся в покое тельце, масса которого, равная B , приводится в движение силой, равной q , то оно, согласно теореме 3,

проходит за тот же промежуток времени отрезочек пути, равный $\frac{Aq d\omega}{Bp}$. Следовательно, если находящиеся в покое тельца A и B приводятся в движение соответственно силами p и q , то пройденные ими за один и тот же промежуток времени dt отрезочки пути относятся друг к другу как $d\omega$ к $\frac{Aq d\omega}{Bp}$, т. е. как $\frac{p}{A}$ к $\frac{q}{B}$.

Следствие 1

159. Следовательно, если известен отрезочек пути $d\omega$, проходимый за промежуток времени dt тельцем, масса которого равна A , под действием силы, равной p , то для величины пути, проходимого другим тельцем с массой, равной B , за тот же промежуток времени dt под действием силы, равной q , получается значение, равное $\frac{Aq d\omega}{Bp}$.

Следствие 2

160. Таким образом, если мы все величины будем выражать отвлеченными числами, то отрезочек пути, проходимый тельцем за промежуток времени dt под действием силы, пропорционален силе, разделенной на массу тельца; это положение справедливо и для тельца, находящегося в движении, если только надлежащим образом вести наблюдение, о чем мы уже говорили выше.

ПРИМЕЧАНИЕ

161. Таким образом действие сил, влияющих на какое-либо тельце, зависит от величины силы и от массы тельца — при условии, конечно, что промежуток времени остается неизменным. Это мы определили таким образом, что не остается никакого сомнения в безусловной истинности изложенного здесь правила.

Мы здесь нашли только соотношение между отрезочками пути, силами и массами, и следует заметить, что никакого абсолютного определения для такого рода разнородных величин провести невозможно. Здесь можно получить отвлеченные меры, только приняв какое-либо наблюдаемое в мире действие за известное, все же остальные действия сводя к нему как к единице. Как это может быть наиболее удобно сделано, это мы подробно покажем позднее.

В тех случаях, когда промежуточки времени неравны между собой, тогда на основании изложенного нельзя сказать, каково будет действие сил. Точно так же не следует переходить от одного уже истекшего промежуточка времени dt к следующему промежуточку dt , так как вследствие движения, сообщенного ему в течение первого промежуточка времени, тельце уже вследствие инерции пройдет в течение второго промежуточка времени некоторый отрезочек пути, который следует прибавить к перемещению, происшедшему под действием силы,

Для того чтобы приведенные раньше определения, несмотря на это, сохраняли свое значение, мы должны принять все эти промежуточки времени равными друг другу. Кроме того, нельзя принимать в расчет времени, если не принимать во внимание скорости, уже раньше сообщенной телу.

Этим мы и займемся в следующей задаче. После этого станет яснее все то, что мы до сих пор излагали, не принимая во внимание скорости [57].

ЗАДАЧА 9

162. Тельце, двигаясь с некоторой скоростью, подпадает под действие силы в направлении своего движения. Определить мгновенное изменение, вызванное в его движении и скорости.

РЕШЕНИЕ

Пусть A — масса тельца, движущегося по направлению AB (рис. 15) со скоростью, равной v , с которой оно постоянно и продолжало бы двигаться равномерно и прямолинейно, если бы на него не действовала внешняя сила. Следовательно, если тельце за время, равное dt , прошло путь $AS = s$ и после этого за промежуток времени dt оно проходит отрезочек $Ss = ds$, то скорость его в S будет равна

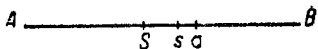


Рис. 15.

$$v = \frac{ds}{dt},$$

и так как при отсутствии какой-либо силы эта скорость должна быть постоянной, то

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 0.$$

Теперь предположим, что тельце в момент выхода из S подпадает под действие силы, равной p , направленной вдоль SB . Ясно, что тогда его движение уже перестанет быть равномерным, а будет ускоренным, и потому

$$\frac{d^2s}{dt^2}$$

уже не будет равно нулю, а получит некоторое положительное значение, так как действующая на тельце сила увеличивает его скорость, не меняя направления движения. Но так как величина $\frac{d^2s}{dt^2}$ выражает собой тот отрезочек пути, на который тельце перемещается сверх того расстояния, которое пройдено им в силу бывшего у него раньше движения, то оно должно быть прямо пропорционально силе p и обратно пропорционально массе A , т. е. $\frac{d^2s}{dt^2}$ должно быть пропорционально $\frac{p}{A}$.

Полное равенство мы сможем здесь установить только в том случае, если все величины будут выражены в определенных единицах. Пока мы можем составить неопределенного вида уравнение

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A},$$

где λ обозначает число, которое будет определено дальше при установлении единиц.

Итак, действие силы p будет состоять в том, что

$$d^2s = \frac{\lambda p dt^2}{A},$$

де элемент dt мы считаем постоянным. А так как

$$\frac{ds}{dt} = v$$

будет скорость, то

$$d^2s = dv dt,$$

и, следовательно, мы получим

$$dv = \frac{\lambda p dt}{A}.$$

Таким образом нами найдено приращение скорости, которое сила p сообщает в течение промежутка времени dt тельцу A , — при условии, конечно, что направление силы совпадает с направлением движения и что сила ускоряет движение.

С л е д с т в и е 1

163. Итак, если тельце с массой, равной A , движется со скоростью, равной v , так что за промежуток времени dt оно прошло бы отрезочек, равный ds , то действие силы, имеющей то же направление, что и движение, будет состоять в том, что

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A}$$

или

$$dv = \frac{\lambda p dt}{A},$$

где элемент времени dt принят постоянным.

С л е д с т в и е 2

164. Наоборот, если известно ускорение движения, равное $\frac{d^2s}{dt^2}$ или $\frac{dv}{dt}$, то можно определить действующую силу, вызывающую это ускорение. А именно эта сила будет равна

$$p = \frac{A}{\lambda} \cdot \frac{d^2s}{dt^2}$$

или, иначе,

$$p = \frac{A}{\lambda} \cdot \frac{dv}{dt}.$$

При этом предполагается, что сила действует в направлении движения.

С л е д с т в и е 3

165. В том случае, если направление действующей силы противоположно направлению движения, последнее в такой же мере будет замедляться этой силой, и потому мы будем иметь

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{\lambda p}{A}$$

или

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\lambda p}{A}.$$

Следовательно, по сравнению с предыдущим случаем, силу можно рассматривать как величину отрицательную.

П о я с н е н и е

166. Мы нашли здесь, что

$$d^2s = \frac{\lambda p dt^2}{A},$$

и потому следует считать, что тельце за промежуток времени dt пройдет отрезочек пути $ds + d^2s$, между тем как в силу свойственного ему самому движения оно прошло бы только отрезочек ds .

Таким образом d^2s является тем отрезочком, который тело проходит под действием силы, — сверх пути, проходимого им в силу свойственного ему движения, — так что величина

$$\frac{\lambda p dt^2}{A}$$

должна быть пропорциональна тому отрезочку $d\omega$, который, как это мы говорили выше, тельце A должно пройти за промежуток времени dt под действием силы p , если оно до того находилось в покое.

Следует отметить, что d^2s выражает собой избыток отрезочка пути, пройденного за промежуток времени dt , над отрезочком, пройденным в предшествующий такой же промежуток времени dt , — если действующая сила p постоянна.

Если отрезочек пути, пройденный за настоящий промежуток времени, равен $ds + d\omega$, где ds обозначает отрезочек, который проходит тельцем вследствие движения, свойственного ему как таковому, а $d\omega$ — отрезочек пути, прибавляющийся в результате действия силы p , то за предшествующий промежуток времени, если только считать, что на тело действовала та же сила, должен был быть пройден путь $ds - d\omega$, т. е. путь меньший, чем

если бы тело совершенно не подвергалось никакому воздействию.

Если d^2s выражает разность между этими двумя отрезочками, т. е. между $ds + d\omega$ и $ds - d\omega$, то мы получим

$$d^2s = 2 d\omega,$$

откуда

$$d\omega = \frac{1}{2} d^2s = \frac{\lambda p dt^2}{2A}.$$

Отсюда следует, что отрезочек $d\omega$, который тельце, ранее находившееся в покое, проходит под действием силы p в течение промежутка времени dt , составляет половину нашей величины d^2s . При решении задачи, впрочем, я эту величину принял не равной, а только пропорциональной, в силу чего, надо полагать, решение несколько не делается менее правильным.

Однако данный вопрос стоит того, чтобы его исследовать еще и другим способом.

ЗАДАЧА 10

167. Дано ускорение, которое сообщается за промежуток времени dt движущемуся тельцу A силой p , действующей в направлении движения. Определить отрезочек пути $d\omega$, который за то же время dt прошло бы под влиянием той же силы тельце A , если бы оно до того находилось в покое.

РЕШЕНИЕ

Так как ускорение дано, то на основании изложенного выше мы имеем

$$d^2s = \frac{\lambda p dt^2}{A},$$

где элемент времени dt рассматривается как постоянная величина.

Представим себе теперь, что действующая сила остается одной и той же, независимо от того, движется ли тельце быстрее или медленнее, так что мы можем рассматривать величину p как постоянную. Определим движение в течение времени t , которое, однако, само по себе пусть будет бесконечно мало, — с тем чтобы не было никаких сомнений в том, что в течение этого времени сила p оставалась постоянной. Так как

$$d \frac{ds}{dt} = \frac{\lambda p dt}{A},$$

то путем интегрирования мы получаем

$$\frac{ds}{dt} = C + \frac{\lambda p t}{A}$$

или

$$ds = C dt + \frac{\lambda p t dt}{A},$$

что после повторного интегрирования дает

$$s = Ct + \frac{\lambda p t^2}{2A}.$$

Таков путь, пройденный тельцем за время t , причем здесь Ct обозначает путь, который оно прошло

бы в результате присущего ему движения, а $\frac{\lambda p t^2}{2A}$ обозначает приращение пути, полученное последним под действием силы.

Если мы теперь весь промежуток времени t примем за бесконечно малый и обозначим его dt вместо t , то $\frac{\lambda p dt^2}{2A}$ будет выражать собой отрезочек пути $d\omega$, на который сместилось бы тельце A за промежуток времени dt под влиянием силы p — сверх того пути, который оно прошло бы в силу присущего ему самому движения. Но это и будет равно тому отрезочку пути $d\omega$, на который сместится покоившееся до того тельце A за тот же промежуток времени dt под действием силы p .

Мы имеем, следовательно,

$$d\omega = \frac{\lambda p dt^2}{2A}$$

или

$$d\omega = \frac{1}{2} d^2 s,$$

как это уже было выведено выше.

Следствие 1

168. Таким образом отрезочек пути, проходимый покоившимся до того телом A за бесконечно малый промежуток времени dt под действием силы p , представляет собой дифференциал второго порядка, т. е. он в бесконечно большое число раз меньше того пути, который тело прошло бы за тот же промежуток времени с какой-либо конечной скоростью.

Следствие 2

169. Этот отрезочек пути

$$d\omega = \frac{\lambda p dt^2}{2A}$$

равен половине дифференциала второго порядка d^2s , который был бы пройден за тот же промежуток времени dt под действием той же силы p тем же произвольно движущимся тельцем A .

Следствие 3

170. Из изложенного выше следует, что отрезочек пути $d\omega$, который, как раньше было показано, прямо пропорционален действующей силе p и обратно пропорционален массе тела A , сверх того прямо пропорционален квадрату промежутка времени dt .

Примечание

171. С помощью изложенного выше мы в состоянии определить действия сил на произвольно движущиеся тельца в том случае, если направление действующей силы совпадает с направлением движения или прямо ему противоположно. Остается еще исследовать, каковы будут эти действия, когда направление силы наклонно по отношению к направлению движения. Это исследование очень легко произвести, если в соответствии с изложенными раньше приемами разложить движение тела по двум или трем определенным направлениям. Хотя это разложение является только мысленным, оно вполне соответ-

ствуует действительности, и в то же время оно чрезвычайно удачно применяется к действию сил, благодаря чему вся задача разрешается с помощью той же самой формулы. И хотя под действием косо направленных сил изменяется не только скорость тельца, но и направление его движения, однако это последнее изменение одновременно содержится в изменении составляющих движений, так что не оказывается надобности в особых формулах для изменения направления.

Как в этих случаях следует построить вычисление, это мы сейчас покажем.

Задача 11

172. Тельце, двигаясь по направлению Ss (рис. 16) с данной скоростью, подвергается действию некоторой силы по направлению Sp . Определить действие этой силы на движение тела за данный промежуток времени dt .

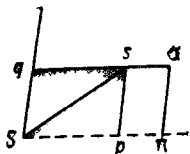


Рис. 16.

Решение

Пусть A — масса тельца, которое в силу присущего ему движения прошло бы за промежуток времени dt отрезочек пути $Ss = ds$; поэтому его скорость в S была бы равной $\frac{ds}{dt}$. Но пусть тельце в то же время подвергается действию силы, равной p ,

по направлению Sp . Действие силы проявится в том, что по истечении промежутка времени dt тело очутится не в S , а в σ , так что оно будет смещено на отрезочек пути

$$s\sigma = d\omega = \frac{\lambda p dt^2}{2A},$$

параллельный направлению силы Sp .

Для того чтобы было удобнее определить это действие, разложим движение по двум каким-либо направлениям Sp и Sq , из которых первое совпадает с направлением силы.

Если бы силы не было, то тельце прошло бы по направлению Sp отрезочек пути $Sp = dx$ и по направлению Sq — отрезочек пути $Sq = dy$, причем фигура $Spsq$ будет представлять собой полный параллелограм. Но так как с появлением силы p тело по истечении промежутка времени dt окажется в σ , то, проводя $s\pi$ параллельно sp , мы получим, что движение будет таким же, как если бы тело прошло по направлению Sp путь

$$S\pi = dx + d\omega,$$

а по направлению Sq , как и раньше, — путь Sq . Таким образом сила p влияет только на составляющее движение по направлению Sp , вдоль которого направлена сама сила p , а другое составляющее движение, вдоль Sq , остается без изменения. Движение вдоль Sp ускоряется таким образом, что

$$d^2x = 2 d\omega$$

или

$$d^2x = \frac{\lambda p dt^2}{A}.$$

Итак, если движение разложить по двум или трем направлениям, из которых одно совпадает с направлением силы, то только это последнее движение и испытает на себе действие силы, — совершенно так же, как если бы тельце фактически двигалось по этому направлению. Остальные же составляющие движения не испытают на себе никакого действия со стороны силы.

С л е д с т в и е 1

173. Если в том случае, когда никакой силы не было, мы при разложении движения имели

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

то при наличии силы p , действующей по направлению Sp , мы имеем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A}$$

и попрежнему

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

С л е д с т в и е 2

174. Точно так же, если движение вдоль Ss разложить на три составляющих движения и если пройденные за промежуток времени dt элементы равны

dx , dy и dz , из которых первый принят направленным параллельно действующей силе p , то движение выразится следующими тремя уравнениями:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

и

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

С л е д с т в и е 3

175. Если на тельце A одновременно действуют три силы p , q и r , по упомянутым выше трем направлениям, и если элементы соответственно равны dx , dy и dz , то движение тела определится с помощью следующих уравнений:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\lambda q}{A}$$

и

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\lambda r}{A}.$$

П р и м е ч а н и е 1

176. Если движение тельца разложено согласно сделанным нами выше указаниям по трем каким-либо определенным направлениям и на тельце действуют какие-либо силы, то изменение движения может быть легко определено с помощью подобных уравнений

А именно все действующие силы следует разложить по упомянутым трем направлениям, в результате чего получатся силы p , q и r ; пусть первая из них, p , действует по направлению OA (рис. 4), т. е. по тому направлению, в котором лежит элемент dx , вторая, q , — по направлению OB , в котором лежит элемент dy , и третья, r , — по направлению OC , в котором лежит элемент dz . И пусть отдельные силы стремятся ускорить движение вдоль этих направлений. Вследствие этого движение претерпит такого рода изменение, что, положив элемент времени dt постоянным, мы будем иметь

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\lambda q}{A},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\lambda r}{A}.$$

Здесь следует отметить, что если какая-либо из данных сил действует в противоположном направлении, то ее следует считать отрицательной, — тогда соответствующее ей составляющее движение будет замедляться.

Тремя уравнениями подобного вида может быть представлено изменение всяких движений, как бы ни действовали силы на тельце, а так как эти уравнения вполне сходны между собой, то можно даже считать, что вся механика основывается на одном единственном принципе.

ПРИМЕЧАНИЕ 2

177. Этот единый принцип охватывает и те аксиомы, которые мы изложили в предыдущей главе для спонтанного движения, т. е. для случая, когда силы отсутствуют. Действительно, в этом случае наши уравнения дают равномерное и прямолинейное движение.

Итак, основа всей механики заключается в следующем едином законе:

Если на тельце, масса которого равна A , действует сила, равная p , и если после разложения движения по направлению силы тельце за промежуток времени dt проходит отрезочек пути ds со скоростью $\frac{ds}{dt} = v$, то

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A},$$

или

$$dv = \frac{\lambda p dt}{A}.$$

Таким образом, приращение скорости, взятое по направлению действующей силы, прямо пропорционально произведению действующей силы на промежуток времени и обратно пропорционально массе тельца.

Обычно в связи с этим ставят вопрос, является ли этот единый принцип, — на котором строится вся механика, а значит, и вся наука о движении, —

необходимым или только случайным [58]. Решение этого вопроса на основе всего доказанного до сих пор не представляет труда. В самом деле, где бы тела ни находились в их движении, никакие иные законы, конечно, не могут иметь места, и всякие другие выражения, пропорциональные приращению скорости, отличные от $\frac{p \, dt}{A}$, приводили бы к явному противоречию. Поэтому совершенно не приходится сомневаться, что этот принцип должен быть отнесен к числу необходимых истин.

И не только по отношению к Земле, где правильность этого принципа может быть подтверждена на опытах, но и по отношению к планетам и другим небесным телам можно смело провозгласить, что все движения, какие только там могут иметь место, направляются и регулируются этим единым принципом.

Правда, вопрос о необходимости или случайности выдвигают обычно применительно не к рассматриваемому принципу, а по отношению к другим законам, известным под именем „законов движения“. Однако, поскольку эти законы строго вытекают из нашего принципа, их следует также считать необходимыми.

Что касается, далее, тех законов, которые связаны с определенными видами тел, как упругие, неупругие и жидкие тела, то, поскольку принимается существование подобных тел, эти законы равным образом не могут быть истинными, если только они правильно выведены из нашего принципа.

ПРИМЕЧАНИЕ 3

178. Хотя в предыдущих частях механики я уже установил принципы этой науки таким образом, что их правильность не вызвала никаких сомнений, тем не менее мне показалось целесообразным вывести их здесь иным путем из более углубленного изучения природы тел и свести их к единому принципу, из которого можно затем более легко вывести все, что относится к движению. Далее, хотя я уже там внимательно исследовал все, что относится к движению бесконечно малых тел или как бы точек, тем не менее будет полезно вкратце изложить, каким образом все это может быть выведено из этого единого принципа; при этом я поведу изложение таким образом, чтобы этим путем возможно ближе подойти к исследованию движения конечных тел.

Так как я здесь установил только отношение, т. е. пропорциональность различных величин, входящих в учение о движении и являющихся неоднородными по своей природе, а последние могут быть сведены к абсолютным мерам только при том условии, если какое-либо одно движение будет принято в качестве известного, — то, раньше чем идти дальше, представляется необходимым возможно тщательнее изучить какое-либо известное движение, например падение тяжелых тел, и отсюда вывести абсолютные меры, которыми мы затем сможем воспользоваться с большим удобством.

Хотя выбор движения зависит от нашего произвола и сводится к опыту, тем не менее этим несколько не ослабляется необходимый характер нашего принципа, так как момент произвольности сказывается только на абсолютных мерах, которые зависят от известных единиц, выбранных совершенно произвольно.



Глава IV

ОБ АБСОЛЮТНЫХ МЕРАХ, ВЫВЕДЕННЫХ ИЗ ПАДЕНИЯ ТЯЖЕЛЫХ ТЕЛ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16

179. *Тяжесть — это сила, влекущая вниз все тела вблизи поверхности Земли.*

Сила, с которой какое-либо тело влечется вниз вследствие тяжести, называется также его *весом*.

Следствие 1

180. Таким образом тяжесть есть внешняя причина, влекущая вниз земные тела. Следовательно, ее не следует приписывать самим телам в качестве некоторого их свойства.

Следствие 2

181. Поэтому тело, предоставленное самому себе вблизи поверхности Земли, хотя бы оно и находи-

лось в покое, побуждается к движению вниз и опускается до тех пор, пока не достигнет предметов, препятствующих его дальнейшему снижению.

С л е д с т в и е 3

182. Покуда падение тела невозможно, — вследствие ли того, что оно лежит на неподвижном предмете, или вследствие того, что оно подвешено, — его тяжесть проявляется в виде давления.

П о я с н е н и е

183. Из повседневного опыта мы постоянно убеждаемся, что все тела, с которыми мы сталкиваемся при посредстве наших чувств, обладают тяжестью: и если некоторые тела кажутся нам скорее легкими и как бы стремятся подняться вверх, то причину этого следует приписать воздуху; ибо когда последний устраняется, то и самые легкие тела падают вниз так же быстро, как и самые тяжелые.

Здесь мы отвлекаемся от всякого рода препятствий, которые обычно противодействуют падению тел. Далее, если привлечь на помощь данные опыта, то мы узнаем, что при устранении всех препятствий движению, во-первых, все тела падают одинаково быстро, и, во-вторых, — находятся ли они в покое или в движении, — их влечет вниз одинаковая сила.

И, значит, исходя из предположения, что оба эти опыта, хотя они и требуют более обширного знания движения, нам известны: ведь мы поставили себе

целью лишь установить твердые меры, а с этой точки зрения совершенно безразлично, откуда именно эти опыты стали нам известны.

П Р И М Е Ч А Н И Е

184. Что тяжесть представляет собой силу, действующую извне на тело и влекущую его вниз, это признают и те лица, которые причину ее видят в притяжении [58]. Именно, они утверждают, что тела влекутся к Земле не в силу какого-либо свойственного им самим инстинкта, а притягиваются к ней силой притяжения самой Земли. Они представляют себе дело таким образом, как если бы Земля испускала по всем направлениям силы, которые охватывают окружающие тела и направляют их к Земле; при этом они предполагают, что упомянутое испускание происходит не при посредстве какой-либо промежуточной среды, но что оно совершенно так же имело бы место, если бы в промежутке между Землей и телами полностью была удалена какая бы то ни была материя. Следовательно, они считают, что тяжесть является действующей на тела нематериальной силой, которая, однако, связана с Землей таким образом, что с уничтожением последней и она исчезает.

Отсюда вытекает, что тела направляются вниз как бы каким-то духом: в самом деле, иначе нельзя себе и представить, каким образом могла бы сила распространиться на далекие расстояния от Земли без посредства какой-либо промежуточной материи. Пред-

ставим себе, что два тела A и B находятся на большом расстоянии друг от друга и что в промежутке между ними совершенно нет никакой материи, и пусть вблизи тела A не существует ничего такого, что относилось бы к B ; тогда в первом теле ничего не изменилось бы, если бы второе тело совершенно исчезло. Из этого следует, что подобного рода испускание сил противоречит здравому смыслу.

Более правдоподобным является предположение, что сила тяжести происходит вследствие действия некоторой тонкой материи, ускользающей от наших чувств. И хотя мы не в состоянии ясно указать, каким именно образом возникает подобная сила, тем не менее нам представляется совершенно неправильным прибегать к каким-либо оккультным качествам.

В гидродинамике учат, что в жидкостях могут возникнуть силы подобного рода.

А когда сторонники притяжения заявляют, что бог наделил Землю притягательной силой, они в сущности утверждают, что бог сам непосредственно толкает тела по направлению к Земле.

Исследуем теперь в общем виде падение тельца, влекомого вниз тяжестью.

ЗАДАЧА 12

185. *Тельце, непрерывно влекомое вниз постоянной силой, начинает свое движение, выходя из состояния покоя. Определить к данному моменту*

длину пройденного пути, а также величину достигнутой им скорости.

Решение

Пусть A — масса тельца, которое первоначально находилось в покое в точке A (рис. 17) и отсюда увлекается вниз постоянной силой, равной p . Под действием этой силы оно — при условии отсутствия каких бы то ни было препятствий — опускается вниз по прямой вертикальной линии AG .

По истечении времени, равного t , оно достигнет точки S , снизившись на высоту $AS = s$. Если элемент времени dt принять за постоянную величину, то движение тельца определится с помощью следующего уравнения:

$$d^2s = \frac{\lambda p dt^2}{A}$$

или

$$d \frac{ds}{dt} = \frac{\lambda p dt}{A}.$$

Интеграл этого уравнения будет иметь вид

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\lambda p t}{A} + \text{const.}$$



Рис. 17

Но $\frac{ds}{dt}$ выражает собой скорость движения в точке S , а так как в точке A , где $t=0$, скорость, согласно условию, равна нулю, то введенная при инте-

гировании постоянная величина равна нулю, так что для скорости получается выражение

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\lambda pt}{A}.$$

Помножив последнее уравнение на dt , мы получим

$$ds = \frac{\lambda pt dt}{A}$$

и после повторного интегрирования

$$s = \frac{\lambda pt^2}{2A},$$

так как для $t = 0$ высота $AS = s$ должна обращаться в нуль.

Итак, по истечении времени t тельце снизилось на высоту AS , равную

$$s = \frac{\lambda pt^2}{2A},$$

и в точке S оно приобрело скорость

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\lambda pt}{A}.$$

С л е д с т в и е 1

186. Следовательно, пройденная при падении тела высота пропорциональна квадрату времени, а достигнутая им скорость пропорциональна самому времени. В обоих случаях, однако, имеет место прямая пропорциональность действующей силе p и обратная пропорциональность массе A .

С л е д с т в и е 2

187. Достигнутая в S скорость $\frac{ds}{dt}$ такова, что если бы тело двигалось равномерно с такой скоростью, то оно за время t прошло бы путь

$$\frac{t ds}{dt} = \frac{\lambda p t^2}{A},$$

что вдвое превышает фактически пройденный путь

$$s = \frac{\lambda p t^2}{2A}.$$

С л е д с т в и е 3

188. Так как, согласно данным опыта, в случае устранения всех препятствий все тела падают вниз одинаково быстро, то $\frac{\lambda p}{A}$, а значит, и $\frac{p}{A}$ обязательно должно быть постоянной величиной. Таким образом сила p , влекущая любое тело вниз, т. е. вес этого тела, находится в постоянном отношении к его массе A .

П о я с н е н и е

189. Когда речь идет о падении тяжелых тел, буква p обозначает вес тела, о котором мы имеем ясное представление, так как меры веса нам очень хорошо известны; буква же A обозначает массу того же тела; это последнее, само по себе менее ясное понятие, может быть достаточно ясно усвоено в силу того, что масса пропорциональна весу.

Далее, мы имеем вполне ясное представление о времени t , так как мы в состоянии выразить величину

его при посредстве вполне определенных мер, как секунды, минуты или часы.

Затем высота s , представляя собой прямую линию, определяется с помощью геометрических мер.

Что же касается буквы λ , с помощью которой выражается пропорциональность, то сама по себе она не принимает какого-либо определенного значения, а ей нужно приписать различное значение, в зависимости от того, в каких мерах или единицах выражаются остальные величины. Как только мы все прочие величины, p , A , t и s , выразим в определенных мерах, λ также получит определенное значение, которое должно быть составлено таким образом, чтобы оно соответствовало действительности в одном определенном случае. Тогда оно и впредь сохранит это значение без изменения, если только, конечно, мы будем применять те же единицы измерения. Но это значение должно быть взято из опыта, так как и избранные нами меры основываются на данных опыта. Так, из опыта мы узнаем высоту, на которую снижается тяжелое тело за определенный промежуток времени. И тогда букве λ мы должны присвоить такое значение, чтобы выведенная нами для высоты формула

$$s = \frac{\lambda p t^2}{2A},$$

если она действительно подходит к данному случаю, дала бы то же самое значение s , какое получается из опыта.

П Р И М Е Ч А Н И Е

190. Таким образом все дело сводится к тому, чтобы для всех величин, входящих в наши формулы, установить определенные меры, которыми мы и будем пользоваться в дальнейшем, — если, конечно, мы хотим выражать явления всех движений в известных мерах.

Существует пять видов величин, которые определяют всякое движение.

1. Пройденный путь, который, представляя собой линию, т. е., значит, геометрическую величину, не вызывает никаких сомнений.

2. Время, мера которого очень хорошо известна; здесь весь вопрос сводится к тому, сколь большой промежуток времени мы пожелаем избрать в качестве единицы.

3. Скорость, которая может быть наиболее ясно выражена, если мы в состоянии указать путь, какой был бы пройден равномерно с той же скоростью за определенное время.

4. Действующая сила, которая должна быть сведена к известным мерам.

5. Масса движущихся тел также входит в расчет; каким образом следует измерять ее величину, — это еще должно быть установлено.

Из названных пяти видов величин не вызывает никаких затруднений путь. Каким образом наиболее удобно вводятся в расчет при посредстве известных мер остальные четыре величины и как соответственно

им определяется значение λ ,—это мы установим в нижеследующих основных положениях [60].

Основное положение 1

191. *Действующие силы мы будем всегда выражать через равные им веса.*

Пояснение

192. Выражение сил через вес не вызывает никаких затруднений, так как вес тела представляет собой силу, которой оно направляется вниз. Поэтому действующие силы и веса являются величинами однородными.

Какая бы сила ни действовала на то или иное тело, всегда можно себе представить на поверхности Земли такое тело, на которое действует равная сила, направляющая его вниз. Вес этого тела и даст точную меру первой силы.

Если же речь идет о столь большой силе, что на поверхности Земли не может существовать такого тела, у которого был бы вес, равный этой силе, то достаточно знать, во сколько раз эта сила больше веса тела средних размеров, находящегося на поверхности Земли. Этим путем величина силы определяется столь же надежно.

Но так как в настоящее время стало известно, что одни и те же тела влекутся вниз различными силами в различных местностях Земли, то для этого измерения следует избрать определенную местность,

с которой должны быть соразмерены все прочие местности. При этом совершенно не существенно, какую именно местность для этого мы изберем, если только в ней же мы проведем те опыты, из которых мы будем заимствовать последующие меры.

Основное положение 2

193. *Массу того или иного тела мы будем выражать через вес, какой оно имело бы вблизи Земли.*

Пояснение

Подобное измерение основывается на том, что веса тел пропорциональны их массам, в силу чего можно считать, что вес каждого тела даст точную меру его массы. Но когда речь идет о массах тел, находящихся вне Земли, то их следует — во всяком случае мысленно — перенести на Землю и притом в ту именно местность, которой мы воспользовались для установления меры силы. Таким образом масса каждого тела будет нами измеряться с помощью веса, которое оно имело бы, будучи перемещено в упомянутую местность. Если бы речь шла о телах, которые ввиду их большого размера не могут быть помещены в этой местности, то их следует исследовать по частям; в этом случае достаточно знать отношение, в каком масса рассматриваемого тела находится к массе какого-либо заданного тела, расположенного в этой местности.

Подобным путем как силы, так и массы сводятся к однородным величинам, так как и те и другие мы намерены выражать с помощью весов. И так как в наших формулах постоянно фигурирует отношение силы к массе, то представляется совершенно безразличным, какой единицей веса, фунтом или унцией, мы воспользуемся для определения его; ведь частное, которое получается от деления какой-либо силы на массу, всегда будет выражаться отвлеченным числом. В случае тяжести, где как действующая сила p , так и масса тела A выражаются при помощи его веса, мы имеем

$$\frac{p}{A} = 1,$$

откуда следует, что за время t тяжелое тело снижается на высоту

$$s = \frac{1}{2} \lambda t^2,$$

а скорость его достигает значения

$$\frac{ds}{dt} = \lambda t.$$

Двигаясь равномерно с подобной скоростью, тело за время t прошло бы путь, равный

$$\lambda t^2 = 2s.$$

Основное положение 3

194. При измерении времени мы в качестве единицы всегда будем брать секунду.

Пояснение

195. Секунда, как известно, составляет $\frac{1}{60 \cdot 60 \cdot 24}$ естественных суток, так как принято сутки делить на 24 часа, час на 60 минут и минуту на 60 секунд. В качестве суток я здесь принимаю средние солнечные сутки, в течение которых Солнце, считая по среднему времени, совершает один оборот вокруг Земли. Хотя этот промежуток времени для разных столетий, повидимому, и не одинаковой продолжительности, тем не менее достаточно знать величину его для определенного данного века, — именно для того, когда через веса тел и выражается мера их массы.

Если какой-нибудь промежуток времени мы обозначаем через t , то это t представляет собой отвлеченное число, показывающее, сколько секунд содержится в данном промежутке времени.

Эта мера времени является наиболее подходящей, так как при всех опытах время показывают обычно в секундах.

Кроме того, таким путем мы избегаем слишком большого количества дробей, которые имели бы место в том случае, если бы в качестве единицы мы избрали больший промежуток времени.

Основное положение 4

196. Скорость удобнее всего измерять с помощью пути, который проходило бы за отдельные

секунды тело, движущееся с данной скоростью равномерно.

Пояснение

Наиболее понятный способ определения скорости заключается в том, чтобы указать величину пути, проходимого в каждую отдельную секунду телом, движущимся равномерно с этой скоростью. Так, например, если бы я сказал, что выпущенное из орудия ядро обладает такой скоростью, при которой оно за одну секунду прошло бы 1000 футов, то у всех создастся одинаковое представление об этой скорости.

Таким образом скорости и пройденные пути выражаются при посредстве однородных величин, а именно линий. А так как и промежутки времени и частные от деления сил на массы выражаются с помощью отвлеченных чисел, то в наших формулах остаются величины лишь двух родов, а именно геометрические линии и отвлеченные числа.

Основное положение 5

197. *Высоту, проходимую в течение одной секунды свободно падающим телом, мы в дальнейшем будем обозначать буквой g.*

Пояснение

198. С помощью наблюдений и опытов, произведенных для настоящей цели с величайшей тщательностью, было установлено, что выведенное из состоя-

ния покоя и свободно падающее тело в течение первой секунды проходит путь высотой в $15 \frac{5}{8}$ рейнских футов, так что, если мы примем эту меру фута, мы получим значение

$$g = 15 \frac{5}{8} .$$

Но так как тяжесть не повсюду на Земле оказывается одинаковой, то приведенная величина не является вполне постоянной. Поэтому-то я уже раньше и упомянул о том, что следует избрать на Земле определенную местность, к которой и надо будет относить определение сил и масс тел через их веса. После того как местность эта будет избрана, в ней надо будет с помощью точных опытов определить высоту g , на которую снижается свободно падающее тело в течение одной секунды. При этом, если есть основание полагать, что с течением столетий продолжительность средних суток изменяется, то следует отметить эпоху, из которой заимствована мера секунд.

Какую местность избрать для настоящей цели, это безразлично: если все упомянутые до сих пор меры свести к этой местности, то окончательные выводы будут совпадать.

Отсюда ясно, что эти установленные по произвольному нашему выбору меры не затрагивают самых принципов механики и не вносят в них никакого произвола: они дают лишь то, что мы приходим к выводам, выраженным в знакомых мерах.

ТЕОРЕМА 5

199. Если выразить все величины в мерах соответственно только что изложенным положениям, то в приведенных выше формулах вместо λ следует принять значение $2g$, т. е. двойную высоту, на которую тяжелое тело снижается за одну секунду.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Действительно, для случая падения тяжелых тел, если силу p и массу A выразить соответственно нашим положениям, будет иметь место равенство

$$\frac{p}{A} = 1,$$

и высота, на которую тело снижается за время t , будет равна (рис. 17)

$$AS = s = \frac{1}{2} \lambda t^2.$$

Если теперь время t выразить в секундах и положить $t = 1$, то величина s даст нам ту высоту, на которую, согласно условию, тяжелое тело снижается за одну секунду. Ясно, что в силу этого мы имеем

$$g = \frac{1}{2} \lambda,$$

и, следовательно, должно быть принято $\lambda = 2g$. Тогда достигнутая в конце первой секунды скорость будет иметь вид:

$$\frac{ds}{dt} = \lambda t = \lambda = 2g.$$

Таким образом величина этой скорости такова, что тело, двигаясь равномерно с подобной скоростью, проходило бы в каждую отдельную секунду путь, равный $2g$, — совершенно так, как этого требует принятый нами способ измерения скорости.

С л е д с т в и е 1

200. Таким образом λ обозначает не число, а линию, которая однородна с пройденным путем s . Остальные величины t и $\frac{p}{A}$ выражаются отвлеченными числами.

С л е д с т в и е 2

201. Следовательно, если находящееся в покое тельце с массой, равной A , попадает под действие силы, равной p , то за промежуток времени dt оно проходит отрезочек пути, равный

$$\frac{gp dt^2}{A},$$

при условии, конечно, что мы постоянно пользуемся указанными выше мерами.

С л е д с т в и е 3

202. Но если тельце A уже находится в движении, и на него начинает действовать сила, равная p , то после разложения движения то составляющее движение, которое совпадает с направлением действующей силы и при котором тельце за промежуток

времени dt проходит отрезочек, равный dx , изменяется таким образом, что

$$d^2x = \frac{2gp \, dt^2}{A}$$

и

$$d \frac{dx}{dt} = \frac{2gp \, dt}{A},$$

где $d \frac{dx}{dt}$ представляет собой приращение скорости в этом направлении.

С л е д с т в и е 4

203. Если по этим данным мы найдем скорость составляющего движения по указанному направлению, т. е. если мы найдем $\frac{dx}{dt}$, то при тех же наших мерах она укажет нам величину того пути, который прошло бы за секунду тело, движущееся с этой скоростью равномерно.

П р и м е ч а н и е

204. Путем применения таких мер и единиц, какие нами описаны выше, мы можем при помощи наших формул, проставляя $2g$ вместо λ , очень легко выразить любые движения в абсолютных мерах. Этот метод представляется гораздо более удобным, чем те, какие я применял раньше, когда скорости я выражал в виде квадратного корня из высот, после прохождения которых тяжелое тело приобретает именно эти скорости, и в окончательное выражение вводил вместо скоростей соответствующие им высоты. Ведь

по высоте, соответствующей данной скорости, еще не так-то легко узнать самую скорость, так как приходится еще произвести некоторое вычисление, чтобы прийти к обычным мерам.

Кроме того, тогда и относительно времени пришлось бы производить особое вычисление, при котором нужно было бы ввести некоторую новую единицу, для того чтобы время было выражено в секундах. Теперь же все эти окольные пути мы сделаем совершенно ненужными как по отношению к скоростям, так и по отношению к времени, если будем пользоваться указанными выше мерами. Все различие этих методов заключается в том, что раньше в общих формулах λ обозначало отвлеченную дробь $\frac{1}{2}$, а здесь вместо λ проставляется линия, равная $2g$.

Следовательно, если кто-либо для определения какого-нибудь движения сделал вычисление по прежнему способу, то последнее очень легко может быть сведено на нынешний наш способ, и таким путем очень быстро получают все абсолютные меры.

При новом способе в уравнениях, выражающих движение, легко заметить однородность, так как только пройденный путь и буква g представляют собой линейные величины и имеют как бы одно измерение; аналогичный вид имеют и скорости, если последние почему-либо вводятся в вычисление. С другой стороны, время t и дробь $\frac{P}{A}$ выражаются оба отвлеченными числами и потому должны счи-

таться имеющими нулевое измерение. В вычислениях же, произведенных по прежнему способу, как скорости, так и время выражаются с помощью квадратных корней из линейных величин, вследствие чего они должны были быть рассматриваемы как величины, имеющие половинное измерение.

Отбрасывая поэтому прежний способ определения абсолютных мер, мы принимаем теперь этот новый, значительно более простой и легкий способ и в дальнейшем будем пользоваться только этим последним.

Глава V

ОБ АБСОЛЮТНОМ ДВИЖЕНИИ ТЕЛЕЦ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СИЛ

Задача 13

205. *Силы действуют на тельце таким образом, что движение последнего происходит в одной и той же плоскости. Определить пройденный тельцем путь, положение тельца в любой момент времени и скорость его движения.*

Решение

Для того чтобы движение происходило в одной и той же плоскости, необходимо, чтобы направление сил, непрерывно действующих на тело, а также направление движения, первоначально бывшего у тела, лежали в одной и той же плоскости.

Пусть эта плоскость будет представлена плоскостью чертежа (рис. 18). Изберем на последней две произвольные оси OA и OB , причем для удобства вычислений возьмем их взаимно перпендикулярными. Пусть ESF будет описанный тельцем путь, по которому оно по истечении времени t , выраженного в секундах, достигнет точки S .

Из точки S опустим на линию OA перпендикуляр SX и пусть будут тогда координаты

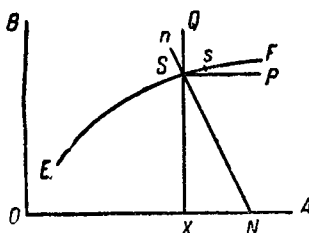


Рис. 18.

$$OX = x \text{ и } XS = y,$$

так что если положить пройденный путь $ES = s$, то мы получим

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Пусть, далее, масса тельца равна A , величина которой должна быть

определена, конечно, по весу его, когда тельце находится в местности, избранной для абсолютных измерений. Какие бы силы ни действовали на тельце в S , последние путем статического разложения могут быть сведены к двум силам, действующим по направлениям SP и SQ , параллельным принятым осям.

Пусть эти силы, обе выраженные через равные им веса, составляют $SP = P$ и $SQ = Q$. Примем элемент времени dt за постоянную величину.

При указанных предположениях представим себе движение разложенным по направлениям SP и SQ .

Тогда определение движения будет заключаться в двух уравнениях:

$$d^2x = \frac{2gP dt^2}{A}$$

и

$$d^2y = \frac{2gQ dt^2}{A},$$

где g обозначает — это необходимо всегда помнить — высоту, на которую снижается тяжелое тело за одну секунду в упомянутой выше местности Земли.

Отсюда получается, что скорость составляющего движения вдоль SP равна

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2g}{A} \int P dt,$$

а по направлению SQ равна

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2g}{A} \int Q dt.$$

Если теперь действительную скорость в точке S положить равной v , то ввиду того, что

$$v = \frac{ds}{dt}$$

и

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

мы получаем следующее уравнение:

$$dx d^2x + dy d^2y = ds d^2s = \frac{2g dt^2}{A} (P dx + Q dy).$$

А так как, далее,

$$ds = v dt \quad \text{и} \quad d^2s = dv dt,$$

то мы имеем

$$v dv = \frac{2g}{A} (P dx + Q dy)$$

и

$$v^2 = \frac{4g}{A} \int (P dx + Q dy).$$

Положив, далее, $dy = p dx$ так, что

$$ds = dx \sqrt{1 + p^2},$$

мы получаем

$$d^2y = p d^2x + dp dx = \frac{2gQ dt^2}{A} = \frac{2gPp dt^2}{A} + dp dx,$$

откуда

$$dp = \frac{2g dt^2}{A dx} (Q - Pp) = \frac{2g dt^2}{A dx^2} (Q dx - P dy).$$

Так как

$$ds = v dt = dx \sqrt{1 + p^2},$$

то

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{1 + p^2}}{v}$$

и, следовательно,

$$dp = \frac{2g(1 + p^2)}{Av^2} (Q dx - P dy).$$

Но радиус кривизны кривой ESF , поскольку последняя обращена к OA своей вогнутостью, равен

$$-\frac{dx(1 + p^2) \sqrt{1 + p^2}}{dp} = -\frac{ds(1 + p^2)}{dp}.$$

Если последний обозначить через r , то мы будем иметь

$$dp = -\frac{ds(1 + p^2)}{r},$$

и, таким образом, мы приходим к уравнению

$$-\frac{ds}{r} = \frac{2g(Q dx - P dy)}{Av^2}$$

или

$$\frac{P dy - Q dx}{ds} = \frac{Av^2}{2gr}.$$

Следствие 1

206. Следовательно, движение выражается с помощью следующих двух уравнений:

$$Av dv = 2g (P dx + Q dy)$$

и

$$Av^2 ds = 2gr (P dy - Q dx),$$

где вместо времени t входит скорость v .

Эти уравнения более удобны в тех случаях, когда силы P и Q зависят от скорости тела.

Следствие 2

207. Необходимо здесь отметить, что формула $\frac{P dx + Q dy}{ds}$ выражает касательную силу, а $\frac{P dy - Q dx}{ds}$ — нормальную силу, и если первую обозначить через T , а вторую — через N , то мы получаем

$$Av dv = 2gT ds$$

и

$$Av^2 = 2gNr.$$

Последние выражения совпадают с формулами, приведенными в предыдущей книге.

Следствие 3

208. С введением указанных мер действие касательной силы T выражается уравнением

$$T = \frac{Av dv}{2g ds},$$

а действие нормальной силы выражается уравнением

$$N = \frac{Av^2}{2gr}.$$

А так как

$$r = - \frac{ds(1+p^2)}{dp},$$

причем

$$dy = p dx,$$

то мы будем иметь

$$N = - \frac{Av^2 dp}{2g ds (1+p^2)},$$

конечно, при условии, если мы примем, что нормальная сила направлена по оси OA .

П Р И М Е Р

209. Пусть тельце находится под непрерывным действием постоянной силы, равной его весу A и направленной по BO так, что мы, значит, имеем здесь случай наклонно брошенного тела.

Следовательно, в данном случае сила

$$P = 0,$$

а сила

$$Q = -A,$$

и мы получаем, таким образом, уравнения

$$d^2x = 0$$

и

$$d^2y = -2g dt^2.$$

Пусть вначале в точке O тельце было брошено таким образом, что его скорость была равна c , а направление его движения с линией OA , которую мы

принимаем горизонтальной, составляло угол, равный ζ . Тогда, следовательно, в начальный момент скорость по направлению OA должна была быть равной

$$c \cos \zeta,$$

а по направлению OB равной

$$c \sin \zeta.$$

При этих условиях первое из полученных выше уравнений будет иметь вид:

$$\frac{dx}{dt} = c \cos \zeta,$$

а второе

$$\frac{dy}{dt} = c \sin \zeta - 2gt,$$

так как при $t = 0$ выражения $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ должны дать начальные скорости.

Если теперь эти два уравнения снова проинтегрировать, то мы получим

$$x = ct \cos \zeta$$

и

$$y = ct \sin \zeta - gt^2,$$

так как при $t = 0$ как x , так и y обращаются в нуль.

Отсюда

$$-4gy = 4g^2t^2 - 4cgt \sin \zeta$$

и, таким образом,

$$\begin{aligned} c^2 \sin^2 \zeta - 4gy &= (2gt - c \sin \zeta)^2 = \\ &= \left(c \sin \zeta - \frac{2gx}{c \cos \zeta} \right)^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что описываемая кривая представляет собой параболу, уравнение которой имеет вид:

$$\left(\frac{c^2 \sin \zeta \cos \zeta}{2g} - x \right)^2 = \frac{c^2 \cos^2 \zeta}{g} \left(\frac{c^2 \sin^2 \zeta}{4g} - y \right).$$

Параметр этой параболы равен $\frac{c^2 \cos^2 \zeta}{g}$. Вертикальная ось этой параболы удалена от точки O на расстояние, равное $\frac{c^2 \sin \zeta \cos \zeta}{2g}$, а вершина расположена на высоте, равной $\frac{c^2 \sin^2 \zeta}{4g}$.

Так как, далее,

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{c^2 - 4cgt \sin \zeta + 4g^2 t^2} = v,$$

то скорость в точке S будет

$$v = \sqrt{c^2 - 4gy}.$$

Наконец, если положить $y = 0$, то определяется дальность полета, которая равна $\frac{c^2 \sin \zeta \cos \zeta}{g}$.

П Р И М Е Ч А Н И Е

210. Я не останавливаюсь здесь на изложении других вопросов, которые могут сюда относиться, так как все это я уже раньше исследовал подробно. Следует лишь отметить, что здесь идет речь об абсолютном и свободном движении. Хотя я только что вывел движение тяжелых тел, а последнее, насколько мы его относим к Земле, является, вообще говоря,

относительным и потому отличается от абсолютного движения, но мы в дальнейшем покажем, что его можно рассматривать как абсолютное. Действительно, так как все земные тела находятся под действием таких же сил, как и сама Земля, то в результате получается, что они движутся по отношению к Земле совершенно так же, как если бы Земля находилась в покое, а упомянутых сил совершенно не было бы; это будет нами точно доказано в следующей главе.

Свободное движение следует понимать в том смысле, что тельцу извне ничто не мешает подчиняться действию внешних сил; подобное движение следует ясно отличать от движения со связями [61], при котором тельце, скажем, заключенное в канале, может передвигаться только вдоль этого канала; подобные движения я рассмотрел во второй книге.

Здесь я изложу только одну задачу, касающуюся вопроса о канале, расположенном в одной плоскости, причем я мысленно отвлекусь от всякого трения, с тем чтобы легче было разобрать, каким образом подобные задачи разрешаются с помощью настоящего нового метода, и с тем чтобы получить возможность определить давление тельца на стенки трубки.

Задача 14

211. *Тельце помещено внутри канала, расположенного в одной плоскости, и находится под действием некоторых сил. Определить движение тельца в канале и давление, производимое им на последний.*

РЕШЕНИЕ

Форма канала ESF (рис. 18) считается, значит, заданной, и пусть по примеру прежнего она отнесена к двум взаимно перпендикулярным осям OA и OB . Если по истечении времени t тельце дошло до S , то $OX = x$, $XS = y$, и дуга $S = s$.

Далее, силы, отнесенные к тем же направлениям, пусть будут $SP = P$ и $SQ = Q$, а масса тельца пусть равняется A . Поскольку канал отклоняет движение от того направления, по которому тельце двигалось бы, если бы оно было предоставлено самому себе, постольку он действует на него с силами, которые хотя и являются неизвестными, но, будучи отнесены к тем же направлениям, дают по направлению SP некоторую силу X и по направлению SQ силу Y ; об этих силах, впрочем, известно, что они не ускоряют и не замедляют движения тельца.

Теперь, так как сила по направлению $SP = P + X$, а по направлению $SQ = Q + Y$, то, положив скорость в S равной v и радиус кривизны равным r , мы согласно § 206, получаем следующие уравнения:

$$Av dv = 2g [(P + X) dx + (Q + Y) dy]$$

и

$$Av^2 ds = 2gr [(P + X) dy - (Q + Y) dx].$$

Так как силы X и Y ничего не дают для увеличения скорости dv , то имеет место равенство

$$X dx + Y dy = 0.$$

Второе же уравнение нам дает:

$$\frac{X dy - Y dx}{ds} = \frac{Av^2}{2gr} - \frac{P dy + Q dx}{ds}.$$

Отсюда можно определить эти силы.

Таким образом прежде всего с помощью уравнения

$$Av dv = 2g(P dx + Q dy)$$

определяется движение вдоль канала, откуда можно определить скорость v тельца в любой точке. Далее, силы X и Y , с которыми воздействует канал на тельце по направлениям SP и SQ , такого рода, что мы имеем

$$\frac{X dx + Y dy}{ds} = 0$$

и

$$\frac{X dy - Y dx}{ds} = \frac{Av^2}{2gr} - \frac{P dy + Q dx}{ds}.$$

Если же эти силы отнести к направлению канала Ss и к нормали SN , то в первом из этих направлений получается сила, равная нулю, а во втором направлении сила, равная

$$\frac{Av^2}{2gr} - \frac{P dy + Q dx}{ds}.$$

Значит, и обратно, с такой силой тельце давит на канал в противоположном направлении Sn : это, значит, и есть искомое давление.

Следствие 1

212. Следовательно, если тельце во время своего движения по каналу не подвергается действию внеш-

них сил P и Q , то его движение становится равномерным, так как $Av dv = 0$. В этом случае оно повсюду давит нормально на канал с силой, равной

$$\frac{Av^2}{2gr},$$

по линии Sn , направленной противоположно радиусу кривизны.

С л е д с т в и е 2

213. Сила $\frac{Av^2}{2gr}$, производящая давление на канал, называется *центробежной силой*; она возникает вследствие того, что тельце вопреки своей инерции вынуждено двигаться по кривой линии. Сила эта прямо пропорциональна массе тела A и квадрату скорости v , а также обратно пропорциональна радиусу кривизны r .

С л е д с т в и е 3

214. Если же тельце находится под действием и тангенциальной силы T по направлению Ss и нормальной силы N по направлению SN , то мы имеем прежде всего

$$Av dv = 2gT ds,$$

а затем канал испытывает в направлении Sn давление силы, равной $\frac{Av^2}{2gr} - N$.

П р и м е р

215. Положим, тельце, находящееся под действием тяжести, вынуждено подниматься по дуге OS круга (рис. 19). Пусть центр этого круга будет в B и ра-

диус $OB = b$. Пусть, далее, OB будет вертикальная линия, OA — горизонтальная и пусть скорость в точке O будет равна c . Тогда

$$\text{сила } P = 0,$$

$$\text{сила } Q = -A,$$

$$r = b,$$

и для определения движения тела мы будем иметь уравнение

$$Av dv = -2Ag dy$$

или

$$v dv = -2g dy.$$

Отсюда мы получаем

$$v^2 = c^2 - 4gy.$$

Скорость тела становится равной нулю в некоторой точке D , для которой

$$y = \frac{c^2}{4g}.$$

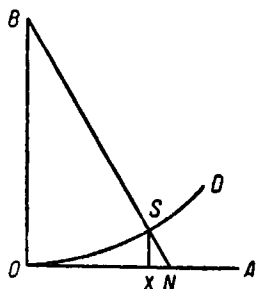


Рис. 19.

Величина силы, производящей давление на канал по направлению SB , будет равна

$$-\frac{A(c^2 - 4gy)}{2gb} - \frac{A dx}{ds}.$$

Но в силу того, что

$$x^2 + (b - y)^2 = b^2,$$

мы имеем

$$x = \sqrt{2by - y^2},$$

$$dx = \frac{b dy - y dy}{\sqrt{2by - y^2}}$$

и

$$ds = \frac{b \, dy}{\sqrt{2by - y^2}}.$$

Вследствие этого давление по направлению SB равно

$$-\frac{Ac^2}{2bg} + \frac{2Ay}{b} - \frac{A(b-y)}{b} = -A + \frac{3Ay}{b} - \frac{Ac^2}{2gb}.$$

Так как последняя величина отрицательна, то давление на канал будет происходить по направлению SN с силой, равной

$$A \left(1 + \frac{c^2}{2bg} - \frac{3y}{b} \right).$$

Так как, далее,

$$v = \sqrt{c^2 - 4gy},$$

то элемент времени dt равен

$$\frac{ds}{v} = \frac{b \, dy}{\sqrt{(c^2 - 4gy)(2by - y^2)}};$$

а так как

$$y = \frac{c^2 - v^2}{4g}$$

и

$$dy = -\frac{v \, dv}{2g},$$

то

$$dt = -\frac{2b \, dv}{\sqrt{(c^2 - v^2)(8bg - c^2 + v^2)}}.$$

Если начальная скорость c мала по сравнению с b , то, ввиду того что v не может стать больше c , мы приближенно будем иметь

$$dt = -\frac{dv}{\sqrt{c^2 - v^2}} \sqrt{\frac{b}{2g}},$$

а после интегрирования

$$t = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2g}} \arccos \frac{v}{c} \left[{}^{62} \right].$$

Отсюда продолжительность восходящего движения до точки D , где скорость становится равной нулю, равна

$$\frac{\pi \sqrt{b}}{2\sqrt{2g}},$$

где π представляет собой половину окружности круга с радиусом, равным единице. Этот промежуток времени называют *полупериодом колебаний*. Для того чтобы время полного колебания

$$\frac{\pi \sqrt{b}}{\sqrt{2g}}$$

равнялось одной секунде, т. е. единице, радиус BO должен быть взят равным

$$b = \frac{2g}{\pi^2}.$$

Такова длина простого маятника, совершающего за каждую секунду одно колебание. Поэтому, если $g = 15,625$ рейнского фута, то длина этого маятника будет равна 3,166287 рейнского фута.

П Р И М Е Ч А Н И Е

216. Излишне указывать, что мы взяли здесь канал только с той целью, чтобы движение протекало по определенной заданной линии; но последнее может быть достигнуто разнообразными способами. Нам показалось уместным в приведенном примере исследо-

вать один подобный случай, именно случай маятника. Относящиеся вообще сюда задачи я достаточно подробно осветил во второй книге механики.

С другой стороны, так как там я, к сожалению, не изложил того метода, с помощью которого теперь сводятся к вычислению движения небесных тел и который я стал применять только позднее, то представляется целесообразным изложить его здесь более подробно.

Этот вопрос вообще примыкает к задаче 13 (§ 205), но метод его решения имеет то отличие, что движение определяется не с помощью координат, а с помощью расстояний от одной определенной точки и с помощью углов, описываемых вокруг последней.

Поскольку рассматриваемое движение происходит в одной плоскости, я покажу, каким образом следует производить его исследование в соответствии с настоящим методом, а затем я также остановлюсь на случае движения, происходящего не в одной плоскости.

Задача 15

217. *Тельце движется свободно в плоскости, в которой оно постоянно находится, под действием двух сил, из которых одна направлена к определенной неподвижной точке O (рис. 20), а другая имеет направление, перпендикулярное к первой. Найти для любого момента времени расстояние тела S от точки O и угол AOS .*

РЕШЕНИЕ

Пусть за время t тельце, масса которого равна A , прошло от A до S и пусть расстояние $OS = u$, а угол $AOS = \varphi$.

В точке S тело будет находиться под действием двух сил: во-первых, силы, равной V , направленной

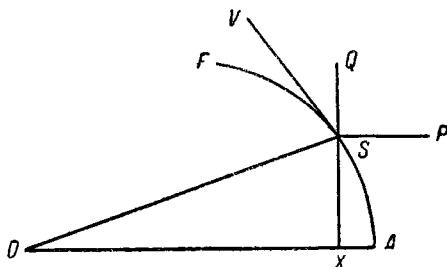


Рис. 20.

вдоль SO , и, во-вторых, силы, равной S , направленной вдоль SV нормально к OS .

Для того чтобы этот случай было легче свести к задаче 13, опустим из точки S перпендикуляр SX на неподвижную прямую OA и введем координаты $OX = x$ и $XS = y$. Тогда

$$x = u \cos \varphi$$

и

$$y = u \sin \varphi.$$

Отнесем теперь силы V и S к тем же направлениям SP и SQ ; тогда мы будем иметь силу

$$SP = -V \cos \varphi - S \sin \varphi$$

и силу

$$SQ = -V \sin \varphi + S \cos \varphi.$$

Обе эти силы выше мы называли соответственно P и Q . Отсюда мы получаем следующие два уравнения:

$$d^2x = -\frac{2g}{A} \frac{dt^2}{dt^2} (V \cos \varphi + S \sin \varphi),$$

$$d^2y = -\frac{2g}{A} \frac{dt^2}{dt^2} (V \sin \varphi - S \cos \varphi).$$

Из сочетания этих уравнений мы выводим

$$d^2x \cos \varphi + d^2y \sin \varphi = -\frac{2gV}{A} \frac{dt^2}{dt^2},$$

$$d^2x \sin \varphi - d^2y \cos \varphi = -\frac{2gS}{A} \frac{dt^2}{dt^2}.$$

Но из

$$x = u \cos \varphi$$

и

$$y = u \sin \varphi$$

мы получаем

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = u$$

и

$$x \sin \varphi - y \cos \varphi = 0.$$

Отсюда, после дифференцирования, мы будем иметь

$$dx \cos \varphi + dy \sin \varphi = du$$

и

$$dx \sin \varphi - dy \cos \varphi + u d\varphi = 0$$

или

$$dx \sin \varphi - dy \cos \varphi = -u d\varphi.$$

После повторного дифференцирования мы получаем

$$d^2x \cos \varphi + d^2y \sin \varphi + u d\varphi^2 = d^2u$$

и

$$d^2x \sin \varphi - d^2y \cos \varphi + du \, d\varphi = - du \, d\varphi - u \, d^2\varphi.$$

Подставив эти значения, мы получаем для определения движения следующие два уравнения:

$$\text{I. } d^2u - u \, d\varphi^2 + \frac{2gV \, dt^2}{A} = 0,$$

$$\text{II. } u \, d^2\varphi + 2du \, d\varphi - \frac{2gS \, dt^2}{A} = 0.$$

С л е д с т в и е 1

218. Если второе уравнение помножить на u и проинтегрировать, то мы получим

$$u^2 \, d\varphi = \frac{2g \, dt}{A} \int Su \, dt.$$

Следует иметь в виду, что

$$\frac{1}{2} u^2 \, d\varphi$$

представляет собой элемент площади AOS ; отсюда вся эта площадь равна

$$\frac{g}{A} \int dt \int Su \, dt.$$

Следовательно, если составляющая $SV = S$ силы равна нулю, то площадь AOS пропорциональна времени t , какова бы ни была другая составляющая V , действующая по направлению к точке O .

СЛЕДСТВИЕ 2

219. Если первое уравнение умножить на du , второе — на $u d\varphi$ и затем сложить, то мы получим

$$\begin{aligned} du^2 + u^2 d\varphi^2 + u du d\varphi^2 + u^2 d\varphi^2 du &= \\ &= -\frac{2gV dt^2 du}{A} + \frac{2gSu dt^2 d\varphi}{A}, \end{aligned}$$

откуда после интегрирования получается

$$du^2 + u^2 d\varphi^2 = \frac{4g dt^2}{A} \int (Su d\varphi - V du).$$

Здесь

$$\sqrt{du^2 + u^2 d\varphi^2}$$

представляет собой элемент пути AS , так что

$$\frac{du^2 + u^2 d\varphi^2}{dt^2}$$

обозначает квадрат скорости в точке S .

СЛЕДСТВИЕ 3

220. Если второе уравнение помножить на $2u^3 d\varphi$, то, так как dt постоянно, мы получаем следующий интеграл:

$$u^4 d\varphi^2 = \frac{4g dt^2}{A} \int Su^3 d\varphi,$$

а отсюда с помощью предыдущего уравнения мы получим

$$u^2 du^2 = \frac{4g dt^2}{A} \left(u^2 \int Su d\varphi - \int Su^3 d\varphi - u^2 \int V du \right)$$

или

$$u^2 du^2 = \frac{4g dt^2}{A} \left(2 \int u du \int Su d\varphi - u^2 \int V du \right) \quad [63].$$

Здесь следует отметить, что элемент времени dt находится вне знака интеграла.

Следствие 4

221. Если $S = 0$, — а это есть случай центростремительных сил, — то

$$u^2 d\varphi = f^2 dt$$

и

$$u d\varphi = \frac{f^2 dt}{u}.$$

Если эти значения подставить в выражение, приведенное в следствии 2, то мы получим

$$du^2 = -\frac{f^4 dt^2}{u^2} - \frac{4g dt^2}{A} \int V du + c^2 dt^2 [64].$$

Следовательно,

$$dt = \frac{u du}{\sqrt{c^2 u^2 - f^4 - \frac{4gu^2}{A} \int V du}}$$

и

$$d\varphi = \frac{f^2 du}{u \sqrt{c^2 u^2 - f^4 - \frac{4gu^2}{A} \int V du}} [65].$$

Примечание

222. Эти формулы очень часто применяются в астрономии, где с их помощью определяют долготу, аномалию и расстояние планеты, притягиваемой к определенной точке.

Здесь не место останавливаться более подробно на этом вопросе, так как последний относится

к астрономии: вполне достаточно лишь в общем виде изложить метод решения подобных задач.

Переходим теперь к рассмотрению движений, происходящих не в одной плоскости.

Задача 16

223. Тельце движется свободно и находится под действием произвольных сил. Определить движение этого тельца, пользуясь тремя взаимно перпендикулярными координатами.

Решение

Пусть имеются три взаимно перпендикулярных оси OA , OB и OC (рис. 21) и пусть тельце, масса

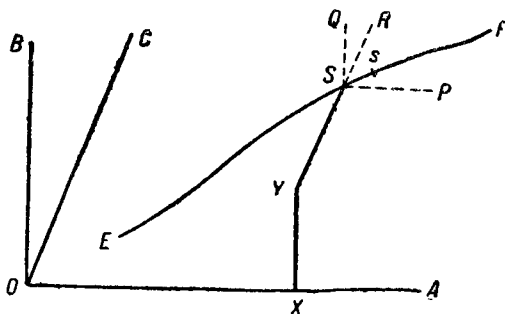


Рис. 21.

которого равна A , движется по линии ESF . Пусть по истечении времени t оно достигло точки S .

Опустим из этой точки перпендикуляр SY на плоскость AOB , а из Y — перпендикуляр YX на OA , так что получаются три координаты

$$OX = x,$$

$$XY = y,$$

$$YS = z,$$

перпендикулярные друг к другу и параллельные осям.

Пусть пройденный путь $ES = s$, так что

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

а скорость в точке S равна

$$\frac{ds}{dt} = v.$$

Какие бы силы ни действовали на тельце в точке S , их всегда можно свести к тем же трем направлениям.

Итак, на тело будут действовать три силы $SP = P$, $SQ = Q$, $SR = R$; согласно изложенному выше, их действие может быть определено с помощью следующих трех уравнений:

$$d^2x = \frac{2gP}{A} dt^2,$$

$$d^2y = \frac{2gQ}{A} dt^2,$$

$$d^2z = \frac{2gR}{A} dt^2,$$

в которых элемент dt принят постоянным.

Далее, смотря по тому, зависят ли силы P , Q и R от координат x , y и z или также от скорости

$$\frac{ds}{dt} = v,$$

следует из анализа брать соответствующие способы решения задачи. А здесь пока будет целесообразно отметить, что в силу того, что

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

и того, что

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2},$$

следовательно, и того, что

$$v dv = \frac{ds d^2s}{dt^2} = \frac{dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z}{dt^2},$$

будет иметь место уравнение

$$v dv = \frac{2g}{A} (P dx + Q dy + R dz).$$

С помощью этого уравнения и определяется скорость тельца.

Для определения же кривой положим

$$dy = p dx, \quad dz = q dx,$$

так что мы получаем

$$ds = dx \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

и

$$v = \frac{dx}{dt} \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

А так как

$$d^2y = p d^2x + dp dx$$

и

$$d^2z = q d^2x + dq dx,$$

то, подставив вместо d^2x его значение, равное $\frac{2gP dt^2}{A}$, мы получаем

$$dp dx = \frac{2g dt^2}{A} (Q - Pp),$$

$$dq dx = \frac{2g dt^2}{A} (R - Pq).$$

Если же вместо dt^2 подставить его значение

$$\frac{dx^2 (1 + p^2 + q^2)}{v^2},$$

то мы будем иметь

$$dp = \frac{2g dx (1 + p^2 + q^2)}{Av^2} (Q - Pp),$$

$$dq = \frac{2g dx (1 + p^2 + q^2)}{Av^2} (R - Pq)$$

или

$$Q dx - P dy = \frac{Av^2 dp}{2g (1 + p^2 + q^2)},$$

$$R dx - P dz = \frac{Av^2 dq}{2g (1 + p^2 + q^2)}.$$

Если теперь вместо p и q подставить их значения $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$, то эти два уравнения переходят в следующие:

$$Q dx - P dy = \frac{Av^2 (dx d^2y - dy d^2x)}{2g ds^2},$$

$$R dx - P dz = \frac{Av^2 (dx d^2z - dz d^2x)}{2g ds^2}.$$

Если же одно из них разделить на другое, то мы получим

$$P (dz d^2y - dy d^2z) + Q (dx d^2z - dz d^2x) + \\ + R (dy d^2x - dx d^2y) = 0.$$

С л е д с т в и е 1

224. Скорость в каждой точке кривой определяется с помощью дифференциального уравнения

$$Av dv = 2g (P dx + Q dy + R dz),$$

где $\frac{P dx + Q dy + R dz}{ds}$ обозначает тангенциальную силу, происходящую от сил, действующих на тело.

С л е д с т в и е 2

225. Для определения кривой достаточно каких-либо двух из следующих трех уравнений:

$$2g ds^3 (Q dx - P dy) = Av^2 (dx d^2y - dy d^2x) = \\ = Av^2 dx^2 d \frac{dy}{dx},$$

$$2g ds^3 (P dz - R dx) = Av^2 (dz d^2x - dx d^2z) = \\ = Av^2 dz^2 d \frac{dx}{dz},$$

$$2g ds^3 (R dy - Q dz) = Av^2 (dy d^2z - dz d^2y) = \\ = Av^2 dy^2 d \frac{dz}{dy},$$

так как каждые два из них содержат в себе также и третье.

При этом здесь становится излишним рассмотрение постоянного дифференциала.

С л е д с т в и е 3

226. Последнее уравнение [66], свободное от скорости, хотя и содержит в себе дифференциалы второго порядка, тем не менее не связано с дифференциалом dt , принятым в качестве постоянного. Оно может быть представлено в следующем виде:

$$P dz^2 d \frac{dy}{dz} + Q dx^2 d \frac{dz}{dx} + R dy^2 d \frac{dx}{dy} = 0.$$

П р и м е ч а н и е

227. Три силы P , Q и R , которые, согласно условию, действуют на тельце в точке S , сводятся к одной силе, которая равна

$$\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2},$$

и если последнюю обозначить через V , то ее направление образует с SP угол, косинус которого равен $\frac{P}{V}$, с SQ — угол, косинус которого равен $\frac{Q}{V}$, и с SR — угол, косинус которого равен $\frac{R}{V}$.

Далее, если направление этой силы V образует с направлением движения Ss угол, равный ω , то ускоряющая сила, т. е. сила, действующая по направ-

лению Ss , будет равна $V \cos \omega$, а так как она в то же время равна

$$\frac{P dx + Q dy + R dz}{ds},$$

то мы имеем

$$\cos \omega = \frac{P dx + Q dy + R dz}{V ds}.$$

Положение нормальной силы $V \sin \omega$ наиболее удобно изображается с помощью сферической тригонометрии. Представим себе, что точка S (рис. 22)

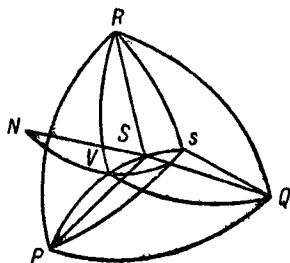


Рис. 22.

является центром сферы и из нее к поверхности сферы проведены прямые линии SP , SQ и SR так, что дуги PQ , PR и QR являются квадрантами. Направление движения пусть проходит через s ,

а среднее направление сил — через V ; тогда мы имеем:

$$\cos Ps = \frac{dx}{ds}, \quad \cos Qs = \frac{dy}{ds}, \quad \cos Rs = \frac{dz}{ds},$$

$$\cos PV = \frac{P}{V}, \quad \cos QV = \frac{Q}{V}, \quad \cos RV = \frac{R}{V}$$

и, сверх того,

$$Vs = \omega,$$

или

$$\cos \omega = \frac{P dx + Q dy + R dz}{V ds}.$$

Если угол ω известен, а угол $\angle SN$ мы принимаем равным квадрату, то прямая линия, проведенная из центра S через N , представит собой направление нормальной силы, положение же точки N определится при помощи ее расстояний от точек P , Q и R таким образом, что получаются следующие соотношения:

$$\cos PN = \frac{P}{V \sin \omega} - \frac{dx \cos \omega}{ds \sin \omega},$$

$$\cos QN = \frac{Q}{V \sin \omega} - \frac{dy \cos \omega}{ds \sin \omega},$$

$$\cos RN = \frac{R}{V \sin \omega} - \frac{dz \cos \omega}{ds \sin \omega} \left[{}^{67} \right].$$

Поскольку прямых линий, нормальных к направлению движения Ss , существует бесчисленное множество, — из них определяется та линия, вдоль которой действует нормальная сила, искривляющая направление движения таким образом, что радиус кривизны падает на самую прямую линию SN ; радиус этот будет равен

$$\frac{Av^2}{2gV \sin \omega}$$

(§ 207).

ЗАДАЧА 17

228. Тельце, масса которого равна A , движется в трубке или в канале, не подвергаясь действию никаких сил. Определить его движение и давление, производимое им повсюду на трубку.

РЕШЕНИЕ

Пусть ESF (рис. 21) — форма трубки, в которой движется тельце; пусть по истечении времени t оно, пройдя путь $ES = s$, достигло точки S . Последнюю по примеру прежнего отнесем к трем взаимно перпендикулярным осям OA , OB и OC и назовем проведенные параллельно им координаты

$$OX = x,$$

$$XY = y,$$

$$YS = z.$$

Так как тельце вынуждено всюду следовать направлению трубки, то последняя несомненно оказывает на него действие в виде сил, которые, однако, таковы, что под их действием скорость движения не претерпевает никакого изменения.

Итак, скорость будет постоянна; пусть она будет равной c ; тогда мы имеем

$$\frac{ds}{dt} = c$$

и

$$s = ct.$$

Отнесем силы, развиваемые трубкой, к тем же трем осям и пусть

$$SP = X,$$

$$SQ = Y,$$

$$SR = Z.$$

Тогда, ввиду того что скорость остается неизменной, мы имеем

$$X dx + Y dy + Z dz = 0.$$

Так как, далее,

$$dt = \frac{ds}{c},$$

то вместо dt постоянным будет элемент ds , и мы, таким образом, получаем основные формулы:

$$Ac^2 d^2x = 2gX ds^2,$$

$$Ac^2 d^2y = 2gY ds^2,$$

$$Ac^2 d^2z = 2gZ ds^2,$$

при наличии равенства

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2.$$

Ввиду этого вся сила, развиваемая трубкой по отношению к малому тельцу, будет равна

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{Ac^2 \sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}}{2g ds^2} = V,$$

направление же ее составляет с прямой SP угол, косинус которого равен

$$\frac{X}{V} = \frac{d^2x}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}},$$

с линией SQ — угол, косинус которого равен

$$\frac{Y}{V} = \frac{d^2y}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}},$$

и с линией SR — угол, косинус которого равен

$$\frac{Z}{V} = \frac{d^2z}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}}.$$

Но этой силе равно и противоположно по направлению то давление, которое тельце производит на трубку.

Следствие 1

229. Если радиус кривизны кривой в точке S положить равным r , то, принимая во внимание, что нормальная сила равна V и скорость равна c , мы будем иметь

$$r = \frac{Ac^2}{2gV}$$

или

$$r = \frac{ds^2}{V(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2},$$

где ds принят постоянным.

Следствие 2

230. Положение радиуса кривизны совпадает с направлением силы V , и потому он образует с прямой SP угол, косинус которого равен $\frac{d^2x}{V(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}$, с прямой SQ — угол, косинус которого равен $\frac{d^2y}{V(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}$, и с прямой SR — угол, косинус которого равен $\frac{d^2z}{V(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}$.

ПРИМЕЧАНИЕ

231. Мы могли бы здесь исследовать и тот случай движения, когда тельце вынуждено перемещаться

не по заданной линии, а по заданной поверхности, но так как этот вопрос уже был подробно изложен во второй книге механики, то я, чтобы здесь не слишком распространяться, его теперь касаться не буду; тем более, что здесь, очевидно, все дело сводится к тому, что направление силы, развиваемой поверхностью по отношению к тельцу, должно быть нормально к этой поверхности.

Пользуясь данными уравнениями поверхности, определяют положение нормали, т. е. углы, образуемые ею с направлениями SP , SQ и SR ; это направление должно совпасть с ранее определенным положением силы V . Отсюда получается новое уравнение между координатами x , y и z , а если последнее связать с первым, то получается путь, пройденный тельцем на поверхности. Что последний представляет собой кратчайший путь между конечными его точками, — это ясно само по себе.

Возвращаясь к свободному движению, я покажу, каким образом движение, происходящее не в одной плоскости, можно удобно определять с помощью углов, отнесенных к определенной неподвижной точке, т. е. тем способом, который я подробно изложил выше, в задаче 5 (§ 70). Так как этот способ является чрезвычайно плодотворным в теоретической астрономии, а в предыдущих книгах подобное разложение движения не было показано, — мы посвятим ему следующую задачу.

ЗАДАЧА 18

232. Тельце находится частью под действием сил, направленных к точке O (рис. 23), частью под

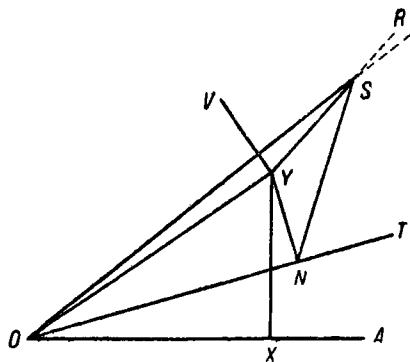


Рис. 23.

действием каких-либо других сил. Определить движение тельца по отношению к этой точке.

РЕШЕНИЕ

Представим себе плоскость — пусть это будет плоскость чертежа, — проходящую через неподвижную точку O , к которой мы относим движение, и возьмем на ней неподвижную ось OA . Пусть по истечении времени t тельце достигло точки S . Опустим из этой точки перпендикуляр SY на плоскость чертежа, а из Y — перпендикуляр YX на прямую OA , так что мы

будем иметь три прямоугольных координаты:

$$OX = x,$$

$$XY = y,$$

$$YS = z.$$

Тельце в точке S прежде всего находится под действием силы, направленной по SO . Разложим эту силу по направлениям YO и SY . Что касается остальных сил, то мы их отнесем к тем же двум направлениям, а также к линии YV , перпендикулярной к OY в плоскости чертежа. Таким образом у нас будут всего три силы: первая, имеющая направление вдоль YO , равна V , вторая — вдоль YV — равна S и третья — вдоль SR — равна R ; эти силы нам известны [68]. Отнесем их к направлениям координат и, обозначив угол AOY через φ , мы получим следующие силы:

$$\text{вдоль } XO \text{ сила} = V \cos \varphi + S \sin \varphi = -P,$$

$$\text{вдоль } YX \text{ сила} = V \sin \varphi - S \cos \varphi = -Q,$$

$$\text{вдоль } SR \text{ сила} = R.$$

Действия этих сил будут выражены следующими тремя формулами:

$$A d^2x = -2g dt^2 (V \cos \varphi + S \sin \varphi),$$

$$A d^2y = -2g dt^2 (V \sin \varphi - S \cos \varphi),$$

$$A d^2z = 2gR dt^2,$$

причем масса тельца принята равной A .

Если обозначить расстояние OY через u , то в силу того, что

$$x = u \cos \varphi,$$

$$y = u \sin \varphi,$$

полученные два уравнения, как это было показано выше (§ 217), примут следующий вид:

$$\text{I. } d^2u - u d\varphi^2 + \frac{2gV dt^2}{A} = 0,$$

$$\text{II. } u d^2\varphi + 2du d\varphi - \frac{2gS dt^2}{A} = 0.$$

Если через ψ обозначить угол SOY , который называется широтой тельца, — в то время как угол $\angle AOY = \varphi$ называется его долготой, — то мы получаем

$$SY = z = u \operatorname{tg} \psi.$$

Для более удобного определения угла ψ возьмем линию узлов OT , причем

$$\text{угол } AOT = \omega,$$

и пусть угол между плоскостью, проведенной через точку O и через направление движения в точке S , и основной плоскостью (чертежа) равен ϱ . Тогда мы получим, что

$$\text{угол } TOY = \varphi - \omega.$$

Если, далее, провести линии YN и SN перпендикулярно к OT , то

$$ON = u \cos (\varphi - \omega)$$

и

$$YN = u \sin (\varphi - \omega).$$

Следовательно,

$$YS = u \sin (\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho = z$$

и

$$\operatorname{tg} \psi = \sin (\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho \text{ [69]}. \quad (69)$$

Как и раньше (§ 70), мы имеем

$$\frac{d\omega}{\operatorname{tg} (\varphi - \omega)} = \frac{d\varrho}{\sin \varrho \cos \varrho} = d \ln \operatorname{tg} \varrho.$$

А так как отсюда

$$d\varrho = \frac{d\omega \sin \varrho \cos \varrho}{\operatorname{tg} (\varphi - \omega)},$$

то мы получаем

$$\begin{aligned} dz &= du \sin (\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho + \\ &+ u (d\varphi - d\omega) \cos (\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho + \\ &+ u \sin (\varphi - \omega) \frac{d\omega \operatorname{tg} \varrho}{\operatorname{tg} (\varphi - \omega)} \end{aligned}$$

или

$$dz = [du \sin (\varphi - \omega) + u d\varphi \cos (\varphi - \omega)] \operatorname{tg} \varrho \text{ [70]}. \quad (70)$$

После повторного дифференцирования это дает

$$\begin{aligned} d^2z &= [d^2u \sin (\varphi - \omega) + \\ &+ du (2d\varphi - d\omega) \cos (\varphi - \omega) + \\ &+ u d^2\varphi \cos (\varphi - \omega) - \\ &- u d\varphi (d\varphi - d\omega) \sin (\varphi - \omega)] \operatorname{tg} \varrho + \\ &+ [du \sin (\varphi - \omega) + \\ &+ u d\varphi \cos (\varphi - \omega)] \frac{d\omega \operatorname{tg} \varrho}{\operatorname{tg} (\varphi - \omega)} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} d^2z &= [d^2u \sin (\varphi - \omega) + 2du d\varphi \cos (\varphi - \omega) + \\ &+ u d^2\varphi \cos (\varphi - \omega) - u d\varphi^2 \sin (\varphi - \omega) + \\ &+ \frac{u d\varphi d\omega}{\sin (\varphi - \omega)}] \operatorname{tg} \varrho. \end{aligned}$$

Отсюда ввиду того что

$$d^2u - u d\varphi^2 = -\frac{2gV dt^2}{A}$$

и

$$u d^2\varphi + 2du d\varphi = \frac{2gS dt^2}{A},$$

мы получаем

$$d^2z = \left[-\frac{2gV dt^2}{A} \sin(\varphi - \omega) + \right. \\ \left. + \frac{2gS dt^2}{A} \cos(\varphi - \omega) + \frac{u d\varphi d\omega}{\sin(\varphi - \omega)} \right] \operatorname{tg} \varrho.$$

Но так как

$$d^2z = \frac{2gR dt^2}{A},$$

то

$$\frac{u d\varphi d\omega}{\sin(\varphi - \omega)} = \frac{2g dt^2}{A} [V \sin(\varphi - \omega) - \\ - S \cos(\varphi - \omega) + R \operatorname{ctg} \varrho]$$

или

$$d\omega = \frac{2g dt^2 \sin(\varphi - \omega)}{Au d\varphi} [V \sin(\varphi - \omega) - \\ - S \cos(\varphi - \omega) + R \operatorname{ctg} \varrho]$$

и

$$d \ln \operatorname{tg} \varrho = \frac{2g dt^2 \cos(\varphi - \omega)}{Au d\varphi} [V \sin(\varphi - \omega) - \\ - S \cos(\varphi - \omega) + R \operatorname{ctg} \varrho].$$

Итак, мы нашли четыре уравнения, в которых содержится решение поставленной задачи [71].

СЛЕДСТВИЕ 1

233. Следовательно, для данного времени t нам должны быть даны четыре величины: u , φ , ω и ϱ . Тогда мы имеем, во-первых, два дифференциальных уравнения второго порядка, а именно:

$$d^2u - u d\varphi^2 + \frac{2gV dt^2}{A} = 0,$$

$$u d^2\varphi + 2du d\varphi - \frac{2gS dt^2}{A} = 0,$$

и следующие два дифференциальных уравнения первого порядка, а именно:

$$d\omega = \frac{2g dt^2 \sin(\varphi - \omega)}{Au d\varphi} [V \sin(\varphi - \omega) - \\ - S \cos(\varphi - \omega) + R \operatorname{ctg} \varrho],$$

$$d \ln \operatorname{tg} \varrho = \frac{d\omega}{\operatorname{tg}(\varphi - \omega)},$$

или, иначе:

$$d \operatorname{tg} \varrho = \frac{d\omega \operatorname{tg} \varrho}{\operatorname{tg}(\varphi - \omega)}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

234. Когда эти величины найдены, тогда можно определить и угол $SOY = \psi$, называемый „широтой“, и расстояние SO . Это осуществляется с помощью следующих формул:

$$\operatorname{tg} \psi = \sin(\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho$$

и

$$OS = \frac{u}{\cos \psi}.$$

Величину u обычно называют „укороченным расстоянием“.

С л е д с т в и е 3

235. Если

$$\sin(\varphi - \omega) = 0,$$

т. е. если тельце проходит через неподвижную плоскость, то мы получаем, что

$$d\omega = 0.$$

В то же время очевидно, что если имеет место

$$V \sin(\varphi - \omega) - S \cos(\varphi - \omega) + R \operatorname{ctg} \varrho = 0,$$

то как линия узлов, так и угол наклона не претерпевают никаких изменений.

С л е д с т в и е 4

236. Но имеется соотношение

$$V \sin(\varphi - \omega) - S \cos(\varphi - \omega) = -Q \cos \omega + P \sin \omega,$$

так что если мы введем в последнее равенство первоначальные силы P , Q и R , то получим

$$V \sin(\varphi - \omega) - S \cos(\varphi - \omega) + \\ + R \operatorname{ctg} \varrho = P \sin \omega - Q \cos \omega + R \operatorname{ctg} \varrho.$$

Здесь мы имеем нечто вроде силы, изменяющей положение линии узлов и угол наклона.

П р и м е ч а н и е

237. Заслуживает быть особенно отмеченным то, что этот довольно искусный метод дает возможность

выразить мгновенное изменение положения линии узлов и угла наклона, что для теоретической астрономии представляет очень большое удобство. Пользуясь им, геттингенский профессор Майер [72] с невероятным прилежанием составил прекрасные лунные таблицы, в которых нужно видеть величайшее достижение астрономии.

Ввиду того, однако, что движение Луны, определяемое по этому методу, ни в коем случае не является абсолютным, а отнесено к центру Земли, при подобном исследовании следует также принимать во внимание и движение Земли. Следовательно, для того чтобы иметь возможность пользоваться этим методом, мы должны сначала изложить приемы, с помощью которых относительные движения можно было бы сводить к вычислениям — при том, конечно, условии, что движение того тела, по отношению к которому определяется движение других тел, известно.

Так как этот вопрос был недостаточно ясно изложен в прежних книгах механики, то я здесь разберу его с большей тщательностью; а выполнив это, мы сможем с большим успехом перейти к рассмотрению движений конечных тел, которых я там совсем не касался.



ПРИМЕЧАНИЯ

1 (к стр. 29). „*Mechanica sive motus scientia analytice exposita*“ вышла в первом издании на латинском языке в 1736 г. в Петербурге (Petrooli) в издании Петербургской академии наук. Книга вышла в двух томах in-quarto. Первый том содержит 480, второй— 500 страниц.

Перевод для настоящего издания сделан по изданию Leonhardi Euleri Opera omnia sub auspiciis societatis scientiarum naturalium helveticae, series II, vol. I, под ред. П. Штекеля (Teubner, 1912).

2 (к стр. 31). Понятие „сила“ Эйлер выражает как через термин „*potentia*“, так и через „*vis*“. Можно заметить, что „*potentia*“ у Эйлера выражает научное, механическое понятие силы, другое же слово „*vis*“ скорее соответствует обыденному значению силы. Однако это различие нельзя провести со всей последовательностью.

3 (к стр. 32). Речь идет о сочинении Varignon, Nouvelle Mécanique ou Statique („Новая механика или статика*), изданном в Париже в 1725 г., уже после смерти автора. Вариньон (1654—1722)— французский математик и механик. Исходя из рычага и пра-

вила параллелограмма сил, Вариньон в указанном сочинении выводил условия равновесия всех простых „машин“. Во втором томе он опирается и на принцип виртуальных скоростей, с которым его познакомил Иоганн Бернулли (в письме от 1717 г.).

4 (к стр. 32). Христиан Вольф (Wolff) — немецкий философ и математик, последователь и систематизатор учения Лейбница (1679—1754). Эйлер говорит — о сочинении Вольфа „*Elementa matheseos universae*“ — „Начала всех математических наук“ (1713—1715), вышедшем ранее на немецком языке под заглавием „*Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften*“ (1710).

5 (к стр. 33). Герман (Hermann) — швейцарский математик (1678—1733). Был профессором в Падуге, во Франкфурте-на-Одере, в 1725 г. был членом Петербургской академии наук. Наиболее известное сочинение его: „*Phoronomia, seu de viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum*“ — „Форономия, или о силах и движениях твердых и жидких тел“. Оно было напечатано в лейпцигском журнале „*Acta eruditum*“ за 1716 г.

6 (к стр. 36). „*Vim insitam*“. Под этим именем Эйлер, как и Ньютон, понимал инерцию тела.

7 (к стр. 40). „*Corollarium*“.

8 (к стр. 41). „*Scholion*“. Под этой рубрикой Эйлер приводит нередко философские рассуждения об употребляемых им понятиях. В „Примечаниях“ Эйлер часто указывает, в какой степени справедливы его формальные рассуждения, содержащиеся в предложениях и следствиях, или же что они имеют ограниченное применение к действительности и практике.

Для истории развития принципов механики этого рода „Примечания“ имеют первостепенное значение.

9 (к стр. 46). „Что и требовалось доказать“. В подлиннике стоит „Q. E. D.“ (Quod erat demonstrandum). Такой припиской сопровождалось во время Эйлера и до него доказательство всякой теоремы.

10 (к стр. 50). В первом издании ошибочно поставлено 23 вместо 24 (примечание Штеккеля).

11 (к стр. 50). Настоящее примечание является иллюстрацией того, как непосредственная практика „вырывается“ в формально логическую математическую систему механики. В примечании считалось разрешенным упоминать „даже“ о практике моряков.

12 (к стр. 54). Здесь имеется в виду так называемый „пруссский фут“, который немного длиннее старого русского фута и равен 31,4 см.

13 (к стр. 56). „Что и требовалось найти“. В подлиннике стоит: „Q. E. I.“ (Quod erat invenlendum). Такой припиской сопровождалось во время Эйлера и до него решение всякой задачи.

14 (к стр. 58). Обозначим AM через x , а MN — через y . Тогда мы будем иметь уравнение кривой AN :

$$y = x^n,$$

где $n < 1$. Из этого уравнения следует, что тангенс угла наклона касательной к этой кривой равен

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}.$$

При $x = 0$ и при условии, что

$$n < 1 \frac{1}{2}$$

эта величина обращается в бесконечность. Следовательно, касательная в точке A перпендикулярна к оси AM .

Если, наоборот, касательная в A образует с AM острый угол, то при

$$x = 0$$

это возможно только в том случае, когда

$$n > 1.$$

Но в § 38 показано, что в таком случае время движения по AM будет бесконечно велико (Вольферс).

15 (к стр. 66). Поясним это решение.

Найдя, что искомая скорость равна

$$c = \frac{ds}{dt},$$

Эйлер пользуется тем, что $\frac{dt}{ds}$ равен тангенсу угла наклона касательной к кривой времен в точке T , и строит равным этому углу угол MTO , образованный нормалью TO и ординатой MT . Но

$$\operatorname{tg} MTO = \frac{MO}{MT}.$$

Отсюда

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\operatorname{tg} MTO} = \frac{MT}{MO}.$$

Далее, остается только построить ординату MN , равную $\frac{MT}{TO}$. Для этого Эйлер составляет пропорцию

$$\frac{MN}{1} = \frac{MT}{MO}$$

и строит треугольник MQN , подобный MTO со стороной $MQ = 1$. В таком случае другая сторона MN этого треугольника и будет ординатой кривой скоростей, соответствующей точке M .

16 (к стр. 67). „Аполлониевой параболой“ является обычная парабола второго порядка, названная таким образом по имени древнегреческого геометра Аполлония из Перги, жившего во второй половине III в. до н. э. и написавшего сочинение „О конических сечениях“.

17 (к стр. 76). „*Vis inertiae*“. Здесь „сила инерции“ обозначает совсем не то, что сейчас понимают под этим в механике. У Эйлера и других авторов того времени это означало инерцию, — но инерцию, обладающую определенной мерой. „Сила инерции“ означает определенную величину инерции. Эта величина определяется массой тела или, наоборот, она определяет массу. См в тексте § 142 (стр. 116 наст. изд.).

18 (к стр. 90). Здесь Эйлером намечена обширная программа исследований по механике, из которой им выполнена только часть. В „Механике“, изданной в 1736 г. (2 тома), захватывается только первая проблема — движение точек, свободное и несвободное. Вторая проблема — движение твердого тела — подверглась рассмотрению у Эйлера в специальном сочинении, изданном в 1765 г. („*Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*“), сочинении, которое можно рассматривать и как третий том его „Механики“.

Что касается других проблем, то здесь Эйлеру принадлежит ряд классических исследований и открытий (теория упругости, гидродинамика).

19 (к стр. 92). Трудно переводимое определение: сила (*potentia*) определяется через силу (*vis*). Последний термин мы заменили термином „усилие“. См. примечание 2.

20 (к стр. 98). Хотя в современной механике и нет деления сил на абсолютные и относительные, как у Эйлера, тем не менее читателю нетрудно будет понять, какой смысл вкладывая Эйлер в их различение; это особенно становится ясным из § 116.

21 (к стр. 101). „*Tempusculum*“ Эйлер употребляет как синоним „элемента времени“, „бесконечно малого времени“. В таком же смысле Эйлер говорит слово „*lineola*“, которое мы переводим „отрезочек“, и „*corpusculum*“ — тельце.

22 (к стр. 106). В подлиннике в этой формуле опечатка, бывшая в первом издании и не исправленная Штеккелем: в знаменателе стоит dz , а не dt .

23 (к стр. 107). Здесь Эйлер отрезок dz считает во всех случаях положительным.

24 (к стр. 114). Буква, которой называется точка („точка a “, „точка b “ и т. д.), обозначает у Эйлера величину массы данной материальной точки. Вместо того чтобы говорить (как говорят сейчас): „точка массы a “, Эйлер и другие авторы того времени говорили: „точка a “. Вместо того чтобы говорить: „масса точки a больше массы точки b “, тогда говорили: „точка a больше точки b “.

Понятие массы тела совершенно не отделялось от понятия количества материи в этом теле. См. в тексте § 139.

25 (к стр. 115). Это весьма существенное „примечание“ раскрывает то, какой смысл вкладывал Эйлер (и современные ему механики) в понятие „масса“. Эйлер связывает массу с количеством материи или с количеством „точек“, составляющих тело. Для атомистов это было количество атомов. Настоящее „примечание“ Эйлера проливает свет и на то, почему Ньютон в своих „Principia“ массу определяет через плотность, а не наоборот. Так делал он потому, что плотность у него связывалась не с массой (в единице объема), а с количеством атомов в единице объема. Настоящее место из „Механики“ Эйлера это полностью подтверждает и выясняет.

26 (к стр. 117). Здесь Эйлер сравнивает силу инерции (см. примечание 17) с приложенной силой, указывая, что это — совершенно различные понятия.

27 (к стр. 123). В предложениях 19 и 20 Эйлер устанавливает то, что составляет содержание второго закона Ньютона. По форме эти теоремы также напоминают этот закон в том смысле, что, как и Ньютон, Эйлер говорит не об ускорении, а о приращении скорости (или дифференциале, что тогда не различалось).

Весьма характерно для Эйлера то, что первым же следствием из предложения 19 он выводит по существу уравнение живых сил (см. особенно § 157). Этим уравнением Эйлер весьма широко пользуется во всех дальнейших вычислениях, почему он и оценил его так высоко.

В то же время Эйлер не указывает физического смысла этого уравнения, не видя в нем в явной форме даже „живых сил“, о которых в то время существовала немалая литература (Лейбниц, Иоганн Бернулли).

Как видно из текста, Эйлер лишь устанавливает пропорциональность величин $c\,dc$ и $p\,ds$, где c — скорость, p — сила, ds — элемент пути. Ему, несомненно, было ясно, что $c\,dc$ — это величина, пропорциональная дифференциалу „живой силы“ mc^2 (как ее обозначали Лейбниц и Бернулли), но, не зная физического смысла другого выражения $p\,ds$, Эйлер не мог сделать никаких выводов. Только тогда, когда техническая практика привела к более или менее отчетливому понятию работы, только тогда указанное уравнение Эйлера получило более удовлетворительную интерпретацию.

Надо, однако, оговориться, что в статике И. Бернулли и Вариньона уже было явное понятие работы (под названием „энергии“), но и там ее физический смысл был далеко не ясен. См. письмо И. Бернулли к Вариньону 1717 г., на русском языке: И. Бернулли. Избранные сочинения по механике, перевод под ред. В. П. Егоршина (в Приложении).

28 (к стр. 124). Daniel Bernoulli, *Examen principiorum mechanicae* („Исследование о принципах механики“). *Comment. acad. sc., Petrop.*, I (1726), 1728, p. 126—141; см. особенно p. 127. (Примечание П. Штеккеля).

29 (к стр. 133). Joh. Bernoulli, *De motu gravium, pendulorum et projectilium* („О движении тяжелых тел, маятников, а также брошенных тел“) *Acta erud. Lips.*, 1713; *Opera omnia*, t. I, Lausannae et Genevae, 1742, p. 531. (Примечание П. Штеккеля).

30 (к стр. 133). „Vis restituens“.

31 (к стр. 136). В этом месте функция $\sin DAC$ выражается у Эйлера символом

$$\int DAC.$$

Функция синуса, как видим, обозначалась им той же стилизованной буквой S , что и интеграл. Современной символики тогда еще никто не употреблял. Заслугой Эйлера является то, что он ввел в широкое употребление именно этот краткий символ для синуса, который перешел в нынешний символ $\sin$. До Эйлера, как правило, тригонометрические функции обозначались каждый раз по-разному (например, синусы обозначались буквами k, p, q, r, s, t и т. д.).

Впрочем, надо заметить, что уже Валлис (Wallis, 1616—1703) определенными буквами обозначал все шесть тригонометрических функций ($S, \Sigma, T, \tau, s, \sigma$).

32 (к стр. 144). В настоящем „Примечании“ Эйлер дает план первого тома своей механики, посвященного, как это мы видели выше, движению свободной точки. Из „Примечания“ видно, что вторая глава имеет для всего тома наиболее принципиальное значение. В остальных главах будет приводиться множество отдельных задач, при решении которых будут применяться принципы второй главы.

33 (к стр. 152). Таким образом ускорение силы тяжести в „наших“ широтах Эйлер принимает за единицу, и масса тела A у него численно делается равной весу этого тела в „наших“ широтах.

34 (к стр. 154). После остроумных, хотя и несколько сложных, преобразований Эйлер приходит к уравнению

$$A dv = p ds;$$

где A — масса тела, v — квадрат его скорости, p — сила, s — длина пути. Это уравнение с точностью до постоянного множителя тождественно с

современным уравнением живых сил в дифференциальной форме. Этому уравнению Эйлер приписывает огромное значение, и он дает его, в сущности, уже в самом начале настоящей главы (см. § 193). И все же Эйлер не видит в нем понятия „живой силы“. См. выше, примечание 27.

35 (к стр. 156). „*Vis potentiae absoluta*“ буквально: „абсолютная сила силы“ или „абсолютная величина силы“. Это понятие соответствует у Эйлера „абсолютной величине силы“ у Ньютона, который отличал от нее ускорительную величину силы (соответствующую современному понятию напряжения поля силы) и движущую величину силы (дающую динамическую меру силы).

36 (к стр. 161). Для понимания всего рассуждения Эйлера необходимо напомнить, что он пользуется особыми соотношениями размерностей. См. примечание 33.

37 (к стр. 176). Надо, очевидно, подразумевать не „скорость c “, а „скорость, соответствующую высоте c “. Эйлер настолько широко пользуется связью скорости с высотой, что говорит очень кратко об одном вместо другого без всяких оговорок.

Объективно все это имеет тот смысл, что Эйлер вплотную подходит к уравнению живых сил.

38 (к стр. 182). „Центростремительная сила“ у Эйлера, как и у Ньютона, означает то, что теперь называется центральной силой.

39 (к стр. 199). Эйлер впервые ввел букву π для обозначения отношения длины окружности к своему диаметру. Ф. Рудио в статье „Обзор истории задачи

о квадратуре круга от древности до наших дней" (приложенной к сборнику Архимед, Гюйгенс, Ламберт, Лежандр, О квадратуре круга, пер. с нем. под ред. акад. С. Н. Бернштейна, ГТТИ, 1934) пишет вслед за Энештрёмом (*Bibliotheca mathematica*, 1899), что впервые букву π Эйлер употребил в статье „*Variae observationes circa series infinitas*“, относящейся к 1737 г.

Здесь мы должны исправить ошибку, указав, что уже в своей „*Mechanica*“, изданной в Петербурге в 1736 г., Эйлер пользуется символом $\frac{1}{\pi}$ для обозначения отношения диаметра к его окружности и символом π — для обратного отношения.

40 (к стр. 199). Здесь Эйлером получен вывод изохронного характера гармонических колебаний.

41 (к стр. 210). Поясним, следуя Вольферсу, настоящий параграф.

Интеграл из § 290

$$\int \frac{dy}{\sqrt{v}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2a^{\frac{2}{2m-1}}}{(2m-1) \int \frac{y^{\frac{1}{2m-1}} dy}{a^{\frac{2}{2m-1}} - y^{\frac{2}{2m-1}}}} \int_0^a \frac{y^{\frac{1}{2m-1}} dy}{a^{\frac{2}{2m-1}} - y^{\frac{2}{2m-1}}}$$

мы преобразуем, сделав подстановку

$$y^{\frac{1}{2m-1}} = z$$

и

$$a^{\frac{1}{2m-1}} = b.$$

После подстановки мы получим

$$\int \frac{dy}{\sqrt{v}} = b \sqrt{\frac{2(2m-1)}{f^{2m+1/2m-1}}} \int_0^b \frac{z^{2m-1} dz}{\sqrt{b^2 - z^2}}.$$

Интеграл находится с помощью рекуррентной формулы

$$\begin{aligned} \int \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} = & -\frac{x^{n-1}}{n} \sqrt{1-x^2} + \\ & + \frac{n-1}{n} \int \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1-x^2}} dx, \end{aligned}$$

которая приводит к различным результатам, смотря по тому, четное n или нечетное. Для нечетных n (что будет соответствовать целым значениям m) мы будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} &= 1, \quad \int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{3}, \\ \int_0^1 \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Для четных n (что будет соответствовать m равным целому числу $+\frac{1}{2}$) мы будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}, \\ \int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\pi}{2} \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Применяя только что сказанное к выражению

$$b \sqrt{\frac{2(2m-1)}{f^{2m+1/2m-1}}} \int_0^b \frac{z^{2m-1} dz}{\sqrt{b^2 - z^2}},$$

мы находим для $m = 1$:

$$\begin{aligned} & b \sqrt{\frac{2}{f^3}} \int_0^b \frac{z dz}{\sqrt{b^2 - z^2}} = \\ & = b^2 \sqrt{\frac{2}{f^3}} \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}} = b^2 \sqrt{\frac{2}{f^3}} = \frac{a^2 \sqrt{2}}{f \sqrt{f}}; \end{aligned}$$

для $m = 2$:

$$\begin{aligned} & b \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{f^{5/3}}} \int_0^b \frac{z^3 dz}{\sqrt{b^2 - z^2}} = \frac{2}{3} b^4 \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{f^{5/3}}} = \\ & = \frac{2}{3} a^{4/3} \sqrt{\frac{6f}{f^{8/3}}} = \frac{2}{3} \frac{a^{4/3}}{f^{4/3}} \sqrt{6f}; \end{aligned}$$

для $m = 3$:

$$\begin{aligned} & b \sqrt{\frac{2 \cdot 5}{f^{7/5}}} \int_0^b \frac{z^5 dz}{\sqrt{b^2 - z^2}} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} b^6 \sqrt{\frac{10}{f^{7/5}}} = \\ & = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} a^{6/5} \sqrt{\frac{10f}{f^{12/5}}} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \frac{a^{6/5}}{f^{6/5}} \sqrt{10f} \end{aligned}$$

и т. д.

Далее, для $m = \frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned} & b \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{f^{4/2}}} \int_0^b \frac{z^3 dz}{\sqrt{b^2 - z^2}} = \\ & = \frac{2b^3}{f} \int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2} \frac{a^{3/2}}{f} \pi; \end{aligned}$$

для $m = \frac{5}{2}$:

$$\begin{aligned} & b \sqrt{\frac{2 \cdot 4}{f^{6/4}}} \int_0^b \frac{z^5 dz}{\sqrt{b^2 - z^2}} = \\ & = 2b^5 \sqrt{\frac{2}{f^{6/4}}} \int_0^1 \frac{x^5 dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \\ & = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} b^5 \pi \sqrt{\frac{2f}{f^{10/4}}} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{a^{5/4} \pi}{f^{5/4}} \sqrt{2f} \end{aligned}$$

и т. д.

42 (к стр. 218). Для нахождения интеграла

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{-\ln z}} \quad (1)$$

мы положим

$$\sqrt{-\ln z} = t,$$

откуда

$$z = e^{-t^2}$$

и

$$dz = -2te^{-t^2} dt.$$

Интеграл (1) после подстановки получит вид:

$$-2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Для того чтобы сделать понятными ссылки Эйлера в настоящем параграфе, возьмем интеграл

$$\int_0^1 (-\ln x)^n dx$$

и применим к нему рекуррентную формулу:

$$\begin{aligned} \int (-\ln x)^n dx &= x(-\ln x)^n + n \int (-\ln x)^{n-1} dx = \\ &= x(-\ln x)^n + nx(-\ln x)^{n-1} + \\ &+ n(n-1) \int (-\ln x)^{n-2} dx = \\ &= x(-\ln x)^n + nx(-\ln x)^{n-1} + \\ &+ n(n-1)x(-\ln x)^{n-2} + \dots + \\ &+ n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 \cdot x + C. \end{aligned}$$

Переходя к определенному интегралу и опуская произвольную постоянную, определим значения полученного выражения при предельных значениях. При $x = 0$ оно обращается в нуль. В самом деле, последний член, не содержащий логарифма, очевидно равен нулю. Для того чтобы показать, что в нуль обращаются и остальные члены, сделаем подстановку

$$-\ln x = t,$$

откуда

$$x = e^{-t} = \frac{1}{e^t} = \frac{1}{1 + t + \frac{t^2}{1 \cdot 2} + \frac{t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots}.$$

В таком случае

$$x(-\ln x)^n = \frac{t^n}{e^t} = \frac{1}{\frac{1}{t^n} + \frac{1}{1!t^{n-1}} + \frac{1}{2!t^{n-2}} + \dots + \frac{1}{(n-1)!t} + \frac{1}{n!} + \frac{t}{(n+1)!} + \frac{t^2}{(n+2)!} + \dots}$$

При $x = 0$ новое переменное $t = \infty$. Вставляя в последнее выражение

$$t = \infty,$$

мы находим, что оно действительно обращается в нуль.

Легко видеть, что также в нуль обращаются и все другие члены, содержащие $(-\ln x)$ в степени до первой включительно.

Таким образом значение интеграла при нижнем пределе равно нулю.

При $x = 1$ все первые члены, за исключением последнего, т. е. все члены, содержащие $(-\ln x)$, обращаются в нуль, так как

$$\ln 1 = 0.$$

Остается последний член

$$n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 \cdot x,$$

который дает

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)n = n!$$

Это и будет значение искомого интеграла.

Давая n значения 1, 2, 3 и т. д., мы будем иметь

$$\int_0^1 -\ln x \, dx = 1,$$

$$\int_0^1 (-\ln x)^2 \, dx = 1 \cdot 2,$$

$$\int_0^1 (-\ln x)^3 \, dx = 1 \cdot 2 \cdot 3,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\int_0^1 (-\ln x)^n \, dx = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n.$$

Мы получим, таким образом, упоминаемый Эйлером ряд

$$1, 2, 6, 24, \dots, n!,$$

соответствующий последовательному ряду значений числа n .

Данный в задаче интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$$

Эйлер рассматривает как член этого ряда при $n = -\frac{1}{2}$ (по Вольферсу).

„Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae“ — „Записки Петербургской академии наук“, журнал, выходивший с 1727 г. В этом журнале, в томе V, была напечатана статья Л. Эйлера „De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebrae dari nequeunt“ — „О трансцендентных рядах, т. е. о рядах, общий член которых не может быть выражен алгебраически“.

43 (к стр. 220). Следует обратить внимание, что здесь равны друг другу не два интеграла, а интеграл

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{-\ln z}}$$

и выражение

$$\sqrt{2 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}},$$

т. е. корень из удвоенного интеграла.

Кроме того, следует заметить, что эти выражения равны друг другу только в том случае, когда интегралы берутся в пределах от нуля до единицы (по Вольферсу).

44 (к стр. 227). В этом можно убедиться, если учесть, что кривая AM есть кривая высот v и что

$$\frac{dv}{dy} = p = -\frac{y^n}{f^n}.$$

Радиус кривизны кривой AM , равный

$$\frac{\left(1 + \frac{dv}{dy}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2v}{dy^2}},$$

при $y = 0$ обращается в нуль, если $0 < n < 1$. В самом деле,

$$\frac{dv}{dy} = -\frac{y^n}{f^n}$$

обращается в нуль, вторая же производная

$$\frac{d^2v}{dy^2} = -\frac{n}{f^n} y^{n-1}$$

при $y = 0$ и при $n - 1 < 0$ обращается в бесконечность (по Вольферсу).

45 (к стр. 228). „Temporis puncto“.

46 (к стр. 253). В первом издании настоящее следствие ошибочно было формулировано в следующем виде:

„Если

$$n = 1,$$

т. е. если время падения будет пропорционально пройденному пути, то центростремительная сила будет обратно пропорциональна расстоянию“. Исправление сделано П. Штеккелем.

47 (к стр. 263) „Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum ex primis nostrae cognitionis principiis stabilita et ad omnes motus, qui in huiusmodi corpora cadere possunt, accomodata“. Это сочинение было издано в 1765 г. (Росток и Грейфсвальд), когда Эйлер был директором математического отдела Берлинской академии наук. Сочинение содержало 520 страниц in-quarto. Перевод сделан по этому первому изданию.

„Theoria motus“ можно рассматривать как третий том „Механики“ Эйлера. В соответствии с этим немецкий переводчик Вольферс и объединил все три тома под одним названием.

48 (к стр. 299). В настоящем сочинении Эйлер уже пользуется в механике неподвижными осями координат, введенными впервые Маклореном в 1742 г.

Заметим, что здесь символ $\sin$ у Эйлера имеет вид

$$\int in$$

символ же $\cos$ — иногда cos , иногда $co \int$. См. примечание 31.

49 (к стр. 312). Здесь Эйлер имеет в виду полярные координаты, к которым он и переходит в следующих задачах. Для задачи в пространстве (задача 5)

Эйлер пользуется полярными координатами, несколько отличными от употребляющихся ныне.

50 (к стр. 313). Здесь Эйлер приводит известную формулу для тангенса угла между радиусом-вектором, проведенным в точку на кривой, и касательной к кривой в этой точке. Однако то обоснование этой формулы, которое мы находим здесь у Эйлера, весьма далеко от математической строгости. Не зная теории пределов, Эйлер безоговорочно смешивает дугу кривой с касательной и секущей.

Заметим, что приведенное несколькими строками выше указание, что „полный синус“ полагается равным единице, объясняется тем, что во время Эйлера и ранее тригонометрические функции представлялись не в виде отношений, а в виде отрезков. При этом должно было быть указано, чему равен радиус тригонометрической окружности. Этот радиус именовался в данном случае „полным синусом“, так как он изображал синус прямого угла.

51 (к стр. 317). Заметим, что Эйлер $\sin^2(\varphi - \omega)$ обозначает через $\sin(\varphi - \omega)^2$, $\cos^2 \varrho$ через $\cos \varrho^2$ и т. п.

Предпоследнее равенство

$$OS = \frac{z}{\cos \varrho} \sqrt{\sin^2(\varphi - \omega) + \cos^2(\varphi - \omega) \cos^2 \varrho}$$

путем замены $\sin^2(\varphi - \omega)$ через $1 - \cos^2(\varphi - \omega)$ принимает вид

$$OS = \frac{z}{\cos \varrho} \sqrt{1 - \cos^2(\varphi - \omega) + \cos^2(\varphi - \omega) \cos^2 \varrho},$$

или, в окончательном виде

$$OS = \frac{z}{\cos \varrho} \sqrt{1 - \cos^2(\varphi - \omega) \sin^2 \varrho}.$$

52 (к стр. 321). „De internis motus principiis“. Слово „principium“ здесь употребляется не в смысле логического принципа, а в смысле субстанциального начала, источника, как это видно из § 75.

53 (к стр. 354). В этом сочинении Эйлер для понятия силы пользуется только словом „vis“, тогда как в первых частях „Механики“ им употреблялось слово „potentia“ (см. примечание 2).

54 (к стр. 372). Словом „действие“ мы переводим здесь латинское „effectus“.

55 (к стр. 385). Словом „сущность“ мы переводим здесь латинское „realitas“.

56 (к стр. 386). Под двумя видами материи Эйлер понимает обычные вещества и эфир.

57 (к стр. 389). Эйлер постепенно подходит к соотношению между силой и ускорением. Но до сих пор он говорил о пропорциональности силы и элемента пути, а не ускорения. Это он мог делать, принимая элемент времени dt постоянным и беря только начальный момент движения. В этом случае элемент пути ds можно считать пропорциональным dv или ускорению $\frac{dv}{dt}$. В последних строках Эйлер точно указывает эти условия, переходя в следующем параграфе к общему случаю.

58 (к стр. 404). Здесь сказывается у Эйлера влияние Лейбница, который различал истины необходимые и случайные. Первые, по Лейбницу, рациональны, независимы от опыта и получаются из чистого разума. Примером такой истины считалась математика. Наоборот, случайные истины — это факти-

ческие истины, зависящие от опыта. Такого рода истины видели в физике.

В данном случае Эйлер говорит об уравнениях движения Ньютона, из которых он и стремится вывести всю механику.

59 (к стр. 409). Для понимания настоящего параграфа следует иметь в виду, что хотя во времена Эйлера уже принимался закон тяготения Ньютона, тем не менее еще продолжались споры о физической сущности силы тяготения. Эйлер не хотел видеть в тяжести „притяжение“ (или „тяготение“), действующее „на расстоянии“, и считал необходимым объяснить ее действием эфира — „тонкой материи“ („близкодействие“).

60 (к стр. 416). В подлиннике „Hypothesis“. Это слово, нередко встречаемое в математических сочинениях XVII и XVIII вв., означает не „гипотезу“, а „то, что полагается в основание“. Таков именно первоначальный смысл греческого слова „*ὑπόθεσις*“, означающего „подкладка“, „основа“, „основание“, „принцип“. Поэтому здесь мы переводим это слово как „основное положение“. Слово „hypothesis“ в этих случаях имело не теоретико-познавательный, а скорее формально-логический смысл.

61 (к стр. 435). В подлиннике „*motu coacto*“.

62 (к стр. 441). Символ

$$\arccos \frac{v}{c}$$

у Эйлера имел вид:

$$A \cos \int \frac{v}{c}.$$

63 (к стр. 416). Поясним этот вывод:

После умножения уравнения II (конец § 217) на $2u^3 d\varphi$ мы получим:

$$u^4 d\varphi^2 = \frac{4g dt^2}{A} \int Su^3 d\varphi. \quad (a)$$

Умножая же последнее уравнение из § 219 на u^2 , мы получаем

$$u^2 du^2 + u^4 d\varphi^2 = \frac{4g dt^2}{A} \left[u^2 \int Su d\varphi - u^2 \int V du \right].$$

Подставляя в последнее уравнение вместо $u^4 d\varphi^2$ правую часть из уравнения (a), мы после переноса части членов направо будем иметь

$$\begin{aligned} & u^2 du^2 = \\ & = \frac{4g dt^2}{A} \left[u^2 \int Su d\varphi - \int Su^3 d\varphi - u^2 \int V du \right]. \quad (b) \end{aligned}$$

Первый член в скобках правой части можно представить в следующем виде

$$u^2 \int Su d\varphi = \int d \left[u^2 \int Su d\varphi \right],$$

или после дифференцирования под знаком интеграла мы будем иметь

$$\begin{aligned} u^2 \int Su d\varphi &= \int 2u du \int Su d\varphi + \int u^2 d \int Su d\varphi = \\ &= 2 \int u du \int Su d\varphi + \int Su^3 d\varphi. \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (b), мы получим

$$u^2 du^2 = \frac{4g dt^2}{A} \left[2 \int u du \int Su d\varphi - u^2 \int V du \right].$$

64 (к стр. 447). Когда сила $S = 0$, то на основании § 218

$$u^2 d\varphi = dt \cdot \text{const},$$

что Эйлер пишет в виде

$$u^2 d\varphi = f^2 dt. \quad (c)$$

Подставляя также $S = 0$ в последнее уравнение § 219, мы получим

$$du^2 + u^2 d\varphi^2 = dt^2 \cdot \text{const} - \frac{4g dt^2}{A} \int V du,$$

где Эйлер принимает

$$\text{const} = c^2.$$

Вводя это обозначение Эйлера и заменяя во втором члене $u d\varphi$ равным ему выражением, полученным из равенства (c), мы получим

$$du^2 = - \frac{f^4 dt^2}{u^2} - \frac{4g dt^2}{A} \int V du + c^2 dt^2.$$

65 (к стр. 447). Последнее выражение получается, если подставить только что найденное выражение для dt в равенство, приведенное в начале § 221:

$$u^2 d\varphi = f^2 dt.$$

Опечатки, имеющиеся в этом параграфе в подлиннике, мы исправили.

66 (к стр. 453). Последнее уравнение из § 223.

67 (к стр. 455). Из сферического треугольника NPV сферическая тригонометрия дает нам следующую формулу:

$$\cos PN = \cos NV \cos PV + \sin NV \sin PV \cos NVP,$$

что равно

$$\cos NV \sin PV - \sin NV \sin PV \cos PVs.$$

Но

$$\cos NV = \sin Vs = \sin \omega,$$

$$\sin NV = \cos \omega,$$

$$\cos PV = \frac{P}{V}.$$

Далее, из треугольника PVs мы имеем

$$\cos PVs = \frac{\cos Ps - \cos PV \cos Vs}{\sin PV \sin Vs}.$$

Вставляя все это в первоначальную формулу, мы получим

$$\cos PN = \frac{P}{V} \sin \omega - \frac{\cos \omega \cos Ps}{\sin Vs} + \frac{\cos \omega \cos PV \cos Vs}{\sin Vs}.$$

Но так как

$$\cos PV = \frac{P}{V},$$

$$\sin Vs = \sin \omega,$$

$$\cos Vs = \cos \omega,$$

$$\cos Ps = \frac{dx}{ds},$$

то мы получим

$$\cos PN = \frac{P}{V} \sin \omega - \frac{\cos \omega dx}{\sin \omega ds} + \frac{P \cos^2 \omega}{V \sin \omega},$$

или после преобразований мы получим окончательно

$$\cos PN = \frac{P}{V \sin \omega} - \frac{\cos \omega dx}{\sin \omega ds}.$$

Аналогичным путем можно получить и остальные две формулы (по Вольферсу).

68 (к стр. 461). Точка S (рис. 23) расположена над плоскостью чертежа, и точка Y является ее проекцией на плоскость. Эйлер здесь пользуется прямоугольными координатами ($OX = x$, $XY = y$ и $YS = z$), цилиндрическими ($OY = u$, $\angle AOY = \varphi$ и $YS = z$) и, наконец, в дальнейшем он переходит к особым координатам, представляющим собой нечто среднее между цилиндрическими координатами и „эйлеровыми углами“. В данном случае указаны компоненты равнодействующей сил по оси z (компонента R), по радиусу YO (компонента V) и по касательной YV (компонента S). Вслед за этим Эйлер разлагает равнодействующую сил и по прямоугольным осям, обозначая соответствующие компоненты через $-P$, $-Q$ и R . Знак минус перед P и Q объясняется тем, что Эйлер берет направление соответствующих компонент к центру O .

69 (к стр. 463). Линия OT — линия узлов, т. е. линия пересечения неподвижной плоскости (плоскости чертежа) и плоскости, проведенной через точку O и через касательную к траектории движения в точке S . Она образует с осью OA угол ω (называемый в астрономии *прецессией*). Двугранный угол между

этими указанными плоскостями, измеряемый углом SNY , обозначен Эйлером через ϱ . Это соответствует углу, называемому в астрономии *нутацей*.

Угол ONY прямой, а потому

$$ON = u \cos NOY = u \cos (\varphi - \omega),$$

$$YN = u \sin NOY = u \sin (\varphi - \omega).$$

Но из прямоугольного треугольника SYN

$$YS = z = YN \operatorname{tg} SNY,$$

т. е.

$$z = u \sin (\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho.$$

С другой стороны,

$$z = u \operatorname{tg} \psi.$$

Приравнивая эти два выражения, мы получим

$$\operatorname{tg} \psi = \sin (\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho.$$

Так, широта ψ выражается через прецессию, нутацию и долготу φ .

Таким образом Эйлер целиком перешел от прямоугольных координат к новым координатам

$$n, \varphi, \omega \text{ и } \varrho,$$

из которых независимых будет, конечно, только три.

70 (к стр. 463). Дифференцируя равенство

$$z = u \sin (\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho,$$

полученное выше, мы имеем

$$dz = \sin (\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho du + u \cos (\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho (d\varphi - d\omega) + \\ + u \sin (\varphi - \omega) \frac{d\varrho}{\cos^2 \varrho}.$$

Вставляя сюда

$$dq = \frac{d\omega \sin \varrho \cos \varrho}{\operatorname{tg}(\varphi - \omega)},$$

мы получим

$$dz = \sin(\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho du + u \cos(\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho (d\varphi - d\omega) + \\ + u \sin(\varphi - \omega) \frac{\operatorname{tg} \varrho d\omega}{\operatorname{tg}(\varphi - \omega)}.$$

Производя сокращения, мы получим окончательно

$$dz = [\sin(\varphi - \omega) du + u \cos(\varphi - \omega) d\varphi] \operatorname{tg} \varrho.$$

71 (к стр. 464). Из четырех уравнений два приведены последними (они дают $d\omega$ и $d \ln \operatorname{tg} \varrho$), остальные два получены выше (под номерами I и II).

Последнее уравнение получено из соотношения, приведенного ранее, а именно:

$$d \ln \operatorname{tg} \varrho = \frac{d\omega}{\operatorname{tg}(\varphi - \omega)},$$

и из предыдущего уравнения, определяющего $d\omega$.

Таким образом мы получим четыре дифференциальных уравнения, из которых нужно находить четыре функции от времени t :

$$u, \varphi, \omega \text{ и } \varrho.$$

72 (к стр. 467). Товий Майер (Mayer) — немецкий астроном (1723—1762) составил таблицы движения Луны, воспользовавшись теоретическими данными из книги Эйлера „Теория движения луны“ (Theoria Motus Lunae), изданной в 1753 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	<i>Стр.</i>
Предисловие редактора	5

Л. Эйлер

МЕХАНИКА, т. е. НАУКА О ДВИЖЕНИИ, ИЗ-
ЛОЖЕННАЯ АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Предисловие	31
Глава I. О движении вообще	40
Глава II. О действии сил на свободную точку	92
Глава III. О прямолинейном движении свобод- ной точки под действием абсолют- ных сил	145

Л. Эйлер

ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ. ВВЕДЕ-
НИЕ, СОДЕРЖАЩЕЕ НЕОБХОДИМЫЕ ПОЯСНЕ-
НИЯ И ДОПОЛНЕНИЯ О ДВИЖЕНИИ ТОЧЕК

Глава I. О движении вообще	265
Глава II. О внутренних началах движения.	321
Глава III. О внешних причинах движения, т. е. о силах	354
Глава IV. Об абсолютных мерах, выведенных из падения тяжелых тел	407
Глава V. Об абсолютном движении телец, на- ходящихся под действием произ- вольных сил	427
Примечания	469

