ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

№ 3 ФИЗИКА 1992

УДК 535.1

Н. П. ХВОРОСТЕНКО

ПРОДОЛЬНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Обсуждается гипотеза о существовании продольных электромагнитных волн в любых средах.

Проблема продольных электромагнитных волн впервые была сформулирована в квантовой электродинамике (КЭД). При создании этой теории возник целый ряд трудностей из-за отсутствия в лагранжиане поперечного электромагнитного поля производных по времени от скалярного потенциала A_0. Это не давало возможности релятивистски-инвариантно применять каноническую схему квантования, пока в 1932 г. В. Фок и Б. Подольский не ввели в лагранжиан поля дополнительный «член, фиксирующий калибровку». Такое расширение электродинамики позволило согласовать теорию электромагнитного поля с перестановочными соотношениями, но органично включило в нее новый объект — продольные электромагнитные волны, которые явно противоречили максвелловскому представлению об исключительной поперечности электромагнитных волн. Этому представлению противоречила и разработанная в КЭД модель физического вакуума, являющегося плазмой виртуальных электронов и позитронов. Известно, что в плазме могут распространяться как поперечные, так и продольные (ленгмюровские) волны; следовательно, вакуум квантовой электродинамики, как среда распространения, допускает возбуждение в нем продольных волн.

В конце концов был найден ряд аргументов для исключения этих противоречий из КЭД. Было показано [1], что в рамках теории поперечных электромагнитных волн продольные волны следует считать «нефизическими», хотя они и должны обязательно входить в математический аппарат КЭД. При этом осталось невыясненным, существуют ли какие-либо более общие доказательства нефизичности продольных волн, основанные на не связанном с теорией Максвелла анализе релятивистской и калибровочной инвариантности, самосогласованности теории либо на доказательстве отсутствия в природе материальных источников таких волн? В научной литературе вообще пока неизвестны исследования, результаты которых могли бы явиться основой достаточно общей и непротиворечивой теории продольных электромагнитных волн. Частичному восполнению этого пробела посвящена настоящая работа.

Рассматриваемую задачу можно решать традиционно: выбрать лагранжиан типа лагранжиана Фока—Подольского и проанализировать вытекающие из него уравнения поля. Основная трудность такого подхода определяется отсутствием алгоритмов однозначного составления лагранжианов в адекватном решаемой задаче виде. Ниже будет показано, что физически содержательная теория продольных электромагнитных волн основывается на лагранжиане несколько более общего вида, чем лагранжиан Фока—Подольского. Поэтому воспользуемся нетрадиционным методом, который позволяет, по крайней мере в постановке задачи и выводе основных уравнений, вообще отказаться от лагранжева формализма и, тем самым, от необходимости начинать анализ с гипотез.

Математической основой для такого подхода является выявленная в [2] взаимосвязь между уравнениями Максвелла и Дирака: восемь покоординатных уравнений Максвелла линейным преобразованием могут быть представлены в виде двух уравнений Дирака:

$$i\hbar\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}=H\varphi_1,\quad i\hbar\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}=H^*\varphi_2, \tag{1}$$

где

$$H=c\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{p}-\beta mc^2,\quad \boldsymbol{p}=-i\nabla.$$

Здесь спинорные волновые функции $\varphi_1=(\varphi_{11},\varphi_{12},\varphi_{13},\varphi_{14})$ и $\varphi_2=(\varphi_{21},\varphi_{22},\varphi_{23},\varphi_{24})$ в совокупности содержат восемь компонент, а напряженности поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ в исходных уравнениях Максвелла — только шесть. В [3, 4] уравнения (1) трактуются как две комплексно-сопряженные формы представления одного и того же уравнения Дирака для безмассового спинорного поля $\varphi=\varphi_1=\varphi_2^*$. При этом теряется необходимая нам в дальнейшем возможность рассматривать спинорные поля φ_1 и φ_2 независимо. В [2] было показано, что эквивалентность уравнений (1) уравнениям Максвелла достигается наложением на компоненты функций φ_1, φ_2 дополнительного условия

$$\varphi_{12}-\varphi_{22}=0,\quad \varphi_{14}+\varphi_{24}=0. \tag{2}$$

Соотношения (2) являются спинорным представлением условия поперечности электромагнитного поля. Для целей настоящего исследования важно, чтобы это ограничение на вид рассматриваемого поля было с самого начала исключено. С точки зрения теории уравнений Дирака (1) оно не является обязательным: физически содержательными являются любые решения этих уравнений, а не только те, которые удовлетворяют условию поперечности (2). Чтобы, оставаясь в рамках физической содержательности теории, рассмотреть электромагнитное поле более общего вида, достаточно в правой части соотношений (2) написать произвольные пока функции H_0 и E_0, отображающие независимость φ_{22} от φ_{12} и φ_{24} от φ_{14}. Электродинамический смысл этих функций выяснится в дальнейшем.

Следовательно, с учетом результатов [2], спинорные волновые функции φ_1, φ_2 в общем случае выражаются через компоненты напряженностей поля $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ и функции E_0, H_0 следующим образом:

$$\begin{gathered}\varphi_{11}=E_x-iE_y,\quad \varphi_{12}=E_z-iH_0,\quad \varphi_{13}=H_y+iH_x,\quad \varphi_{14}=-E_0+iH_z,\\ \varphi_{21}=E_x+iE_y,\quad \varphi_{22}=E_z+iH_0,\quad \varphi_{23}=H_y-iH_x,\quad \varphi_{24}=-E_0-iH_z.\end{gathered} \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1), после необходимых линейных преобразований получаем уравнения электродинамики, выведенные без использования условия поперечности (2):

$$\begin{gathered}p_t\boldsymbol{E}-\operatorname{rot}\boldsymbol{H}+\operatorname{grad}E_0=0,\quad p_tE_0+\operatorname{div}\boldsymbol{E}=0,\\ p_t\boldsymbol{H}+\operatorname{rot}\boldsymbol{E}+\operatorname{grad}H_0=0,\quad p_tH_0+\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0,\end{gathered} \tag{4}$$

где

$$p_t=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}.$$

Здесь и далее напряженности поля представлены в безразмерной нормировке [2]: $\boldsymbol{E} \to \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/4} \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H} \to \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/4} \boldsymbol{H}$.

Чтобы убедиться, что уравнения (4), наряду с поперечными волнами, описывают и предмет настоящих исследований — продольные электромагнитные волны, достаточно методом, аналогичным выводу теоремы Умова—Пойнтинга [5], преобразовать (4) в уравнение непрерывности

$$p_t W + \operatorname{div} \boldsymbol{S} = 0,$$

где

$$W = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2 + E_0^2 + H_0^2), \tag{5}$$

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} + E_0\boldsymbol{E} + H_0\boldsymbol{H}. \tag{6}$$

В выражении для вектора Умова—Пойнтинга (6) явно выделились три возможные моды электромагнитных волн: одна поперечная и две продольные. В частном случае $\boldsymbol{E}=0$, $E_0=0$ уравнения (4) сводятся к уравнениям для одной из этих мод:

$$p_t \boldsymbol{H} + \operatorname{grad} H_0 = 0, \quad p_t H_0 + \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0, \tag{7}$$

а именно — для продольных H-волн с вектором Умова—Пойнтинга $\boldsymbol{S} = H_0 \boldsymbol{H}$.

В КЭД поперечное электромагнитное поле обычно описывается одним 4-потенциалом (A_0, $\boldsymbol{A}$), который содержит недостаточное количество компонент для представления обобщенного поля (4). В классической электродинамике разработан математический аппарат с двумя 4-потенциалами, полностью соответствующий требованиям исследуемой задачи. В этом случае целесообразно воспользоваться следующими соотношениями между напряженностями и потенциалами [5, 6]:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{E} = -p_t \boldsymbol{A} - \operatorname{rot} \boldsymbol{M} - \operatorname{grad} A_0, \quad E_0 = p_t A_0 + \operatorname{div} \boldsymbol{A}, \\ \boldsymbol{H} = -p_t \boldsymbol{M} + \operatorname{rot} \boldsymbol{A} - \operatorname{grad} M_0, \quad H_0 = p_t M_0 + \operatorname{div} \boldsymbol{M}, \end{gathered} \tag{8}$$

подстановка которых в (4) приводит к независимым волновым уравнениям для всех компонент потенциалов (A_0, $\boldsymbol{A}$), (M_0, $\boldsymbol{M}$).

Из второго соотношения в (8) и из уравнений (4) видно, что скалярная напряженность E_0 является именно тем «членом, фиксирующим калибровку», который был добавлен В. Фоком и Б. Подольским в уравнения Максвелла для их согласования с канонической схемой квантования [5]. Ниже будет показано, что связанные с E_0 продольные E-волны в квантовой электродинамике обоснованно считаются «нефизическими». В (8) имеется и второй «член, фиксирующий калибровку» — скалярная напряженность H_0, которая не была использована в лагранжиане Фока—Подольского только потому, что он основан на одном 4-потенциале A. Наличие двух дополнительных скалярных напряженностей E_0, H_0 в уравнениях (4) позволяет с более общих позиций, чем это обычно делается в КЭД, проанализировать физичность продольных волн.

Нетрудно убедиться, что уравнения (4) релятивистски-инвариантны: при лоренцевом преобразовании координат векторные напряженности трансформируются так же, как в уравнениях Максвелла, а скалярные напряженности E_0, H_0 — как скалярные функции. Из выражения для плотности энергии (5) видно, что уравнения (4) удовлетворяют и условию положительной определенности энергии. Используя лагранжев формализм, можно показать, что этой же положительно определенной величине (5) равна компонента T^{00} симметризированного тензора энергии-импульса для каждой из «физических» электромагнитных мод.

Лагранжев формализм требуется и для проверки двух остальных условий физической содержательности теории — ее калибровочной инвариантности и самосогласованности. Вид выражения для лагранжиана свободного электромагнитного поля с точностью до 4-дивергенции однозначно следует из уравнений (4). Используя один из двух инвариантов этих уравнений, получаем

$$L_{\text{эм}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{H}^2 + H_0^2 - E_0^2), \tag{9}$$

где обобщенные 4-напряженности E, H выражаются через потенциалы соотношениями (8). Варьируя (9) по всем восьми компонентам потенциалов A, M, получим уравнения (4).

Составляющая лагранжиана взаимодействия $L^A_{\text{вз}}$, связанная с 4-потенциалом A, известна из электродинамики поперечных волн [7]: $L^A_{\text{вз}} = q_e(\boldsymbol{I}\boldsymbol{A} - I_0A_0)$, где 4-вектор $(I_0, \boldsymbol{I})$ — это плотность электрического заряда и тока в теории уравнения Дирака; $q_e = e$ — электрический заряд электрона, выступающий здесь как константа взаимодействия. Из соотношений (8) видно, что 4-потенциал M является псевдовектором (аксиальным вектором), поэтому он образует инвариант с описывающим движение спинового магнитного момента аксиальным током $(J_0, \boldsymbol{J})$ спинорной волновой функции электрона [7]: $\boldsymbol{J}\boldsymbol{M} - J_0M_0 = \text{inv}$.

Таким образом, лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля (9) со спинорным полем электронов в общем случае может быть записан в следующем виде:

$$L_{\text{вз}} = q_e(\boldsymbol{I}\boldsymbol{A} - I_0A_0) + q_m(\boldsymbol{J}\boldsymbol{M} - J_0M_0), \tag{10}$$

где дополнительную константу взаимодействия q_m еще предстоит определить. Варьируя по потенциалам A, M сумму лагранжианов (9) и (10), получаем неоднородные уравнения для электромагнитного поля с источниками

$$p_t\boldsymbol{E} - \operatorname{rot}\boldsymbol{H} + \operatorname{grad}E_0 = -q_e\boldsymbol{I},\quad p_tE_0 + \operatorname{div}\boldsymbol{E} = q_eI_0,$$
$$p_t\boldsymbol{H} + \operatorname{rot}\boldsymbol{E} + \operatorname{grad}H_0 = -q_m\boldsymbol{J},\quad p_tH_0 + \operatorname{div}\boldsymbol{H} = q_mJ_0 \tag{11}$$

или, после преобразования в уравнения второго порядка,

$$\Box\boldsymbol{E} = q_e(p_t\boldsymbol{I} + \operatorname{grad}I_0) + q_m\operatorname{rot}\boldsymbol{J},\quad \Box E_0 = -q_e(p_tI_0 + \operatorname{div}\boldsymbol{I}),$$
$$\Box\boldsymbol{H} = q_m(p_t\boldsymbol{J} + \operatorname{grad}J_0) - q_e\operatorname{rot}\boldsymbol{I},\quad \Box H_0 = -q_m(p_tJ_0 + \operatorname{div}\boldsymbol{J}), \tag{12}$$

где $\Box = \Delta - p_t^2$.

Сохраняющийся электрический 4-ток I подчиняется уравнению непрерывности: $p_tI_0 + \operatorname{div}\boldsymbol{I} = 0$. Это означает, что правая часть второго уравнения в (12) тождественно равна нулю: $\Box E_0 = 0$. Следовательно, скалярная напряженность E_0 и связанные с нею продольные E-волны могут существовать только в виде свободных нулевых колебаний вакуума. Возбудить их материальным источником невозможно. Таким образом, квантовоэлектродинамическая трактовка таких волн, как «нефизических», достаточно обоснована.

Спиново-магнитный аксиальный 4-ток J в теории Дирака, напротив, не сохраняется [7]: $p_tJ_0 + \operatorname{div}\boldsymbol{J} \neq 0$. Этим он отличается от обычно рассматриваемых в практической электродинамике фиктивных магнитных токов [5]. В соответствии с последним уравнением (12) именно степень несохранения аксиального тока является источником скалярной напряженности H_0.

Варьируя по волновым функциям Φ^* сумму лагранжиана взаимодействия (10) с лагранжианом свободного спинорного поля электронов L_c [7], нетрудно получить уравнение Дирака с двумя 4-потенциалами:

$$i\hbar\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\left[c\boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{p}+\frac{q_e}{c}\boldsymbol{A}\right)+q_m\boldsymbol{\Sigma M}-\beta mc^2-q_eA_0-q_m\gamma_5M_0\right]\Phi, \quad (13)$$

где

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}0&\sigma\\ \sigma&0\end{pmatrix},\ \Sigma=\begin{pmatrix}\sigma&0\\ 0&\sigma\end{pmatrix},\ \beta=\begin{pmatrix}I&0\\ 0&-I\end{pmatrix},\ \gamma_0=\begin{pmatrix}I&0\\ 0&I\end{pmatrix},\ \gamma_5=\begin{pmatrix}0&I\\ I&0\end{pmatrix},\ I=\begin{pmatrix}1&0\\ 0&1\end{pmatrix},$$

σ — матрицы Паули.

В соответствии с (8) напряженности поля инвариантны к обычному градиентному преобразованию этих потенциалов:

$$A_0\to A_0+p_t\alpha_e,\ \boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}-\operatorname{grad}\alpha_e,\ M_0\to M_0+p_t\alpha_m,\ \boldsymbol{M}\to\boldsymbol{M}-\operatorname{grad}\alpha_m, \quad (14)$$

где α_e, α_m — произвольные скалярные функции, удовлетворяющие волновому уравнению $\Box\alpha=0$. Используя это свойство потенциалов, легко проверить, что лагранжиан $(L_D+L_{вз})$ частично инвариантен [6] к следующему фазовому калибровочному преобразованию волновых функций электронов:

$$\Phi\to\exp(i\alpha_e\gamma_0+i\alpha_m\gamma_5)\Phi,\ \Phi^*\to\exp(-i\alpha_e\gamma_0-i\alpha_m\gamma_5)\Phi^*. \quad (15)$$

Неинвариантным к этому преобразованию остается лишь псевдоскалярный массовый член (аксиальная аномалия [7]), который несущественен для рассматриваемой проблемы.

Используя методы калибровочной теории [8], можно поступить и наоборот: осуществить в L_D замену (15) и однозначно прийти к уравнениям (11) как уравнениям векторного поля, компенсирующего возникающие при калибровке (15) дополнительные члены с производными от функций α_e, α_m.

Полноту описания этого взаимодействия системой уравнений (11) и (13) характеризует эффект самокомпенсации собственного поля свободного электрона. Известно [7], что движение свободного электрона, не находящегося под воздействием стороннего электромагнитного поля, описывается уравнением Дирака (13) при $A_0=0$, $\boldsymbol{A}=0$, $M_0=0$, $\boldsymbol{M}=0$. Естественно, такой электрон может либо покоиться, либо находиться в состоянии равномерного прямолинейного движения. С другой стороны, даже неподвижный электрон обладает ненулевыми компонентами 4-токов I, J. В соответствии с (11) и (8) эти токи являются источниками потенциалов собственного электромагнитного поля электрона:

$$\Box A_0=-q_eI_0,\ \Box\boldsymbol{A}=-q_e\boldsymbol{I},\ \Box M_0=-q_mJ_0,\ \Box\boldsymbol{M}=-q_m\boldsymbol{J}, \quad (16)$$

где

$$I_0=\Phi\Phi^*,\ \boldsymbol{I}=\Phi\boldsymbol{\alpha}^*\Phi^*,\ J_0=\Phi\gamma_5\Phi^*,\ \boldsymbol{J}=\Phi\gamma_5\boldsymbol{\alpha}^*\Phi^*. \quad (17)$$

Поскольку потенциалы в уравнении Дирака для свободного электрона отсутствуют, наличие ненулевых компонент потенциалов означает, что в согласованной системе уравнений составляющие собственного поля электрона в уравнении (13) в рассматриваемом случае должны взаимно компенсироваться.

Рассмотрим неподвижный электрон в чистом спиновом состоянии, которое может быть описано спинорной волновой функцией с одной ненулевой компонентой, например $\Phi_1\neq0$. В этом случае не равны нулю только две компоненты токов в (17): $I_0=J_z=\Phi_1\Phi_1^*$. Поэтому, в соответствии с (16), в уравнении (13) две компоненты потенциалов A, M не равны нулю ($A_0=M_zq_e/q_m\neq0$), и для неподвижного электрона уравнение (13) приобретает простой вид:

$$i\hbar\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}=-\left(mc^2+\frac{q_e^2-q_m^2}{q_e}A_0\right)\Phi_1.$$

Отсюда видно, что компоненты потенциалов собственного поля электронов взаимно компенсируются при выполнении условия $q_m^2=q_e^2$. В этом случае система уравнений (13), (16) удовлетворяет условию самосогласованности и соответствует экспериментально подтвержденному факту — отсутствию самодействия электрона.

Следующий из принципа минимального взаимодействия частный случай спинорной электродинамики, в которой полагается $q_m=0$, не удовлетворяет этому условию, однако применение такого представления вполне оправдано в тех случаях, когда аксиальный ток J тождественно равен нулю, например в токе проводимости. При $J\neq0$ нет оснований полагать в лагранжиане взаимодействия (10) $q_m=0$, искусственно исключая из рассмотрения физические H-волны.

Таким образом, теория продольных электромагнитных волн удовлетворяет рассмотренным условиям физической содержательности, включая наличие доступного материального источника H-волн. Эти волны обладают рядом существенных для практических приложений достоинств [4], главное из которых — отсутствие взаимодействия с электрическими зарядами. Теоретическое и экспериментальное исследования продольных электромагнитных волн являются перспективным направлением в классической и квантовой электродинамике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дирак П. А. М. Лекции по квантовой теории поля. — М.: Мир, 1971.
2. Хворостенко Н. П.//Радиотехника. — 1991. — № 2.
3. Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время. — М.: Мир, 1987.
4. Симулик В. М.//ТМФ. — 1991. — Т. 87. — № 1.
5. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн. — М.: Радио и связь, 1983.
6. Хворостенко Н. П. Отчет по НИР «Эфир». — М.: ВНТИЦ, 1990. № ГР 01910008626.
7. Райдер Л. Квантовая теория поля. — М.: Мир, 1987.
8. Элементарные частицы и компенсирующие поля: Сб. статей/Под ред. Д. Иваненко. — М.: Мир, 1964.