О сохранении энергии в приближении Дарвина

Рассмотрим систему, состоящую из зарядов e_1 и e_2 с массами m_1 и m_2 соответственно. В приближении Дарвина эта система описывается лагранжианом

$$L = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_1 v_1^4}{8c^2} + \frac{m_2 v_2^4}{8c^2} - \frac{e_1 e_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} + \frac{e_1 e_2}{2c^2 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}[\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 + (\mathbf{v}_1 \mathbf{n}_{12})(\mathbf{v}_2 \mathbf{n}_{12})], \tag{1}$$

где $\mathbf{n}_{12} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Напомним, что уравнения движения зарядов могут быть выписаны при помощи лагранжиана следующим образом

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_1} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_1}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_2} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_2}. \tag{2}$$

В соответствии с общей теорией энергией системы называется величина

$$E = \sum_a \mathbf{v}_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} - L. \tag{3}$$

Вычисляя ее явно, находим

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{3m_1 v_1^4}{8c^2} + \frac{3m_2 v_2^4}{8c^2} + \frac{e_1 e_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} + \frac{e_1 e_2}{2c^2 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}[\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 + (\mathbf{v}_1 \mathbf{n}_{12})(\mathbf{v}_2 \mathbf{n}_{12})]. \tag{4}$$

Докажем, что, в силу уравнений движения, энергия сохраняется $dE/dt = 0$. Пишем

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_a \mathbf{v}_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} - L\right). \tag{5}$$

Производная от каждого члена суммы по правилу Лейбница равна

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}\right) = \dot{\mathbf{v}}_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} + \mathbf{v}_a \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \dot{\mathbf{v}}_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} + \mathbf{v}_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \tag{6}$$

(при написании последнего равенства использованы уравнения движения (2)). Функция Лагранжа (1) зависит от времени неявно через переменные $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, поэтому ее производная

$$\frac{dL}{dt} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}\mathbf{v}_a + \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}\dot{\mathbf{v}}_a. \tag{7}$$

Собирая вместе (6) и (7), мы видим, что

$$\frac{dE}{dt} = \sum_a \left(\dot{\mathbf{v}}_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} + \mathbf{v}_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}\right) - \left(\sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}\mathbf{v}_a + \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}\dot{\mathbf{v}}_a\right) = 0, \tag{8}$$

что и требовалось доказать.