Комментарий к статье Redžić “Note on Dewan-Beran-Bell’s spaceship problem”

Д. В. Перегудов

4 апреля 2008 г.

1 Введение

Недавно Redzic опубликовал работу [2], в которой рассмотрел хорошо известную задачу Белла о ракетах, связанных тросом [1], в частности, в постановке, когда ракеты движутся с постоянным ускорением в течение неограниченно большого времени (Redzic называет это “tough variant”). При этом он пришел к выводу, что растяжение троса остается ограниченным, следовательно, достаточно прочный трос не рвется. В настоящей заметке мы показываем, что этот вывод ошибочен.

2 Постановка задачи и результат Redzic’а

Задача Белла формулируется так. Рассматривваем одномерную Вселенную. В некоторой ИСО на расстоянии H покоятся две ракеты. Ракеты связаны покоящимся нерастянутым тросом длины H. В момент времени $t = 0$ ракеты одновременно начинают движение с одинаковым и постоянным ускорением a. Спрашивается, что будет происходить с тросом? В частности, если трос выдерживает лишь конечное удлинение (скажем, в два раза), останется ли он цел в течении всего времени движения ракет или в конце концов порвется?

Единицы измерения времени и координаты всегда можно выбрать так, чтобы обратить в единицу скорость света и ускорение ракет, единственным параметром задачи тогда остается безразмерная длина $h = Ha/c^2$. Redzic в своей статье приводит зависимость длины троса Δ' от собственного времени τ наблюдателя на передней ракете

$$\Delta' = 1 + h\cosh\tau - \sqrt{1 + h^2\sinh^2\tau}, \tag{1}$$

откуда делает вывод, что растяжение троса в течение всего времени движения не превосходит

$$\varepsilon = 1/h$$

(мы понимаем растяжение как отношение длины растянутого троса к его первоначальной длине). Ниже мы покажем, что этот вывод ошибочен в двух отношениях: во-первых, из-за наличия горизонта для равноускоренного наблюдателя парметризация Redzic’а покрывает не всю историю движения троса, а, во-вторых, вычисленная им величина Δ' вообще не может быть использована для определения растяжения

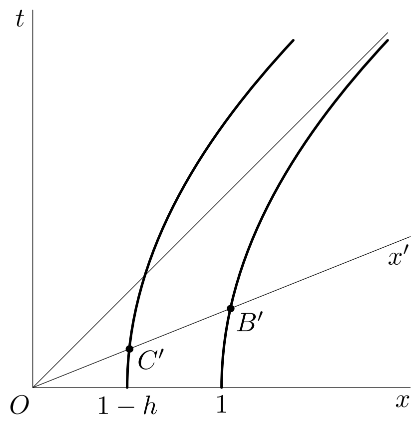

Рис. 1: Пространственно-временная диаграмма к задаче Белла

троса. В заключение мы приведем правильную оценку для растяжения троса в этом случае, которая показывает, что трос рано или поздно рвется.

3 Горизонт

Как известно, мировая линия равноускоренной (с ускорением 1) ракеты B с точки зрения ИСО, где она первоначально покоилась, представляет собой гиперболу (см. рис. 1)

$$x_B^2 - t^2 = 1.$$

Мировая линия второй ракеты C получается сдвигом на h

$$(x_C + h)^2 - t^2 = 1.$$

Ключевым пунктом рассуждений Redzic'а является переход в ИСО, сопутствующую ракете B в момент τ ее собственного времени. Если сама ракета находится при этом в пространственно-временной точке B', то ось x' сопутствующей ИСО, как известно, проходит через начало координат неподвижной ИСО и точку B'. Redzic предлагает рассматривать эту ось как пространственный срез Вселенной, соответствующий параметру τ. В частности, вычислять длину троса как расстояние между точками B' и C' вдоль этой оси. Нетрудно, однако, видеть, что такая параметризация покрывает только половину пространства-времени, а именно только точки, отстоящие от начала координат неподвижной системы на пространственный интервал. Значительная часть истории троса (лежащая выше прямой $x = t$) вообще выпадает из рассмотрения: согласно Redzic'у ракета C никогда (то есть ни при каком значении τ) не сможет пересечь прямую $x = t$. Отсюда и результат для "предельной" длины троса: расстояние от точки B' до начала координат неподвижной ИСО при любом τ равно единице, а расстоянием OC' при больших τ можно пренебречь.

В пользу приведенного рассуждения говорит и то обстоятельство, что, если мы в качестве параметра выберем собственное время ракеты C (теперь уже будет покрыта вся история троса), то вместо (1) получим формулу

$$\Delta' = h \cosh \tau - 1 + \sqrt{1 + h^2 \sinh^2 \tau}. \tag{2}$$

Как видно, с ростом собственного времени длина троса неограниченно растет.

4 Локальное удлинение

Второе возражение против работы Redzic (справедливости ради следует сказать, что и многих других работ по теме) состоит в том, что вычисленная величина Δ' не имеет отношения к растяжению троса. Правильное условие возникновения физических деформаций дал Борн на заре развития теории относительности: нужно смотреть не просто на растяжение, а на растяжение в сопутствующей системе отсчета. Вроде бы так и делает Redzic. Однако специфика задачи Белла такова, что нет единой сопутствующей системы отсчета для обоих ракет (за исключением момента старта). Какую бы ИСО мы не взяли, по крайней мере одна из ракет будет в ней двигаться. По этой причине и разные точки троса будут в любой ИСО двигаться с разными скоростями, у каждой точки троса своя сопутствующая ИСО. Мы приходим к выводу, что нужно рассматривать растяжение троса локально. Не существует единого растяжения для всего троса, растяжение зависит не только от времени, но и от координаты: $\varepsilon(x, t)$. Для этого локального растяжения можно получить следующую оценку: для любого $t > 1 + h$ существует такая пространственно-временная точка (x^*, t^*), $0 < t^* < t$, лежащая между мировых линий ракет, что

$$\varepsilon(x^*, t^*) > \sqrt{\frac{t}{2(1+h)}}. \tag{3}$$

Таким образом, по крайней мере в некоторых точках троса его растяжение растет неограниченно и трос в конце концов рвется.

Этот вывод подтверждается полным решением задачи о движении троса для некоторых конкретных его моделей. Более подробно представленная выше оценка растяжения и некоторые задачи для троса будут рассмотрены в нашей следующей работе.

5 Благодарности

Я хочу поблагодарить Владимира Гниздо за то, что он обратил мое внимание на работу Redzic'a.

Список литературы

[1] Bell J S 1976 How to teach special relativity *Prog. Sci. Cult.* **1** (2) 1–13

[2] Redžić D V 2008 Note on Dewan-Beran-Bell's spaceship problem *Eur. J. Phys.* **29** N11–N19