Вычисление скалярного и векторного потенциалов равномерно движущегося заряда с произвольно сферически-симметрично распределенной плотностью в лоренцевой и кулоновой калибровках с точностью до v^4

Пусть в системе покоя заряда он представляет собой шарик радиуса a, заряженный с плотностью $\rho_0(r)$, произвольно зависящей от расстояния от центра шарика. Пусть полный заряд шарика равен q

$$\int_0^a \rho_0(r) 4\pi r^2 \, dr = q. \tag{97}$$

В частности, Онучиным была предложена модель

$$\rho_0(r) = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \frac{N+3}{N} [1 - (r/a)^N]. \tag{98}$$

Тому же шарику, но движущемуся со скоростью v, будет соответствовать плотность заряда

$$\rho(\mathbf{R}) = \rho_0(\tilde{R}) / \sqrt{1 - v^2}, \tag{99}$$

где $\mathbf{R} = (X, y, z)$, $X = x - vt$, $\tilde{R} = |\tilde{\mathbf{R}}|$, $\tilde{\mathbf{R}} = (\tilde{X}, y, z)$, $\tilde{X} = X/\sqrt{1 - v^2}$ — сплюснутая координата, и плотность тока

$$\mathbf{j}(\mathbf{R}) = \mathbf{v}\rho(\mathbf{R}). \tag{100}$$

Скалярный и векторный потенциалы в лоренцевой калибровке

Потенциалы в лоренцевой калибровке удовлетворяют уравнениям (7). Ясно, что достаточно вычислить скалярный потенциал, поскольку

$$\mathbf{A}_L(\mathbf{R}) = \mathbf{v}\varphi_L(\mathbf{R}). \tag{101}$$

Учитывая, что скалярный потенциал зависит только от $\mathbf{r} - \mathbf{v}t$, получаем уравнение

$$\left((1 - v^2) \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi_L(\mathbf{R}) = -4\pi\rho(\mathbf{R}). \tag{102}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi_L(\mathbf{R}) = \int \frac{\rho(\mathbf{R}') \, d^3R'}{\sqrt{(X - X')^2 + (1 - v^2)[(y - y')^2 + (z - z')^2]}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \int \frac{\rho_0(\tilde{R}') \, d^3\tilde{R}'}{|\tilde{\mathbf{R}} - \tilde{\mathbf{R}}'|}. \tag{103}$$

Интегралы такого типа вычисляются с использованием разложения фундаментального решения уравнения Лапласа по сферическим гармоникам

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l + 1} \left(\frac{r'}{r} \right)^l Y^*_{lm}(\mathbf{n}') Y_{lm}(\mathbf{n}) \tag{104}$$

(для $r' < r$, при обратном соотношении нужно поменять в правой части r и r' местами). В данном случае при интегрировании по углам остается только гармоника 00, поэтому

$$\sqrt{1-v^2}\,\varphi_L(\tilde{\mathbf{R}}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\tilde{R}}\displaystyle\int_0^{\tilde{R}} \rho_0(r) 4\pi r^2\,dr + \int_{\tilde{R}}^a \rho_0(r) 4\pi r\,dr, & \text{внутри,} \\ \dfrac{q}{\tilde{R}}, & \text{вовне.} \end{cases} \tag{105}$$

Разложение этого точного результата до v^4 выглядит так

$$\begin{aligned} &\varphi_L(\mathbf{R}) = \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{R}\displaystyle\int_0^R \rho_0(r)4\pi r^2\,dr + \int_R^a \rho_0(r)4\pi r\,dr + \\ \qquad + \dfrac{v^2}{2}\left(\dfrac{1-\cos^2\theta}{R}\displaystyle\int_0^R \rho_0(r)4\pi r^2\,dr + \int_R^a \rho_0(r)4\pi r\,dr\right) + \\ \qquad + \dfrac{3v^4}{8}\left(\dfrac{(1-\cos^2\theta)^2}{R}\displaystyle\int_0^R \rho_0(r)4\pi r^2\,dr + \right. & \text{внутри,} \\ \qquad\qquad \left. + \displaystyle\int_R^a \rho_0(r)4\pi r\,dr - R^2(\cos^4\theta)\frac{4}{3}\pi\rho_0(R)\right) + \ldots, \\ \dfrac{q}{R}\left(1 + \dfrac{v^2(1-\cos^2\theta)}{2} + \dfrac{3v^4(1-\cos^2\theta)^2}{8}\right) + \ldots, & \text{вовне.} \end{cases} \end{aligned} \tag{106}$$

Здесь $\cos\theta = X/R$.

Скалярный потенциал в кулоновой калибровке

Скалярный потенциал в кулоновой калибровке удовлетворяет уравнению (8). Решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi_C(\mathbf{R}) = \int \frac{\rho(\mathbf{R}')\,d^3R'}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|} = \int \frac{\rho_0(\tilde{R}')\,d^3\tilde{R}'}{\sqrt{(1-v^2)(\tilde{X}-\tilde{X}')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}. \tag{107}$$

Прежде чем применять формулу (104), разложим корень в ряд по v

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{(1-v^2)(\tilde{X}-\tilde{X}')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} = \\ &\quad = \frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}-\tilde{\mathbf{R}}'|}\left(1 + \frac{v^2}{2}\frac{(\tilde{X}-\tilde{X}')^2}{(\tilde{\mathbf{R}}-\tilde{\mathbf{R}}')^2} + \frac{3v^4}{8}\frac{(\tilde{X}-\tilde{X}')^4}{(\tilde{\mathbf{R}}-\tilde{\mathbf{R}}')^4} + \ldots\right) = \\ &\quad = \left(1 - \left(\frac{v^2}{2} + \frac{v^4}{8}\right)(\tilde{X}-\tilde{X}')\frac{\partial}{\partial\tilde{X}} + \frac{v^4}{8}(\tilde{X}-\tilde{X}')^2\frac{\partial^2}{\partial\tilde{X}^2} + \ldots\right)\frac{1}{|\tilde{\mathbf{R}}-\tilde{\mathbf{R}}'|}. \end{aligned} \tag{108}$$

Из разложения видно, что нужно сосчитать три эталонных интеграла ($n = 0, 1, 2$)

$$I_n = \int \frac{\tilde{X}'^n \rho_0(\tilde{R}')\,d^3\tilde{R}'}{|\tilde{\mathbf{R}}-\tilde{\mathbf{R}}'|}. \tag{109}$$

Интеграл I_0 мы уже рассчитали выше (смотри формулы (103) и (105)). Значения $I_{1,2}$ равны

$$
3I_1 = \begin{cases} \dfrac{\tilde{X}}{\tilde{R}^3}\displaystyle\int_0^{\tilde{R}} \rho_0(r)4\pi r^4\,dr + \tilde{X}\int_{\tilde{R}}^a \rho_0(r)4\pi r\,dr, & \text{внутри,} \\ \dfrac{\tilde{X}}{\tilde{R}^3}\displaystyle\int_0^a \rho_0(r)4\pi r^4\,dr, & \text{вовне,} \end{cases} \tag{110}
$$

$$
3I_2 = \begin{cases} \begin{aligned} &\frac{3\tilde{X}^2-\tilde{R}^2}{5}\left(\frac{1}{\tilde{R}^5}\int_0^{\tilde{R}} \rho_0(r)4\pi r^6\,dr + \int_{\tilde{R}}^a \rho_0(r)4\pi r\,dr\right) + \\ &\quad + \frac{1}{\tilde{R}}\int_0^{\tilde{R}} \rho_0(r)4\pi r^4\,dr + \int_{\tilde{R}}^a \rho_0(r)4\pi r^3\,dr, \end{aligned} & \text{внутри,} \\ \dfrac{3\tilde{X}^2-\tilde{R}^2}{5\tilde{R}^5}\displaystyle\int_0^a \rho_0(r)4\pi r^6\,dr + \frac{1}{\tilde{R}}\int_0^a \rho_0(r)4\pi r^4\,dr, & \text{вовне.} \end{cases} \tag{111}
$$

Ввиду громоздкости запишем выражение для φ_C в виде $\varphi_C = \varphi_0 + v^2\varphi_2 + v^4\varphi_4 + \ldots$ и приведем значения коэффициентов в двух вариантах: выраженных через сплюснутые координаты

$$
\varphi_0(\tilde{\mathbf{R}}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\tilde{R}}\displaystyle\int_0^{\tilde{R}} \rho_0(r)4\pi r^2\,dr + \int_{\tilde{R}}^a \rho_0(r)4\pi r\,dr, & \text{внутри,} \\ \dfrac{q}{\tilde{R}}, & \text{вовне,} \end{cases} \tag{112}
$$

$$
6\varphi_2(\tilde{\mathbf{R}}) = \begin{cases} \begin{aligned} &\frac{3\tilde{X}^2}{\tilde{R}^3}\int_0^{\tilde{R}} \rho_0(r)4\pi r^2\,dr + \\ &\quad + \frac{\tilde{R}^2-3\tilde{X}^2}{\tilde{R}^5}\int_0^{\tilde{R}} \rho_0(r)4\pi r^4\,dr + \\ &\quad + \int_{\tilde{R}}^a \rho_0(r)4\pi r\,dr, \end{aligned} & \text{внутри,} \\ \dfrac{3q\tilde{X}^2}{\tilde{R}^3} + \dfrac{\tilde{R}^2-3\tilde{X}^2}{\tilde{R}^5}\displaystyle\int_0^a \rho_0(r)4\pi r^4\,dr, & \text{вовне} \end{cases} \tag{113}
$$

и через нормальные координаты

$$
\varphi_0(\mathbf{R}) = \begin{cases} \dfrac{1}{R}\displaystyle\int_0^{R} \rho_0(r)4\pi r^2\,dr + \int_{R}^a \rho_0(r)4\pi r\,dr, & \text{внутри,} \\ \dfrac{q}{R}, & \text{вовне,} \end{cases} \tag{114}
$$

$$
6\varphi_2(\mathbf{R}) = \begin{cases} \begin{aligned} &\frac{1-3\cos^2\theta}{R^3}\int_0^{R} \rho_0(r)4\pi r^4\,dr + \\ &\quad + \int_{R}^a \rho_0(r)4\pi r\,dr, \end{aligned} & \text{внутри,} \\ \dfrac{1-3\cos^2\theta}{R^3}\displaystyle\int_0^a \rho_0(r)4\pi r^4\,dr, & \text{вовне,} \end{cases} \tag{115}
$$

$$
(116)\quad 40\varphi_4(\mathbf{R}) = \begin{cases} \dfrac{35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3}{R^5}\displaystyle\int_0^R \rho_0(r)4\pi r^6\,dr + \\ \qquad + 3\displaystyle\int_R^a \rho_0(r)4\pi r\,dr - (\cos^4\theta)20\pi R^2\rho_0(R), & \text{внутри,} \\ \dfrac{35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3}{R^5}\displaystyle\int_0^a \rho_0(r)4\pi r^6\,dr, & \text{вовне.} \end{cases}
$$

Разность векторных потенциалов в лоренцевой и кулоновой калибровках

Разность векторных потенциалов в лоренцевой и кулоновой калибровках определяется из уравнений (7) и (8)

$$
(117)\qquad \left((1-v^2)\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(\mathbf{A}_C - \mathbf{A}_L)(\mathbf{R}) = -v\nabla\frac{\partial\varphi_C}{\partial X}(\mathbf{R}).
$$

Вследствие цилиндрической симметрии его решение удобно записать для проекций A_x, $A_\zeta = A_y + iA_z$

$$
(118)\qquad \begin{aligned} v(A_x^C - A_x^L)(\mathbf{R}) &= \frac{v^2}{4\pi}\int \frac{(\partial^2\varphi_C/\partial X'^2)(\mathbf{R}')\,d^3R'}{\sqrt{(X-X')^2 + (1-v^2)[(y-y')^2 + (z-z')^2]}} = \\ &= \frac{v^2}{4\pi(1-v^2)}\int \frac{(\partial^2\varphi_C/\partial \tilde{X}'^2)(\tilde{\mathbf{R}}')\,d^3\tilde{R}'}{|\tilde{\mathbf{R}} - \tilde{\mathbf{R}}'|}, \\ v(A_\zeta^C - A_\zeta^L)(\mathbf{R}) &= \frac{v^2}{4\pi}\int \frac{(\partial^2\varphi_C/\partial X'\,\partial\zeta^{*\prime})(\mathbf{R}')\,d^3R'}{\sqrt{(X-X')^2 + (1-v^2)[(y-y')^2 + (z-z')^2]}} = \\ &= \frac{v^2}{4\pi\sqrt{1-v^2}}\int \frac{(\partial^2\varphi_C/\partial \tilde{X}'\,\partial\zeta^{*\prime})(\tilde{\mathbf{R}}')\,d^3\tilde{R}'}{|\tilde{\mathbf{R}} - \tilde{\mathbf{R}}'|}. \end{aligned}
$$

Здесь $\zeta = y + iz$. Чтобы вычислить эти интегралы с точностью до v^4, нужно знать производные от φ_C с точностью до v^2. Дифференцируя (112) и (113), находим

$$
(119)\qquad \frac{\partial^2\varphi_0(\tilde{\mathbf{R}})}{\partial\tilde{X}^2} = \begin{cases} \dfrac{2P_2(\cos\tilde{\theta})}{\tilde{R}^3}\displaystyle\int_0^{\tilde{R}} \rho_0(r)4\pi r^2\,dr - \\ \qquad - \left[2P_2(\cos\tilde{\theta}) + 1\right]\dfrac{4\pi}{3}\rho_0(\tilde{R}), & \text{внутри,} \\ \dfrac{2qP_2(\cos\tilde{\theta})}{\tilde{R}^3}, & \text{вовне,} \end{cases}
$$

$$
(120)\quad \frac{\partial^2\varphi_2(\tilde{\mathbf{R}})}{\partial\tilde{X}^2} = \begin{cases} \dfrac{12P_4(\cos\tilde{\theta}) - 5P_2(\cos\tilde{\theta})}{7\tilde{R}^3}\displaystyle\int_0^{\tilde{R}} \rho_0(r)4\pi r^2\,dr - \\ \qquad - \dfrac{4P_4(\cos\tilde{\theta})}{\tilde{R}^5}\displaystyle\int_0^{\tilde{R}} \rho_0(r)4\pi r^4\,dr + & \text{внутри,} \\ \qquad + \left[48P_4(\cos\tilde{\theta}) + 50P_2(\cos\tilde{\theta}) + 7\right]\dfrac{2\pi}{105}\rho(\tilde{R}), \\ \dfrac{q\left[12P_4(\cos\tilde{\theta}) - 5P_2(\cos\tilde{\theta})\right]}{7\tilde{R}^3} - \\ \qquad - \dfrac{4P_4(\cos\tilde{\theta})}{\tilde{R}^5}\displaystyle\int_0^{a} \rho_0(r)4\pi r^4\,dr, & \text{вовне,} \end{cases}
$$

$$
(121)\quad \frac{\partial^2\varphi_0(\tilde{\mathbf{R}})}{\partial\tilde{X}\,\partial\zeta^*} = \begin{cases} \sqrt{\frac{8\pi}{15}}Y_{21}(\tilde{\mathbf{n}})\left(\frac{3}{\tilde{R}^3}\int_0^{\tilde{R}}\rho_0(r)4\pi r^2\,dr - 4\pi\rho_0(\tilde{R})\right), & \text{внутри},\\ \sqrt{\frac{8\pi}{15}}\,\frac{3qY_{21}(\tilde{\mathbf{n}})}{\tilde{R}^3}, & \text{вовне}, \end{cases}
$$

$$
(122)\quad \frac{\partial^2\varphi_2(\tilde{\mathbf{R}})}{\partial\tilde{X}\,\partial\zeta^*} = \begin{cases} \frac{3\left(\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\,Y_{21}(\tilde{\mathbf{n}}) - 8\sqrt{\frac{5\pi}{9}}\,Y_{41}(\tilde{\mathbf{n}})\right)}{14\tilde{R}^3}\int_0^{\tilde{R}}\rho_0(r)4\pi r^2\,dr + \\ \quad + \frac{4\sqrt{\frac{5\pi}{9}}\,Y_{41}(\tilde{\mathbf{n}})}{\tilde{R}^5}\int_0^{\tilde{R}}\rho_0(r)4\pi r^4\,dr - & \text{внутри},\\ \quad -\left(5\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\,Y_{21}(\tilde{\mathbf{n}}) + 16\sqrt{\frac{5\pi}{9}}\,Y_{41}(\tilde{\mathbf{n}})\right)\frac{2\pi}{35}\rho_0(\tilde{R}), \\ \frac{3q\left(\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\,Y_{21}(\tilde{\mathbf{n}}) - 8\sqrt{\frac{5\pi}{9}}\,Y_{41}(\tilde{\mathbf{n}})\right)}{14\tilde{R}^3} + \\ \quad + \frac{4\sqrt{\frac{5\pi}{9}}\,Y_{41}(\tilde{\mathbf{n}})}{\tilde{R}^5}\int_0^{a}\rho_0(r)4\pi r^4\,dr, & \text{вовне}. \end{cases}
$$

Здесь $\cos\tilde{\theta} = \tilde{X}/\tilde{R}$, $\tilde{\mathbf{n}} = \tilde{\mathbf{R}}/\tilde{R}$.

Теперь интегрирование по угловым переменным в формулах (118) производится тривиально. Что касается интегрирования по радиальной переменной, возникают три эталонных интеграла

$$
(123)\quad \begin{aligned} J_1 &= \int_0^\infty d\tilde{R}'\begin{Bmatrix}\tilde{R}'/\tilde{R}^3\\ \tilde{R}^2/\tilde{R}'^4\end{Bmatrix}\int_0^{\tilde{R}'}\rho_0(r)4\pi r^2\,dr = \frac{5q}{6\tilde{R}} - \frac{1}{2\tilde{R}^3}\int_0^a\rho_0(r)4\pi r^4\,dr,\\ J_2 &= \int_0^\infty d\tilde{R}'\begin{Bmatrix}\tilde{R}'^3/\tilde{R}^5\\ \tilde{R}^4/\tilde{R}'^6\end{Bmatrix}\int_0^{\tilde{R}'}\rho_0(r)4\pi r^2\,dr = \frac{9q}{20\tilde{R}} - \frac{1}{4\tilde{R}^5}\int_0^a\rho_0(r)4\pi r^6\,dr,\\ J_3 &= \int_0^\infty d\tilde{R}'\begin{Bmatrix}\tilde{R}'/\tilde{R}^5\\ \tilde{R}^4/\tilde{R}'^8\end{Bmatrix}\int_0^{\tilde{R}'}\rho_0(r)4\pi r^4\,dr = \frac{9q}{14\tilde{R}^3}\int_0^a\rho_0(r)4\pi r^4\,dr - \\ &\qquad - \frac{1}{2\tilde{R}^5}\int_0^a\rho_0(r)4\pi r^6\,dr. \end{aligned}
$$

При вычислении мы полагали $\tilde{R} > a$. Верхняя строка в фигурных скобках относится к области $\tilde{R}' < \tilde{R}$, нижняя — к $\tilde{R}' > \tilde{R}$. В результате вычислений получаем следующие выражения

$$
(124)\quad \begin{aligned} v(A_x^C - A_x^L)(\mathbf{R}) &= -v^2\left(\frac{q(1-\cos^2\theta)}{3R} + \frac{3\cos^2\theta - 1}{6R^3}\int_0^a\rho_0(r)4\pi r^4\,dr\right) - \\ &- v^4\left(\frac{3q(1-\cos^2\theta)^2}{8R} - \frac{35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3}{40R^5}\int_0^a\rho_0(r)4\pi r^6\,dr\right) + \ldots, \end{aligned}
$$

$$
(125)\quad \begin{aligned} v(A_\zeta^C - A_\zeta^L)(\mathbf{R}) &= \frac{v^2X\zeta}{2R^3}\left(q - \frac{1}{R^2}\int_0^a\rho_0(r)4\pi r^4\,dr\right) + \\ &+ \frac{3v^4X\zeta}{8R^3}\left(q(1-\cos^2\theta) - \frac{(3-7\cos^2\theta)}{3R^4}\int_0^a\rho_0(r)4\pi r^6\,dr\right) + \ldots \end{aligned}
$$

Располагая явными выражениями для потенциалов, нетрудно проверить, что электрические и магнитные поля, полученные из потенциалов в лоренцевой и кулоновой калибровках, совпадают (с точностью до v^4). Нетрудно также проверить, что в пределе точечного заряда выражения для потенциалов совпадают (опять-таки с точностью до v^4) с точными формулами, полученными в файле l_and_c.pdf.

Дополнение. Другой способ вычисления скалярного кулоновского потенциала

Снова воспользуемся формулой (108), но только второй строкой, не будем представлять слагаемые в виде производных по $\tilde{X}$. Тогда выражение для потенциала принимает вид

$$(126)\quad \varphi_C(\mathbf{R}) = \int_0^a \biggl(K_0(\tilde{X},\tilde{R},\tilde{R}') + \frac{v^2}{2} K_1(\tilde{X},\tilde{R},\tilde{R}') + \\ + \frac{3v^4}{8} K_2(\tilde{X},\tilde{R},\tilde{R}') + \ldots \biggr) 4\pi\rho_0(\tilde{R}')\tilde{R}'^2\, d\tilde{R}',$$

где эталонные интегралы K_n (по углам) имеют вид

$$(127)\qquad K_n(\tilde{X},\tilde{R},\tilde{R}') = \frac{1}{4\pi}\int \frac{(\tilde{X}-\tilde{X}')^{2n}\, d\tilde{\Omega}'}{|\tilde{\mathbf{R}}-\tilde{\mathbf{R}}'|^{2n+1}}.$$

Удобно отсчитывать углы от направления вектора $\tilde{\mathbf{R}}$, тогда по сферической теореме косинусов

$$(128)\qquad \tilde{X}' = \tilde{R}'(\cos\tilde{\theta}\cos\tilde{\theta}' + \sin\tilde{\theta}\sin\tilde{\theta}'\cos\tilde{\varphi}').$$

Эталонные интегралы равны

$$(129)\quad K_n(\tilde{X},\tilde{R},\tilde{R}') = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\tilde{\theta}'\, d\tilde{\theta}'}{(\tilde{R}^2+\tilde{R}'^2-2\tilde{R}\tilde{R}'\cos\tilde{\theta}')^{n+1/2}} \times \\ \times \int_0^{2\pi} [\tilde{R}\cos\tilde{\theta} - \tilde{R}'(\cos\tilde{\theta}\cos\tilde{\theta}' + \sin\tilde{\theta}\sin\tilde{\theta}'\cos\tilde{\varphi}')]^{2n}\, d\tilde{\varphi}'.$$

Отметим, что, хотя внутренний интеграл содержит $\sin\tilde{\theta}'$, его значение является полиномом по $\cos\tilde{\theta}'$. Если после вычисления внутреннего интеграла произвести во внешнем замену $\tilde{R}^2+\tilde{R}'^2-2\tilde{R}\tilde{R}'\cos\tilde{\theta}' = \eta$, то подынтегральное выражение сводится к сумме степенных по η функций. Таким способом находим значения нужных нам эталонных интегралов

$$(130)\qquad K_0 = \left\{\frac{1}{\tilde{R}}, \frac{1}{\tilde{R}'}\right\}, \qquad K_1 = \left\{\frac{\cos^2\tilde{\theta}}{\tilde{R}} + \frac{\tilde{R}'^2(1-3\cos^2\tilde{\theta})}{3\tilde{R}^3}, \frac{1}{3\tilde{R}'}\right\},$$

$$K_2 = \left\{\frac{\cos^4\tilde{\theta}}{\tilde{R}} + \frac{\tilde{R}'^2(6\cos^2\tilde{\theta}-10\cos^4\tilde{\theta})}{3\tilde{R}^3} + \frac{\tilde{R}'^4(3-30\cos^2\tilde{\theta}+35\cos^4\tilde{\theta})}{15\tilde{R}^5}, \frac{1}{5\tilde{R}'}\right\}.$$

Первое выражение в фигурных скобках относится к случаю $\tilde{R} > \tilde{R}'$, второе — к случаю $\tilde{R} < \tilde{R}'$. Нетрудно видеть, что полученные после подстановки (130) в (126) выражения для φ_0 и φ_2 совпадают с формулами (112) и (113). Для проверки формулы (116) для φ_4 нужно дополнительно разложить сплюснутые координаты по v.