Вычисление потенциалов равномерно движущегося сплюснутого заряда в лоренцевой и кулоновой калибровках.

Пусть плотность заряда и тока имеет вид

$$\rho(t,x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3\sqrt{1-v^2}}, & \dfrac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2 < a^2, \\ 0, & (\dots) > a^2, \end{cases} \tag{35}$$
$$j_x = v\rho, \quad j_y = 0, \quad j_z = 0.$$

Нужно вычислить скалярный и x-компоненту векторного потенциала в лоренцевой и кулоновой калибровках на оси x перед зарядом и исследовать предел $a \to 0$.

Скалярный потенциал в лоренцевой калибровке

Скалярный потенциал в лоренцевой калибровке можно было бы и не вычислять, а воспользоваться инвариантностью калибровочного условия Лоренца. Если мы сделаем преобразование Лоренца

$$\tilde{t} = \frac{t - vx}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \tilde{x} = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \tilde{y} = y, \quad \tilde{z} = z, \tag{36}$$

при этом плотности заряда и тока преобразуются так же, как координаты

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho - vj_x}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \tilde{j}_x = \frac{j_x - v\rho}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \tilde{j}_y = j_y, \quad \tilde{j}_z = j_z, \tag{37}$$

то в тильдованной системе отсчета

$$\tilde{\rho}(\tilde{t},\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \begin{cases} \dfrac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3}, & \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 < a^2, \\ 0, & (\dots) > a^2, \end{cases} \tag{38}$$
$$\mathbf{j} = 0.$$

Потенциалы (вне заряда на оси x) пишутся моментально

$$\tilde{\varphi} = q/|\tilde{x}|, \quad \tilde{\mathbf{A}} = 0. \tag{39}$$

Преобразование потенциалов обратно в нетильдованную систему отсчета имеет вид

$$\varphi = \frac{\tilde{\varphi} + v\tilde{A}_x}{\sqrt{1-v^2}}, \quad A_x = \frac{\tilde{A}_x + v\tilde{\varphi}}{\sqrt{1-v^2}}, \quad A_y = \tilde{A}_y, \quad A_z = \tilde{A}_z, \tag{40}$$

и мы находим

$$\varphi = q/|x - vt|, \quad A_x = v\varphi, \quad A_y = 0, \quad A_z = 0. \tag{41}$$

Однако мы притворимся, что преобразований Лоренца мы не знаем, и вычислим скалярный потенциал в лоб, используя формулу запаздывающего потенциала

$$\varphi(t,\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\, d^3r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{42}$$

Поскольку плотность заряда отлична от нуля в конечной области и постоянна, то интегрирование будет проводиться по конечной области G

$$\varphi(t,x,0,0)=\frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3\sqrt{1-v^2}}\int_G\frac{d^3r'}{\sqrt{(x-x')^2+r'^2}}. \tag{43}$$

Здесь обозначено $r'^2=y'^2+z'^2$. Область G, однако, из-за запаздывания представляет собой не эллипсоид, а тело четвертого порядка

$$\frac{\left(x'-v\left(t-\sqrt{(x-x')^2+r'^2}\right)\right)^2}{1-v^2}+r'^2<a^2. \tag{44}$$

Оказываются удобными обозначения $\xi=x'-x$, $X=x-vt$. В дальнейшем считаем $X>a$ (вычисляем поле перед зарядом). Пределы изменения ξ определяются из уравнения (44) при $r'=0$

$$\xi_{1,2}=\frac{-X\mp a\sqrt{1-v^2}}{1-v}. \tag{45}$$

Из уравнение (44) можно определить максимальное значение $r'_{\max}$ при заданном ξ (биквадратное уравнение, лишний корень отбрасывается из условия запаздывания). Явное выражение громоздко и не нужно, поэтому приведем только значение комбинации, которая понадобится в дальнейшем

$$\sqrt{\xi^2+r'^2_{\max}}=-v(\xi+X)+\sqrt{1-v^2}\sqrt{a^2-X^2-2\xi X}. \tag{46}$$

Теперь мы готовы вычислить потенциал

$$\begin{aligned}\varphi&=\frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3\sqrt{1-v^2}}\int_{\xi_1}^{\xi_2}d\xi\int_0^{r'_{\max}}\frac{2\pi r'\,dr'}{\sqrt{\xi^2+r'^2}}=\\&=\frac{3q}{2a^3\sqrt{1-v^2}}\int_{\xi_1}^{\xi_2}d\xi\left\{\sqrt{\xi^2+r'^2_{\max}}-|\xi|\right\}=\\&=\frac{3q}{2a^3\sqrt{1-v^2}}\left\{\frac{\xi^2}{2}-\frac{v(\xi+X)^2}{2}-\frac{\sqrt{1-v^2}}{3X}[a^2-X^2-2\xi X]^{3/2}\right\}\Bigg|_{\xi_1}^{\xi_2}=q/X.\end{aligned} \tag{47}$$

Скалярный потенциал в кулоновой калибровке на оси x

Скалярный потенциал в кулоновой калибровке вычисляется по формуле

$$\varphi(t,\mathbf{r})=\int\frac{\rho(\mathbf{r}',t)\,d^3r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{48}$$

В данном случае запаздывания нет, так что интегрирование проводится по области

$$\frac{(x'-vt)^2}{1-v^2}+r'^2<a^2. \tag{49}$$

Пределы изменения переменной ξ

$$\xi_{1,2} = -X \mp a\sqrt{1-v^2}. \tag{50}$$

Максимальное значение r'

$$r'^2_{\max} = a^2 - \frac{(\xi+X)^2}{1-v^2}. \tag{51}$$

Вычисляем потенциал

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{3q}{2a^3\sqrt{1-v^2}}\int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi\left\{\sqrt{\xi^2+r'^2_{\max}}-|\xi|\right\} = \\ &= \frac{3q}{2a^3\sqrt{1-v^2}}\int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi\left\{\sqrt{a^2+\frac{X^2}{v^2}-\frac{(v\xi+X/v)^2}{1-v^2}}-|\xi|\right\}.\end{aligned} \tag{52}$$

Интеграл вычисляется при помощи формулы

$$\int\sqrt{b^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{b^2-x^2}+\frac{b^2}{2}\arcsin\frac{x}{b}. \tag{53}$$

Окончательно находим

$$\varphi = \frac{3q}{2a^3}\left\{\frac{a^2+X^2/v^2}{2v}\arcsin\frac{2aX}{v(a^2+X^2/v^2)}-\frac{aX}{v^2}\right\}. \tag{54}$$

Разложение при $a\to 0$ имеет вид (оно же — разложение по $1/X$, оно же — разложение по степеням скорости v)

$$\varphi = \frac{q}{X}-\frac{qv^2a^2}{5X^3}+\frac{3qv^4a^4}{35X^5}+\dots \tag{55}$$

Таким образом, скалярные потенциалы в лоренцевой и кулоновой калибровках не совпадают на оси x. Совпадают только выражения в дальней зоне или в пределе точечного заряда.

Скалярный потенциал в кулоновой калибровке во всем пространстве

Вместо того чтобы вычислять интеграл (48), мы будем решать уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \tag{56}$$

где ρ определено в (35). Уравнение запишем в эллиптических координатах (ξ,η)

$$X = av\xi\eta, \quad r = av\sqrt{(\xi^2+1)(1-\eta^2)} \tag{57}$$

($r^2 = y^2+z^2$). Границе заряда соответствует $\xi_0 = \frac{1}{v}\sqrt{1-v^2}$. Оператор Лапласа выглядит в эллиптических координатах так (первое выражение — в цилиндрических координатах с опущенной угловой зависимостью)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{a^2v^2(\xi^2+\eta^2)}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi^2+1)\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}(1-\eta^2)\frac{\partial}{\partial\eta}\right]. \tag{58}$$

Решение уравнения (Лапласа) во внешней области строится методом разделения переменных. Решение во внутренней области можно представить как сумму частного решения уравнения Пуассона φ_0 и общего решения уравнения Лапласа, которое опять-таки можно построить методом разделения переменных. Частное решение легко пишется (потенциал однородного шара)

$$\varphi_0 = -\tfrac{2}{3}\pi\rho(X^2 + r^2 - a^2v^2) = -\frac{qv^2}{2a\sqrt{1-v^2}}(\xi^2 - \eta^2). \tag{59}$$

Остается решить уравнения Лапласа во внешности и внутренности заряда. Будем рассматривать уравнение в первом квадранте, то есть при $X > 0$, $r > 0$. Пользуясь очевидной симметрией потенциала при отражении в осях X и r, получаем граничные условия

$$\begin{gathered} \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 0, \quad \eta = 0; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} < \infty, \quad \eta = 1; \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = 0, \quad \xi = 0; \quad \varphi \to 0, \quad \xi \to +\infty. \end{gathered} \tag{60}$$

Отметим, что φ_0 граничным условиям удовлетворяет (за исключением последнего, которое относится к внешней области).

В соответствии с методом разделения переменных будем искать решение уравнения Лапласа в виде $\varphi(\xi,\eta) = \chi(\xi)\psi(\eta)$, где

$$((\xi^2+1)\chi)' = \lambda\chi, \quad ((1-\eta^2)\psi')' = -\lambda\psi, \tag{61}$$

где λ — параметр разделения. Второе уравнение представляет собой стандартное уравнение Лежандра. Первое может быть приведено к уравнению Лежандра заменой $\xi \to i\xi$. Решение второго уравнения, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$$\psi = P_{2n}(\eta), \quad \lambda = -2n(2n+1), \tag{62}$$

$P_n(x)$ — полиномы Лежандра. На самом деле подходят только $n = 0, 1$, поскольку φ_0 представляется в виде их комбинации

$$\begin{gathered} P_0(x) = 1, \quad P_2(x) = (3x^2 - 1)/2, \\ \varphi_0 = -\frac{qv^2}{2a\sqrt{1-v^2}}(\xi^2 - \tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{3}P_2(\eta)). \end{gathered} \tag{63}$$

Решениями уравнения для χ также будут полиномы Лежандра мнимого аргумента $P_{0,2}(i\xi)$. Однако тут нам понадобится и второе линейно независимое решение уравнения Лежандра, которое мы обозначим $Q_n(x)$. Поскольку эти решения не столь популярны, я сделаю небольшое лирическое отступление и расскажу как их вычислить.

Пусть $y_{1,2}(x)$ — два линейно независимых решения уравнения

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x) = 0. \tag{64}$$

Определителем Вронского этих двух решений называется величина

$$W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2. \tag{65}$$

Нетрудно проверить, что

$$W' = -\frac{b}{a} W. \tag{66}$$

В нашем случае $a = 1 - x^2$, $b = -2x$, поэтому $W = 1/(1 - x^2)$. Определитель Вронского $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ можно записать в виде

$$W = P_n(x) Q_n'(x) - P_n'(x) Q_n(x) = \left(\frac{Q_n(x)}{P_n(x)} \right)' P_n^2(x), \tag{67}$$

откуда

$$Q_n(x) = P_n(x) \int \frac{dx}{(1 - x^2) P_n^2(x)}. \tag{68}$$

Таким способом получаем

$$Q_0(x) = \operatorname{arth} x, \quad Q_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2} \operatorname{arth} x - \frac{3x}{2}. \tag{69}$$

Разумеется, функция $Q_n(x)$ определена с точностью до прибавления $P_n(x)$, умноженного на произвольное число. Нам удобно будет наложить дополнительное условие убывания на бесконечности, поэтому мы запишем решения уравнения для χ в виде

$$\tilde{Q}_0(\xi) = \operatorname{arctg} \xi - \frac{\pi}{2}, \quad \tilde{Q}_2(\xi) = \frac{3\xi^2 + 1}{2} \left(\operatorname{arctg} \xi - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{3\xi}{2}. \tag{70}$$

Обе функции при больших ξ убывают как $1/\xi$.

Вернемся к решению уравнения Лапласа. Во внешней области мы должны оставить только решения, убывающие при $\xi \to \infty$, поэтому

$$\varphi = c_0 \tilde{Q}_0(\xi) + c_2 \tilde{Q}_2(\xi) P_2(\eta). \tag{71}$$

Во внутренней области мы должны учесть граничное условие при $\xi = 0$, поэтому

$$\varphi = c_0' + c_2' (-P_2(i\xi)) P_2(\eta). \tag{72}$$

Четыре коэффициента c определяются из сшивки потенциала и его производной при $\xi = \xi_0$ (на границе заряда)

$$\begin{gathered} c_0 = c_2 = -\frac{q}{av}, \quad c_0' = \frac{q \arcsin v}{av} + \frac{q}{2a} \frac{1 - \frac{4}{3} v^2}{\sqrt{1 - v^2}}, \\ c_2' = \frac{q \arcsin v}{av} - \frac{q}{a} \frac{1 - \frac{1}{3} v^2}{\sqrt{1 - v^2}}. \end{gathered} \tag{73}$$

Окончательные выражения для потенциала

$$
\begin{aligned}
&\varphi = \frac{q}{av}\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{\xi} + \left(\frac{3\xi^2+1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{\xi} - \frac{3\xi}{2}\right)\frac{3\eta^2-1}{2}\right], \quad \text{вовне}\\
&\varphi = \frac{3q\arcsin v}{4av}\left[2-(\xi^2-\eta^2+1)+3\xi^2\eta^2\right]+\\
&\qquad + \frac{3q}{4a\sqrt{1-v^2}}\left[(1-v^2)(\xi^2-\eta^2+1)-(1-\tfrac{1}{3}v^2)3\xi^2\eta^2\right], \quad \text{внутри.}
\end{aligned} \tag{74}
$$

Потенциал снаружи заряда на оси x (при $\eta = 1$) совпадает с ранее вычисленным (нужно воспользоваться равенством $\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$). Поле внутри заряда может быть просто выражено через X и r, поскольку

$$
\xi^2 - \eta^2 + 1 = \frac{X^2+r^2}{a^2v^2}, \quad \xi^2\eta^2 = \frac{X^2}{a^2v^2}. \tag{75}
$$

x-Компонента векторного потенциала в кулоновой калибровке на оси x

Согласно уравнению (8), источник в уравнении для компоненты A_x состоит из двух частей: тока j_x и производной $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t}$, причем ток дает то же выражение для векторного потенциала, что и в лоренцевой калибровке (сравни уравнения (7) и (8)). Поскольку φ зависит только от $X = x - vt$, а не от x и t по раздельности, можно переписать производную в виде $-v\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$. Именно она определяет разность векторных потенциалов в кулоновой и лоренцевой калибровках. Для вычисления этой производной вспоминаем связь (57) координат (ξ, η) с координатами (X, r), откуда

$$
av(\xi^2+\eta^2)\frac{\partial}{\partial X} = (\xi^2+1)\eta\frac{\partial}{\partial\xi} + (1-\eta^2)\xi\frac{\partial}{\partial\eta}. \tag{76}
$$

Применяя эту формулу к потенциалу во внешней области (во внутренней удобней дифференцировать непосредственно по X, выразив потенциал через X и r по формулам (75)), находим

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial X} = \begin{cases} \dfrac{3q\eta}{a^2v^2}\left(\xi\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\xi} - 1\right), & \text{вовне,}\\[2ex] \dfrac{3q}{a^3v^3}\left(\arcsin v - \dfrac{v}{\sqrt{1-v^2}}\right)X, & \text{внутри,}\end{cases}\\
&\frac{\partial^2\varphi}{\partial X^2} = \begin{cases} \dfrac{3q}{a^3v^3}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\xi} - \dfrac{\xi}{\xi^2+\eta^2}\right), & \text{вовне,}\\[2ex] \dfrac{3q}{a^3v^3}\left(\arcsin v - \dfrac{v}{\sqrt{1-v^2}}\right), & \text{внутри.}\end{cases}
\end{aligned} \tag{77}
$$

Учитывая, что потенциалы зависят только от X, можно переписать уравнение (8) в виде

$$
\left((1-v^2)\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(A_x^C - A_x^L) = -v\frac{\partial^2\varphi}{\partial X^2}, \tag{78}
$$

где $\mathbf{A}^C$ и $\mathbf{A}^L$ — кулонов и лоренцев векторные потенциалы. Его решение (на оси x)

$$(A_x^C - A_x^L)(X,0,0) = v\int \frac{(\partial^2\varphi/\partial X'^2)(X',y',z')\,dX'\,dy'\,dz'}{4\pi\sqrt{(X-X')^2+(1-v^2)r'^2}}. \tag{79}$$

Интегрирование по внутренней области удобно выполнять непосредственно в цилиндрических координатах (X', r'), а по внешней — в эллиптических (ξ, η). Интегрирование по внутренней области тривиально

$$\begin{aligned}(80)\quad & v\int_{\text{внутри}} \frac{(\partial^2\varphi/\partial X'^2)(X',y',z')\,dX'\,dy'\,dz'}{4\pi\sqrt{(X-X')^2+(1-v^2)r'^2}} = \\ &= \frac{v}{4\pi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial X^2}\right)\int_{X_1}^{X_2} dX' \int_0^{r'_{\max}} \frac{2\pi r'\,dr'}{\sqrt{(X-X')^2+(1-v^2)r'^2}} = \\ &= \frac{v}{4\pi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial X^2}\right)\frac{2\pi}{1-v^2}\int_{X_1}^{X_2} dX'\left(\sqrt{X^2+a^2(1-v^2)-2XX'} - |X-X'|\right) = \\ &= \frac{q\sqrt{1-v^2}}{v^2X}\left(\arcsin v - \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\right),\end{aligned}$$

где $X_{1,2} = \mp a\sqrt{1-v^2}$, $r'_{\max} = \sqrt{a^2 - X'^2/(1-v^2)}$, $\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial X^2}\right)$ — (постоянное) значение производной потенциала внутри заряда (77).

Для интегрирования по внешней области пишем элемент объема в эллиптических координатах

$$dX'\,dy'\,dz' \to a^3v^3(\xi^2+\eta^2)\,d\xi\,d\eta\,d\theta \tag{81}$$

где θ — полярный угол. Вклад в разность потенциалов от внешней области равен

$$\frac{3q}{2a}\int_{-1}^{1} d\eta \int_{\xi_0}^{\infty} d\xi\, \frac{(\xi^2+\eta^2)\operatorname{arctg}\frac{1}{\xi} - \xi}{\sqrt{(X/av-\xi\eta)^2+(1-v^2)(\xi^2+1)(1-\eta^2)}}. \tag{82}$$

К сожалению, вычислить этот интеграл точно мне не удалось. Поэтому далее я опишу способ разложения этого интеграла по степеням скорости и обратным степеням X/a. Сделаем во внутреннем интеграле замену переменной $\xi = \xi_0/s$. Тогда интеграл приобретает вид

$$\frac{3q}{2a}\int_{-1}^{1} d\eta \int_0^1 \frac{ds}{s}\, \frac{\left(\frac{\xi_0^2}{s^2}+\eta^2\right)\operatorname{arctg}\frac{s}{\xi_0} - \frac{\xi_0}{s}}{\sqrt{(\tilde{X}s-\eta)^2+1-\eta^2+v^2(s^2-1)(1-\eta^2)}} \tag{83}$$

($\tilde{X} = X/a\sqrt{1-v^2}$). Теперь, пользуясь малостью v, разлагаем числитель в ряд

$$\begin{aligned}(84)\quad \frac{\xi_0}{s}\left(\frac{\xi_0^2}{s^2}+\eta^2\right)\operatorname{arctg}\frac{s}{\xi_0} - \frac{\xi_0^2}{s^2} &= (\eta^2-1/3) - (\eta^2/3-1/5)u^2s^2 + \\ &+ (\eta^2/5-1/7)u^4s^4 + \ldots\end{aligned}$$

($u = 1/\xi_0 = v/\sqrt{1-v^2}$), а знаменатель — в ряд

$$
\frac{1}{\sqrt{(\tilde{X}s-\eta)^2+1-\eta^2+v^2(s^2-1)(1-\eta^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(\tilde{X}s-\eta)^2+1-\eta^2}}\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2(s^2-1)(1-\eta^2)}{(\tilde{X}s-\eta)^2+1-\eta^2}+\right.
\left.+\frac{3}{8}\frac{v^4(s^2-1)^2(1-\eta^2)^2}{[(\tilde{X}s-\eta)^2+1-\eta^2]^2}+\dots\right). \tag{85}
$$

Таким образом, для вычисления интеграла по s нужно вычислить следующие эталонные интегралы

$$
F_{nk} = \int_0^1 \frac{s^{2k}\,ds}{[(\tilde{X}s-\eta)^2+1-\eta^2]^{n+1/2}}. \tag{86}
$$

Значения первых четырех интегралов (необходимых для вычисления потенциала с точностью v^3, что соответствует точности в электрическом поле v^4)

$$
\begin{gathered}
F_{00} = \frac{\ln(\tilde{X}-\eta+Z)-\ln(1-\eta)}{\tilde{X}}, \quad F_{10} = \frac{\tilde{X}-\eta+\eta Z}{(1-\eta^2)Z\tilde{X}},\\
F_{01} = \frac{Z(\tilde{X}+3\eta)+(3\eta^2-1)\ln(\tilde{X}-\eta+Z)-3\eta-(3\eta^2-1)\ln(1-\eta)}{2\tilde{X}^3},\\
F_{11} = \frac{(2\eta^2-1)\tilde{X}-\eta+\eta Z}{(1-\eta^2)Z\tilde{X}^3}+\frac{\ln(\tilde{X}-\eta+Z)-\ln(1-\eta)}{\tilde{X}^3},
\end{gathered} \tag{87}
$$

где $Z = \sqrt{(\tilde{X}-\eta)^2+1-\eta^2} = \sqrt{1-2\eta\tilde{X}+\tilde{X}^2}$. После вычисления интегралов по s получаем

$$
\begin{aligned}
&\frac{3qu}{2a}\int_{-1}^{1}d\eta\left\{(\eta^2-1/3)\frac{\ln(\tilde{X}-\eta+Z)-\ln(1-\eta)}{\tilde{X}}-\right.\\
&-(\eta^2/3-1/5)u^2\frac{Z(\tilde{X}+3\eta)+(3\eta^2-1)\ln(\tilde{X}-\eta+Z)-3\eta-(3\eta^2-1)\ln(1-\eta)}{2\tilde{X}^3}-\\
&-(\eta^2-1/3)\frac{v^2(1-\eta^2)}{2}\left(\frac{(2\eta^2-1)\tilde{X}-\eta+\eta Z}{(1-\eta^2)Z\tilde{X}^3}+\right.\\
&\left.\left.+\frac{\ln(\tilde{X}-\eta+Z)-\ln(1-\eta)}{\tilde{X}^3}-\frac{\tilde{X}-\eta+\eta Z}{(1-\eta^2)Z\tilde{X}}\right)+\dots\right\}.
\end{aligned} \tag{88}
$$

Если теперь выделить в подынтегральном выражении член, пропорциональный $1/\tilde{X}$ (только он и выживает при переходе к пределу точечного заряда), то подынтегральное выражение существенно упрощается и интеграл по η несложно вычислить

$$
\begin{aligned}
&\frac{3qu}{2a}\int_{-1}^{1}d\eta\left\{-\frac{(\eta^2-1/3)\ln(1-\eta)}{\tilde{X}}-\right.\\
&\left.-\frac{(\eta^2/3-1/5)u^2}{2\tilde{X}}+\frac{v^2(\eta^2-1/3)(1+\eta)}{2\tilde{X}}+\dots\right\} = \frac{qv}{X}\left(\frac{1}{3}+\frac{2v^2}{15}+\dots\right)
\end{aligned} \tag{89}
$$

(я доразложил множитель u^2). С другой стороны, прямое разложение (80) по степеням v дает

$$\frac{q\sqrt{1-v^2}}{v^2 X}\left(\arcsin v - \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\right) = -\frac{qv}{X}\left(\frac{1}{3} + \frac{2v^2}{15} + \dots\right). \tag{90}$$

Складывая (89) и (90), находим

$$(A_x^C - A_x^L)(X,0,0) = O(v^5). \tag{91}$$

Таким образом, разницы электрических полей в разных калибровках на оси x в пределе точечного заряда в порядке v^4 нет, вопреки утверждениям Онучина (см. формулу (12) его работы).

Добавление. Отказ от разложения по степеням a/X

Выражение (89) было получено из (88) разложением по степеням a/X с сохранением только членов $1/X$. Однако все интегралы в (88) можно вычислить точно (это видно из формулы для Z — подкоренное выражение зависит от η линейно). Получаем вклад внешней области

$$\frac{qv}{X}\left(\frac{1}{3} - \frac{a^2}{5X^2}\right) + \frac{qv^3}{X}\left(\frac{2}{15} + \frac{3a^4}{35X^4}\right) + \dots \tag{92}$$

Разность векторных потенциалов в кулоновой и лоренцевой калибровках равна

$$(A_x^C - A_x^L)(X,0,0) = -\frac{qva^2}{5X^3} + \frac{3qv^3a^4}{35X^5} + \dots \tag{93}$$

Разность скалярных потенциалов согласно (55) равна

$$(\varphi^C - \varphi^L)(X,0,0) = -\frac{qv^2a^2}{5X^3} + \frac{3qv^4a^4}{35X^5} + \dots \tag{94}$$

Нетрудно видеть, что

$$(\varphi^C - \varphi^L)(X,0,0) - v(A_x^C - A_x^L)(X,0,0) = O(v^6). \tag{95}$$

Но выписанное выше выражение как раз дает при дифференцировании разницу электрических полей. Действительно, учитывая, что потенциалы зависят только от комбинации $X = x - vt$, но не от x и t по раздельности,

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial X}(\varphi - vA_x). \tag{96}$$

Таким образом, мы показали, что поля в разных калибровках оказываются равными с точностью до v^4 при конечных размерах заряда, а не только в пределе $a \to 0$.