Вычисление потенциалов равномерно движущегося точечного заряда в лоренцевой и кулоновой калибровках.

Уравнения Максвелла имеют вид (система единиц — почти СГС с дополнительным условием $c = 1$)

$$\nabla\mathbf{E} = 4\pi\rho, \qquad \nabla\times\mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \qquad\qquad (1)$$
$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla\mathbf{B} = 0.$$

Из уравнений последней строки (1) можно сделать вывод, что поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ могут быть представлены через потенциалы $\mathbf{A}$ и φ

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}. \qquad\qquad (2)$$

При этом уравнения последней строки (1) выполняются тождественно. Подстановка полей, выраженных через потенциалы, в уравнения первой строки (1) приводит к уравнениям для потенциалов

$$\Delta\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\mathbf{A} = -4\pi\rho, \qquad \Delta\mathbf{A} - \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -4\pi\mathbf{j} + \nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla\mathbf{A}\right). \qquad\qquad (3)$$

Поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ не фиксируют потенциалы однозначно. Можно произвести преобразование

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f, \qquad \varphi' = \varphi - \frac{\partial f}{\partial t} \qquad\qquad (4)$$

с произвольной функцией f (калибровочное преобразование), при этом поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ не изменятся. Наличие этого произвола дает возможность наложить на потенциалы дополнительное (калибровочное) условие. Наиболее популярны калибровочные условия Лоренца (лоренцева калибровка)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla\mathbf{A} = 0 \qquad\qquad (5)$$

и Кулона (кулонова калибровка)

$$\nabla\mathbf{A} = 0. \qquad\qquad (6)$$

Отметим, что лоренцево калибровочное условие инвариантно относительно преобразований Лоренца, поэтому не встает вопроса о том, в какой системе отсчета оно накладывается: если потенциалы удовлетворяют ему в одной системе отсчета, то удовлетворяют и в любой другой. В то же время кулоново калибровочное условие не является лоренц-инвариантным, нужно обязательно уточнять, в какой системе отсчета оно наложено. В других системах отсчета потенциалы будут удовлетворять уже другим условиям.

Уравнения для потенциалов в лоренцевой и кулоновой калибровках немного упрощаются. В лоренцевой

$$\Delta\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \qquad \Delta\mathbf{A} - \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -4\pi\mathbf{j}. \qquad\qquad (7)$$

В кулоновой

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \qquad \Delta\mathbf{A} - \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -4\pi\mathbf{j} + \nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{8}$$

Равномерно движущимся зарядом (не обязательно точечным) будем называть распределение плотностей заряда и тока вида

$$\rho = \rho(\mathbf{r} - \mathbf{v}t), \qquad \mathbf{j} = \mathbf{v}\rho(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) \tag{9}$$

с произвольной функцией $\rho(\mathbf{r})$. Нетрудно проверить, что это распределение допустимо, закон сохранения заряда

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\mathbf{j} = 0 \tag{10}$$

выполняется. В частности, равномерно движущимся точечным зарядом будем называть распределение (9) при $\rho(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$.

Решение уравнений для потенциалов равномерно движущегося заряда естественно искать в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t), \qquad \varphi = \varphi(\mathbf{r} - \mathbf{v}t). \tag{11}$$

Решать уравнения (7) и (8) будем методом преобразования Фурье. Представим решение в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)}\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}), \qquad \varphi(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)}\tilde{\varphi}(\mathbf{k}) \tag{12}$$

и подставим в уравнения. Тогда из (7) получим

$$\left[k^2 - (\mathbf{kv})^2\right]\tilde{\varphi}(\mathbf{k}) = 4\pi\tilde{\rho}(\mathbf{k}), \qquad \left[k^2 - (\mathbf{kv})^2\right]\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}) = 4\pi\mathbf{v}\tilde{\rho}(\mathbf{k}), \tag{13}$$

где $\tilde{\rho}(\mathbf{k})$ — фурье-образ функции $\rho(\mathbf{r})$. Аналогично из (8) получаем

$$k^2\tilde{\varphi}(\mathbf{k}) = 4\pi\tilde{\rho}(\mathbf{k}), \qquad \left[k^2 - (\mathbf{kv})^2\right]\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}) = 4\pi\mathbf{v}\tilde{\rho}(\mathbf{k}) - \mathbf{k}(\mathbf{kv})\tilde{\varphi}(\mathbf{k}). \tag{14}$$

Решение уравнения (13) имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)}\frac{4\pi\tilde{\rho}(\mathbf{k})}{k^2 - (\mathbf{kv})^2}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) = \mathbf{v}\varphi(\mathbf{r} - \mathbf{v}t). \tag{15}$$

Решение уравнений (14) имеет вид

$$\begin{gathered} \varphi(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)}\frac{4\pi\tilde{\rho}(\mathbf{k})}{k^2}, \\ \mathbf{A}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)}\frac{\left[\mathbf{v} - \mathbf{k}(\mathbf{kv})/k^2\right]4\pi\mathbf{v}\tilde{\rho}(\mathbf{k})}{k^2 - (\mathbf{kv})^2}. \end{gathered} \tag{16}$$

Дальнейшее фактическое вычисление потенциалов проведем для точечного заряда, то есть для $\rho(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$, тогда фурье-образ $\tilde{\rho}(\mathbf{k}) = 1$. Вычисления интегралов проще проводить в нековариантной форме, направив ось x по скорости движения заряда. Тройной интеграл записывается как повторный. Сперва интегрируем по компоненте k_x, затем по полярному углу θ в плоскости (k_y, k_z) и, наконец, по модулю проекции $k_\perp = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ на плоскость (k_y, k_z).

Начнем с лоренцевой калибровки. Фактически нужно вычислить только φ. Интеграл по k_x вычисляется по теореме о вычетах. При $x - vt > 0$ контур замыкается верхней полуокружностью. Выражение

$$\frac{1}{k^2 - (\mathbf{k}\mathbf{v})^2} = \frac{1}{(1-v^2)k_x^2 + k_\perp^2} \tag{17}$$

имеет в верхней полуплоскости единственный полюс

$$k_x = \frac{ik_\perp}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{18}$$

Результат вычисления

$$\varphi = \int \frac{d^2k}{\pi} \frac{e^{i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp - k_\perp (x-vt)/\sqrt{1-v^2}}}{2k_\perp \sqrt{1-v^2}} \tag{19}$$

Вычисление интеграла по полярному углу производится с помощью формулы

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix\cos\theta}\, d\theta = J_0(x) \tag{20}$$

($J_0(x)$ — функция Бесселя). Результат вычисления $\left(r_\perp = \sqrt{y^2 + z^2}\right)$

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \int_0^\infty J_0(k_\perp r_\perp) e^{-k_\perp (x-vt)/\sqrt{1-v^2}}\, dk_\perp. \tag{21}$$

Оставшийся интеграл вычисляется с помощью формулы

$$\int_0^\infty J_0(x) e^{-px}\, dx = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}. \tag{22}$$

Применяя ее, окончательно находим

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{(x-vt)^2 + (1-v^2)(y^2+z^2)}}. \tag{23}$$

Нетрудно проверить, что в случае $x - vt < 0$ получается такой же результат. Как уже отмечалось

$$A_x = v\varphi, \qquad A_y = 0, \qquad A_z = 0. \tag{24}$$

Теперь рассмотрим потенциалы в кулоновой калибровке. Начнем с потенциала φ. Интеграл по k_x вычисляется по теореме о вычетах. При $x - vt > 0$ контур замыкается верхней полуокружностью. Подынтегральное выражение имеет в верхней полуплоскости единственный полюс $k_x = ik_\perp$. Результат вычисления

$$\varphi = \int \frac{d^2k}{\pi} \frac{e^{i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp - k_\perp (x-vt)}}{2k_\perp}. \tag{25}$$

Вычисление интеграла по полярному углу производится при помощи формулы (20), результат

$$\varphi = \int_0^\infty J_0(k_\perp r_\perp) e^{-k_\perp (x-vt)}\, dk_\perp. \tag{26}$$

Оставшийся интеграл вычисляется при помощи формулы (22), окончательный результат

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{(x-vt)^2 + y^2 + z^2}}. \tag{27}$$

Нетрудно проверить, что вычисления при $x - vt < 0$ приводят к такому же результату.

Осталось вычислить векторный потенциал из (16). Вычислим отдельно его x- и y-компоненты (z-компонента, очевидно, может быть получена из y-компоненты заменой координат y на z и наоборот). Интеграл по k_x вычисляется по теореме о вычетах. При $x - vt > 0$ контур замыкается верхней полуокружностью. Подынтегральное выражение имеет в верхней полуплоскости два полюса при

$$k_x = ik_\perp, \qquad k_x = \frac{ik_\perp}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{28}$$

Результат вычисления

$$\begin{aligned} A_x &= \int \frac{d^2k}{\pi} \left\{ \frac{e^{i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp - k_\perp (x-vt)}}{2vk_\perp} - \frac{\sqrt{1-v^2}\, e^{i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp - k_\perp (x-vt)/\sqrt{1-v^2}}}{2vk_\perp} \right\}, \\ A_y &= \int \frac{d^2k}{\pi} \left\{ -\frac{ik_y e^{i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp - k_\perp (x-vt)}}{2vk_\perp^2} + \frac{ik_y e^{i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp - k_\perp (x-vt)/\sqrt{1-v^2}}}{2vk_\perp^2} \right\}. \end{aligned} \tag{29}$$

Вычисление интеграла по полярному углу производится при помощи формулы (20) и формулы

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix\cos\theta} i\cos\theta\, d\theta = -J_1(x). \tag{30}$$

Для ее использования нужно записать подынтегральное выражение в виде

$$\begin{aligned} ik_y e^{i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp} &= ik_\perp \cos\theta e^{ik_\perp (y\cos\theta + z\sin\theta)} = \\ &= ik_\perp \left[(y/r_\perp)\cos(\theta-\theta_0) - (z/r_\perp)\sin(\theta-\theta_0) \right] e^{ik_\perp r_\perp \cos(\theta-\theta_0)}, \end{aligned} \tag{31}$$

где $\cos\theta_0 = y/r_\perp$, $\sin\theta_0 = z/r_\perp$. Результат вычислений

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{1}{v} \int_0^\infty J_0(k_\perp r_\perp) \left\{ e^{-k_\perp (x-vt)} - \sqrt{1-v^2}\, e^{-k_\perp (x-vt)/\sqrt{1-v^2}} \right\} dk_\perp, \\ A_y &= \frac{y}{v\sqrt{y^2+z^2}} \int_0^\infty J_1(k_\perp r_\perp) \left\{ e^{-k_\perp (x-vt)} - e^{-k_\perp (x-vt)/\sqrt{1-v^2}} \right\} dk_\perp. \end{aligned} \tag{32}$$

Оставшиеся интегралы вычисляются по формуле (22) и формуле

$$\int_0^\infty J_1(x) e^{-px}\, dx = 1 - \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}. \tag{33}$$

Окончательный результат

$$A_x = \frac{1}{v\sqrt{(x-vt)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1-v^2}{v\sqrt{(x-vt)^2 + (1-v^2)(y^2+z^2)}}, \tag{34}$$

$$A_y = -\frac{y(x-vt)}{v(y^2+z^2)\sqrt{(x-vt)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{y(x-vt)}{v(y^2+z^2)\sqrt{(x-vt)^2 + (1-v^2)(y^2+z^2)}}.$$