Пример системы, в которой магнитная сила Лоренца совершает работу.

Рассмотрим систему 2-х частиц, чьи заряды одинаковые по величине, но противоположны по знаку ($q_1 = q_2$) и масса M первой частицы много больше массы m второй частицы $M \gg m$). Пример такой системы - атом водорода, но в данном случае частицы считаются классическими. Для отношения $\dfrac{M}{m} > 1000$, первая частица может рассматриваться как покоящаяся и вторая частица движется вокруг нее по круговой траектории.

В какой-то момент времени к системе прикладывается однородное (в пространстве) магнитное поле $\mathbf{B}$, направленное нормально к плоскости орбиты второй частицы. Т.к. величина B поля не может возрастать мгновенно, (от $\mathtt{B} = 0$ до $\mathtt{B} = B_0$), предполагается, что B поле меняется во времени по закону $B = B_0 \cdot \alpha t$, $0 \le t \le 1/\alpha$ и $\alpha \ll \omega$ частоты вращения второй частицы по орбите.

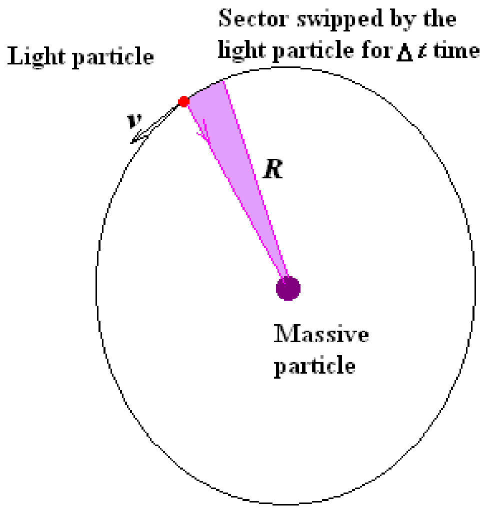

Рис. 1: Система 2-х частиц

Рассмотрим, как меняется система под воздействием этого поля.

Сила Лоренца, которая действует по радиусу орбиты, есть

$$F_{\mathtt{mag}} = q\frac{v}{c}\mathtt{B} = \frac{\alpha q v t}{c}\mathtt{B}_0\,. \tag{1}$$

и очевидно, что появление дополнительной силы должно привести к тому, что легкая частица изменяет свое положение в поетнциале массивной частицы, но и легкая частица теперь с дополнительной силой действует на массивную частицу (в силу 3-го з-на Ньютона). В итоге это ведет к тому, что магнитная сила Лоренца передается через кулоновский потенциал массивной частице и заставляет последнюю двигаться.

Однако. в системе есть еще одна дополнительная сила, которая является ненулевой, пока B поле меняется. Эта сила создается вихревым E полем.

Согласно уравнению Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

изменение B поля порождает вихревое E поле; мы предполаем, что это поле направлено по касательной к орбите частицы [1].

Это E поле меняет кин.энергию легкой частицы, поскольку $\mathbf{E} \cdot \mathtt{d}\boldsymbol{l} = \mathcal{E}$, есть ЭДС и потому $\Delta W = q\mathcal{E} = q\mathbf{E} \cdot \mathtt{d}\boldsymbol{l}$.

Так что когда легкая частица движется по орбите во время процесса изменения B поля, ее энергия изменяется в сответствии с законом Фарадея

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Вычислим изменение ЭДС за время Δt

$$\mathcal{E} = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{c}\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \tag{2}$$

Для $\alpha \ll \omega$ (опуская знак '-')

$$\mathcal{E} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{c}\frac{\mathtt{B}\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{c}\frac{\mathtt{B}R \cdot v\Delta t/2}{\Delta t} = \frac{1}{c}\frac{\mathtt{B}Rv}{2} \tag{3}$$

поскольку за время Δt легкая частица заметает сектор

$$S = \frac{R \cdot v\Delta t}{2} \tag{4}$$

Тогда изменение энергии

$$\Delta W = q\mathcal{E} \tag{5}$$

и потому

$$F_{\mathtt{rot\,E}} = \frac{\partial \Delta W}{\partial R} = \frac{\alpha q v t}{2c}\mathtt{B}_0 \tag{6}$$

В итоге суммарная сила, действующая в радиальном направлении [2]

$$F_{total} = F_{mag} - F_{\mathtt{rot\,E}} = \frac{\alpha q v t}{2c}\mathtt{B}_0\,. \tag{7}$$

Результат ур-ния (7) такой:
** Магнитная сила Лоренца в 2 раза больше "вихревой силы", и*
** Обе силы действуют в радиальном направлении, что в итоге приводит к действию*

[1] Разумеется, можно рассмотреть любое направление E поля, но поскольку частицап вращается по орбите, то есть периодически возвращается в свое начальное состояние, то для вычислений нам важно только соленоидальное поле, которое производит работу по замкнутому котнтуру – потенциальное поле такой работы не производит.

[2] Касательная сила изменяет кин.энергию частицы и сл-но радиус ее орбиты, что приводит к измнению величины радиальной силы.

этих сил на массивную частицу, и на центр масс системы.
** Формально магнитная сила Лренца не производит работу по изменению кин.энергии чего-либо. Но эта сила производит работу по изменению положения легкой частицы в потенциальном поле массивной.*

Решая у-ния движения центра масс (или массивной частицы)

$$\ddot{x} = \frac{F_{mag} - F_{\mathtt{rot\,E}}}{M} \cos \omega t \tag{8}$$

$$\ddot{y} = \frac{F_{mag} - F_{\mathtt{rot\,E}}}{M} \sin \omega t \tag{9}$$

мы получаем траектию движения центра масс системы за один цикл ващения

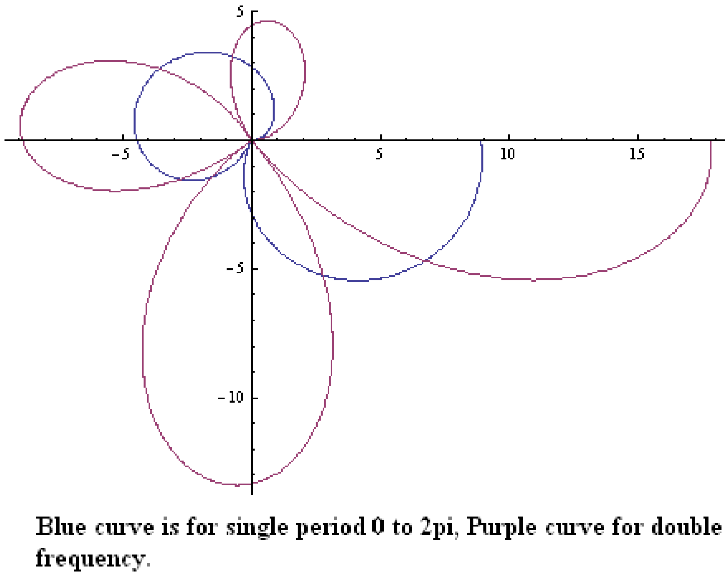

Рис. 2: Траектории ц.м. при разных частотах вращения.