Abstand der Kondensatorplatten.

Wegen des Einflusses der Kollimationsfehler wurde Kundtsche Kollimationsmethode angewandt; abwechselnd von unten und von oben her fokussiert. Beispiel einer einzelnen Messungsreihe:

(Die Zahlen unter S sind die Ablesungen am Schlittenmikroskop in Zentimetern, die Zahlen unter O die an der Mikrometertrommel des Objektmikroskopes abgelesenen $^1/_{1000}$ mm. Die römischen Ziffern bezeichnen die Ablesung an der Platte P_1 bez. P_2.)

Messungsreihe Nr. 28.

I. S	I. O	II. S	II. O
0,68398	29,0	0,56238	56,0
96	29,2	38	55,5
89	30,0	34	55,6
90	29,0	42	55,4
94	29.0	42	54.8
0,68393	29,2	0,56239	55,5
292		555	
0,68101		0,55684	
0,55684			

d = 0,12517 = Abstand der Platten ($\pm$ 0,2 μ)

In gleicher Weise im ganzen 23 Messungen:

Nr.	d	Nr.	d	Nr.	d
7	0,12375	15	0,12506	24	0,12431
8	450	16	482	25	445
9	414	17	466	26	447
10	393	18	435	27	392
11	399	19	444	28	517
12	399	20	482	29	299
13	432	21	436	30	355
14	485	22	490		

Im Mittel: d = **0,12434 cm** $\pm$ 0,00011.

II. *Relative Magnetfeldmessung.* Messungen bezogen auf Höhe h, an der Skala des Meßapparates (Fig. 6) abgelesen. Probespule befindet sich in Höhe der Oberfläche des Ringes S am Vakuumgefäß (Fig. 2) bez. der Unterfläche des Ringes R' am Aufnahmeapparat, wenn $h = 3{,}20$ cm. Von dort bis zur Bodenfläche C des Aufnahmeapparates beträgt die Entfernung 2,11 cm; somit ist die von C aus gerechnete Höhe

$$x = 2{,}11 + h - 3{,}20 = h - 1{,}09 .$$

Für die Umrechnung ist es bequemer, den Nullpunkt 0,09 cm unter C zu wählen, so daß $x = h - 1$.

Beispiel einer Einzelmessung:

$$h = 3{,}0 \quad x = 2{,}0\,.$$

Ausschlag:	479,0	478,5	478,5	483	484,5	484
Nullpunkt:	12,5	12,5	12,5	18	18	18
Differenz:	466,5	466	466	465	466,5	466

Im Mittel: **466,0**.

In ähnlicher Weise sind alle übrigen Punkte gemessen. Die ganze Skala wurde hin und zurück durchmessen, um etwaige zeitliche Änderungen der Galvanometerempfindlichkeit zu eliminieren. Die letzten drei Messungen sind auf dem Rückwege gemacht; es hat sich nur der Nullpunkt allmählich etwas verschoben, die Empfindlichkeit ist dieselbe geblieben. Die Entfernung der Skala vom Spiegel betrug etwa 3 m, Reduktion auf unendlich kleine Ablenkungen war wegen der geringen Veränderlichkeit der Ausschläge unnötig.

IV. *Absolute Magnetfeldmessung.* Die Notwendigkeit, den ganzen Apparat auf der in Abt. I erwähnten Marmorplatte zu montieren (eine andere Möglichkeit zu genügend erschütterungsfreier Aufstellung war wegen der mangelhaftigen baulichen Verhältnisse des Instituts nicht vorhanden), zwang zur Wahl einer Skalenentfernung von bloß 855 mm. Deshalb die viel kleineren Ausschläge. Außerdem war Schiefstellung der Skala nötig, so daß sorgfältige Reduktion auf unendlich kleine Ausschläge ausgeführt werden mußte.

Ich teile die Einzelmessungen im Feld der Stromspule mit:

Tabelle.

Reduz. Ausschl. N	Ampèremeterablesung A vor Kommutieren	Ampèremeterablesung A nach Kommutieren	Mittlerer Strom in Ampère $J = 0{,}257 \,.\, A$	N/J
− 91,9	128,5	128,5	33,02	− 2,781
+ 90,9	128,0	127,2	32,80	+ 2,768
− 90,5	126,3	126,3	32,47	− 2,784
+ 90,6	127,0	126,0	32,52	+ 2,786
− 91,1	126,0	126,0	32.37	− 2,816
+ 89,7	125,5	125,0	32,17	+ 2,786

Im Mittel: $N/J = 2{,}787 \pm 6{,}4 = 2{,}787\,.\,(1 \pm 2{,}3/_{1000})$.

V. *Versuchsprotokolle.*

Platte 10.

Batteriespannung zu Beginn . . . . 327,02 Volt
„ am Schluß . . . . 326,85 „
Mittel: 326,93 Volt

Zeit	Isolation (verliert 500 Volt in Sek.)	Bemerkungen
13. VI. 05 $11^h 20^m$ Vorm.	75	Zu pumpen begonnen
11 35 „	—	Elektr. Feld angelegt
12 50 Nachm.	—	Pumpe abgestellt
14. VI. 05 8 50 Vorm.	60	
10 15 „	60	Elektr. Feld umgekehrt
15. VI. 05 9 0 „	20	Schluß

Unkorrigierte Apparatspannung: $V = 4 . 2 . 326{,}93 = 2615$ Volt.
Kurve etwas schwach, aber klar. Schichtriß durch Ende eines Kurvenastes.

Platte 11.

Batteriespannung zu Beginn . . . . 326,85 Volt
„ am Schluß . . . . 326,77 „
Mittel: 326,81 Volt

Zeit	Isolation (verliert 500 Volt in Sek.)	Bemerkungen
15. VI. 05 $10^h 15^m$ Vorm.		Zu pumpen begonnen
11 0 „	110	Elektr. Feld angelegt
12 30 Nachm.	—	Pumpe abgestellt
2 45 „	10	Seit 2^h Gewitter
4 15 „	17	Gewitter hat bis $3^h 30^m$ gedauert, Wetter klar, aber schwül
16. VI. 05 9 20 Vorm.	5	Gepumpt von $9^h 20^m$ bis $9^h 35^m$
11 30 „	20	
12 0	—	Elektr. Feld umgekehrt
4 45 Nachm.	20	Schwül, nahendes Gewitter
6 0 „	35	Gewitter
17. VI. 05 9 30 Vorm.	5	Klar, aber noch schwül
12 0	>250	Sehr warm. Schluß

Unkorrigierte Apparatspannung: $V = 4 . 2 . 326{,}81 = 2614{,}5$ Volt.
Kurve kräftig, aber starker Schleier.

Platte 12.

Batteriespannung zu Beginn	. . . .	326,77 Volt
„ am Schluß	. . . .	326,75 „
	Mittel:	326,76 Volt

Zeit	Isolation (verliert 500 Volt in Sek.)	Bemerkungen
17. VI. 05 $5^h 17^m$ Nachm.	—	Zu pumpen begonnen
5 55 „	50	Elektr. Feld angelegt
6 15	—	Pumpe abgestellt
18. VI. 05 12 40 „	10	Elektr. Feld umgekehrt. Schwül, Gewitterschauern seit 17. VI. abends. Seit 18. VI. 1^h Nachm. zunehmende Aufklärung
19. VI. 05 9 45 Vorm.	150	Elektr. Feld wieder umgekehrt, warmes trocknes Wetter
12 5 Nachm.	>250	Schluß

Unkorrigierte Apparatspannung: $V = 4 . 2 . 326{,}76 = 2614{,}1$ Volt.
Kurve wie bei Platte 11.

Platte 13.

Batteriespannung zu Beginn	. . . .	326,75 Volt
„ am Schluß	. . . .	326,65 „
	Mittel:	326,70 Volt

Zeit	Isolation (verliert 500 Volt in Sek.)	Bemerkungen
19. VI. 05 $4^h 20^m$ Nachm.	—	Zu pumpen begonnen
4 55 „	60	Elektr. Feld angelegt, Wetter kühl, trocken
6 15 „	—	Pumpe abgestellt
20. VI. 05 9 10 Vorm.	12	
10 30 „	20	
11 25 „	45	
12 0	—	Elektr. Feld umgekehrt
21. VI. 05 8 10 „	8	
9 25 „	—	Elektr. Feld nochmals umgekehrt
11 30 „	—	Schluß

Unkorrigierte Apparatspannung: $V = 5 . 2 . 326{,}70 = 3267$ Volt.
bei Kurve wie Platte 11 und 12.

Platte 15.

In der Mitte geerdete Batterie direkt angelegt, also keine Isolationsverluste.

Batteriespannung zu Beginn	326,35 Volt
„ am Schluß	326,25 „
Mittel:	326,30 Volt

Zeit		Bemerkungen
25. VI. 05	$10^h 50^m$ Vorm.	Zu pumpen begonnen
	11 10 „	Elektr. Feld angelegt
	11 45 „	Pumpe abgestellt
26. VI. 05	11 15 „	Elektr. Feld umgekehrt
27. VI. 05	10 15 „	Schluß

Apparatspannung: $V = 5 \,.\, 326{,}30 = 1631{,}5$ Volt.

Platte etwas mehr verschleiert als die anderen.

VI. *Kurvenmessungen.* Als Beispiel sei das Messungsprotokoll der Platte 12 mitgeteilt. Zahlenangaben in Millimetern. Messung von z folgendermaßen: Zuerst Einstellung mittels z-Schraube auf unabgelenkten Fleck und zwar fünfmal (a). Dann Seitenverschiebung mittels y-Verschiebung, bis Marke zwischen zwei Striche der z-Skala fällt. Nächst niederer Strich der Skala sei z_1. Dann Einstellung mit z-Schraube auf z_1, Ablesung b fünfmal; dann ebenso Einstellung auf $z_1 - 1$, Ablesung c fünfmal.

$z_1 = 0{,}1.$

	a	b	c
	59,2	63,2	53,7
	58,4	62,5	53,8
	59,1	63,3	54,1
	58,5	63,6	53,9
	58,7	62,7	54,2
Mittel:	58,8	63,1	53,9

Es ist:

$$z_0 = z_1 + 0{,}1 \,.\, (b - a)/(b - c) = \mathbf{0{,}147}\,.$$

Dann Messung von y_1 und y_2 für willkürlich gewählte z. Es ist

$$z_b = z - z_0\,; \quad y_b = (y_1 - y_2)/2\,.$$

x = 1,500		x = 2,000		x = 2,500		x = 3,000	
y_1	y_2	y_1	y_2	y_1	y_2	y_1	y_2
15,332	14,790	15,465	14,676	15,579	14,540	15,738	14,372
43	90	68	81	608	23	43	64
30	89	62	85	583	46	38	73
37	85	72	69	593	30	49	68
15	91	71	75	578	37	37	69
27	84	72	77	610	31	51	76
28	88	68	84	597	35	59	73
31	91	70	69	597	37	65	81
36	803	67	90	588	38	50	81
40	780	66	88	601	32	53	74
15,332	14,789	15,468	14,679	15,593	14,535	15,748	14,373

x = 3,500		x = 4,000		x = 4,500		x = 5,000	
y_1	y_2	y_1	y_2	y_1	y_2	y_1	y_2
15,901	14,194	16,096	14,010	16,316	13,791		13,564
17	94	103	13,996	20	781		70
21	95	090	14,022	07	799		65
27	95	104	13,990	18	778		61
14	93	101	14,011	18	805		71
24	83	114	13,984	21	787		64
04	93	102	14,005	28	803		52
19	88	123	14,000	33	784		77
21	91	105	14,008	23	811		67
17	80	122	14,003	25	811		65
15,917	14,191	16,106	14,003	16,321	13,795		13,566

Bei dem letzten Punkt ist y_1 nicht mehr meßbar. y_b ist berechnet als Differenz zwischen y_2 und dem Mittelwert von $y_0 = (y_1 + y_2)/2$ für sämtliche Punkte.

Anhang II.

Berechnung der Feldintegrale.

I. *Magnetisches Feldintegral.* Für H war die empirische Gleichung gefunden (p. 513)

$$H = 141{,}7 + 4{,}1\,x - 2{,}0\,x^2 + 0{,}2\,x^3\,. \tag{1}$$

Daraus folgt unter Vernachlässigung der mit kleinen Zahlen multiplizierten Quadrate von x_0:

$$\int_{x_0}^{x} H\,d\,x = 141{,}7\,.\,(x - x_0) + 2{,}05\,x^2 - 0{,}667\,x^3 + 0{,}05\,x^4\,, \tag{2}$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \int\limits_{x_0}^{x_1} d\,x \int\limits_{x_0}^{x} H\,d\,x &= 70{,}85\,(x_1 - x_0)^2 + 0{,}683\,x_1^3 - 0{,}167\,x_1^4 \\ &\quad + 0{,}01\,x_1^5 = J_1\,, \end{aligned} \right.$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \int\limits_{x_0}^{x_2} d\,x \int\limits_{x_0}^{x} H\,d\,x &= 70{,}85\,(x_2 - x_0)^2 + 0{,}683\,x_2^3 - 0{,}167\,x_2^2 \\ &\quad + 0{,}01\,x_2^5 = J_2\,. \end{aligned} \right.$$

Hierbei ist $x = 0$ für einen 0,09 cm unter der Fläche C liegenden Punkt (vgl. p. 539).

Somit:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2{,}005 + 0{,}09 &&= 2{,}095\,, \\ x_2 &= 2{,}005 + 1{,}969 + 0{,}09 &&= 4{,}064\,, \\ x_0 &= 0{,}09 \;\; + 0{,}011 &&= 0{,}101 \end{aligned}$$

(0,011 = Höhe der Strahlungsquelle vgl. p. 507). Daraus:

$$J_1 = 285{,}2\,, \quad J_2 = 1123{,}8$$

und

$$\boldsymbol{M} = J_2 - \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} \cdot J_1 = \mathbf{557{,}1.}$$

Berechnung des von ungenauer Orientierung im Felde herrührenden Fehlers.

Die Lagebeziehung der verschiebbaren Probespule zum Aufnahmeapparat ist nur auf etwa 0,5 mm genau bekannt. In den beiden Integralen ist das Hauptglied $(x_1 - x_0)^2$ von dieser Unsicherheit unabhängig. Eine Veränderung der Grenzen x_1 und x_2 um δx bewirkt also eine Veränderung:

$$\delta J_1 = \delta x \{3 \,.\, 0{,}683\,x_1^2 - 4 \,.\, 0{,}167\,x_1^3 + 5 \,.\, 0{,}01\,x_1^4\} = -\,1{,}8\,\delta x$$

und ähnlich:

$$\delta J_2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = +\,3{,}4\,\delta x.$$

Somit:

$$\frac{\delta M}{\delta x} = 3{,}4 + 2 \,.\, 18 = 7.$$

Einer Verschiebung um 0,5 mm entspricht also eine Änderung

$$\delta M = 0{,}35 = 0{,}6\,{}^0/_{00}\,.$$

II. *Elektrisches Feldintegral.* Wir legen der Bequemlichkeit halber den Koordinatenanfang in die Strahlungsquelle, indem wir von allen von C aus gemessenen x den Betrag 0,011 cm abziehen.

Dann lautet das elektrische Feldintegral:

$$E = (x_2 - x_1)\left\{\int_0^{x_1} F\,dx - \frac{1}{x_1}\int_0^{x_1} d\,x \int_0^{x} F\,d\,x\right\}. \tag{1}$$

Dabei ist dann:

$$x_2 - x_1 = 1{,}969\,,$$
$$x_1 = 1{,}994\,.$$

Etwa 1 mm innerhalb des Plattenrandes ist das Feld praktisch konstant. Wir zerlegen deshalb die Strecke x_1 in drei Teile:

a vom Nullpunkt bis 1 mm hinter dem unteren Plattenrand,
c „ Endpunkte von a bis 1 mm vor dem oberen Plattenrand,
b „ „ „ c „ zum Diaphragma.

Es ist also:

$$\begin{aligned} a &= 0{,}246 + 0{,}1 - 0{,}011 = 0{,}335 \\ c &= 1{,}484 - 0{,}2 \qquad\qquad = 1{,}284 \\ b &= 0{,}275 + 0{,}1 \qquad\qquad = 0{,}375 \\ \hline a + c + b &= 1{,}994 = x_1 \end{aligned}$$

Es ist:

$$\left\{\begin{aligned} \int_0^x F\,d\,x &= \int_0^x F\,dx && \text{für} \quad 0 < x < a\,, \\ &= \int_0^a F\,dx + (x - a) && \text{„} \quad a < x < a + c\,, \\ &= \int_0^a F\,dx + c + \int_{a+c}^x F\,dx && \text{„} \quad a+c < x < x_1\,. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Somit:

$$\int_0^{x_1} F\,dx = \int_0^a F\,dx + \int_{a+c}^{x_1} F\,dx + c\,. \tag{3}$$

Es ist ferner in leicht verständlicher Abkürzung:

$$\left\{\begin{aligned} \int_0^{x_1}\int_0^x &= \int_0^a\int_0^x + \int_a^{a+c}\int_0^x + \int_{a+c}^{x_1}\int_0^x \\ &= \int_0^a\int_0^x + c\int_0^a + \frac{(a+c)^2}{2} - \frac{a^2}{2} - a\,c + b\int_0^a + b\,c + \int_{a+c}^{x_1}\int_{a+c}^x\,. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Führt man in dem letzten Doppelintegral die neue Variable

$$\xi = x_1 - x,$$

d. h. den Abstand vom Diaphragma ein, so wird

$$\int_{a+c}^{x_1} dx \int_{a+c}^{x} F\,dx = \int_b^0 d\xi \int_b^\xi F\,d\xi = \int_b^0\int_b^0 + \int_b^0\int_0^\xi$$

$$= b \cdot \int_0^b F\,d\xi - \int_0^b d\xi \int_0^\xi F\,d\xi .$$

Somit:

$$(5)\quad \begin{cases} \int_0^{x_1} dx \int_0^x F\,dx = \int_0^a dx \int_0^x F\,dx - \int_0^b d\xi \int_0^\xi F\,d\xi + (b+c)\int_0^a F\,dx \\ \qquad + b\int_0^b F\,d\xi + \frac{c^2}{2} + b\,c, \end{cases}$$

und nach (3):

$$(6)\qquad \int_0^{x_1} F\,dx = \int_0^a F\,dx + \int_0^b F\,d\xi + c.$$

Setzt man (5) und (6) in (1) ein, so erhält man (für $F = 1$ im konstanten Bereich):

$$(7)\quad \begin{cases} E_1 = (x_2 - x_1)\left\{\frac{c}{2} + \int_0^b F\,d\xi - \frac{1}{x_1}\left[\frac{c}{2}(b-a) + b\int_0^b F\,d\xi \right.\right. \\ \qquad \left.\left. - a\int_0^a F\,dx - \int_0^b d\xi \int_0^\xi F\,d\xi + \int_0^a dx \int_0^x F\,dx\right]\right\}. \end{cases}$$

In diesem Ausdruck stellen die ersten beiden Glieder in der geschweiften Klammer denjenigen Wert von $E_1/(x_2 - x_1)$ dar, der bei völlig symmetrischer Stellung der Kondensatorplatten zwischen Boden und Diaphragma und völligem Zusammenfallen der Strahlenquelle mit dem Boden eintreten würde; der mit $1/x_1$ multiplizierte Ausdruck, der bei völlig symmetrischer Anordnung verschwindet, stellt die von der Unsymmetrie herrührende Korrektion dar.

Die Integrale wurden graphisch ausgewertet. Es beträgt der Wert der ersten beiden Glieder („Hauptglieder"):

$$\frac{c}{2} + \int_0^b F\,d\xi = 0{,}642 + 0{,}167 = 0{,}809\,.$$

Dagegen betragen die Korrektionsglieder zusammen nur: 0,0141.

Somit wird das Feldintegral für ein Feld $F = 1$ im homogenen Teil:

$$E_1 = 1{,}969\,(0{,}809 - 0{,}0141) = \mathbf{1{,}565}\,,$$

das Korrektionsglied beträgt also bloß 1,7 Proz.; selbst wenn man nun die beiderseitigen Integrale und Doppelintegrale als gleich ansehen und nur den Abstand des Radiumschwerpunktes vom Boden berücksichtigen würde, so würde das Korrektionsglied lauten:

$$\frac{b-a}{x_1}\left[\frac{c}{2} + \int_0^b F\,d\xi\right] = 0{,}809 \cdot \frac{0{,}04}{1{,}994} = 2 \text{ Proz.}$$

Da also ein Gleichsetzen des Feldverlaufs an beiden Enden das Integral nur um (2 – 1,7) Proz. = 0,3 Proz. verändert, so kann selbst ein Fehler bei der nur schätzungsweise ausgeführten Bestimmung des Feldverlaufes zwischen o und a im Betrage von 30 Proz. das Resultat höchstens um 1 Promille beeinflussen.

Für eine Potentialdifferenz von 2500 Volt $= 25\,.\,10^{10}$ elektromagnetische Einh. und einen Plattenabstand von 0,1242 cm wird also:

$$E = \frac{1{,}565\,.\,25}{0{,}1242} \cdot 10^{10} = \mathbf{315\,.\,10^{10}}\,. \tag{8}$$

Von der Genauigkeit der Feldverlaufsmessung ist nur das zweite Hauptglied $\int_0^b F\,d\xi = 0{,}167$ abhängig; dieses beträgt $100 \cdot 0{,}167/0{,}809 = 21$ Proz. des Ganzen.

Es würde also selbst ein Fehler von 1 Proz. bei den relativen Feldmessungen erst 2 Promille Fehler im Integral hervorrufen. Man kann somit den vom Feldverlauf herrührenden Fehler in E zu 2 Promille ansetzen. Dazu kommt der etwaige Fehler der Potentialbestimmung mit 1 Promille und der Fehler des Plattenabstandes mit 2 Promille. Der maximal mögliche Fehler von E beträgt also 5 Promille.

Anhang III.

Bestimmung von ε / μ_0 aus Kathodenstrahlen.

In meinen bisherigen Arbeiten, auch in der eingangs zitierten letzten Publikation in den Berliner Berichten habe ich für ε / μ_0 den Wert $1{,}885 \, . \, 10^7$ als extrapoliert aus der Simonschen Zahl $1{,}865 \, . \, 10^7$ angegeben. Das angewandte Extrapolationsverfahren war jedoch nicht ganz korrekt, da ich bei der Rechnung den Unterschied zwischen transversaler und longitudinaler Masse nicht genügend berücksichtigt hatte. Der extrapolierte Wert wird ferner etwas verschieden, je nach der zugrunde gelegten Theorie.

I. *Berechnung nach Abraham.*[1]) Die *Gesamtenergie* des Elektrons ist, wenn a sein Radius, ε die Ladung in elektromagnetischem Maße

$$W = \frac{\varepsilon^2 c^2}{2a} \left\{ \frac{1}{\beta} \lg \frac{1+\beta}{1-\beta} - 1 \right\}$$

oder

$$W = \frac{\varepsilon^2 c^2}{2a} \{ 1 + \tfrac{2}{3} \beta^2 + \tfrac{2}{5} \beta^4 \ldots \}, \tag{1}$$

für $\beta : 0$ geht dies in die elektrostatische Energie des ruhenden Elektrons über:

$$W_0 = \frac{\varepsilon^2 c^2}{2a},$$

also ist der durch die Bewegung erlangte Energiezuwachs

$$(W - W_0) = W_0 \cdot \tfrac{2}{3} \beta^2 \{ 1 + \tfrac{3}{5} \beta^2 \}; \tag{2}$$

für die *transversale Masse* des Elektrons gilt die Gleichung:

$$\mu = \tfrac{2}{3} \frac{\varepsilon^2}{a} \{ 1 + \tfrac{2}{5} \beta^2 \}, \tag{3}$$

was für $\beta = 0$ übergeht in:

$$\mu_0 = \tfrac{2}{3} \frac{\varepsilon^2}{a}; \tag{4}$$

somit ist:

$$\frac{2 W_0 \beta^2}{3} = \frac{\mu_0}{2} \beta^2 c^2 = \frac{\mu_0}{2} q^2$$

---

1) M. Abraham, Theor. d. Elektr. 2. p. 179. Leipzig 1905.

(da $\beta = q/c$, wo q die Geschwindigkeit des Elektrons) folglich:

$$W - W_0 = \frac{\mu_0 q^2}{2}\{1 + \tfrac{3}{5}\beta^2\}. \tag{5}$$

Ist P die vom Elektron durchlaufene Potentialdifferenz, so ist die geleistete elektrische Arbeit εP. Diese muß gleich dem Energiezuwachs sein, also:

$$\varepsilon P = \frac{\mu_0 q^2}{2}\{1 + \tfrac{3}{5}\beta^2\}. \tag{6}$$

Die magnetische Ablenkung ist bestimmt durch:

$$\underline{z = \frac{\varepsilon}{\mu q} M = \frac{\varepsilon}{\mu_0 q} M(1 - \tfrac{2}{5}\beta^2).} \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt, durch Elimination von q:

$$\frac{\varepsilon}{\mu_0} = \frac{2 P z^2}{M^2}(1 + \tfrac{1}{5}\beta^2). \tag{8}$$

Setzt man den Annäherungswert für ε/μ_0, nämlich $2Pz^2/M = \alpha$, so ist in dem Korrektionsgliede mit genügender Genauigkeit, nach Gleichung (6):

$$\beta^2 = \frac{2\varepsilon P}{\mu_0 c^2} = 2\alpha \frac{P}{c^2},$$

also:

$$\underline{\frac{\varepsilon}{\mu_0} = \alpha\left(1 + \tfrac{2}{5}\alpha \frac{P}{c^2}\right).} \tag{9}$$

Es ist bei Simon:

$$\alpha = 1{,}865 \,.\, 10^7, \quad P = 8300 \text{ Volt} = 8300 \,.\, 10^8 \text{ im Mittel},$$

woraus:

$$\tfrac{2}{5}\alpha \frac{P}{c^2} = 0{,}0070$$

und

$$\underline{\frac{\varepsilon}{\mu_0} = 1{,}878 \,.\, 10^7 \text{ (Abraham).}} \tag{10}$$

II. *Berechnung nach Bucherer.*[1]) Es ist:

$$W = W_0 \frac{1 + \frac{\beta^2}{3}}{(1-\beta^2)^{1/2}}$$

woraus durch Reihenentwickelung:

$$W - W_0 = W_0 \cdot \tfrac{2}{3}\beta^2(1 + \tfrac{1}{2}\beta^2), \tag{11}$$

1) A. Bucherer, Math. Einf. in die Elektronentheorie. p. 58. Leipzig 1904.

oder

$$W - W_0 = \varepsilon P = \frac{\mu_0 q^2}{2}(1 + \tfrac{1}{3}\beta^2), \tag{12}$$

ferner:

$$\mu = \mu_0 . (1 - \beta^2)^{-1/3},$$

also

$$z = \frac{\varepsilon}{\mu q} M = \frac{\varepsilon}{\mu_0 q} M(1 - \beta^2)^{1/3}, \tag{13}$$

woraus wieder durch Elimination von q:

$$\frac{\varepsilon}{\mu_0} = \frac{2 P z^2}{M^2}(1 + \tfrac{1}{6}\beta^2), \tag{14}$$

oder in gleicher Bezeichnungsweise wie bei I:

$$\frac{\varepsilon}{\mu_0} = \alpha\left(1 + \tfrac{1}{3}\alpha \frac{P}{c^2}\right). \tag{15}$$

Es ist

$$\tfrac{1}{3}\alpha \frac{P}{c^2} = 0{,}0059,$$

somit:

$$\frac{\varepsilon}{\mu_0} = 1{,}876 . 10^7 \text{ (Bucherer)}. \tag{16}$$

III. *Berechnung nach Lorentz.* Beim Lorentzschen Elektron ist, wie bereits in der Einleitung erwähnt, das Energieprinzip nur dann aufrecht zu erhalten, wenn man dem Elektron nach Abraham (l. c. p. 207) eine innere Energie E zuschreibt, für welche die Gleichung gilt:

$$\frac{dE}{dq} = -\frac{\mu_0}{4}\frac{q}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{17}$$

und dann setzt:

$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon P &= (W - W_0) + \int_0^q \frac{dE}{dq}dq = W - W_0 + \frac{\mu_0 c^2}{4}\left\{\sqrt{1-\beta^2} - 1\right\} \\ &= W - W_0 - \frac{\mu_0 q^2}{2.4}\left\{1 + \frac{\beta^2}{4}\right\}, \end{aligned}\right. \tag{18}$$

für W gilt:

$$W = \frac{\varepsilon^2 c^2}{2a}\frac{1 + \frac{\beta^2}{3}}{\sqrt{1-\beta^2}} = W_0 \frac{1 + \frac{\beta^2}{3}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{19}$$

woraus durch Reihenentwickelung:

$$W - W_0 = \frac{\mu_0 q^2}{2} \cdot \frac{5}{4}[1 + \tfrac{13}{20}\beta^2] \tag{20}$$

oder

(21) $$\varepsilon P = \frac{\mu_0}{2} q^2 \{\tfrac{5}{4}[1 + \tfrac{13}{20}\beta^2] - \tfrac{1}{4}[1 + \tfrac{1}{4}\beta^2]\},$$

oder

(22) $$\varepsilon P = \frac{\mu_0 q^2}{2}\{1 + \tfrac{3}{4}\beta^2\}.$$

Ferner ist

(23) $$\mu = \mu_0 (1 - \beta^2)^{-1/2},$$

woraus

(24) $$\underline{z^2 = \frac{\varepsilon^2}{\mu_0^2} \cdot \frac{M^2}{q^2}(1 - \beta^2)}$$

und

(25) $$\frac{\varepsilon}{\mu^0} = \frac{2 P z^2}{M^2}(1 + \tfrac{1}{4}\beta^2)$$

oder

(26) $$\underline{\frac{\varepsilon}{\mu_0} = \alpha \left(1 + \tfrac{1}{2}\alpha \frac{P}{c^2}\right).}$$

Es ist

$$\frac{\alpha}{2}\frac{P}{c^2} = 8{,}8 \,.\, 10^{-3}$$

und

(27) $$\underline{\frac{\varepsilon}{\mu_0} = 1{,}881 \,.\, 10^7} \text{ (Lorentz).}$$

Da die Unterschiede in ε/μ_0 nach I, II und III innerhalb der Beobachtungsfehler liegen, so genügt es den Mittelwert zu nehmen:

$$\underline{\frac{\varepsilon}{\mu_0} = 1{,}878 \,.\, 10^7.}$$

Anhang IV.

Grenzen des β-Strahlenspektrums.

Die Grenzen der gemessenen Kurve stellen nicht die wirklichen Grenzen des überhaupt sichtbaren „Spektrums" der β-Strahlen dar. Dieses erstreckt sich beiderseits noch ein Stück über die Grenze der genauen Meßbarkeit heraus. Wie weit sich die Kurve noch verfolgen läßt, hängt natürlich sehr von dem Zustand der Platten ab. Weitaus am klarsten waren die ersten, noch von den Vorversuchen stammenden Platten, bei deren Aufnahme der Apparat noch nicht merklich durch induzierte Aktivität infiziert war. Auf Platte Nr. 1, die ohne elektrisches Feld aufgenommen war, ließ sich die Kurve nach außen bis $z_b = 0{,}71$, also $z' = 0{,}655$ verfolgen. Auf Platte 2 lag die innere Sichtbarkeitsgrenze bei etwa $z_b = z' = 0{,}06$.

Diesen beiden Grenzen entsprechen nach Abraham und Bucherer folgende Werte von β:

$\varkappa_b$	β Abraham	β Bucherer
0,06	0,9995	0,9975
0,71	0,48	0,48

Der Intensitätsabfall an beiden Grenzen ist ein sehr allmählicher; man kann kaum sagen, ob jenseits der angegebenen Grenzen die Intensität wirklich Null wird, oder nur zu schwach, um sich von dem allgemeinen Schleier, der die Platte bedeckt, genügend abzuheben. Vermutlich nähert sich die Intensität der Strahlen nach beiden Seiten hin asymptotisch der Grenze Null.

Da die Starkeschen Messungen (l. c.) bis zu etwa $\beta = 0,38$ reichen, so ist das noch unerforschte Gebiet ein verhältnismäßig kleines. Es erscheint durchaus nicht unmöglich, die Lücke mittels Kathodenstrahlen zu überbrücken, denn für $\beta = 0,5$ bedarf es einer Spannung von rund 140000 Volt; derartige Spannungen sind aber an harten X-Strahlenröhren nichts Außergewöhnliches. Mit Kathodenstrahlen derartiger Geschwindigkeit wird also tatsächlich operiert; es handelt sich bloß noch darum, an diesen auch Messungen auszuführen. In diesem Gebiet von $\beta = 0$ bis $\beta = 0,5$ weichen aber die beiden Kurven von Abraham und Bucherer am meisten voneinander ab; dort allein ist somit eine sichere Entscheidung möglich.

Anhang V.

Hilfstabelle für Abrahamsche Theorie.

β	$3/4 \cdot u$	$3/4 \cdot v$	dv/du	β	$3/4 \cdot u$	$3/4 \cdot v$	dv/du
							2,45
0,55	1,1842	2,1531		0,67	0,8894	1,3275	
			3,15				2,40
0,56	1560	0642		0,68	8684	2770	
			3,07				2,34
0,57	1285	1,9799		0,69	8477	2285	
			3,00				2,28
0,58	1018	8997		0,70	8273	1819	
			2,93				2,24
0,59	0758	8234		0,71	8073	1370	
			2,87				2,19
0,60	0505	7509		0,72	7877	0940	
			2,80				2,15
0,61	0258	6817		0,73	7683	0524	
			2,74				2,09
0,62	0018	6158		0,74	7491	0123	
			2,67				2,05
0,63	0,9783	5529		0,75	7303	0,9737	
			2,62				2,00
0,64	9554	4928		0,76	7117	9364	
			2,56				1,95
0,65	9330	4354		0,77	6932	9003	
			2,50				1,91
0,66	9110	3803		0,78	6749	8653	
			2,45				1,87

Hilfstabelle (Fortsetzung).

β	$3/4 \cdot u$	$3/4 \cdot v$	dv/du
			1,87
0,79	0,6569	0,8315	
			1,83
0,80	6389	7986	
			1,78
0,81	6210	7667	
			1,74
0,82	6032	7356	
			1,70
0,83	5855	7054	
			1,67
0,84	5678	6759	
			1,63
0,85	5500	6470	
			1,59
0,86	5321	6187	
			1,55
0,87	5142	5910	
			1,51
0,88	4961	5637	
			1,47
0,89	4777	5367	
			1,43
0,90	4590	5100	
			1,40
0,905	4495	4967	
			1,38
0,91	4399	4834	
			1,36
0,915	4301	4701	
			1,34
0,92	4202	4568	
			1,33
0,925	4101	4434	
			1,31
0,93	3999	4300	
			1,29

β	$3/4 \cdot u$	$3/3 \cdot v$	dv/du
			1,29
0,935	0,3894	0,4165	
			1,27
0,94	3786	4028	
			1,25
0,945	3675	3889	
			1,24
0,95	3561	3748	
			1,22
0,955	3442	3603	
			1,19
0,96	3317	3455	
			1,16
0,965	31845	3300	
			1,15
0,97	3044	3138	
			1,13
0,975	2893	2967	
			1,11
0,98	2725	2781	
			1,09
0,985	2534	2573	
			1,07
0,99	2306	2329	
			1,04
0,995	1994	2004	
			1,03
0,996	1911	1919	
			1,03
0,997	1813	1818	
			1,01
0,998	1683	1686	
			1,00
0,999	1513	1515	
			1,00
0,9995	1370	1371	

Hilfstabelle für Buchererscheche Theorie.

β	u	v	dv/du
0,50	1,8171	3,6342	
			3,55
0,52	7312	3294	
			3,37
0,54	6508	0581	
			3,25
0,56	5752	2,8129	
			3,09
0,58	5039	5929	
			2,95
0,60	4363	3938	
			2,82
0,62	3721	2130	
			2,69
0,64	3108	0481	
			2,57
0,66	2522	1,8972	
			2,46
0,68	1957	7584	
			2,35
0,70	1413	6305	
			2,25
0,72	0888	5121	
			2,15
0,74	0374	4019	
			2,05
0,76	0,9872	2990	
			1,96
0,78	9380	2026	
			1,87

β	u	v	dv/du
			1,87
0,80	0,8892	1,1115	
			1,78
0,82	8407	0253	
			1,69
0,84	7920	0,9428	
			1,60
0,86	7425	8634	
			1,52
0,88	6918	7861	
			1,44
0,90	6388	7097	
			1,38
0,91	6110	6714	
			1,34
0,92	5821	6327	
			1,30
0,93	5517	5933	
			1,26
0,94	5194	5526	
			1,22
0,95	4845	5100	
			1,18
0,96	4458	4644	
			1,14
0,97	4017	4142	
			1,10
0,98	3478	3549	
			1,06
0,99	2737	2765	

Bonn, den 1. Januar 1906.

(Eingegangen 3. Januar 1906.)