НѢКОТОРЫЯ ФОРМУЛЫ ИЗЪ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ.

П. Фанъ-деръ-Флита.

Выводы выраженій для силъ дѣйствія соленоида на магнитный полюсъ, или на элементъ тока, встрѣчающіеся въ спеціальныхъ курсахъ электродинамики, въ родѣ сочиненій Видеманна или Вердэ, по своей сложности неудобны для университетскихъ лекцій и по той же причинѣ, безъ сомнѣнія, не помѣщаются и въ общіе полные курсы физики, въ родѣ курсовъ Жамена или Вюльнера. Между тѣмъ выраженія для силы соленоида на полюсъ, или на элементъ тока необходимы для сравненія дѣйствій соленоидовъ съ дѣйствіями магнита. Поэтому считаю не лишнимъ сообщить читателямъ „Журнала Физическаго Общества" помѣщенные ниже выводы, которые мнѣ кажутся болѣе простыми и наглядными, чѣмъ встрѣчающіеся въ спеціальныхъ курсахъ, и которые, сколько помню, мнѣ не попадались на глаза ни въ одномъ курсѣ.

Вполнѣ сознавая, что выводы эти въ научномъ отношеніи не даютъ никакихъ новыхъ результатовъ, я рѣшился напечатать эти выводы никакъ не съ цѣлью заявленія своихъ правъ (очень вѣроятно, что многимъ приходятъ на умъ подобные способы вывода), а просто съ цѣлью ихъ распространенія.

I.

Дѣйствіе соленоида на отдаленный полюсъ можно вывести изъ дѣйствія кольца слѣдующимъ образомъ:

Если ось x прямоугольной координатной системы совпадаетъ съ осью кольца и плоскость (x,z) проходитъ черезъ полюсъ m, то проекціи силъ кольца на полюсъ, какъ извѣстно, равны

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{m\pi r^2.i}{d^3}(1-3\cos^2\varphi) \\ Y &= o \\ Z &= \frac{m.\pi r^2 i}{d^3}.(-3\cos\varphi.\sin\varphi) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

гдѣ φ уголъ между осью кольца и прямою d, соединяющею центръ кольца съ полюсомъ, и r радіусъ кольца, столь малый сравнительно съ d, что можно пренебречь вторыми и высшими степенями отношенія r къ d.

Представимъ себѣ соленоидъ, т. е. рядъ колецъ того же діаметра, расположенныхъ равномѣрно вдоль той же оси x. Если на протяженіи каждой единицы длины вдоль оси помѣщается n колецъ, то на протяженіи dl помѣщается $n.dl$ колецъ. Дѣйствіе этихъ $n.dl$ колецъ на полюсъ, при томъ же разстояніи d, должно быть въ $n.dl$ разъ больше дѣйствія одного кольца. Поэтому, принявъ для краткости

$$m.\pi r.^2 i.n = A.$$

получимъ для проекцій силъ:

$$\left.\begin{aligned} X.n.dl &= \frac{A}{d^3}.(1-3.\cos^2\varphi).dl \\ Z.n.dl &= \frac{A}{d^3}.(-3.\cos\varphi.\sin\varphi).dl \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Дѣйствіе всего соленоида слагается изъ дѣйствій его элементовъ; слѣдовательно въ данномъ случаѣ, проекціи силы всего соленоида равны интеграламъ приведенныхъ выраженій по x, между предѣлами крайнихъ точекъ оси соленоида.

Въ выраженіяхъ для проекцій силъ уголъ φ измѣняется при переходѣ отъ одного элемента соленоида къ другому; слѣдовательно интегрированіе распространяется и на этотъ уголъ, какъ на функцію отъ x. Необходимо поэтому выразить либо φ въ функціи отъ x, либо x въ функціи отъ φ, замѣнивъ, въ послѣднемъ случаѣ, интегрированіе по x интегрированіемъ по φ. Обыкновенно производится интегрированіе по x; но оказывается, что замѣна его интегрированіемъ по φ чрезвычайно упрощаетъ выводъ.

Обозначимъ разстояніе полюса m отъ продолженной оси соленоида черезъ c и разстояніе основанія c отъ начала соленоида черезъ l; тогда

$$d = \frac{c}{\sin\varphi},\ l = c.\cot g\varphi$$

отсюда

$$dl = -\frac{c.d\varphi}{\sin^2\varphi}$$

Вставляя эти величины въ выраженія для проекцій силъ (2), получимъ:

$$X.n.dl = -\frac{A}{c^2}\ (\sin\varphi - 3\cos^2\varphi.\sin\varphi)d\varphi$$

и
$$Z.n.dl = \frac{A}{c^2}.3\sin^2\varphi.\cos\varphi.d\varphi \tag{3}$$

Интегрируя эти выраженія по φ, между предѣлами φ и φ_1, соотвѣтственными предѣламъ оси соленоида l и l_1, получимъ:

$$X = \frac{A}{c^2}\ (\cos\varphi - \cos^3\varphi)\ \Big|_{\varphi_1}^{\varphi}$$

или

$$X = \frac{A}{c^2}\ (\cos\ \varphi.\ \sin^2\varphi)\ \Big|_{\varphi_1}^{\varphi}$$

и
$$Z = \frac{A}{c^2}\,(\sin^3\varphi)_{\varphi_1}^{\varphi} \tag{4}$$

Если другой конецъ соленоида находится на безконечномъ разстояніи, для котораго уголь $\varphi_1{=}0$, то выраженіе для предѣла φ_1 отпадетъ, такъ какъ $sin\ \varphi_1{=}0$. Тогда получимъ:

$$X = \frac{A}{c^2}\ \sin^2\varphi\ \cos\varphi$$

$$Z = \frac{A}{c^2}\ \sin^2\varphi\sin\varphi.$$

Вставляя вмѣсто c и A ихъ величины, получимъ:

$$X = \frac{m.\ \pi.\ r^2.\ i.\ n.}{d^2}\ \cos\varphi$$

$$Z = \frac{m.\ \pi.\ r^2.\ i.\ n,}{d^2}\ \sin\ \varphi \tag{5}$$

Отсюда опредѣлится вся сила соленоида R и ея направленіе:

$$R = (X^2 + Z^2)^{1/2} = \frac{m.\ \pi.\ r^2.\ i.\ n.}{d^2} \tag{6}$$

и
$$tg(R,l) = \frac{Z}{X} = \frac{\sin\ \varphi}{\cos\ \varphi} = tg\,\varphi$$

т. е. сила R направлена по прямой r, соединяющей магнитный полюсъ съ концемъ соленоида, и величина силы измѣняется обратно пропорціональна квадратамъ разстояній.

Дѣйстія такія-же, какъ будто въ концѣ соленоида заключалось количество магнетизма $M = \pi r^2.\ i.\ n.$

Изъ этихъ уравненій выводятся всѣ общеизвѣстныя свойства соленоида:

Направленіе силы R вдоль r зависитъ отъ рода магнитизма, т. е. отъ знака m, и отъ направленія тока въ кольцахъ соленоида, т. е. отъ знака i. Изъ уравненій для проекцій силъ (4) видно, что одинъ конецъ соленоида производитъ притягательную силу, другой отталкивательную; при замѣнѣ въ нихъ предѣла φ предѣломъ φ_1 обѣ проекціи силъ мѣняютъ свои знаки. Въ частномъ случаѣ, когда одинъ изъ угловъ φ или φ_1 острый, другой тупой, тогда сила X для обоихъ угловъ φ и φ_1 сохраняетъ свой знакъ, что понятно и не противорѣчитъ сказанному о противоположности силъ обоихъ концовъ.

Соленоидъ съ кривою осью можно разсматривать какъ ломанный, т. е. какъ составленый изъ прямыхъ частей. Если всѣ кольца соленоида имѣютъ одинаковый радіусъ r и число ихъ n на каждой единицѣ одинаково на всемъ протяженіи ломаннаго соленоида, то дѣйствія концовъ двухъ прямыхъ частей соленоида, сходящихся въ мѣстѣ излома оси, должны быть равны и противоположны, и потому равнодѣйствующая ихъ равна нулю. Слѣдовательно и кривой соленоидъ, подобно прямому, дѣйствуетъ на отдѣльный полюсъ только своими концами; сомкнутый же соленоидъ совсѣмъ не дѣйствуетъ.

II.

Дѣйствіе соленоида на отдаленный элементъ тока опредѣляется совершенно подобнымъ же образомъ.

Возьмемъ ту же систему координатъ: плоскость (x, z) проходитъ черезъ элементъ тока ds и ось x совпадаетъ съ осью соленоида. Проэкціи элемента ds на координатныя оси равны dx, dy, dz; сила тока въ немъ равна J. Величины d и φ сохраняютъ прежнія значенія. Тогда проекціи силы кольца на координатныя плоскости равна, какъ извѣстно:

$$X = \frac{J.ds.\ \pi r.^2 i}{d^3}.\ 3\sin\varphi.\ \cos\varphi\,\frac{dy}{ds}$$

$$Y = \frac{J.ds.\ \pi r.^2 i}{d^3}\left\{-\,3\sin\varphi.\ \cos\varphi.\frac{dx}{ds} - (1-3.\cos^2\varphi).\frac{dz}{ds}\right. \tag{7}$$

$$Z = \frac{J.ds.\ \pi r.^2 i}{d^3}(1 - 3.\cos^2\varphi)\,\frac{dy}{ds}$$

Точность этихъ выраженій такая же, какъ и предъидущихъ; пренебрегаются высшія степени отношенія къ r къ d. Умноживъ приведенныя выраженія на $n.dl$, получимъ выраженія для проекцій силъ элемента соленоида dl на ds. Принявъ для краткости:

$$J.ds.\ \pi r.^2 i.n. = A$$

и вставляя на прежнихъ основаніяхъ вмѣсто d и dl ихъ величины изъ уравненій:

$$d = \frac{c}{\sin\varphi},\ l = c.\mathrm{cotg}\varphi$$

и

$$dl = -\frac{c.d\varphi}{\sin^2\varphi}$$

получимъ:

$$X.\ n.dl = -\frac{A}{c^2},\ 3\sin^2\varphi.\ \cos\varphi.\ \frac{dy}{ds}.d\varphi.$$

$$Y.\ n.dl = -\frac{A}{c^2}\left\{-\cos\varphi.\ \sin^2\varphi\ \frac{dx}{ds} - (1 - 3\cos^2\varphi)\ \sin\varphi.\ \frac{dz}{ds}\right\}d\varphi.$$

$$Z.\ n.dl = -\frac{A}{c^2}(1 - \cos^2\varphi).\ \sin\varphi\ \frac{dy}{ds}.d\varphi.$$

Интегригруя эти выраженія, на прежнихъ основаніяхъ, по φ, и предполагая предѣлъ $\varphi_1 = o$, получимъ:

$$X = -\frac{A}{c^2}.\ \sin^3\varphi.\ \frac{dy}{ds}$$

$$Y = \frac{A}{c^2}\left\{\sin^3\varphi.\ \frac{dx}{ds} - (1 - \cos^2\varphi)\ \cos\varphi\ \frac{dz}{ds}\right\}$$

$$Z = \frac{A}{c^2}(1 - \cos^2\varphi)\cos\varphi.\ \frac{dy}{ds}$$

Такъ какъ

$$c = d\sin\varphi$$

то:

$$X = -\frac{A}{d^2}.\ \sin\varphi.\ \frac{dy}{ds}$$

$$Y = \frac{A}{d^2}\left(\sin\varphi.\ \frac{dx}{ds} - \cos\varphi.\ \frac{dz}{ds}\right) \qquad (8)$$

$$Z = \frac{A}{d^2}\cos\varphi.\ \frac{dy}{ds}$$

Вся сила опредѣляется выраженіемъ

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

т. е.

$$R^2 = \left(\frac{A}{d^2}\right)^2\left\{\left(\frac{dy}{ds}\right) + \sin^2\varphi\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \cos^2\varphi\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 - 2\ \sin\varphi.\ \cos\varphi.\ \frac{dx}{ds}.\ \frac{dz}{ds}\right\}$$

Такъ какъ

$$\sin^2\varphi.\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = (1 - \cos^2\varphi)\left(\frac{dx}{ds}\right)^2$$

и

$$\cos^2\varphi\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = (1 - \sin^2\varphi)\left(\frac{dz}{ds}\right)^2$$

то

$$R^2 = \left(\frac{A}{d^2}\right)^2\left\{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)\right\}$$
$$-\left[\frac{A}{d^2}\right]^2\left\{\sin^2\varphi.\left[\frac{dz}{ds}\right]^2 + \cos^2\varphi\left[\frac{dx}{ds}\right]^2 + 2\sin\varphi.\ \cos\varphi.\ \frac{dx}{ds}.\ \frac{dz}{ds}\right\}$$

Откуда

$$R^2 = \left[\frac{A}{d}\right]^2\left\{1 - \left[\sin\varphi.\ \frac{dz}{ds} + \cos\varphi.\ \frac{dx}{ds}\right]^2\right\}$$

Такъ какъ прямая d лежитъ въ плоскоти (z, x) и слѣдовательно перпендикулярна къ оси y, то

$$\cos(d, y) = o$$

$$\text{и } \cos(d, x) = \cos\varphi,\ \cos(d, z) = \sin\varphi$$

Слѣдовательно

$$\sin\varphi.\ \frac{dz}{ds} + \cos\varphi.\ \frac{dx}{ds} = \cos(d, ds).$$

Поэтому:

$$R^2 = \left[\frac{A}{d^2}\right]^2\left[1 - \cos^2(d, ds)\right]$$

Вставляя вмѣсто A его величину, получимъ:

$$R = \frac{J.ds.\ \pi.r.^2 i.n}{d^2}.\ \sin(d, ds) \qquad (9)$$

Этимъ выраженіемъ опредѣляется величина силы; направленіе же ея опредѣлимъ общепринятымъ способомъ, посредствомъ угловъ, образуемыхъ ею съ элементомъ ds и съ прямою d.

$$\cos(d, R) = \frac{X}{R}.\ \cos(d, x) + \frac{Y}{R}\cos(d, y) + \frac{Z}{R}\cos(d, z)$$
$$= \frac{1}{\sin(d, ds)}\left\{-\sin\varphi.\ \cos\varphi.\ \frac{dy}{ds} + \cos\varphi.\ \sin\varphi.\ \frac{dy}{ds}\right\}$$

Слѣдовательно:

$$\cos(d, R) = o$$

т. е. R перпендикулярна къ d.

$$\cos(R, ds) = \frac{X}{R}.\ \frac{dx}{ds} + \frac{Y}{R}.\ \frac{dy}{ds} + \frac{Z}{R}.\ \frac{dz}{ds}$$
$$= \frac{1}{\sin(d, ds)}\left\{-\sin\varphi.\ \frac{dy}{ds}.\ \frac{dx}{ds} + \sin\varphi.\ \frac{dx}{ds}.\ \frac{dy}{ds} - \cos\varphi.\ \frac{dz}{ds}.\ \frac{dy}{ds} + \cos\varphi.\ \frac{dy}{ds}.\ \frac{dz}{ds}\right\}.$$

Слѣдовательно:

$$\cos(R, ds) = o$$

т. е. R перпендикулярна къ ds.

*

Такъ какъ сила R одновременно перпендикулярна и къ прямой d и къ элементу ds, то она перпендикулярна къ плоскости (d, ds). Слѣдовательно сила соленоида на элементъ тока имѣетъ такую же величину и такое же направленіе, какъ сила магнита, въ полюсѣ котораго сосредоточено количество магнитизма

$$M = \pi r.^2 i.n$$

Величина и направленіе силы въ этомъ случаѣ, какъ и въ предшествующемъ, совершенно не зависятъ отъ направленія оси соленоида, и потому все сказанное о дѣйствіи прямаго и криваго соленоида на полюсъ относится и къ дѣйствію его на элементъ тока.

ПРОТОКОЛЪ

24-го засѣданія Физическаго отдѣленія.

4-го ноября 1880 г.

Предсѣдательствуетъ Аксель Вильгельмовичъ Гадолинъ.

1. Прочтено письмо на имя предсѣдателя физическаго отдѣленія отъ президента французскаго физическаго общества, г. Маскара, извѣщающаго о смерти главнаго секретаря этого общества и редактора „Journal de physique"—г. д'Альмейда.

Постановлено: выразить французскому физическому обществу соболѣзнованіе отъ имени физическаго отдѣленія.

2. Д. К. Бобылевъ сдѣлалъ дополненіе къ сообщенію, сдѣланному имъ въ засѣданіи 6-го мая настоящаго года (Журналъ стр. 167).

По методу Гельмгольца-Кирхгоффа можно теоретически разсмотрѣть движеніе неограниченнаго потока жидкости, встрѣчающаго двѣ плоскія стѣнки, образующія двугранный уголъ, и опредѣлить давленіе потока на этотъ клинъ.

Если клинъ поставленъ симметрично къ направленію потока, то равнодѣйствующая изъ давленій на него имѣетъ слѣдующую величину:

$$P = 2\,Щ\,Б^2 \sigma \frac{2}{\pi} \frac{\alpha^2}{L}$$

гдѣ:

$$L = 1 + \frac{2\alpha}{\pi} + \left[\frac{2\alpha}{\pi}\right]^2 \int_0^1 \frac{z^{-\frac{\alpha}{\pi}} dz}{1+z}$$

2α—есть уголъ клина, σ—плотность жидкости, Б—скорость невозмущенной части потока, Щ—величина поверхности каждой щеки клина.