

ГЛАВА 13

НАХОЖДЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛОВ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Ввиду сложности задач на определение гравитационной энергии, здесь разработан ещё один метод, имеющий важное практическое значение. Он также основан на формуле (12.28).

§ 13.1. Метод четвёртый: гравитационная энергия однородных тел с азимутальной симметрией

Накинуть невод на особые точки

13.1.1. Две основные формулы четвёртого метода

Рассмотрим *однородное* тело, имеющее круговую (азимутальную) симметрию. В цилиндрических координатах (r, x_3) его потенциал в точке x_3 на оси симметрии можно представить двойным интегралом

$$\varphi(x_3) = 2\pi G\rho \iiint \frac{r dr dx'_3}{\sqrt{r^2 + (x'_3 - x_3)^2}}. \quad (13.1)$$

Кроме того, как мы уже знаем, потенциал на той же оси, но *во внешней* для тела области, можно представить интегралом типа Коши (9.100). Тогда *во всём пространстве вне тела* имеем следующую формулу:

$$\varphi(r, x_3) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\varphi(\zeta)}{\sqrt{r^2 + (x_3 - \zeta)^2}} d\zeta. \quad (13.2)$$

Подставляя φ из (13.2) в формулу (12.28), имеем

$$W = \frac{\rho}{10i\pi} \iint_S \oint \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\sqrt{r^2 + (x_3 - \zeta)^2}} (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) dS. \quad (13.3)$$

К этому интегралу применим следующий приём: меняя в нём местами интегрирование по поверхности и по контуру, в итоге получим

$$W = \frac{1}{10i\pi} \oint \varphi(\zeta) d\zeta \left(\rho \iint_S \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3}{\sqrt{r^2 + (x_3 - \zeta)^2}} dS \right). \quad (13.4)$$

И здесь важно заметить, что в круглых скобках (13.4) мы имеем дело с изученным выше потенциалом обобщённого гомотетического слоя (5.115), поэтому указанное выражение можно сразу записать в замечательно простом виде

$$G\rho \iint_S \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3}{\sqrt{r^2 + (x_3 - \zeta)^2}} dS = 2\varphi - x \operatorname{grad} \varphi = 2\varphi - x_3 \frac{d\varphi}{dx_3}. \quad (13.5)$$

Значение равенства (13.5) в том, что интеграл (13.4) приводится к следующему:

$$W = -\frac{1}{10i\pi G} \oint \varphi_{\text{внешн}}(\zeta) \left(2\varphi_{\text{внутр}}(\zeta) - \zeta \frac{d\varphi_{\text{внутр}}}{d\zeta} \right) d\zeta. \quad (13.6)$$

Это и есть главная формула для расчёта гравитационной энергии тел четвёртым методом. Здесь внешний и внутренний потенциал берутся на оси симметрии тела и затем в них x_3 заменяется на ζ ; интегрирование в (13.6) проводится по контуру фигуры в комплексной плоскости. Таким образом, данный метод нахождения гравитационной энергии тел сводится к вычислению контурных интегралов в комплексной плоскости.

З а д а ч а 13.1. Доказать, что формулу (13.6) можно записать также в эквивалентном виде

$$W = -\frac{1}{10i\pi G} \oint \varphi_{\text{внутр}}(\zeta) \left[3\varphi_{\text{внешн}}(\zeta) + \zeta \frac{d\varphi_{\text{внешн}}}{d\zeta} \right] d\zeta. \quad (13.7)$$

Решение. Действительно, интегрирование по частям последнего в (13.6) члена даёт

$$\begin{aligned} \oint \varphi_{\text{внешн}} \cdot \zeta \frac{d\varphi_{\text{внутр}}}{d\zeta} d\zeta &= - \oint \varphi_{\text{внутр}} \cdot \frac{d}{d\zeta} (\zeta \varphi_{\text{внешн}}) d\zeta = \\ &= - \oint \varphi_{\text{внутр}} \cdot \varphi_{\text{внешн}} d\zeta - \oint \zeta \varphi_{\text{внутр}} \cdot \frac{d\varphi_{\text{внешн}}}{d\zeta} d\zeta, \end{aligned} \quad (13.8)$$

причем проинтегрированный член $[\varphi_{\text{внутр}} \cdot \zeta \cdot \varphi_{\text{внешн}}]$ обращается в нуль из-за замкнутости пути интегрирования. В итоге, складывая только что полученный результат с первым членом в (13.6), получим требуемую формулу (13.7). ▼

Вот два простых примера на применение формулы (13.6).

13.1.2. Однородный шар

З а д а ч а 13.2. Вычислить, пользуясь формулой (13.6), гравитационную энергию однородного шара, если начало системы отсчёта находится в его центре.

Решение. В этом случае

$$\varphi_{\text{внешн}}(\zeta) = \frac{4}{3}\pi G\rho \frac{R^3}{\zeta}; \quad \varphi_{\text{внутр}}(\zeta) = \frac{2}{3}\pi G\rho (3R^2 - \zeta^2), \quad (13.9)$$

так что

$$2\varphi_{\text{внутр}}(\zeta) - \zeta \frac{d\varphi_{\text{внутр}}}{d\zeta} = 4\pi G\rho R^2. \quad (13.10)$$

Подставляя это в формулу (13.6) и учитывая, что

$$\oint \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i, \quad (13.11)$$

легко приходим к известному выражению энергии шара (1.64). ▼

Заметим, что основная формула метода (13.6) работает не только в том случае, когда начало системы отсчёта находится *внутри* тела, но и тогда, когда оно расположено *вне* тела. Действительно, рассмотрим следующую задачу.

З а д а ч а 13.3. *Вычислить, пользуясь формулой (13.6), гравитационную энергию однородного шара, если начало отсчёта отстоит от центра шара на величину $\Delta \geq R$.*

Решение. Внутренний потенциал шара

$$\varphi'_{\text{внутр}}(x_3) = \frac{2}{3}\pi G\rho(3R^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) \quad (13.12)$$

в принятой, по условиям задачи системе отсчёта ($x_3 \rightarrow x_3 - \Delta$), имеет теперь вид

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{внутр}}(x_3) &= \frac{2}{3}\pi G\rho[3R^2 - \Delta^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2\Delta \cdot x_3], \\ \varphi_{\text{внешн}}(x_3) &= \frac{MG}{x_3 - \Delta}. \end{aligned} \quad (13.13)$$

Тогда требуемая данным методом комбинация после замены $x_3 \rightarrow \zeta$ будет равна

$$2\varphi_{\text{внутр}}(\zeta) - \zeta \frac{d\varphi_{\text{внутр}}}{d\zeta} = \frac{4}{3}\pi G\rho[3R^2 - \Delta^2 + \Delta \cdot \zeta]. \quad (13.14)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{10i\pi G} \oint \frac{MG}{\zeta - \Delta} \cdot \frac{4}{3}\pi G\rho[3R^2 - \Delta^2 + \Delta \cdot \zeta] d\zeta = \\ &= \frac{2i}{15}MG\rho \oint \frac{3R^2 - \Delta^2 + \Delta \cdot \zeta}{\zeta - \Delta} d\zeta, \end{aligned} \quad (13.15)$$

откуда действительно следует результат для шара

$$W = -\frac{16}{15}\pi^2 G\rho^2 R^5. \quad (13.16)$$

▼

§ 13.2. Энергия однородного шарового сегмента.

Нахождение четвёртым методом

Энергию однородного шарового сегмента выше мы уже находили, причём применили для этого третий метод, см. формулу (12.156). Но сейчас принципиально важно решить эту же задачу совершенно другим, независимым методом.

13.2.1. Постановка задачи

В однородном шаре радиуса R выделен сегмент с углом полураствора¹ α (рис. 105); сегмент заполнен однородным гравитирующим веществом плотности ρ . На оси симметрии Ox_3 внешний и внутренний потенциалы сегмента были найдены ранее в (12.151) и (12.152). Сейчас, однако, потенциалы сегмента целесообразно записать в системе отсчета, начало

¹Здесь угол α отсчитывается по часовой стрелке, а не против неё, как обычно. Следовательно, в этой задаче положительным направлением обхода контура интегрирования, натянутого на точки ветвления, будет направление по часовой стрелке.

которой расположено в центре шара, и одновременно заменить переменную x_3 на комплексную $\zeta = x_3 + ir$:

$$x_3 \rightarrow \zeta + R - h. \quad (13.17)$$

После нормировки величин h и ζ на R , из (12.151) и (12.152) в итоге получим выражения для потенциалов сегмента в более подходящем сейчас виде

$$\varphi_{\text{внешн}}(\zeta) = \frac{2}{3}\pi G\rho R^2 \left[\frac{\tilde{R}^3 + 1}{\zeta} - \zeta^2 + 3\zeta \cos \alpha - \frac{3}{2}(1 + \cos^2 \alpha) \right] \quad (13.18)$$

и

$$\varphi_{\text{внутр}}(\zeta) = \frac{2}{3}\pi G\rho R^2 \left[\frac{\tilde{R}^3 - 1}{\zeta} - 2\zeta^2 + 3\zeta \cos \alpha + \frac{3}{2}\sin^2 \alpha \right], \quad (13.19)$$

где

$$\tilde{R} = \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1} = \sqrt{(\zeta - e^{i\alpha})(\zeta - e^{-i\alpha})}, \quad (13.20)$$

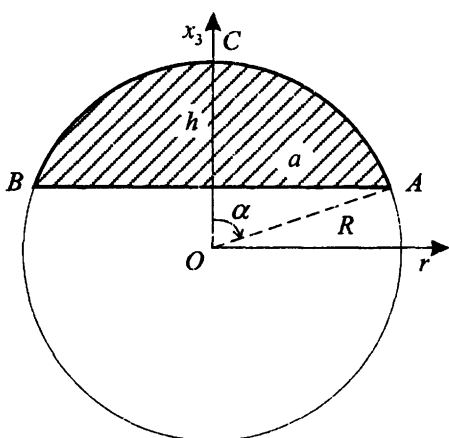
а

$$\cos \alpha = 1 - \frac{h}{R}. \quad (13.21)$$

Угол α может меняться в пределах

$$0 \leq \alpha \leq \pi: \quad (13.22)$$

например, при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (т. е. при $h = R$) сегмент превращается в половинку шара, а при $\alpha = \pi$ — в шар.



Для проверки выражений (13.18) и (13.19) достаточно перейти к шару, поскольку потенциал его известен; действительно, полагая в (13.18) и (13.19) $\alpha = \pi$ и учитывая, что для шара $\tilde{R} = 1 + \zeta$, получим соответственно

$$\varphi_{\text{внутр}}(\zeta) = \frac{2}{3}\pi G\rho R^2 (3 - \zeta^2), \quad (13.23)$$

и

$$\varphi_{\text{внешн}}(\zeta) = \frac{MG}{R\zeta} \quad (13.24)$$

(M — масса шара). Верно!

Далее, согласно (13.6) и (13.7), надо найти комбинации

$$S_1(\zeta) = 2\varphi_{\text{внутр}}(\zeta) - \zeta \frac{d\varphi_{\text{внутр}}(\zeta)}{d\zeta} \quad (13.25)$$

и

$$S_2(\zeta) = 3\varphi_{\text{внешн}}(\zeta) + \zeta \frac{d\varphi_{\text{внешн}}(\zeta)}{d\zeta}. \quad (13.26)$$

Рис. 105. Шаровой сегмент. Угол α может изменяться от 0 до π (полный шар)

Подставляя сюда потенциалы (13.18) и (13.19), получим

$$S_1(\zeta) = 2\pi G\rho R^2 \left[\tilde{R} \left(\frac{1}{\zeta} - \cos \alpha \right) - \frac{1}{\zeta} + \zeta \cos \alpha + \sin^2 \alpha \right] \quad (13.27)$$

и

$$S_2(\zeta) = \frac{2}{3}\pi G\rho R^2 \left[\tilde{R} \left(5\zeta - 7 \cos \alpha + \frac{2}{\zeta} \right) + \frac{2}{\zeta} - 5\zeta^2 + 12\zeta \cos \alpha - \frac{9}{2} (1 + \cos^2 \alpha) \right]. \quad (13.28)$$

Для проверки двух последних формул (удобно вновь взять случай шара) замечаем, что в этом случае из (13.27) и (13.28) следуют выражения

$$S_1 = 4\pi G\rho R^2; \quad S_2(\zeta) = \frac{8}{3}\pi G\rho \frac{R^2}{\zeta}, \quad (13.29)$$

которые легко получаются и прямо при подстановке потенциалов (13.23) и (13.24) в (13.26) и (13.25) соответственно.

13.2.2. Особые точки и деформация контура интегрирования

Внешний и внутренний потенциалы сегмента (13.18) и (13.19) имеют по две точки ветвления первого порядка для радикала

$$\tilde{R} = \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1} = \sqrt{(\zeta - e^{i\alpha})(\zeta - e^{-i\alpha})}; \quad (13.30)$$

эти точки, расположенные на изломах контура фигуры сегмента (см. рис. 106), суть

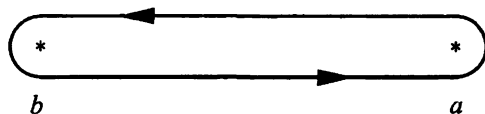
$$a = e^{i\alpha}; \quad b = e^{-i\alpha}. \quad (13.31)$$

Кроме точек ветвления, аналитическое продолжение внешнего потенциала (13.18) имеет внутри фигуры также полюс в начале координат O .

Чтобы сделать потенциал аналитической функцией во всём пространстве, точки ветвления внутреннего потенциала следует расположить вне, а внешнего потенциала — внутри сегмента.

Ниже при вычислении интегралов (13.6) и (13.7) будем учитывать только точки ветвления. Конкретно, мы «прячем» точки ветвления внутрь фигуры сегмента, и опираться будем на точки ветвления (13.31) для внешнего потенциала (13.18). Это позволяет, игнорируя точки ветвления внутреннего потенциала, деформировать исходный контур интегрирования L так, как показано на рис. 106.

Рис. 106. Вид контура интегрирования, огибающего точки ветвления внешнего потенциала в задаче о шаровом сегменте



13.2.3. Вычисление W по формуле (13.6)

Контур интегрирования натягивается на точки ветвления (13.31), и при их обходе радикал \tilde{R} в выражении внешнего потенциала изменяет свой знак. Существенно, что остальные члены в (13.27) при обходе особых точек остаются неизменными и вклада в W , следовательно, не дают; поэтому далее их можно опустить. Член же с \tilde{R} из (13.18) по очевидной причине следует удвоить. Интеграл (13.6) по контуру сводится тогда к интегралу по отрезку в комплексной плоскости

$$W_{\text{сегмента}} = -\frac{4}{15i}\pi G\rho^2 R^5 \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \frac{\tilde{R}^3}{\zeta} \cdot \left[\tilde{R} \left(\frac{1}{\zeta} - \cos \alpha \right) - \frac{1}{\zeta} + \zeta \cos \alpha + \sin^2 \alpha \right] d\zeta. \quad (13.32)$$

Раскрывая скобки под знаком этого интеграла, представим всё выражение в виде

$$W_{\text{сегмента}} = -\frac{4}{15i}\pi G\rho^2 R^5 [T_1 + T_2], \quad (13.33)$$

где

$$T_1 = \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \tilde{R}^4 \cdot \left(\frac{1}{\zeta^2} - \frac{\cos \alpha}{\zeta} \right) d\zeta; \quad (13.34)$$

$$T_2 = \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \tilde{R}^3 \cdot \left[-\frac{1}{\zeta^2} + \cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\zeta} \right] d\zeta. \quad (13.35)$$

Для вычисления T_1 целесообразно вначале раскрыть подынтегральное выражение

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \tilde{R}^4 \left(\frac{1}{\zeta^2} - \frac{\cos \alpha}{\zeta} \right) = (\zeta^4 + 4\zeta^2 \cos^2 \alpha + 1 - 4\zeta^3 \cos \alpha + \\ &+ 2\zeta^2 - 4\zeta \cos \alpha) \left(\frac{1}{\zeta^2} - \frac{\cos \alpha}{\zeta} \right) = -\zeta^3 \cos \alpha + \zeta^2 (1 + 4 \cos^2 \alpha) - \\ &- 2\zeta \cos \alpha (3 + 2 \cos^2 \alpha) + 2 (1 + 4 \cos^2 \alpha) - \frac{5 \cos \alpha}{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2}. \end{aligned} \quad (13.36)$$

Интегрируя теперь члены (13.36), находим

$$\begin{aligned} T_1 &= i \left(-\frac{1}{2} \sin 4\alpha \cos \alpha + \frac{2}{3} \sin 3\alpha (1 + 4 \cos^2 \alpha) - \right. \\ &\left. - 2 \sin 2\alpha \cos \alpha (3 + 2 \cos^2 \alpha) + 2 \sin \alpha (3 + 8 \cos^2 \alpha) - 10\alpha \cos \alpha \right), \end{aligned} \quad (13.37)$$

или в преобразованном виде:

$$T_1 = i \left\{ -\frac{1}{12} \sin 5\alpha + \frac{5}{4} \sin 3\alpha + \frac{20}{3} \sin \alpha - 10\alpha \cos \alpha \right\}. \quad (13.38)$$

Раскрывая теперь подынтегральное выражение в T_2 из (13.35), имеем

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \cos \alpha \zeta^2 \tilde{R} + (\sin^2 \zeta - 2 \cos^2 \alpha) \zeta \tilde{R} + \\ &+ (-1 + \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha) \tilde{R} + [2 \cos \alpha + \sin^2 \alpha] \frac{\tilde{R}}{\zeta} - \frac{\tilde{R}}{\zeta^2}. \end{aligned} \quad (13.39)$$

Здесь надо отметить, что для вычисления T_2 , а далее и других выражений, нам понадобятся следующие интегралы:

$$\begin{aligned}
K_0 &= \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \zeta^3 \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1} d\zeta = \frac{i\pi}{8} \sin^2 \alpha \cos \alpha (4 \cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha); \\
K_1 &= \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1} d\zeta = \frac{i\pi}{8} \sin^2 \alpha (5 \cos^2 \alpha - 1); \\
K_2 &= \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \zeta \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1} d\zeta = \frac{i\pi}{2} \sin^2 \alpha \cos \alpha; \\
K_3 &= \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1} d\zeta = \frac{i\pi}{2} \sin^2 \alpha; \\
K_4 &= \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \frac{\sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1}}{\zeta} d\zeta = i\pi (1 - \cos \alpha); \\
K_5 &= \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \frac{\sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1}}{\zeta^2} d\zeta = i\pi (1 - \cos \alpha).
\end{aligned} \tag{13.40}$$

Отметим, кстати, совпадение значений двух разных интегралов K_4 и K_5 !

Интегрирование $\Phi_2(\zeta)$ из (13.39) с учётом выражений (13.40) даёт

$$\begin{aligned}
T_2 &= i\pi \left(\frac{1}{8} \sin^2 \alpha \cos \alpha (5 \cos^2 \alpha - 1) + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \cos \alpha (\sin^2 \alpha - \right. \\
&\quad \left. - 2 \cos^2 \alpha) + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha (-1 + \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha) + \right. \\
&\quad \left. + (-1 + 2 \cos \alpha + \sin^2 \alpha) (1 - \cos \alpha) \right).
\end{aligned} \tag{13.41}$$

Заметим, что после преобразований (13.41) заметно упрощается:

$$T_2 = -\frac{i\pi}{8} (\cos \alpha + 4) (1 - \cos \alpha)^4. \tag{13.42}$$

Подставляя теперь найденные выражения T_1 и T_2 из (13.38) и (13.42) в (13.33), в итоге получим

$$\begin{aligned}
W_{\text{сегмента}} &= -\frac{4}{15} \pi G \rho^2 R^5 \left\{ -\frac{1}{12} \sin 5\alpha + \frac{5}{4} \sin 3\alpha + \frac{20}{3} \sin \alpha - 10\alpha \cos \alpha - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\pi}{8} (\cos \alpha + 4) (1 - \cos \alpha)^4 \right\}.
\end{aligned} \tag{13.43}$$

Это и есть искомая гравитационная энергия однородного шарового сегмента.

Разумеется, выражение (13.43) следует сравнить с ранее найденным (12.156).

13.2.4. Проверка выражения (13.43)

Случай полушара: полагая в (13.43) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, находим результат, совпадающий с полученным ранее (12.157).

Случай шара: $\alpha = \pi$. И в этом случае общая формула (13.43) даёт правильный результат (1.64).

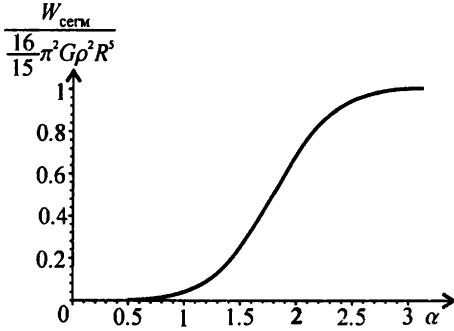


Рис. 107. График гравитационной энергии $W_{\text{сегмента}}$ (нормировка на энергию полного шара $-\frac{16}{15}\pi^2 G \rho^2 R^5$) шарового сегмента как функция угла α в радианах

Но данная проверка ещё не является полной. Подчеркнём: важной является независимая проверка формулы для энергии (13.43), выполненная далее в § 14.1.

Наконец, можно показать (предоставим это читателю), что и в целом полученная формула (13.43) оказывается эквивалентной ранее найденному нами выражению (12.156). В частности, графики, рассчитанные по формулам (13.43) и (12.156) совпадают друг с другом (см. рис. 107).

13.2.5. Вариант четвёртого метода с интегралом (13.7)

Формулу (13.7) также следует проверить на примере однородного шарового сегмента. В этом случае

$$W_{\text{сегмента}} = -\frac{2}{15i}\pi G \rho^2 R^5 \oint S_2(\zeta) \varphi(\zeta) d\zeta, \quad (13.44)$$

причём выражение $S_2(\zeta)$ дано в (13.28), а внутренний потенциал сегмента приводится в (13.19). Контур интегрирования в (13.44) приводим к виду, показанному на рис. 106. Деля теперь разрез между точками ветвления, контурный интеграл прежним способом приводим к интегралу по отрезку в комплексной плоскости (сравните с (13.32)):

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{\text{сегмента}} = & -\frac{4}{45i}\pi G \rho^2 R^5 \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \tilde{R} \cdot (5\zeta - 7\cos\alpha + 2\zeta) \times \\ & \times \left[\frac{\tilde{R}^3 - 1}{\zeta} - 2\zeta^2 + 3\zeta \cos\alpha + \frac{3}{2}\sin^2\alpha \right] d\zeta. \end{aligned} \quad (13.45)$$

Запишем (13.45) кратко:

$$\widetilde{W}_{\text{сегмента}} = -\frac{4}{15i}\pi G \rho^2 R^5 \left(\tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 \right), \quad (13.46)$$

где

$$\tilde{T}_1 = \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{-i\alpha}} \tilde{R}^4 \cdot \left(\frac{5}{3} - \frac{7}{3\zeta} \cos \alpha + \frac{2}{3\zeta^2} \right) d\zeta \quad (13.47)$$

и

$$\tilde{T}_2 = \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{-i\alpha}} \tilde{R} \cdot \left(\frac{5}{3}\zeta - \frac{7}{3} \cos \alpha + \frac{2}{3\zeta} \right) \left\{ -\frac{1}{\zeta} - 2\zeta^2 + 3\zeta \cos \alpha + \frac{3}{2} \sin^2 \alpha \right\} d\zeta. \quad (13.48)$$

Производя вычисления, известным нам способом находим

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1 = i \left\{ \frac{2}{3} \sin 5\alpha - \frac{9}{2} \sin 4\alpha \cos \alpha + \frac{8}{3} \sin 3\alpha (1 + 4 \cos^2 \alpha) - \right. \\ \left. - \frac{14}{3} \sin 2\alpha \cos \alpha (3 + 2 \cos^2 \alpha) + \frac{2}{3} \sin \alpha (11 + 36 \cos^2 \alpha) - 10\alpha \cos \alpha \right\}. \end{aligned} \quad (13.49)$$

Наконец, после тождественных преобразований это выражение можно, оказывается, привести к виду, совпадающему с (13.38):

$$\tilde{T}_1(\alpha) = T_1(\alpha). \quad (13.50)$$

Далее, с учётом вспомогательных интегралов (13.40), получим

$$\begin{aligned} \tilde{T}_2 = i\pi \left\{ -\frac{5}{12} \sin^2 \alpha \cos \alpha (4 \cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha) + \frac{29}{24} \sin^2 \alpha \cos \alpha (5 \cos^2 \alpha - 1) + \right. \\ + \sin^2 \alpha \cos \alpha \left(\frac{5}{4} \sin^2 \alpha - \frac{7}{2} \cos^2 \alpha - \frac{2}{3} \right) + \sin^2 \alpha \left(\cos \alpha - \frac{5}{6} - \frac{7}{4} \sin^2 \alpha \cos \alpha \right) + \\ \left. + \left(\frac{7}{3} \cos \alpha + \sin^2 \alpha - \frac{2}{3} \right) (1 - \cos \alpha) \right\}. \end{aligned} \quad (13.51)$$

Существенно, что после тождественных преобразований выражение (13.51) приводится к тому же виду, что и T_2 из (13.42):

$$\tilde{T}_2(\alpha) = T_2(\alpha).$$

Складывая \tilde{T}_1 и \tilde{T}_2 , имеем, следовательно, равенство

$$\tilde{W}_1 = W_1, \quad (13.52)$$

где W_1 дано в (13.41). Таким образом мы установили, что второй вариант четвёртого метода тоже работает и интеграл (13.44) даёт верное выражение для энергии однородного сегмента.

§ 13.3. Гравитационная энергия однородного шарового сектора

Эта красивая задача на применение четвёртого метода также требует новаторского подхода.

В шаре радиуса R выделен шаровой сектор с углом полураствора α (рис. 108). Масса такого сектора равна

$$M = \frac{2}{3} \pi G \rho R^3 (1 - \cos \alpha). \quad (13.53)$$

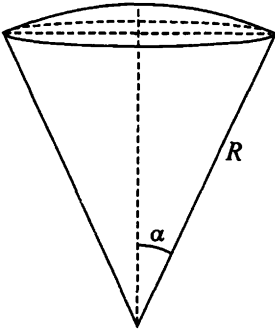


Рис. 108. Шаровой сектор

Потенциал в точке на оси симметрии Ox_3 однородного тела с азимутальной симметрией, а в данном примере — шарового сектора, находится по формуле

$$\varphi(x_3) = 2\pi G\rho \int_0^\alpha \int_0^R \frac{r'^2 \sin \theta' dr' d\theta'}{\sqrt{r'^2 + x_3^2 - 2r'x_3 \cos \theta'}}. \quad (13.54)$$

Находим вначале *внутренний потенциал шарового сектора*, и после замены в нём x_3 на ζ , получим

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{внутр}}(\zeta) = \pi G\rho \left\{ \frac{2(\zeta^2 - 2R \cos \alpha \cdot \zeta + R^2)^{3/2}}{3\zeta} + \right. \\ \left. + \cos \alpha (R - \zeta \cdot \cos \alpha) \sqrt{\zeta^2 - 2R \cos \alpha \cdot \zeta + R^2} - \zeta^2 \sin^2 \alpha - \right. \\ \left. - (\zeta - R)^2 \frac{\zeta + 2R}{3\zeta} + \zeta^2 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha \left[\text{Arsh} \frac{R - \zeta \cdot \cos \alpha}{\zeta \cdot \sin \alpha} + \text{Arsh}(|\text{ctg} \alpha|) \right] \right\}, \quad (13.55) \end{aligned}$$

так что комбинация в круглых скобках под знаком интеграла в (13.6), необходимая для применения четвёртого метода, будет теперь равна

$$2\varphi_{\text{внутр}}(\zeta) - \zeta \frac{d\varphi_{\text{внутр}}}{d\zeta} = 2\pi G\rho R^2 \left[\frac{\sqrt{\zeta^2 - 2\cos \alpha \cdot \zeta + 1}}{\zeta} + 1 - \frac{1}{\zeta} \right]. \quad (13.56)$$

Внешний же потенциал однородного шарового сектора равен

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{внешн}}(\zeta) = \pi G\rho \left\{ \frac{2(\zeta^2 - 2R \cos \alpha \cdot \zeta + R^2)^{3/2}}{3\zeta} + \right. \\ \left. + \cos \alpha (R - \zeta \cdot \cos \alpha) \sqrt{\zeta^2 - 2R \cos \alpha \cdot \zeta + R^2} - \right. \\ \left. - \zeta^2 \sin^2 \alpha + (\zeta - R)^2 \frac{\zeta + 2R}{3\zeta} + \right. \\ \left. + \zeta^2 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha \left[\text{Arsh} \frac{R - \zeta \cdot \cos \alpha}{\zeta \cdot \sin \alpha} + \text{Arsh}(|\text{ctg} \alpha|) \right] \right\}. \quad (13.57) \end{aligned}$$

Задача 13.4. Выяснить асимптотику внешнего потенциала однородного шарового сектора на больших расстояниях.

Решение. Проводится обычным способом и приводит к выражению

$$\varphi_{\text{внешн}}(\zeta) \sim \frac{MG}{\zeta}. \quad (13.58)$$

В частности, в случае полного шара ($\alpha = \pi$) имеем для асимптотики на больших расстояниях стандартное выражение

$$\varphi_{\text{шара}}(\zeta) \sim \frac{M_{\text{шара}}G}{\zeta}.$$

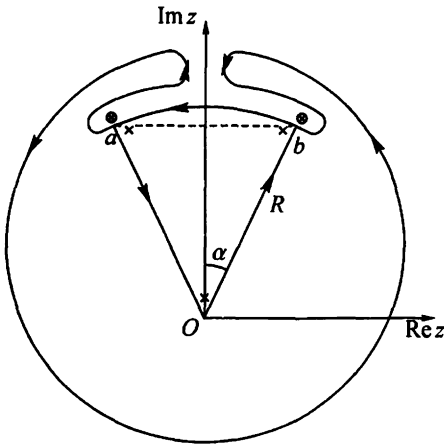


Рис. 109. Расположение особых точек для аналитического продолжения внешнего (крестики) и внутреннего (кружочки с крестиками) потенциалов шарового сектора. Показан начальный этап деформации контура интегрирования

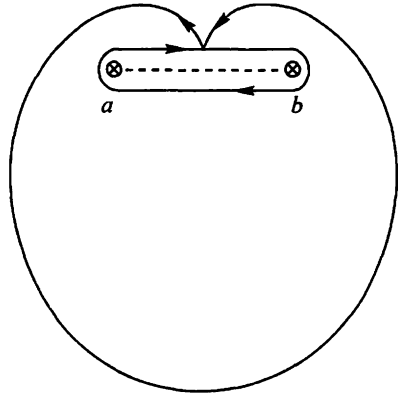


Рис. 110. Редукция контура интегрирования для шарового сектора

Важно сейчас выяснить, как в интеграле (13.6) будет проходить контур вокруг шарового сектора. Здесь есть два варианта: можно опираться на особые точки или внутреннего, или внешнего потенциала. Сами особые точки имеют расположение, показанное на рис. 109. Внутренний потенциал имеет особые точки

$$a = R \exp(-i\alpha) \text{ и } b = R \exp(+i\alpha), \quad (13.59)$$

вынесенные за фигуру и отмеченные на рис. 109 кружками с крестиками. Внешний потенциал, кроме тех же особых точек, имеет ещё и особую точку $\zeta = 0$, причём для него все три точки находятся (спрятаны) внутри границы шарового сектора. Подчёркнём, что в обоих случаях указанное расположение особых точек делает потенциал сектора аналитической функцией во всей области определения.

Остановимся здесь на первом варианте решения задачи, проводя контур в соответствии с расположением особых точек для внутреннего потенциала. Тогда контур в интеграле (13.6) можно деформировать способом, показанным на рис. 109. Расширяя и продолжая начатую деформацию, в пределе получим два контура на рис. 110. Первый (внутренний) контур охватывает особые точки a и b , являющиеся точками ветвления только функции $\varphi_{\text{внутр}}(\zeta)$. Очевидно, два последних члена в выражении (13.56) не имеют точек ветвления и далее их можно не учитывать. Радикал в (13.56)

$$\sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1} = \sqrt{(\zeta - a)(\zeta - b)} \quad (13.60)$$

испытывает, конечно, изменение знака при обходе точек a и b . Здесь и ниже принята нормировка $\zeta = \zeta/R$.

Значительно упрощает всю задачу и то, что при данном расположении внутреннего контура внешний потенциал $\varphi_{\text{внешн}}(\zeta)$ не имеет на нём особых точек. Кроме того, см. рис. 110, интеграл по второму, внешнему, контуру будет равен нулю и далее не учитывается. Таким образом, проведённая выше деформация контура интегрирования позволила на этом этапе существенно упростить весьма сложную задачу. Но и сейчас для достижения цели предстоит ещё проделать немалые расчёты.

С учётом сказанного, интеграл (13.6) приводится к виду

$$W_{\text{сектора}} = -\frac{2\pi G\rho^2 R^5}{5i} \{T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6\}, \quad (13.61)$$

где

$$T_1 = \frac{2}{3} \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \frac{(\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1)^2}{\zeta^2} d\zeta = \frac{16}{3}i \left(\sin \alpha - \frac{1}{3} \sin^3 \alpha - \alpha \cos \alpha \right);$$

$$T_2 = \cos \alpha \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} (1 - \zeta \cos \alpha) (\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1) \frac{d\zeta}{\zeta} =$$

$$= 2i \cos \alpha \left[\alpha - \frac{1}{3} \sin \alpha \cos \alpha (5 - 2 \cos^2 \alpha) \right];$$

$$T_3 = -\sin^2 \alpha \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \zeta \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1} d\zeta = -\frac{i\pi}{2} \sin^4 \alpha \cos \alpha;$$

$$T_4 = \frac{1}{3} \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} (\zeta - 1)^2 (\zeta + 2) \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1} \frac{d\zeta}{\zeta^2} = \frac{i\pi}{6} (\sin^2 \alpha \cos \alpha - 2 + 2 \cos \alpha);$$

$$T_5 = \sin^2 \alpha \cos \alpha \operatorname{Arsh}(|\operatorname{ctg} \alpha|) \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \zeta \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1} d\zeta = \frac{i\pi}{2} \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha \operatorname{Arsh}(|\operatorname{ctg} \alpha|);$$

$$T_6 = \sin^2 \alpha \cos \alpha \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \zeta \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1} \operatorname{Arsh} \frac{1 - \zeta \cos \alpha}{\zeta \sin \alpha} d\zeta =$$

$$= i \sin^2 \alpha \cos \alpha \left[\alpha \left(\frac{2}{3} - \cos^2 \alpha \right) + \frac{1}{3} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha \cos \alpha}{2} \cdot I \right].$$

Заметим, что при вычислении величин T_3 , T_4 , T_5 и T_6 встречаются вспомогательные интегралы и из (13.40).

Подставляя теперь все шесть интегралов T_i в формулу (13.61), после многочисленных преобразований в итоге находим искомую гравитационную энергию однородного шарового сектора:

$$W_{\text{сектора}} = -\frac{2\pi G\rho^2 R^5}{15} \left\{ \alpha \cdot \cos \alpha [\sin^2 \alpha (2 - 3 \cos^2 \alpha) - 10] + \right.$$

$$+ \sin \alpha \left[\sin^2 \alpha \left(\frac{2}{3} - 3 \cos^2 \alpha \right) + 10 \right] +$$

$$+ \pi \left[\cos^3 \alpha \left(1 + \frac{3}{2} \sin^2 \alpha \right) - 1 + \frac{3}{2} \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{Arsh}(|\operatorname{ctg} \alpha|) \right] +$$

$$\left. + \frac{3}{2} \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha \cdot I \right\}, \quad (13.62)$$

где

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln \frac{1 + \sin \alpha \cdot \cos x}{1 - \sin \alpha \cdot \cos x} dx = \int_0^{\pi/2} \ln \frac{1 + \sin \alpha \cdot \sin x}{1 - \sin \alpha \cdot \sin x} dx =$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sin \alpha)^{2k+1}}{2k+1} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^{2k+1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}. \quad (13.63)$$

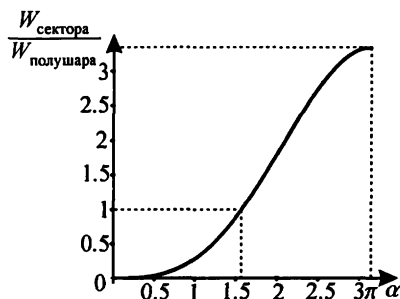
Заметим: для произвольного α интеграл I в конечном виде не берётся; для полного шара, разумеется, $I = 0$, а при $\alpha = \pi/2$ (полушар) интеграл $I = 4G_K$ (здесь G_K — постоянная Каталана из (12.17)).

Формула (13.62) проверяется как в случае шара $\alpha = \pi$ (получается выражение (1.64)), так и в случае полушара $\alpha = \frac{\pi}{2}$ с правильным результатом (12.157).

З а д а ч а 13.5. *Сделайте указанную элементарную проверку.*

Важно, наконец, обратить внимание, что здесь мы встретились с *независимой* проверкой гравитационной энергии для полушара (12.157): в самом деле, если ранее этот полушар получался нами в пределе из *шарового сегмента*, то теперь — из *шарового сектора*!

Рис. 111. Зависимость гравитационной энергии однородного шарового сектора (нормировка на энергию полушара (12.157) от угла полураствора α). Расчёт по формуле (13.62). Штриховыми вертикальными линиями отмечены энергия полушара и шара. Энергия шара (по модулю) в 3.34 раза больше энергии полушара



Возможна ещё и *прямая* проверка выражения (13.62); она будет выполнена в § 14.1 с помощью идеи *обобщения гравитационной энергии для подсистемы*.

На рис. 111 результаты расчётов по формуле (13.62) представлены графически.

При малых α шаровой сектор «складывается» наподобие веера в неоднородный отрезок длиной R . Строго говоря, одномерный отрезок имеет бесконечно большой потенциал в точках самого стержня, а значит, и бесконечно большую гравитационную энергию. Тем не менее, в данном случае всё же можно говорить об асимптотическом пределе гравитационной энергии шарового сектора (13.62) при малых α . А именно, из (13.62) при малых α находим

$$W_{\text{сектора}} = -\frac{\pi G \rho^2 R^5}{5} \left\{ \pi \left[\ln \frac{2}{\alpha} - \frac{5}{4} \right] \alpha^4 - \frac{64}{9} \alpha^5 + O(\alpha^6) \right\}. \quad (13.64)$$

Обратим внимание на то, что разложение выражения энергии шарового сектора по степеням малого α^4 , т. е. в приближении стержня, начинается только с α^4 .

И замечательно следующее: в следующем разделе формула (13.64) послужит для оригинальной проверки выражения гравитационной энергии в асимптотическом пределе уже для конуса, сложенного «веером» в такой же неоднородный стержень! Как говорится: «мал золотник, да дорог».

Тот же уровень сложности, что и для однородного шарового сектора, имеет следующая задача.

§ 13.4. Гравитационная энергия однородного прямого кругового конуса

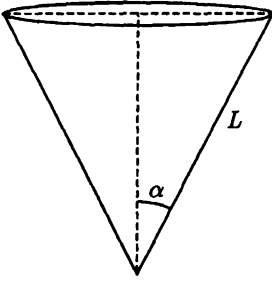


Рис. 112. Прямой круговой конус

Ранее эта задача не ставилась.

Конус и его параметры показаны на рис. 112. Фигура конуса допускает только значения $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Внутренний потенциал (и соответствующая ему комбинация членов), а также внешний потенциал однородного кругового конуса на оси симметрии имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{внутр}}(\zeta) = \pi G \rho \left\{ (L - \zeta \cos \alpha) \sqrt{L^2 - 2L\zeta \cos \alpha + \zeta^2} - \right. \\ \left. - \zeta^2 \sin^2 \alpha + \zeta^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \left(\operatorname{Arsh} \frac{L - \zeta \cos \alpha}{\zeta \sin \alpha} + \operatorname{Arsh}(\operatorname{ctg} \alpha) \right) - \right. \\ \left. - (L \cos \alpha - \zeta)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (13.65)$$

так что

$$2\varphi_{\text{внутр}} - \zeta \frac{d\varphi_{\text{внутр}}}{d\zeta} = 2\pi G \rho L^2 \cos \alpha \left[\sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1} - (\cos \alpha - \zeta) \right]; \quad (13.66)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{внешн}}(\zeta) = \pi G \rho L^2 \cos \alpha \left\{ (1 - \zeta \cos \alpha) \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1} + \right. \\ \left. + \zeta^2 \cos \alpha - 2\zeta + \cos \alpha + \zeta^2 \sin^2 \alpha \left(\operatorname{Arsh} \frac{1 - \zeta \cos \alpha}{\zeta \sin \alpha} + \operatorname{Arsh}(\operatorname{ctg} \alpha) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (13.67)$$

Выбор контура интегрирования и его редукцию в рассматриваемой задаче выполним по аналогии с предыдущим примером шарового сектора. Дело в том, что и для конуса мы имеем две особые точки с координатами (13.59). После этого будем иметь дело с общим интегралом в комплексной плоскости

$$\begin{aligned} W = -\frac{2\pi G \rho^2 L^5 \cos^2 \alpha}{5i} \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1} \left\{ (1 - \zeta \cos \alpha) \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1} + \right. \\ \left. + \zeta^2 \cos \alpha - 2\zeta + \cos \alpha + \zeta^2 \sin^2 \alpha \left(\operatorname{Arsh} \frac{1 - \zeta \cos \alpha}{\zeta \sin \alpha} + \operatorname{Arsh}(\operatorname{ctg} \alpha) \right) \right\} d\zeta, \end{aligned} \quad (13.68)$$

который разбивается на шесть частных:

$$T_1 = \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} (1 - \zeta \cos \alpha) (\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1) d\zeta = \frac{4}{3} i \sin^5 \alpha; \quad (13.69)$$

$$T_2 = \cos \alpha \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1} d\zeta = \frac{i\pi}{8} \cos \alpha \sin^2 \alpha (5 \cos^2 \alpha - 1); \quad (13.70)$$

$$T_3 = -2 \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \zeta \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1} d\zeta = -i\pi \cos \alpha \sin^2 \alpha; \quad (13.71)$$

$$T_4 = \cos \alpha \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1} d\zeta = \frac{i\pi}{2} \cos \alpha \sin^2 \alpha; \quad (13.72)$$

$$T_5 = \sin^2 \alpha \operatorname{Arsh} \operatorname{ctg} \alpha \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1} d\zeta = \frac{i\pi}{8} \sin^4 \alpha \operatorname{Arsh}(\operatorname{ctg} \alpha) (5 \cos^2 \alpha - 1); \quad (13.73)$$

$$\begin{aligned} T_6 &= \sin^2 \alpha \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1} \operatorname{Arsh} \frac{1 - \zeta \cos \alpha}{\zeta \sin \alpha} d\zeta = \\ &= \frac{i \sin^2 \alpha}{12} \left\{ \sin \alpha (1 + \cos^2 \alpha) + \alpha \cos \alpha (13 - 15 \cos^2 \alpha) + \frac{3}{2} \sin^2 \alpha (5 \cos^2 \alpha - 1) \cdot I \right\}, \end{aligned} \quad (13.74)$$

где интеграл I дан в (13.63). Здесь требуется

Пояснение. Главную трудность представляет вычисление интеграла T_6 . Берём его по частям, обозначив

$$U = \operatorname{Arsh} \frac{1 - \zeta \cos \alpha}{\zeta \sin \alpha}, \quad (13.75)$$

т. е.

$$dU = - \frac{d\zeta}{\zeta \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1}}, \quad (13.76)$$

и

$$\begin{aligned} V &= \int \zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1} d\zeta = \frac{3\zeta + 5 \cos \alpha}{12} (\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1)^{\frac{3}{2}} + \\ &+ \frac{5 \cos^2 \alpha - 1}{8} \left[(\zeta - \cos \alpha) \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1} + \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{Arsh} \frac{1 - \zeta \cos \alpha}{\zeta \sin \alpha} \right]. \end{aligned} \quad (13.77)$$

Тогда

$$T_6 = \sin^2 \alpha \left\{ [UV]_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} + T'_6 \right\}, \quad (13.78)$$

где в правой части стоит интеграл

$$T'_6 = \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} V(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1}}. \quad (13.79)$$

Проинтегрированный член в (13.78) с учётом вида выражений (13.75) и (13.77) исчезает:

$$[UV]_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} = \frac{5 \cos^2 \alpha - 1}{8} \sin^2 \alpha [\operatorname{Arsh}(-i) \operatorname{Arsh}(i) - \operatorname{Arsh}(i) \operatorname{Arsh}(-i)] = 0. \quad (13.80)$$

Остаётся интеграл T'_6 из (13.79). В нём часть членов под знаком интеграла имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} (\zeta^2 - 2z \cos \alpha + 1) + \frac{5 \cos \alpha}{12} \left(\zeta - 2 \cos \alpha + \frac{1}{\zeta} \right) + \frac{5 \cos^2 \alpha - 1}{8} \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\zeta} \right) = \\ & = \frac{1}{4} \left\{ \zeta^2 - \frac{\cos \alpha}{3} \zeta + \frac{3 - 5 \cos^2 \alpha}{6} + \frac{\cos \alpha (13 - 15 \cos^2 \alpha)}{6\zeta} \right\} \end{aligned} \quad (13.81)$$

и интегрируются сразу

$$A = \frac{i}{12} \{ 2 \sin 3\alpha - \cos \alpha \sin 2\alpha + (3 - 5 \cos^2 \alpha) \sin \alpha + \alpha \cos \alpha (13 - 15 \cos^2 \alpha) \}. \quad (13.82)$$

Имеем

$$T_6 = \sin^2 \alpha \left\{ A + \frac{5 \cos^2 \alpha - 1}{8} \sin^2 \alpha \cdot I_6 \right\}, \quad (13.83)$$

где

$$I_6 = \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \frac{\operatorname{Arsh} \frac{\zeta - \cos \alpha}{\sin \alpha} d\zeta}{\zeta \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1}}. \quad (13.84)$$

Далее заменой

$$z = \frac{\zeta - \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (13.85)$$

интеграл I_6 приводим к виду

$$I_6 = \int_{-i}^i \frac{\operatorname{Arsh} z dz}{(\cos \alpha + z \sin \alpha) \sqrt{1 + z^2}}, \quad (13.86)$$

и переход к вещественной переменной

$$x = \frac{z}{i}, \quad \operatorname{Arsh}(ix) = i \arcsin x \quad (13.87)$$

даёт

$$I_6 = \int_{-1}^1 \frac{\arcsin x}{\cos \alpha + ix \sin \alpha} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (13.88)$$

Дальнейшее ясно:

$$\begin{aligned} I_6 &= - \int_{-1}^1 \frac{\cos \alpha - ix \sin \alpha}{\cos^2 \alpha + x^2 \sin^2 \alpha} \arcsin x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \\ &= 2i \sin \alpha \int_{-1}^1 \frac{x \arcsin x}{\cos^2 \alpha + x^2 \sin^2 \alpha} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \\ &= 2i \sin \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y \sin y dy}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \sin^2 y} = i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1 + \sin \alpha \cos \alpha x}{1 - \sin \alpha \cos \alpha x} dx. \end{aligned} \quad (13.89)$$

Это означает, что

$$I_6 = iI, \quad (13.90)$$

где интеграл I дан в (13.63). Собирая всё вместе, получим

$$T_6 = i \frac{\sin^2 \alpha}{12} \left\{ 2 \sin 3\alpha - \cos \alpha \sin 2\alpha + (3 - 5 \cos^2 \alpha) \sin \alpha + \alpha \cos \alpha (13 - 15 \cos^2 \alpha) + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \sin^2 \alpha (5 \cos^2 \alpha - 1) I \right\}, \quad (13.91)$$

где, напоминаем, I дан в (13.63). Тогда, в силу тождества

$$2 \sin 3\alpha - \cos \alpha \sin 2\alpha + (3 - 5 \cos^2 \alpha) \sin \alpha = \sin \alpha (1 + \cos^2 \alpha), \quad (13.92)$$

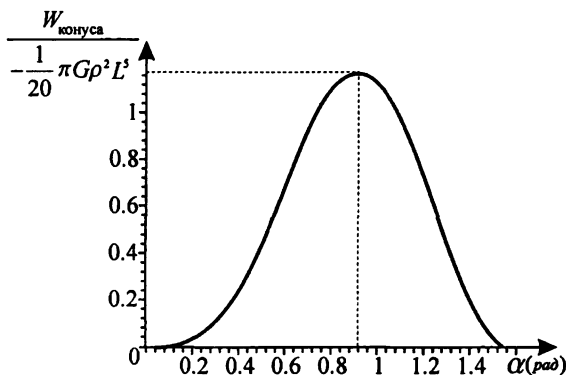
и приходим к доказываемому равенству (13.74).

В итоге, объединяя выражения T_1, \dots, T_6 , после многих преобразований находим *гравитационную энергию однородного кругового конуса*

$$W_{\text{конуса}} = -\frac{1}{20} \pi G \rho^2 L^5 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \left\{ \sin^2 \alpha (5 \cos^2 \alpha - 1) \cdot I + \right. \\ \left. + \sin \alpha \left(\frac{4}{3} + 10 \sin^2 \alpha \right) + \alpha \cdot \cos \alpha \left(\frac{26}{3} - 10 \cos^2 \alpha \right) - \right. \\ \left. - \pi \sin^2 \alpha [5 \cos \alpha - (5 \cos^2 \alpha - 1) \operatorname{Arsh}(\operatorname{ctg} \alpha)] \right\}, \quad (13.93)$$

где $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ — угол полураствора конуса, L — длина его образующей, а I дано в (13.63).

Рис. 113. Зависимость гравитационной энергии конуса от угла полураствора α . Обращение в нуль энергии при $\alpha \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ означает, что в пределе одномерного стержня или двумерного диска следует переходить от объёмной плотности ρ к одномерной или поверхностной плотности. Максимум гравитационной энергии конуса 1.17217 соответствует углу $\alpha = 0.92131$ ($\approx 52^\circ 47'$)



Но оказывается, проверить формулу (13.93) — далеко непросто! Дело в том, что конус — в отличие от шарового сектора — не допускает превращения в шар или в полушар (см. предыдущий пример), а только в одномерный стержень или в плоский круглый диск (и то лишь в асимптотическом пределе). Фактически, здесь мы имеем только два, и то *косвенных*, способа проверки.

Первый — это нахождение асимптотического предела $\alpha \rightarrow \pi/2$, когда конус превращается в *неоднородный* круглый диск с поверхностной плотностью

$$\sigma(r) = \frac{3M}{\pi L^2} \left(1 - \frac{r}{L} \right). \quad (13.94)$$

Задача 13.6. Из выражения (13.93) найти потенциальную энергию этого диска.

Решение. Полагая в (13.93) угол полураствора равным $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, с точностью до ε^2 включительно найдём

$$W_{\text{диска}} = -\frac{1}{30}\pi G\sigma_0^2 L^3 (17 - 6G_K) = -\frac{3}{10}\pi\chi \frac{M^2 G}{L}, \quad (13.95)$$

где G_K — постоянная Каталана, $\sigma_0 = \rho L\varepsilon$, а χ дана в (12.20). Этот предел и даёт *гравитационную энергию диска с $\sigma(\tau)$* из (13.94).

Но надо пояснить, почему предельный переход от однородного конуса к диску даёт возможность проверить саму формулу для энергии конуса (13.93)? Всё дело в том, что энергия такого же диска была найдена нами (см. далее формулу (14.208)) совершенно другим способом: методом *предельного софокусного перехода от специального неоднородного сфероида к диску*. Сравнивая (13.95) и (14.208), убеждаемся в справедливости сказанного. Содружество методов приносит свои плоды² — ведь сейчас выражение энергии прямого кругового конуса мы фактически проверили через энергию слоисто-неоднородного сфероида!

Второй способ проверки выражения (13.93) — это асимптотический переход к очень малым углам α . В этом пределе прямой круговой конус, как и шаровой сектор, «складывается веером» в неоднородный стержень длиной L , и для него мы находим

$$W_{\text{сектора}} = -\frac{\pi G\rho^2 L^5}{5} \left\{ \pi \left[\ln \frac{2}{\alpha} - \frac{5}{4} \right] \alpha^4 - \frac{64}{9} \alpha^5 + O(\alpha^6) \right\}. \quad (13.96)$$

Но с чем же сравнивать результат такого асимптотического перехода к стержню? Разумеется, с *аналогичным выражением (13.64), которое было получено выше из энергии шарового сектора!* Как видим, выражения (13.64) и (13.96) (при очевидной замене R на L в первом) с точностью до $O(\alpha^6)$ оказываются совершенно одинаковыми³.

На рис. 113 показаны результаты расчётов по формуле (13.93).

§ 13.5. Гравитационная энергия однородного плоского шарового слоя

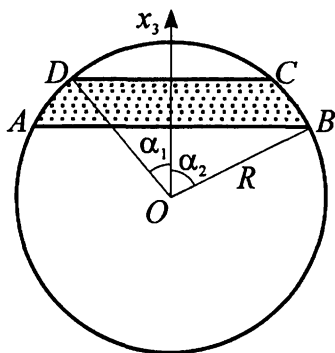


Рис. 114. Плоский шаровой слой

Рассмотрим ещё одну новую задачу на применение четвёртого метода.

Дан плоский слой в однородном шаре радиуса R (рис. 114). Углы α_1 и α_2 могут изменяться в пределах

$$0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \pi. \quad (13.97)$$

В частных случаях такой слой может превращаться в полный шар, шаровой сегмент, полушар и даже в тонкий круглый диск.

13.5.1. Потенциалы слоя на оси симметрии

Поместив начало отсчёта в центр шара, находим потенциалы шарового слоя на оси симметрии. Нормируя все координаты на R , имеем двойной интеграл

² Потенциальная энергия такого диска будет нами найдена также и через его эквигравитирующий стержень (см. в главе 14 задачу 14.13).

³ Таким образом, различие между разложениями (13.64) и (13.96) начинается только с членов шестого порядка по α .

$$\varphi(x_3) = \pi G \rho R^2 \int_{\cos \alpha_2}^{\cos \alpha_1} dx'_3 \int_0^{r_m^2} \frac{dy}{\sqrt{y + (x_3 - x'_3)^2}}, \quad (13.98)$$

где

$$r_m^2 = 1 - x_3'^2. \quad (13.99)$$

Интегрируя и делая после этого замену $x_3 \rightarrow \zeta$, получим

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{внутр}}(\zeta) = \frac{2}{3} \pi G \rho R^2 \left\{ \frac{\tilde{R}_2^3 - \tilde{R}_1^3}{\zeta} - \frac{3}{2} (\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2) - \right. \\ \left. - 3\zeta^2 + 3\zeta (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) \right\}, \end{aligned} \quad (13.100)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{внешн}}(\zeta) = \frac{2}{3} \pi G \rho R^2 \left\{ \frac{\tilde{R}_2^3 - \tilde{R}_1^3}{\zeta} + \frac{3}{2} (\cos^2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_2) - \right. \\ \left. - 3\zeta (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \right\}. \end{aligned} \quad (13.101)$$

Здесь и ниже для краткости мы обозначили

$$\tilde{R}_1 = \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha_1 + 1}, \quad \tilde{R}_2 = \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha_2 + 1}. \quad (13.102)$$

Выполним проверку: в случае шара $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$, и формулы (13.100) и (13.101) дают

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{внутр}}(\zeta) &= \frac{2}{3} \pi G \rho R^2 (3 - \zeta^2); \\ \varphi_{\text{внешн}}(\zeta) &= \frac{MG}{\zeta} \end{aligned} \quad (13.103)$$

– верно!

Ещё одна проверка: в частном случае шарового сегмента, когда $\alpha_1 = 0$, из формул (13.100) и (13.101) имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{внутр}}(\zeta) &= \frac{2}{3} \pi G \rho R^2 \left(\frac{\tilde{R}_2^3 - 1}{\zeta} + \frac{3}{2} - 2\zeta^2 + 3\zeta \cos \alpha_2 - \frac{3}{2} \cos^2 \alpha_2 \right); \\ \varphi_{\text{внешн}}(\zeta) &= \frac{2}{3} \pi G \rho R^2 \left(\frac{\tilde{R}_2^3 + 1}{\zeta} - \frac{3}{2} - \zeta^2 + 3\zeta \cos \alpha_2 - \frac{3}{2} \cos^2 \alpha_2 \right). \end{aligned} \quad (13.104)$$

Эти выражения с точностью до обозначений также совпадают с внутренним (12.152) и внешним (12.151) потенциалами однородного сегмента.

Далее, для применения основной формулы четвёртого метода (13.6) нам требуется знать комбинацию:

$$2\varphi_{\text{внутр}}(\zeta) - \zeta \frac{d\varphi_{\text{внутр}}(\zeta)}{d\zeta} = 2\pi G \rho R^2 \times S(\zeta), \quad (13.105)$$

где мы обозначили

$$S(\zeta) = \tilde{R}_2 \left(\frac{1}{\zeta} - \cos \alpha_2 \right) - \tilde{R}_1 \left(\frac{1}{\zeta} - \cos \alpha_1 \right) + \zeta (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) - \cos^2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_2. \quad (13.106)$$

13.5.2. Гравитационная энергия слоя в виде контурного интеграла и его преобразование

С учётом сказанного выше, формула (13.6) для гравитационной энергии принимает вид

$$W_{\text{слой}} = -\frac{2}{15i} \pi G \rho^2 R^5 \times \oint S(\zeta) \left[\frac{\tilde{R}_2^3 - \tilde{R}_1^3}{\zeta} - 3\zeta (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) + \frac{3}{2} (\cos^2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_2) \right] d\zeta, \quad (13.107)$$

где $S(\zeta)$ из (13.106).

Для дальнейшего важно, что контур интегрирования в (13.107) мы натягиваем на особые точки аналитического продолжения *внешнего* потенциала, расположенные *внутри* шарового слоя. При этом следует учитывать, что в ходе деформации данного контура интегрирования образуется ещё и малый кружок вокруг особой точки типа полюса в начале системы отсчёта, совпадающей с центром шара O . Необходимо знать, поэтому, и вычет в этой особой точке.

При деформации исходный контур интегрирования разбиваем на верхний и нижний контуры (рис. 115), которые натягиваются (соответственно) на следующие пары точек ветвления первого порядка:

$$\zeta = e^{\pm i\alpha_1}; \quad \zeta = e^{\pm i\alpha_2} \quad (13.108)$$

и, что относится только к нижнему контуру, ещё и на полюс O .

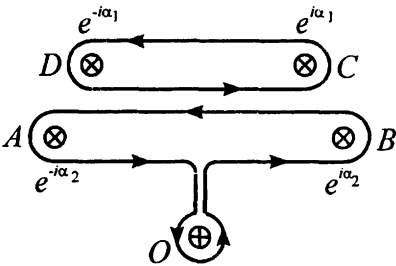


Рис. 115. Промежуточная стадия деформации контура интегрирования в задаче о шаровом слое

При обходе верхнего контура в выражении *внешнего* потенциала меняет свой знак радикал \tilde{R}_1 , а нижнего контура — радикал \tilde{R}_2 (см. выражение в квадратных скобках под интегралом (13.107)).

Стискивая оба контура (или делая *разрез* между точками ветвления) и учитывая вышесказанное, получим однократные интегралы в комплексной плоскости:

$$W_{\text{слой}} = -\frac{4}{15i} \pi G \rho^2 R^5 \left(\Phi_1 + \Phi_2 + 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{\zeta=0} F(\zeta) \right), \quad (13.109)$$

где

$$\Phi_1 = - \int_{e^{-i\alpha_1}}^{e^{i\alpha_1}} S(\zeta) \frac{\tilde{R}_1^3}{\zeta} d\zeta; \quad (13.110)$$

$$\Phi_2 = \int_{e^{-i\alpha_2}}^{e^{i\alpha_2}} S(\zeta) \frac{\tilde{R}_2^3}{\zeta} d\zeta \quad (13.111)$$

и, напомним, $S(\zeta)$ из (13.106). Вычет же берётся от функции, которая будет указана ниже (см. разд. 13.5.7).

13.5.3. Вычисление интегралов, входящих в (13.110)

Прежде всего, приводим (13.110) к виду

$$\Phi_1 = T_1 - P_1 - D_1, \quad (13.112)$$

где

$$T_1(\alpha_1) = \int_{e^{-i\alpha_1}}^{e^{i\alpha_1}} \tilde{R}_1^2(\zeta) \left[1 + 2 \cos^2 \alpha_1 - \zeta \cos \alpha_1 - \frac{3 \cos \alpha_1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2} \right] d\zeta; \quad (13.113)$$

$$P_1(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{e^{-i\alpha_1}}^{e^{i\alpha_1}} \tilde{R}_1(\zeta) \left(\zeta - 2 \cos \alpha_1 + \frac{1}{\zeta} \right) [\zeta (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) - \cos^2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_2] d\zeta; \quad (13.114)$$

$$D_1(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{e^{-i\alpha_1}}^{e^{i\alpha_1}} \tilde{R}_1 \tilde{R}_2 \left[1 + 2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \zeta \cos \alpha_2 - \frac{2 \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2} \right] d\zeta. \quad (13.115)$$

Забегая вперёд заметим, что первые два из этих интегралов берутся в элементарных функциях от углов α_1 и α_2 :

$$T_1(\alpha_1) = i \left[\frac{2}{3} \sin 3\alpha_1 (1 + 4 \cos^2 \alpha_1) - \frac{1}{2} \sin 4\alpha_1 \cos \alpha_1 - 2 \sin 2\alpha_1 \cos \alpha_1 (3 + 2 \cos^2 \alpha_1) + 2 \sin \alpha_1 (3 + 8 \cos^2 \alpha_1) - 10 \alpha_1 \cos \alpha_1 \right]. \quad (13.116)$$

$$P_1(\alpha_1, \alpha_2) = i\pi \left\{ \sin^2 \alpha_1 \left[\frac{1}{8} (5 \cos^2 \alpha_1 - 1) (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) - \frac{1}{2} \cos \alpha_1 [(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)^2 + 2 \cos^2 \alpha_1] + \cos \alpha_1 (\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2) + \frac{1}{2} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) \right] - (1 - \cos \alpha_1) (\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2) \right\}. \quad (13.117)$$

Нахождение же интеграла $D_1(\alpha_1, \alpha_2)$ из (13.115) не является простым и потребует, как мы убедимся далее тщательного анализа с применением рекуррентных формул (см. разд. 13.5.5).

13.5.4. Вычисление интегралов, входящих в (13.111)

С этой целью приводим вначале (13.111) к виду

$$\Phi_2 = T_2 + P_2 - D_2, \quad (13.118)$$

где

$$T_2(\alpha_2) = \int_{e^{-i\alpha_2}}^{e^{i\alpha_2}} \tilde{R}_2^2(\zeta) \left[1 + 2 \cos^2 \alpha_2 - \zeta \cos \alpha_2 - \frac{3 \cos \alpha_2}{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2} \right] d\zeta; \quad (13.119)$$

$$P_2(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{e^{-i\alpha_2}}^{e^{i\alpha_2}} \tilde{R}_2(\zeta) \left(\zeta - 2 \cos \alpha_2 + \frac{1}{\zeta} \right) [\zeta (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) - \cos^2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_2] d\zeta; \quad (13.120)$$

$$D_2(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{e^{-i\alpha_2}}^{e^{i\alpha_2}} \tilde{R}_1 \tilde{R}_2 \left[1 + 2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \zeta \cos \alpha_1 - \frac{2 \cos \alpha_2 + \cos \alpha_1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2} \right] d\zeta. \quad (13.121)$$

Две первые из представленных здесь трёх квадратур вновь удаётся выразить через элементарные тригонометрические функции от углов α_1 и α_2 ; беря эти интегралы, после многих преобразований получим

$$T_2(\alpha_2) = i \left[\frac{2}{3} \sin 3\alpha_2 (1 + 4 \cos^2 \alpha_2) - \frac{1}{2} \sin 4\alpha_2 \cos \alpha_2 - 2 \sin 2\alpha_2 \cos \alpha_2 (3 + 8 \cos^2 \alpha_2) - 10\alpha_2 \cdot \cos \alpha_2 \right]. \quad (13.122)$$

$$P_2(\alpha_1, \alpha_2) = i\pi \left\{ \sin^2 \alpha_2 \left[\frac{1}{8} (5 \cos^2 \alpha_2 - 1) (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) - \frac{1}{2} \cos \alpha_2 \times \right. \right. \\ \times \left[(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)^2 + 2 \cos^2 \alpha_2 \right] + \cos \alpha_2 (\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2) + \\ \left. \left. + \frac{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}{2} \right] - (1 - \cos \alpha_2) (\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2) \right\}. \quad (13.123)$$

Заметим, что выражение для интеграла $T_2(\alpha_2)$ получается из выражения $T_1(\alpha_1)$ путем одной только замены $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$. Существенно и то, что интеграл $P_2(\alpha_1, \alpha_2)$ получается из $P_1(\alpha_1, \alpha_2)$ перестановкой углов α_1 и α_2 . Указанные здесь свойства симметрии используемых выражений важно учитывать для контроля за правильностью найденных сложных формул.

Интеграл же (13.121) намного сложнее только что рассмотренных и он будет взят в разд. 13.5.6.

На данном этапе исследования гравитационную энергию плоского однородного шарового слоя можно представить в таком виде

$$W_{\text{слож}} = -\frac{4}{15i} \pi G \rho^2 R^5 \left\{ T_1 + T_2 - P_1 + P_2 - D_1 - D_2 + 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{\zeta=0} F(\zeta) \right\}. \quad (13.124)$$

Переходим к следующему этапу расчётов.

13.5.5. Квадратура D_1 из (13.115)

Так как

$$\tilde{R}_1^2 \tilde{R}_2^2 = \zeta^4 + a_1 \zeta^3 + a_2 \zeta^2 + a_1 \zeta + 1, \quad (13.125)$$

где величины

$$\begin{aligned} a_1 &= -2(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2), \\ a_2 &= 2(1 + 2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2) \end{aligned} \quad (13.126)$$

симметричны относительно перестановки местами α_1 и α_2 , искомое выражение для D_1 можно представить в виде

$$\begin{aligned} D_1 &= -\cos \alpha_2 I_5 + I_4 \left(\frac{a_2}{2} - a_1 \cos \alpha_2 \right) + \\ &+ I_3 \left[a_1 + \frac{a_1 a_2}{2} + \cos \alpha_2 (1 - a_2) \right] + I_2 \left(2 + a_1^2 + \frac{a_2^2}{2} \right) + \\ &+ I_1 \left(3a_1 + \frac{3}{2} a_1 a_2 + a_2 \cos \alpha_2 \right) + I_0 \left[\frac{3}{2} a_2 + a_1 (a_1 + \cos \alpha_2) \right]. \end{aligned} \quad (13.127)$$

Здесь

$$I_n = \int_{e^{-i\alpha_1}}^{e^{i\alpha_1}} \frac{\zeta^n d\zeta}{\bar{R}_1(\zeta) \bar{R}_2(\zeta)} \quad (13.128)$$

(n — целое число), причем при выводе этой формулы использовались равенства (см. (13.131))

$$I_2 = I_{-2}; \quad I_1 = I_{-1}. \quad (13.129)$$

Заметим, что достаточно найти интегралы (13.128)) только с $n = 0, 1, 2$, так как I_3, I_4 и I_5 удовлетворяют системе однородных линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} 8I_5 + 7a_1 I_4 + 6a_2 I_3 + 5a_1 I_2 + 4I_1 &= 0, \\ 6I_4 + 5a_1 I_3 + 4a_2 I_2 + 3a_1 I_1 + 2I_0 &= 0, \\ 4I_3 + 3a_1 I_2 + 2a_2 I_1 + a_1 I_0 &= 0. \end{aligned} \quad (13.130)$$

Еще одно соотношение

$$2I_2 + a_1 I_1 - a_1 I_{-1} - 2I_{-2} = 0 \quad (13.131)$$

даёт равенства (13.129). Эти алгебраические выражения получены из рекуррентной формулы (см. справочник [31], с. 645).

Основные интегралы I_0, I_1 и I_2 находим дробно-линейной заменой:

$$\zeta = \frac{1-z}{1+z}, \quad d\zeta = \frac{-2dz}{(1+z)^2}, \quad (13.132)$$

позволяющей одновременно избавиться от линейных членов в обоих радикалах R_1 и R_2 из (13.102). Тогда, как легко видеть,

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1 &= 2 \cos \frac{\alpha_1}{2} \frac{\sqrt{g^2 + z^2}}{1+z}, \\ \tilde{R}_2 &= 2 \cos \frac{\alpha_2}{2} \frac{\sqrt{h^2 + z^2}}{1+z}. \end{aligned} \quad (13.133)$$

Здесь

$$g = \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}; \quad h = \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2}, \quad (13.134)$$

так что при $\alpha_2 > \alpha_1$ имеем

$$h > g.$$

По указанной схеме последовательно находим

$$I_0 = \int_{e^{-i\alpha_1}}^{e^{i\alpha_1}} \frac{d\zeta}{\bar{R}_1(\zeta) \bar{R}_2(\zeta)} = \frac{1}{N} \int_0^g \frac{dz}{\sqrt{(g^2 + z^2)(h^2 + z^2)}}, \quad (13.135)$$

где мы обозначили

$$N = \cos \frac{\alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_2}{2}. \quad (13.136)$$

Ещё одной заменой

$$z = ix \quad (13.137)$$

получим

$$I_0 = \frac{i}{N} \int_0^g \frac{dx}{\sqrt{(g^2 - x^2)(h^2 - x^2)}} = \frac{i}{Nh} K(k), \quad (13.138)$$

причём модуль эллиптического интеграла здесь (и ниже)

$$k = \frac{g}{h} < 1. \quad (13.139)$$

Аналогично находятся и два других интеграла. Так,

$$I_1 = \frac{2i}{Nh} \Pi[-g^2, k] - I_0. \quad (13.140)$$

Более сложных выкладок требует интеграл

$$I_2 = \int_{e^{-i\alpha_1}}^{e^{i\alpha_1}} \frac{\zeta^2 d\zeta}{\bar{R}_1(\zeta) \bar{R}_2(\zeta)}. \quad (13.141)$$

Однако и его можно выразить через полные эллиптические интегралы. После многих преобразований получим

$$I_2 = \frac{2i}{Nh} \left\{ \left(1 - \frac{4}{1+g^2} \right) K(k) + \frac{4g^2}{(1+g^2)(g^2+k^2)} E(k) + \frac{4(k^2-g^2)}{(1+g^2)(g^2+k^2)} \Pi[-g^2, k] \right\}. \quad (13.142)$$

Разрешая теперь систему уравнений (13.130), находим оставшиеся интегралы через уже известные:

$$\begin{pmatrix} I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}, \quad (13.143)$$

где члены матрицы

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= -\frac{1}{4}a_1; \quad \alpha_{12} = -\frac{1}{2}a_2; \quad \alpha_{13} = -\frac{3}{4}a_1; \\
\alpha_{21} &= \frac{5}{24}a_1^2 - \frac{1}{3}; \quad \alpha_{22} = \frac{1}{2}a_1 \left(\frac{5}{6}a_2 - 1 \right); \quad \alpha_{23} = \frac{5}{8}a_1^2 - \frac{2}{3}a_2; \\
\alpha_{31} &= \frac{1}{8}a_1 \left(\frac{7}{3} + \frac{3}{2}a_2 - \frac{35}{24}a_1^2 \right); \\
\alpha_{32} &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}a_2^2 - 1 + \frac{7}{8}a_1^2 - \frac{35}{45}a_1^2a_2 \right); \\
\alpha_{33} &= \frac{5}{8}a_1 \left(\frac{11}{6}a_2 - 1 - \frac{7}{8}a_1^2 \right).
\end{aligned} \tag{13.144}$$

Таким образом, для нахождения D_1 при заданных углах α_1 и α_2 плоского шарового слоя вначале: вычисляем I_0 из (13.138), I_1 из (13.140), I_2 из (13.142); затем по формулам (13.143) и (13.144) находим интегралы I_3 , I_4 и I_5 , и, подставляя все эти выражения в формулу (13.127), получим в итоге сам интеграл D_1 .

Подчеркнём, что D_1 выражается через полные эллиптические интегралы.

13.5.6. Квадратура D_2 из (13.121)

Обращаясь к выражению D_2 из (13.121), мы неожиданно обнаруживаем одну важную тонкость. Дело в том, что интервал интегрирования в D_2 содержит внутри себя две особые точки $e^{\pm i\alpha_1}$ (рис. 116).

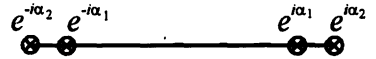


Рис. 116. Превращение второго контура интегрирования в линейный интервал и в кружок вокруг полюса

$O \oplus$

Прежде всего, D_2 можно, конечно, записать из выражения D_1 (см. (13.127)), поменяв в нём местами α_1 и α_2 :

$$\begin{aligned}
D_2 &= -\cos \alpha_1 \tilde{I}_5 + \tilde{I}_4 \left(\frac{a_2}{2} - a_1 \cos \alpha_1 \right) + \\
&+ \tilde{I}_3 \left[a_1 + \frac{a_1 a_2}{2} + \cos \alpha_1 (1 - a_2) \right] + \tilde{I}_2 \left(2 + a_1^2 + \frac{a_2^2}{2} \right) + \\
&+ \tilde{I}_1 \left(3a_1 + \frac{3}{2}a_1 a_2 + a_2 \cos \alpha_1 \right) + \tilde{I}_0 \left[\frac{3}{2}a_2 + a_1 (a_1 + \cos \alpha_1) \right].
\end{aligned} \tag{13.145}$$

Но находить здесь конкретные интегралы

$$\tilde{I}_n = \int_{e^{-i\alpha_2}}^{e^{i\alpha_2}} \frac{\tilde{\zeta}^n}{\tilde{R}_1(\zeta) \tilde{R}_2(\zeta)} d\zeta \tag{13.146}$$

по той схеме, как это было выше для интегралов I_n , сейчас уже нельзя. Дело в том, что интегрирование в \tilde{I}_n производится от $e^{-i\alpha_2}$ до $e^{i\alpha_2}$, и, следовательно, на крайних отрезках этого интервала

$$e^{-i\alpha_2} \leq \zeta \leq e^{-i\alpha_1}; \quad e^{i\alpha_1} \leq \zeta \leq e^{i\alpha_2} \quad (13.147)$$

радикал

$$\tilde{R}_2 = \sqrt{(\zeta - e^{-i\alpha_2})(\zeta - e^{i\alpha_2})} \quad (13.148)$$

имеет уже мнимое значение.

Однако трудность эту можно преодолеть следующим красивым приёмом: вместо замены (13.132) делаем в (13.146) подстановку

$$\zeta = \frac{1-z}{1+z}, \quad d\zeta = \frac{2dz}{(1+z)^2}. \quad (13.149)$$

Тогда

$$\tilde{R}_1 = 2 \sin \frac{\alpha_1}{2} \frac{\sqrt{z^2 + \frac{1}{g^2}}}{1+z}, \quad \tilde{R}_2 = 2 \sin \frac{\alpha_2}{2} \frac{\sqrt{z^2 + \frac{1}{h^2}}}{1+z} \quad (13.150)$$

с h и g из (13.134). Поскольку теперь

$$\zeta = \frac{1-z}{1+z}, \quad (13.151)$$

пределы интегрирования в (13.146) будут следующими:

$$-\frac{i}{h} \leq \zeta \leq \frac{i}{h}. \quad (13.152)$$

В выражениях для пределов интегрирования (13.152) сейчас следует избавиться от i , положив

$$x = \frac{z}{i}, \quad (13.153)$$

после чего вместо (13.146) имеем интеграл

$$\tilde{I}_n = \frac{i}{2\tilde{N}} \int_{-\frac{1}{h}}^{\frac{1}{h}} \left(\frac{ix-1}{ix+1} \right)^n \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{g^2} - x^2\right) \left(\frac{1}{h^2} - x^2\right)}}, \quad (13.154)$$

где

$$\tilde{N} = \sin \frac{\alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha_2}{2}. \quad (13.155)$$

Так как при $\alpha_2 > \alpha_1$ имеем

$$\frac{1}{g} > \frac{1}{h}, \quad (13.156)$$

и затруднения с мнимостью радикала в (13.154) теперь исчезают.

Находим:

$$\tilde{I}_0 = \frac{i}{\tilde{N}} \int_0^{\frac{1}{h}} \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{g^2} - x^2\right) \left(\frac{1}{h^2} - x^2\right)}} = \frac{i}{\tilde{N}} g K(k). \quad (13.157)$$

Здесь и ниже k из (13.139).

Далее,

$$\tilde{I}_1 = -\frac{i}{\tilde{N}} \int_0^{\frac{1}{h}} \frac{1-x^2}{1+x^2} \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{g^2} - x^2\right) \left(\frac{1}{h^2} - x^2\right)}} = \frac{i}{\tilde{N}} \left(K(k) - 2\Pi \left[-\frac{1}{h^2}, k \right] \right). \quad (13.158)$$

Наконец,

$$\tilde{I}_2 = \frac{i}{\tilde{N}} g \left\{ K(k) - 8\Pi \left[-\frac{1}{h^2}, k \right] + 8 \int_0^{\frac{1}{h}} \frac{dx}{(1+x^2)^2 \sqrt{\left(\frac{1}{g^2} - x^2\right) \left(\frac{1}{h^2} - x^2\right)}} \right\}. \quad (13.159)$$

Для взятия оставшегося в (13.159) интеграла сделаем замену

$$x = \frac{1}{h} \sin \theta. \quad (13.160)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{h}} \frac{dx}{(1+x^2)^2 \sqrt{\left(\frac{1}{g^2} - x^2\right) \left(\frac{1}{h^2} - x^2\right)}} &= g \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\left(1 + \frac{1}{h^2} \sin^2 \theta\right)^2 \sqrt{1 + k^2 \sin^2 \theta}} = \\ &= \frac{g}{2 \left(1 + \frac{1}{h^2}\right) \left(k^2 + \frac{1}{h^2}\right)} \left\{ -\left(k^2 + \frac{1}{h^2}\right) K(k) + \frac{1}{h^2} E(k) + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1}{h^4} + \frac{2}{h^2} (1 + k^2) + 3k^2 \right] \Pi \left[-\frac{1}{h^2}, k \right] \right\}. \end{aligned} \quad (13.161)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \tilde{I}_2 &= \frac{i}{\tilde{N}} g \left\{ K(k) - 8\Pi \left[-\frac{1}{h^2}, k \right] + \frac{4}{\left(1 + \frac{1}{h^2}\right) \left(k^2 + \frac{1}{h^2}\right)} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\frac{1}{h^2} E(k) - \left(k^2 + \frac{1}{h^2}\right) K(k) + \left[\frac{1}{h^4} + \frac{2}{h^2} (1 + k^2) + 3k^2 \right] \Pi \left[-\frac{1}{h^2}, k \right] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (13.162)$$

Так как величины a_1 и a_2 из (13.126) инвариантны относительно перестановки местами углов α_1 и α_2 , то для нахождения интегралов \tilde{I}_3 , \tilde{I}_4 и \tilde{I}_5 можно использовать те же рекуррентные соотношения (13.130), которые применялись и для интегралов I_n без тильды. В итоге, согласно формулам (13.143), и сейчас имеем в изящном виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{I}_3 \\ \tilde{I}_4 \\ \tilde{I}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{I}_0 \\ \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \end{pmatrix} \quad (13.163)$$

с теми же коэффициентами α_{ij} из (13.144).

Таким образом, величина D_2 также выражается через стандартные полные эллиптические интегралы.

13.5.7. Нахождение вычета в (13.109)

Вычет следует находить от подынтегральной функции $F(\zeta)$ в (13.121). Очевидно, вычеты имеют те члены, в знаменателе которых стоят или ζ , или ζ^2 . Расчёты тогда показывают, что

$$\operatorname{res}_{\zeta=0} F(\zeta) = -(3 \cos \alpha_2 + 2 \cos \alpha_1). \quad (13.164)$$

13.5.8. Полная энергия слоя

Собирая вместе все найденные выше выражения, входящие в (13.124), после многих трудоёмких преобразований и упрощений, в итоге получаем *гравитационную энергию однородного плоского шарового слоя*:

$$W_{\text{слой}} = -\frac{\pi G \rho^2 R^5}{2880} \left\{ q_1 K(k) + q_2 E(k) + q_3 \Pi \left[-\frac{1}{h^2}, k \right] + q_4 \Pi [-g^2, k] + q_5 \right\}, \quad (13.165)$$

где модуль k у всех эллиптических интегралов один и тот же и дан в (13.139). Формула (13.165) содержит пять коэффициентов, представляющих собой выражения, куда входят элементарные тригонометрические функции от геометрических параметров слоя. Эти коэффициенты оказываются такими:

$$\begin{aligned} q_1 = \frac{8}{hN} [278 - 404 \cos \alpha_1 + 112 \cos 2\alpha_1 - 54 \cos 3\alpha_1 - 5 \cos 4\alpha_1 + 2(202 + \\ + 704 \cos \alpha_1 + 7 \cos 2\alpha_1 + 16 \cos 3\alpha_1 + 7 \cos 4\alpha_1) \cos \alpha_2 - 2(-56 + 7 \cos \alpha_1 + \\ + 22 \cos 2\alpha_1 + 13 \cos 3\alpha_1) \cos 2\alpha_2 + 2(27 + 16 \cos \alpha_1 + 13 \cos 2\alpha_1) \cos 3\alpha_2 - \\ - (5 + 14 \cos \alpha_1) \cos 4\alpha_2]; \end{aligned}$$

$$q_2 = 16hN [1182 + 15 \cos 4\alpha_1 + 608 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - 80 \cos 3\alpha_1 \cos \alpha_2 + 112 \cos 2\alpha_2 + \\ + 4 \cos 2\alpha_1 (28 + 9 \cos 2\alpha_2) - 80 \cos \alpha_1 \cos 3\alpha_2 + 15 \cos 4\alpha_2];$$

$$q_3 = \frac{1}{hN} [24 \cos \alpha_1 (302 - 16 \cos 2\alpha_1 - 5 \cos 4\alpha_1) + 288 (28 - \cos 2\alpha_1 + \cos 4\alpha_1) \cos \alpha_2 - \\ - 288 \cos \alpha_1 (-4 + \cos 2\alpha_1) \cos 2\alpha_2 - 96 (3 + \cos 2\alpha_1) \cos 3\alpha_2 + 72 \cos \alpha_1 \cos 4\alpha_2];$$

$$q_4 = \frac{1}{hN} [288 \cos \alpha_1 (2 \cos 2\alpha_1 - 29) - 72 (98 + 14 \cos 2\alpha_1 + \cos 4\alpha_1) \cos \alpha_2 +$$

$$\begin{aligned}
& + 384 \cos^3 \alpha_1 \cos 2\alpha_2 + 36 (7 + 4 \cos 2\alpha_1) \cos 3\alpha_2 - 288 \cos \alpha_1 \cos 4\alpha_2 + 60 \cos 5\alpha_2] ; \\
q_5 = & \frac{1}{hN} \{ -2hN [12 (87\pi - 320\alpha_1) \cos \alpha_1 + 3\pi (-48 \cos 2\alpha_1 - 11 \cos 3\alpha_1 + \\
& + 3 \cos 4\alpha_1 + \cos 5\alpha_1) + 2560 \sin \alpha_1 + 480 \sin 3\alpha_1 - 32 \sin 5\alpha_1] + 6hN \times \\
& \times (2 \cos \alpha_1 + 1) [640\alpha_2 - 466\pi + \pi (-48 \cos \alpha_1 - 48 \cos 2\alpha_1 + 4 \cos 3\alpha_1 + \\
& + 3 \cos 4\alpha_1)] + 3\pi \left(59 \cos \frac{\alpha_1}{2} + 44 \cos \frac{3\alpha_1}{2} - 8 \cos \frac{5\alpha_1}{2} - 4 \cos \frac{7\alpha_1}{2} \right) \sin \frac{5\alpha_2}{2} + \\
& + 3\pi \left(-8 \cos \frac{\alpha_1}{2} + 7 \cos \frac{3\alpha_1}{2} + 4 \cos \frac{5\alpha_1}{2} \right) \sin \frac{7\alpha_2}{2} - 3\pi \left(4 \cos \frac{\alpha_1}{2} + 3 \cos \frac{3\alpha_1}{2} \right) \times \\
& \times \sin \frac{9\alpha_2}{2} + 4hN (-960\alpha_2 + 699\pi - 1280 \sin \alpha_2 - 240 \sin 3\alpha_2 + 16 \sin 5\alpha_2) + \\
& + 3\pi \cos \frac{\alpha_1}{2} \sin \frac{11\alpha_2}{2} \} .
\end{aligned} \tag{13.166}$$

Напомним, что в этих формулах

$$hN = \cos \frac{\alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha_2}{2}. \tag{13.167}$$

Таким образом, поставленная задача решена: в (13.165) даётся искомое выражение гравитационной энергии плоского однородного шарового слоя.

13.5.9. Проверка формулы (13.165)

Как видим, выражение (13.165) — сложное и поэтому требует всесторонней проверки. Очевидно, эффективной проверкой для него является переход от шарового слоя к известным уже случаям.

Задача 13.7. Доказать, что в пределе

$$\alpha_1 \rightarrow 0, \quad \alpha_2 \rightarrow \pi$$

формула (13.165) приводит к энергии однородного шара (1.64).

Решение. В этом случае находим:

$$q_1 = -q_2 = 2^{14}; \quad q_3 = q_4 = 0; \quad q_5 = 3 \cdot 2^{10}\pi,$$

что и даёт энергию однородного шара. ▽

Задача 13.8. Доказать, что в пределе

$$\alpha_1 \rightarrow 0, \quad \alpha_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

формула (13.165) приводит к энергии однородного полушара (12.157).

Решение. В этом пределе $g = 0$, $h = 1$. Тогда $k = 0$ и, следовательно, $K(0) = E(0) = \frac{\pi}{2}$, так что формула (13.165) приводится к виду

$$W_{\text{полушара}} = -\pi G \rho^2 R^5 \left\{ \frac{64}{45} + \frac{9}{10} \pi - \frac{31}{15} \sqrt{2} \cdot \Pi[-1, 0] \right\}. \tag{13.168}$$

Но так как

$$\Pi[-1, 0] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \quad (13.169)$$

то (13.168) даёт

$$W_{\text{полусфера}} = -\frac{2}{45} \pi (32 - 3\pi) G \rho^2 R^5, \quad (13.170)$$

что совпадает с (12.157). ▼

З а д а ч а 13.9. Доказать, что в пределе $\alpha_1 \rightarrow 0$ формула для энергии слоя (13.165) действительно даёт энергию однородного шарового сегмента (13.43) или (12.156).

Решение. При $\alpha_1 \rightarrow 0$:

$$g = 0, k = 0, K(0) = E(0) = \frac{\pi}{2}, \Pi\left[-\frac{1}{h^2}, k\right] = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\alpha}{2}, \Pi[-g^2, k] = \frac{\pi}{2}.$$

Коэффициенты будут теперь такими:

$$\begin{aligned} q_1 &= -\frac{1024}{\sin \frac{\alpha}{2}} \left(19 \cos^8 \frac{\alpha}{2} - 66 \cos^6 \frac{\alpha}{2} + 64 \cos^4 \frac{\alpha}{2} - 48 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 16 \right); \\ q_2 &= 2048 \left(15 \cos^8 \frac{\alpha}{2} - 50 \cos^6 \frac{\alpha}{2} + 58 \cos^4 \frac{\alpha}{2} - 16 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 8 \right) \sin \frac{\alpha}{2}; \\ q_3 &= \frac{3072}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cos^4 \frac{\alpha}{2} \left(3 \cos^4 \frac{\alpha}{2} - 10 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 12 \right); \\ q_4 &= \frac{3072}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cos^4 \frac{\alpha}{2} \left(10 \cos^6 \frac{\alpha}{2} - 37 \cos^4 \frac{\alpha}{2} + 50 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 28 \right); \\ q_5 &= \frac{512}{\sin \frac{\alpha}{2}} \left[-64 \cos^{11} \frac{\alpha}{2} + 192 \cos^9 \frac{\alpha}{2} - 152 \cos^7 \frac{\alpha}{2} - \right. \\ &\quad \left. - 16 \cos^5 \frac{\alpha}{2} + 70 \cos^3 \frac{\alpha}{2} - 30 \cos \frac{\alpha}{2} + \right. \\ &\quad \left. + 3\pi \sin \frac{\alpha}{2} \left(2 \cos^{10} \frac{\alpha}{2} - 8 \cos^8 \frac{\alpha}{2} + 10 \cos^6 \frac{\alpha}{2} - 2 \cos^4 \frac{\alpha}{2} - 10 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 3 \right) + \right. \\ &\quad \left. + 15\alpha \sin \frac{\alpha}{2} \left(2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (13.171)$$

В итоге, после многих преобразований, формула (13.165) даёт

$$\begin{aligned} W_{\text{сегмента}} &= -\frac{\pi[G\rho^2 R^5]}{1440} [30(35\pi - 128 \cdot \alpha) \cos \alpha - 3\pi(160 \cos 2\alpha - \\ &\quad - 35 \cos^3 \alpha + \cos 5\alpha) - 32(21\pi - 80 \sin \alpha - 15 \sin 3\alpha + \sin 5\alpha)]. \end{aligned} \quad (13.172)$$

Но это выражение, как уже нетрудно показать, эквивалентно ранее найденным формулам гравитационной энергии однородного шарового сегмента (13.43) и (12.156)! ▼

Итак, мы провели всестороннюю аналитическую проверку выражения энергии слоя (13.165), сводя его к известным и твёрдо установленным ранее результатам.

Но кроме аналитической, была проведена и численная проверка формулы для энергии слоя. А именно, сравнивая результаты расчётов по формуле (13.165) с результатами, полученными методом Монте-Карло⁴ для некоторых значений углов α_1 и α_2 , мы и в этом случае получили полное согласие. Таким образом, сложное выражение (13.165) прошло проверку всеми доступными нам способами.

З а д а ч а 13.10. *Найти взаимную гравитационную энергию шарового слоя и сегмента, составляющих вместе однородный шаровой сегмент больших размеров.*

§ 13.6. О гравитационной энергии одномерных стержней

О ней можно говорить только в асимптотическом пределе

Одномерные стержни ведут себя на особицу: ни потенциала (внутреннего), ни потенциальной энергии в конечном виде они, разумеется, не имеют (в обоих случаях расходимость главного члена — логарифмическая). Но, соглашаясь с этим, думать в этом направлении полезно уже потому, что при переходе в асимптотическом пределе от объёмных фигур к стержням можно, оказывается, проверить выражения W для однородного шарового сектора (13.64) и конуса (13.96)! А эта проверка, ввиду сложности и новизны рассмотренных здесь задач, очень нужна!

Поэтому рассмотрим стержни подробнее.

13.6.1. Однородные стержни

Стержни, разумеется, существуют и сами по себе, но для нас сейчас важно обратить внимание на то, что однородные (в конкретном данном случае) стержни можно получить в асимптотическом пределе из некоторых объёмных тел. Например — из вытянутого сфероидального гомеоида при софокусном превращении этой эллипсоидальной оболочки в однородный фокальный отрезок (см. §5.8). Основываясь на этом факте, для нахождения энергии стержня длиной L возьмём выражение гравитационной энергии тонкого гомеоида (8.42) и подставим в него величину $I(1)$ из (1.45) с заменой там полуосей на величины (5.37); получим

$$W_{\text{гом}} = -\frac{M^2 G}{4a_1} \frac{1-e^2}{e} \frac{m}{m^2 - e^2} \ln \frac{1+e}{1-e}.$$

Выполним теперь софокусный переход от гомеоида к стержню; при этом выполняются соотношения

$$a_1 e \rightarrow \sqrt{a_1^2 - a_3^2} = \frac{L}{2};$$

$$e \rightarrow E(m) = \frac{e}{m};$$

$$m \rightarrow e,$$

с учётом которых получим

$$W_{\text{ст}} = -\frac{M^2 G}{2Le} \lim_{m \rightarrow e} \ln \frac{m+e}{m-e}. \quad (13.173)$$

Как и подчеркивалось выше, в выражении для энергии стержня действительно присутствует логарифмическая расходимость.

⁴ Расчёты методом Монте-Карло проводились на кафедре астрономии УдГУ.

Совершенно другим является второй способ нахождения энергии однородного стержня: в пределе из плоской пластины. Обозначим отношение сторон прямоугольной пластины через $\varepsilon = \frac{a_3}{a_2}$ и пусть $\varepsilon \ll 1$. Превратим теперь эту пластину (с сохранением её массы) в однородный одномерный стержень с длиной a_2 , массой $M_{\text{ст}}$ и плотностью $\mu = \sigma \cdot a_3 = \frac{M_{\text{ст}}}{a_2}$. Тогда, с учетом выражения энергии пластины (12.54), для этого стержня следует

$$W_{\text{ст}} = -\frac{M_{\text{ст}}^2 G}{a_2} \left(\ln \frac{2}{\varepsilon} + \frac{1}{2} + \dots \right). \quad (13.174)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ функция $W_{\text{ст}}$ также логарифмически расходится.

Весьма поучительным будет выявление логарифмической расходимости для стержня следующим изящным прямым методом.

А именно, рассмотрим стержень длиной L и одномерной плотностью μ (см. рис. 117). Взаимная энергия двух элементов массы длиной dx' и dx равна $\varphi_{\text{вз}} = -\mu^2 \frac{dx' dx}{x' - x}$.

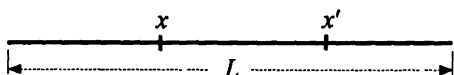


Рис. 117. Стержень и его элементы

Теперь, применяя разработанный в § 14.8 весьма эффективный *метод прогонки* и интегрируя по треугольной области (рис. 124), получим

$$W_{\text{ст}} = -\mu^2 G \int_0^L dx \int_x^L \frac{dx'}{x' - x}. \quad (13.175)$$

Следовательно,

$$W_{\text{ст}} = -\mu^2 GL \left(1 - \lim_{x' \rightarrow x} \ln \frac{x' - x}{L} \right), \quad (13.176)$$

что и требовалось показать для данной задачи.

Итак, тремя различными способами нами были получены и три *разных* выражения для энергии однородных стержней. Для сведения этих результатов воедино достаточно, казалось бы, сделать *перенормировку* выражения энергии стержня, отбросив расходящийся член. *Однако такую перенормировку принципиально невозможно сделать!*

И вот почему.

Обратим внимание, что для стержня с плотностью $\mu(x)$ наиболее естественным обрезанием расходимости является исключение из интегрирования участка длины 2ε вокруг пробной точки. Тогда для каждой такой пробной точки получается следующая асимптотика потенциала:

$$\varphi = 2\mu(x) \int_{x+\varepsilon}^c \frac{d\zeta}{\zeta - x} \approx 2\mu(x) \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad (13.177)$$

и после интегрирования по всему стержню имеем

$$W_{\text{ст}} = -\frac{1}{2} \int \mu(x) \varphi(x) dx \approx \ln \frac{1}{\varepsilon} \int \mu^2 dx. \quad (13.178)$$

Но существенно, что вычитание бесконечностей для двух стержней с плотностями $\mu_1(x)$ и $\mu_2(x)$ даёт

$$W_1 - W_2 = \ln \frac{1}{\varepsilon} \int (\mu_1^2 - \mu_2^2) dx. \quad (13.179)$$

Последний интеграл, вообще говоря, не нуль, так что бесконечность не выпадает. Это и означает, что общей перенормировки гравитационной энергии для стержней разной плотности просто не существует; обрезание не приводит энергию даже однородных стержней к «общему знаменателю».

Это обстоятельство не должно, однако, препятствовать нахождению энергии интересующих нас объёмных тел в асимптотическом пределе одномерного стержня.

13.6.2. Неоднородные стержни

Семейство неоднородных стержней, естественно, весьма разнообразное. Но существенно то, что как и для однородных, в выражениях для гравитационной энергии неоднородных стержней также имеет место всё та же логарифмическая расходимость.

Пример первый. Известный нам стержень (9.6) получается в пределе из однородного вытянутого сфероида.

Задача 13.11. Найти гравитационную энергию стержня (9.6).

Следующие два примера имеют для нас особое значение. Рассмотрим неоднородный стержень, который получается в асимптотическом пределе малых углов α из шарового сектора (массу сектора при переходе к стержню фиксируем). При этом сектор вырождается в неоднородный вещественный стержень длиной R с распределением плотности

$$\mu(\zeta) = \pi^2 \alpha^2 \rho \cdot \zeta^2 = \frac{3M_{\text{ст}}}{R^3} \zeta^2, \quad 0 \leq \zeta \leq R. \quad (13.180)$$

Гравитационную энергию получаемого таким образом стержня находим в асимптотике малых α из формулы (13.62). Заметим: без сохранения массы сектора результат выразился бы рядом (13.64). Но при сохранении массы асимптотический переход даёт совсем другое:

$$W_{\text{ст}} = -\frac{9}{5} \frac{M_{\text{ст}}^2 G}{\pi^2 R} \left\{ \ln \frac{2}{\alpha} - \frac{5}{4} - \frac{64}{9\pi} \alpha + \dots \right\}, \quad (13.181)$$

или, в перенормированном виде,

$$W_{\text{ст}} = \frac{9}{4} \frac{M_{\text{ст}}^2 G}{\pi^2 R}. \quad (13.182)$$

И вот что здесь главное: стержень с точно таким же распределением плотности (13.180) получается в асимптотическом пределе и из прямого однородного конуса! Поэтому указанный переход к стержню даёт ещё одну — независимую — проверку для сложных выражений как энергии шарового сектора (13.62), так и однородного конуса (13.93). Для цели книги значение такой проверки невозможно переоценить!

Задача 13.12. Найти гравитационную энергию стержня, получаемого в асимптотическом пределе из кругового конуса (13.93).

Решение. Энергия находится также, как и в случае шарового сектора: из ряда (13.96) в асимптотическом пределе стержня с учётом сохранения массы конуса. ▼

Задача 13.13. Почему, несмотря на логарифмическую расходимость, по одинаковым полученным выражениям гравитационной энергии для стержня с распределением плотности (13.180) можно всё же говорить о проверке исходных формул для потенциальной энергии сектора и конуса?

Ответ. Дело в том, что одинаковые стержни были получены сейчас из выражений энергии шарового сектора и конуса ещё и совершенно одинаковым способом: в пределе малых углов α . Последнее условие как раз и не соблюдалось в трёх примерах для однородных стержней, данных выше в (13.173), (13.174) и (13.176). ▼

Замечания

Материал главы разработан автором.

§ 13.1. Четвёртый метод основан на применении контурных интегралов в комплексной плоскости и на знании особых точек для внутреннего и внешнего потенциалов исследуемого тела. Накладывать контур интегрирования на *внешние* особые точки (включая и бесконечно удалённые) или на точки *внутренние* — дело вкуса исследователя, но всегда деформация контуров интегрирования требует точности и внимания. Далее мы применяем четвёртый метод к решению принципиально новых и трудных задач.

Первоисточник: [21].

§ 13.2. Важная проверка четвёртого метода на сложной задаче для однородного шарового сегмента с известным уже решением из § 12.9.

Первоисточник: [21].

§ 13.3. Найти энергию однородного шарового сектора — весьма нелёгкая задача.

Первоисточник: [21].

§ 13.4. У этой задачи о круговом конусе тот же (высокий!) уровень сложности, как и в задаче о шаровом секторе. ●

Первоисточник: [21].

§ 13.5. Путь к решению задачи об энергии плоского шарового слоя был, как в известной песне, «и далек, и долог». За рамками остались три варианта исследований (чего не подумаешь из изложенного текста). Временно разачаровавшись в четвёртом методе, автор много усилий потратил на поиски энергии слоя методом «прогонки». Увы, задача не давалась! Пришлось вернуться к четвёртому методу. Наконец, после удачных замен интегралы (13.115) и (13.121) пали, и именно данный метод принёс долгожданные плоды.

§ 13.6. Несмотря на логарифмическую расходимость, по одинаковости полученных выражений гравитационной энергии стержня с распределением плотности (13.180) можно, между прочим, говорить о проверке важных формул для потенциальной энергии сектора и конуса!

ГЛАВА 14

НАХОЖДЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ МЕТОДОМ ЭКВИГРАВИТИРУЮЩИХ СТЕРЖНЕЙ, МЕТОДОМ ПРОГОНКИ И ДРУГИМИ

Эта глава посвящена изложению шести (с пятого по десятый) оригинальных методов нахождения гравитационной энергии тел. Пятый метод основан на эквиравитирующих стержнях, введенных ранее в гл. 9. Совершенно отличный от него шестой метод (метод прогонки или метод интегральных элементов) также весьма перспективен и требует интегрирования по треугольной плоской области параметров изучаемой фигуры. В седьмом методе мы опираемся на софокусные преобразования: делается переход от слоисто-неоднородного эллипсоида к эллиптическому диску, в результате чего выражение энергии эллипсоида превращается в искомую энергию диска. Остаётся только подобрать такой закон плотности в эллипсоиде, чтобы получить фокальный диск с интересующим нас распределением вещества. Методы с восьмого по десятый служат для нахождения энергии слоёв и двумерных тел.

§ 14.1. Обобщение понятия гравитационной энергии для подсистем тел

Вначале введём важное обобщение понятия гравитационной (потенциальной) энергии.

Дано тело с распределением плотности $\rho(x)$ и полным внутренним потенциалом $\varphi_{\text{полн}}(x)$. Выделим в нём подсистему объёмом $V_{\text{под}}$ и составим следующий интеграл по этому объёму:

$$E_{\text{под}} = - \iiint_{V_{\text{под}}} \rho(x) \varphi_{\text{полн}}(x) dV. \quad (14.1)$$

Полный потенциал тела в точке x разобьём на две составляющие: на потенциал подсистемы и потенциал оставшейся части тела:

$$\varphi_{\text{полн}} = \varphi_{\text{под}} + \varphi_{\text{ост}}. \quad (14.2)$$

Тогда формулу (14.1) приводим к виду

$$E_{\text{под}} = 2W_{\text{под}} + W_{\text{вз}}. \quad (14.3)$$

Здесь первый член справа — удвоенная потенциальная энергия $W_{\text{под}}$ только подсистемы, а $W_{\text{вз}}$ — взаимная энергия этой подсистемы с оставшейся частью тела.

Составим далее аналогичный интеграл по остальной части тела:

$$E_{\text{ост}} = 2W_{\text{ост}} + W_{\text{вз}}. \quad (14.4)$$

Здесь существенно отметить, что в силу (8.22) в формулах (14.3) и (14.4) стоит одна и та же величина *взаимной* энергии.

Формулы (14.3) и (14.4) могут быть использованы следующим образом: *если внутренний потенциал тела задан, то тогда по известной величине E можно вычислять как гравитационную энергию интересующей нас отдельной части тела, так и взаимную энергию его частей.*

Разбивая тело на несколько подсистем и рассуждая аналогично, легко обобщить формулы (14.3) и (14.4). Но и система из двух уравнений (14.3) и (14.4) позволяет решать новые задачи:

а) прежде всего, сумма уравнений (14.3) и (14.4) даёт, согласно (8.23), удвоенную полную энергию тела:

$$W_{\text{полн}} = \frac{1}{2} (E_{\text{под}} + E_{\text{ост}}); \quad (14.5)$$

б) при известных $E_{\text{под}}$ и $E_{\text{ост}}$ система уравнений (14.3) и (14.4) позволяет по одной из трех величин $W_{\text{ост}}$, $W_{\text{вз}}$ или $W_{\text{под}}$ находить две другие;

в) наконец, вычитая (14.3) и (14.4) друг из друга, получим ещё одну ценную формулу

$$2(W_{\text{под}} - W_{\text{ост}}) = E_{\text{под}} - E_{\text{ост}}, \quad (14.6)$$

которая может служить для независимой проверки сложных выражений энергии подсистемы или остальной части тела. А такой проверкой, как правило, нельзя пренебрегать!

Продemonстрируем пользу этих соотношений на примерах.

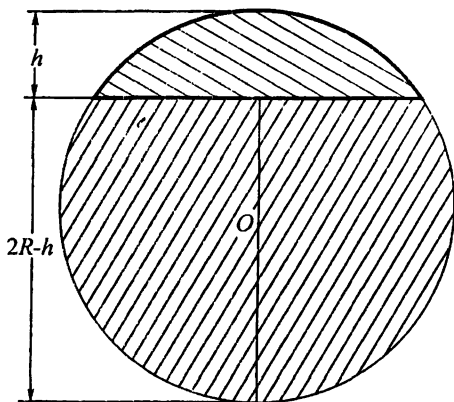


Рис. 118. Шар состоит из двух сегментов, показанных штриховкой с разным наклоном

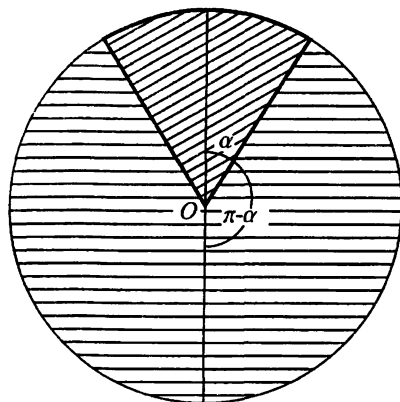


Рис. 119. Шаровой сектор и его дополнение до шара

Вернёмся к задаче с шаровым сегментом и рассмотрим рис. 118. Интегрируя потенциал однородного шара (6.36) по сегменту высотой h , получим

$$E_h = -\frac{\pi^2 G \rho^2}{15} h^2 (20R^3 - 5Rh^2 + h^3). \quad (14.7)$$

В частном случае $h = 2R$ величина E_h сводится к удвоенной гравитационной энергии однородного шара. Рассмотрим теперь такой же интеграл по остальной части шара, т. е. по сегменту высотой $h = 2R - h$. Получим

$$E_{2R-h} = -\frac{\pi^2 G \rho^2}{15} (32R^5 - 20R^3 h^2 + 5Rh^4 - h^5). \quad (14.8)$$

Найденные величины E_h и E_{2R-h} выражают удвоенную гравитационную энергию соответствующего сегмента плюс взаимную энергию этого сегмента с другим сегментом, т. е.

$$\begin{aligned} E_h &= 2W_h + W_{вз}, \\ E_{2R-h} &= 2W_{2R-h} + W_{вз}. \end{aligned} \quad (14.9)$$

Сумма выражений (14.9) даёт, согласно (8.23), удвоенную полную энергию шара, а их разность приводит к уравнению

$$E_{2R-h} - E_h = 2(W_{2R-h} - W_h). \quad (14.10)$$

Уравнение (14.10) полезно тем, что позволит проверить сложное выражение потенциальной энергии шарового сегмента (12.156). Значение такой проверки нельзя переоценить, ибо в частном случае полного шара в выражении для энергии сегмента ряд членов автоматически выпадает. Применить же в данном примере указанную идею — дело несложное.

З а д а ч а 14.1. Подставив выражения (12.156) и (12.159) в (14.10), убедитесь в достоверности выражения (12.156).

Невозможно переоценить роль уравнения (14.6) и при проверке выражения энергии шарового сектора (13.62). Дело в том, что указанные в конце § 13.3 способы проверки формулы (13.62) не были полными, так как в частных случаях шара и полушара многие члены в проверяемом выражении исчезают автоматически.

Но не так теперь! Прежде всего, *разбивая однородный шар на два сектора с углами полураствора α и $\pi - \alpha$* (рис. 119) и применяя затем к каждому из них формулу (13.62), находим разность потенциальных энергий двух указанных секторов

$$W_\alpha - W_{\pi-\alpha} = \frac{16}{15}\pi^2 G\rho^2 R^5 \cos \alpha. \quad (14.11)$$

Но при известном внутреннем потенциале шара (6.36) легко найти, что для этих секторов

$$\begin{aligned} E_\alpha &= -\frac{16}{15}\pi^2 G\rho^2 R^5 (1 - \cos \alpha), \\ E_{\pi-\alpha} &= -\frac{16}{15}\pi^2 G\rho^2 R^5 (1 + \cos \alpha), \end{aligned} \quad (14.12)$$

и, вычитая эти выражения друг из друга

$$E_\alpha - E_{\pi-\alpha} = 2(W_\alpha - W_{\pi-\alpha}), \quad (14.13)$$

опять приходим к выражению (14.11). Изумительная проверка важной формулы (13.62), не правда ли!

Есть ещё один интересный случай: *когда сектор близок к полушару.*

Действительно, рассмотрим шаровой сектор с $\alpha = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ ($\varepsilon \ll \frac{\pi}{2}$). Для него, с точностью до ε включительно, из формулы (13.62) находим

$$W_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} = W_{\frac{\pi}{2}} - \frac{8}{15}\pi^2 G\rho^2 R^5 \cdot \varepsilon. \quad (14.14)$$

Как понимать этот результат? Добавка ε создаёт на полушаре тонкий секторный слой в виде тонкого неоднородного круглого диска с поверхностной плотностью

$$\sigma(r) = \rho \varepsilon r \quad (14.15)$$

(для ε возможен, кстати, и знак «—», что соответствует *отнятию* от полушара такого диска). Этот диск имеет взаимную с полушаром энергию

$$W_{вз} = -\pi \int \varphi(r) \sigma(r) r dr. \quad (14.16)$$

После подстановки сюда потенциала полушара (6.37), действующего на точки наращиваемого (или отнимаемого) слоя, находим

$$W_{вз} = -\frac{8}{15} \pi^2 G \rho^2 R^5 \cdot \varepsilon. \quad (14.17)$$

Таким образом, формула (14.14) выражает полную энергию сектора, близкого к полушару; и она состоит (с точностью до ε) из энергии полушара плюс («—») взаимная энергия полушара с заданным слоем. Энергия же самого слоя — величина уже второго порядка малости по ε .

Фактически, и в этом примере мы проверили формулу (13.62).

Задача 14.2. Чем различаются способы получения дисков с плотностью (13.94) из конуса и (14.15) из шарового сектора?

§ 14.2. Метод (пятый) нахождения взаимной потенциальной энергии тел через эквигравитирующие стержни

Стержни мнимые — потенциал и энергия реальные

В основе пятого метода — применение эквигравитирующих стержней, которые рассматривались в главе 9. Важно сразу подчеркнуть, что такие стержни позволяют вычислять не только внешний потенциал, но — и это новая важная задача — гравитационную энергию осесимметричных тел.

Запишем интеграл от потенциала по длине заменяющего отрезка (или по системе таких отрезков и материальных точек, если последние есть среди эквигравитирующих элементов)

$$W_{вз} = - \int [\tilde{\mu}_1(\zeta) + \mu_2(\zeta) + \dots] \varphi(\zeta) d\zeta, \quad (14.18)$$

который, независимо от того, принадлежит потенциал φ :

1) тому же самому телу,

или же

2) другому (внешнему) телу,

выражает собой потенциальную энергию стержня в заданном силовом поле.

Во втором случае эта энергия представляет собой *взаимную энергию двух разных тел* (что доказывается далее всей совокупностью решённых примеров и задач!).

В первом же случае, как установлено в § 14.6, *через этот интеграл можно, оказываясь, выразить и полную потенциальную энергию тела, которому принадлежит данный стержень*.

Начнём со второго случая, когда стержень и потенциал принадлежат разным телам и рассмотрим *взаимную энергию этих двух тел*.

§ 14.3. Взаимная гравитационная энергия двух тонких круговых колец. Кольца в параллельных плоскостях

Рассмотрим два соосных, в общем случае некомпланарных круговых колечка с радиусами R_1 и R_2 и линейными плотностями μ_1 и μ_2 , расположенных на высоте h друг от друга; центры колец находятся на оси симметрии Ox_3 (см. рис. 120).

За начало системы отсчёта выберем центр второго кольца O . В этой системе отсчёта эквигравитирующий стержень второго кольца имеет вид

$$\mu_2(\zeta) = -\frac{2iR_2\mu_2}{\sqrt{R_2^2 + \zeta^2}}, \quad (14.19)$$

а потенциал первого кольца на оси симметрии равен

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{2\pi G\mu_1 R_1}{\sqrt{R_1^2 + (\zeta - h)^2}}. \quad (14.20)$$

Интегрируя этот потенциал по стержню второго кольца, находим взаимную энергию колец (см. формулу (14.18)):

$$W_{вз} = - \int_{-iR_2}^{iR_2} \mu_2(\zeta) \varphi_1(\zeta) d\zeta. \quad (14.21)$$

С учётом сказанного,

$$W_{вз} = 4i\pi G\mu_1\mu_2 R_1 R_2 \int_{-iR_2}^{iR_2} \frac{d\zeta}{\sqrt{R_2^2 + \zeta^2} \sqrt{R_1^2 + (\zeta - h)^2}}. \quad (14.22)$$

Заменой $x = \frac{\zeta}{i}$ этот интеграл приводится к виду

$$W_{вз} = -4\pi G\mu_1\mu_2 R_1 R_2 \int_{-R_2}^{R_2} \frac{1}{\sqrt{a - ib}} \frac{dx}{\sqrt{R_2^2 - x^2}}, \quad (14.23)$$

где

$$a = R_1^2 + h^2 - x^2, \quad b = 2hx. \quad (14.24)$$

Избавиться от мнимости под вторым радикалом можно следующим способом. Разбиваем интервал интегрирования на два: $(0, R_2)$ и $(-R_2, 0)$; изменяя знак x на втором интервале, после тождественных преобразований (см., например, формулу (14.76)) получим

$$W_{вз} = -4\sqrt{2}\pi G\mu_1\mu_2 R_1 R_2 \int_0^{R_2} \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{dx}{\sqrt{R_2^2 - x^2}}. \quad (14.25)$$

Мнимая единица исчезла, хотя и ценой некоторого усложнения подынтегрального выражения. Тем не менее, и такой интеграл можно найти.

Делаем в (14.25) замену

$$t = a + \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (14.26)$$

которая даёт

$$x^2 = \frac{t(t_3 - t)}{2(t - 2h^2)}, \quad (14.27)$$

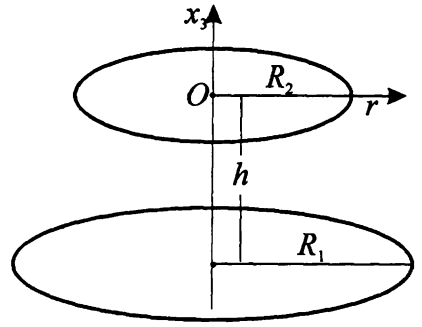


Рис. 120. Два соосных тонких круглых колечка. Указаны их радиусы и расстояние между центрами

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + b^2} &= t - a = \frac{t^2 - 4h^2t + 2h^2t_3}{2(t - 2h^2)}; \\ R_2^2 - x^2 &= \frac{(t - t_1)(t - t_2)}{2(t - 2h^2)}; \\ 2x dx &= -\frac{t^2 - 4h^2t + 2h^2t_3}{2(t - 2h^2)^2} dt.\end{aligned}\tag{14.28}$$

Здесь

$$\begin{aligned}t_3 &= 2(R_1^2 + h^2), \\ \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} &= (R_1^2 - R_2^2 + h^2) \pm \sqrt{(R_1^2 - R_2^2 + h^2)^2 + 4h^2R_2^2},\end{aligned}\tag{14.29}$$

причём t_1 и t_2 корни квадратного уравнения

$$t^2 - 2t(R_1^2 - R_2^2 + h^2) - 4h^2R_2^2 = 0.\tag{14.30}$$

Из (14.27) следует, что

$$t_3 \geq t > 2h^2.\tag{14.31}$$

Подставляя полученные выше выражения в интеграл (14.25), после сокращений приводим его к простому виду:

$$W_{\text{вз}} = -4\sqrt{2}\pi G\mu_1\mu_2 R_1 R_2 \int_{t_1}^{t_3} \frac{dt}{\sqrt{(t_3 - t)(t - t_1)(t - t_2)}}.\tag{14.32}$$

Для нахождения интеграла важно заметить, что здесь выполняются неравенства

$$t_3 \geq t \geq t_1 > t_2.\tag{14.33}$$

Таким образом, находим

$$W_{\text{вз}} = \frac{-2\sqrt{2}GM_1M_2}{\pi\sqrt{t_3 - t_2}} K \left[\sqrt{\frac{t_3 - t_1}{t_3 - t_2}} \right],\tag{14.34}$$

где M_1 и M_2 — массы колец, а параметры t_1 , t_2 и t_3 из (14.29). В (14.34) получена *взаимная энергия (взаимный потенциал с обратным знаком) двух соосных элементарных круглых колец, расположенных параллельно*. Решение выражено через полный эллиптический интеграл первого рода.

Задача 14.3. Рассмотреть в (14.34) частный случай колец, расположенных в одной плоскости ($h = 0$).

Решение. Если $h = 0$, то

$$t_1 = 2(R_1^2 - R_2^2), \quad t_2 = 0, \quad t_3 = 2R_1^2,$$

и формула (14.34) даёт

$$W_{\text{вз}} = -\frac{2GM_1M_2}{\pi R_1} K \left(\frac{R_2}{R_1} \right), \quad R_1 > R_2.\tag{14.35}$$

Разумеется, взаимная энергия двух совпадающих колец обращается в бесконечность. ▼

Задача 14.4. Рассмотреть в (14.34) частный случай параллельных колец одинакового радиуса ($R_1 = R_2 = R$).

Решение.

$$W_{\text{вз}} = -\frac{2\sqrt{2}GM_1M_2}{\pi\sqrt{2R^2 + h^2 + h\sqrt{4R^2 + h^2}}}K(k), \quad h \neq 0, \quad (14.36)$$

где модуль эллиптического интеграла

$$k^2 = \frac{2R^2 + h^2 - h\sqrt{4R^2 + h^2}}{2R^2 + h^2 + h\sqrt{4R^2 + h^2}} \leq 1. \quad (14.37)$$



§ 14.4. Взаимная гравитационная энергия двух тонких круговых колец, пересекающихся по диаметру

Эта задача изыщна и отнюдь не простая.

14.4.1. Случай перпендикулярных колец

Дана система из двух однородных тонких круговых колец. Конкретно, здесь рассматривается следующая конфигурация этих колец. Пусть первое кольцо радиусом R_1 и массой $M_1 = 2\pi R_1 \mu_1$ расположено в плоскости Ox_1x_2 , а второе (с параметрами R_2, μ_2) находится в плоскости Ox_1x_3 . Диаметры обоих колец совпадают с осью Ox_1 . Тогда, согласно формуле (9.38), потенциал первого кольца в плоскости второго даётся формулой

$$\varphi_1(|x_1|, x_3) = \frac{4G\mu_1 R_1}{\sqrt{(R_1 + |x_1|)^2 + x_3^2}} K\left(\frac{2\sqrt{R_1|x_1|}}{\sqrt{(R_1 + |x_1|)^2 + x_3^2}}\right). \quad (14.38)$$

Интегрируя этот потенциал с весовым множителем μ_2 вдоль дуги второго круга, и учитывая, что

$$x_1^2 + x_3^2 = R_2^2, \quad (14.39)$$

после замены

$$|x_1| = R_2 \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad (14.40)$$

выразим взаимную энергию колец интегралом

$$W_{\text{вз}} = -16G\mu_1\mu_2 R_1 \int_0^{\pi/2} \frac{2\sqrt{\frac{R_1 R_2 \cos \theta}{R_1^2 + R_2^2 + 2R_1 R_2 \cos \theta}} K\left(\frac{2\sqrt{\frac{R_1 R_2 \cos \theta}{R_1^2 + R_2^2 + 2R_1 R_2 \cos \theta}}\right)}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2 + 2R_1 R_2 \cos \theta}} d\theta. \quad (14.41)$$

Рассмотрим вначале вариант, когда перпендикулярные кольца имеют одинаковые радиусы

$$R_1 = R_2 = R. \quad (14.42)$$

Тогда (14.41) даёт

$$W_{\text{вз}} = -8\sqrt{2}G\mu_1\mu_2R \int_0^{\pi/2} \frac{K\left(\sqrt{\frac{2\cos\theta}{1+\cos\theta}}\right)}{\sqrt{1+\cos\theta}} d\theta. \quad (14.43)$$

Заменой $x = \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}$ приводим (14.43) к виду

$$W_{\text{вз}} = -8G\mu_1\mu_2R \int_0^1 \frac{K(\sqrt{1-x})}{\sqrt{x(1+x)}} dx. \quad (14.44)$$

Определённый интеграл (14.44), оказывается, есть частный случай интеграла 2.16.3 на стр. 150 справочника [41], где надо положить

$$\alpha = \rho = \frac{1}{2}, \quad r = 1, \quad z = 1, \quad a = 1. \quad (14.45)$$

Находим

$$W_{\text{вз}} = -4\pi G\mu_1\mu_2R \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{1}{2}\right)_k \Gamma\left[\frac{1}{2} + k, \frac{1}{2} + k\right]_{1+k, 1+k}. \quad (14.46)$$

Здесь символ Похгаммера [41]

$$\left(\frac{1}{2}\right)_k = \frac{(2k)!}{2^{2k}k!}, \quad (14.47)$$

а другой символ:

$$\Gamma\left[\frac{1}{2} + k, \frac{1}{2} + k\right]_{1+k, 1+k} = \pi \left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right]^2. \quad (14.48)$$

В итоге, формула (14.46) приводит к следующему результату для *взаимной энергии перпендикулярных колец с одинаковыми радиусами*:

$$W_{\text{вз}} = -4\pi^2 G\mu_1\mu_2R \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right]^3 = -\frac{4\pi^3 G\mu_1\mu_2R}{\sqrt{2} \left[\Gamma\left(\frac{5}{8}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{7}{8}\right)\right]^2}. \quad (14.49)$$

В более общем случае перпендикулярных колец с *неодинаковыми радиусами*

$$R_1 \geq R_2, \quad (14.50)$$

вместо ряда (14.49) мы получим, как можно показать, другой ряд:

$$W_{\text{вз}} = -4\pi^2 G\mu_1\mu_2R_2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right]^3 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2k}. \quad (14.51)$$

С помощью компьютерной программы Математика 5 этот сложный ряд (14.51) может быть просуммирован:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right]^3 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2k} = \frac{8}{\pi^2 (\sqrt{1+b^2} + 1)} K^2 \left(\sqrt{\frac{\sqrt{1+b^2} - 1}{\sqrt{1+b^2} + 1}} \right), \quad (14.52)$$

где $b = \frac{R_2}{R_1}$. Таким образом, и в общем случае, *взаимная энергия перпендикулярных колец с неодинаковыми радиусами* выражается в конечном виде

$$W_{\text{вз}} = -\frac{32G\mu_1\mu_2 R_2}{\sqrt{1+b^2}+1} K^2 \left(\sqrt{\frac{\sqrt{1+b^2}-1}{\sqrt{1+b^2}+1}} \right). \quad (14.53)$$

В частном случае, когда $b = 1$, формула (14.53) даёт известный результат (14.49)¹.

Задача 14.5. При замене

$$x = \frac{2 \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

интеграл (14.43) превращается в следующий:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{K \left(\sqrt{\frac{2 \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \right)}{\sqrt{1 + \cos \theta}} d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{K(\sqrt{x}) dx}{\sqrt{(1-x)(2-x)}}.$$

Доказать, что

$$\int_0^1 \frac{K(\sqrt{x}) dx}{\sqrt{(1-x)(2-x)}} = \frac{\pi^3}{2\sqrt{2} \left[\Gamma\left(\frac{5}{8}\right) \Gamma\left(\frac{7}{8}\right) \right]^2}. \quad (14.55)$$

Решение. Разлагая в левой части (14.55) эллиптический интеграл в ряд

$$K(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!^2}{2^{4n} n!^4} x^n,$$

находим, прежде всего, вспомогательный интеграл

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x)(2-x)}} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n+1) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} + n, -1\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + n\right)}.$$

Разлагая теперь в ряд и гипергеометрическую функцию

$${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} + n, -1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} + n\right)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2} + k\right)\right)^2}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + n + k\right)} \cdot \frac{(-1)^k}{k!},$$

после перестановки порядка суммирования мы действительно приходим к равенству (14.55). ▼

¹ Выражение (14.53) можно получить также с помощью вспомогательной формулы (частное сообщение В. А. Антонова)

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{K\left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right) dx}{\sqrt{(\beta-x)(x-\alpha)}} = 2K\left(\sqrt{\frac{1-u}{2}}\right) K\left(\sqrt{\frac{1-v}{2}}\right), \quad (14.54)$$

где

$$u = \frac{\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)} + \sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)}}{2}; \quad v = \frac{\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)} - \sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)}}{2}.$$

14.4.2. Случай с произвольным наклоном колец

а) Вначале опять рассмотрим вариант, когда круговые кольца имеют *одинаковые радиусы* R .

Пусть углы θ и θ_1 отсчитываются вдоль обоих колец от точки пересечения. Угловое расстояние A между пробными точками на сфере определяется по известной теореме косинусов в сферической тригонометрии.

$$\cos A = \cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \sin \theta_1 \cos \alpha \quad (14.56)$$

(α — угол между плоскостями обоих колец, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$). Линейное расстояние между двумя точками тогда

$$l = 2R \sin \frac{A}{2} = \sqrt{2}R\sqrt{1 - \cos A}. \quad (14.57)$$

Взаимная энергия двух таких колец выражается двойным интегралом

$$W_{\text{вз}} = -\frac{GR\mu_1\mu_2}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta d\theta_1}{\sqrt{1 - \cos \theta \cos \theta_1 - \sin \theta \sin \theta_1 \cos \alpha}}. \quad (14.58)$$

В более простом виде этот интеграл представлен в (14.64).

В частности, при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ интеграл (14.58) вычисляется, и мы вновь получаем известное выражение (14.49). ◆

Задача 14.6. *Попробуйте вычислить двойной интеграл (14.58) при произвольном угле α .*

б) Более общий случай: наклонённые кольца с разными радиусами.

Первое кольцо с параметрами R_1, μ_1 находится в плоскости Ox_1x_2 , второе — в плоскости $Ox_1x'_2$, причём ось Ox'_2 наклонена к Ox_2 под углом α . Исходим из выражения потенциала кольца (9.38), который следует записать в точках второго (наклонённого) кольца. Очевидно, координаты точек в исходной системе отсчёта будут связаны с координатами второго кольца формулами

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv x'_1 = R_2 \cos \theta, \\ x_2 &= x'_2 \cos \alpha = R_2 \sin \theta \cos \alpha, \\ x_3 &= x'_2 \sin \alpha = R_2 \sin \theta \sin \alpha, \end{aligned}$$

где угол θ отсчитывается вдоль второго кольца от оси Ox_1 . Тогда

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = R_2 \sqrt{n}, \\ (R_1 + r)^2 + x_3^2 &= R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2\sqrt{n}, \end{aligned}$$

где для краткости обозначено

$$n = \sin^2 \theta \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha. \quad (14.59)$$

Вводя вспомогательную величину

$$m = \sqrt{\frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1R_2} + 2\sqrt{n}}, \quad (14.60)$$

в итоге получим интегральное выражение взаимной энергии

$$W_{\text{вз}} = -16G\mu_1\mu_2\sqrt{R_1R_2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{m} K\left(\frac{2n^{\frac{1}{4}}}{m}\right) d\theta. \quad (14.61)$$

Так, если кольца располагаются в одной плоскости $\alpha = 0$, то $n = 1$ и из (14.61) сразу следует простое

$$W_{\text{вз}} = -8\pi G\mu_1\mu_2 R_2 K\left(\frac{R_2}{R_1}\right), \quad R_1 > R_2, \quad (14.62)$$

что совпадает, конечно, с (14.35) с точностью до обозначений.

В случае же $\alpha = \frac{\pi}{2}$ из (14.61) следует известный уже нам красивый результат (14.53).

Однако в общем случае — при произвольном α — интеграл (14.61) в конечном виде не удаётся найти. Всё же заметим, заменой

$$x = \frac{\gamma - 2\sqrt{n}}{\gamma + 2\sqrt{n}}, \quad \gamma = \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1 R_2}$$

интеграл (14.61) приводится к виду

$$W_{\text{вз}} = p \int_{\frac{\gamma-2}{\gamma+2}}^{\frac{\gamma-2\cos\alpha}{\gamma+2\cos\alpha}} \frac{(1-x) K(\sqrt{1-x}) dx}{\sqrt{1+x} \sqrt{(1+x)^2 - \frac{\gamma^2}{4} (1-x)^2} \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} (1-x)^2 - \cos^2\alpha (1+x)^2}}, \quad (14.63)$$

($p = -4\sqrt{2}G\mu_1\mu_2\sqrt{R_1R_2}\gamma^{\frac{3}{2}}$). В частности, при кольцах одинакового радиуса $\gamma = 2$, и тогда

$$W_{\text{вз}} = \frac{-8G\mu_1\mu_2 R}{\sin\alpha} \int_0^{a^2} \frac{(1-x) K(\sqrt{1-x}) dx}{\sqrt{x(1+x)(a^2-x)} \left(\frac{1}{a^2} - x\right)}, \quad a = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad (14.64)$$

Подчеркнём: интеграл (14.64) уже не двойной, как (14.58), а одинарный.

В заключение заметим, что при больших значениях $\gamma = \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1 R_2}$, т.е. когда внутреннее кольцо мало в сравнении с внешним, подынтегральное выражение в (14.61) можно разложить в ряд по степеням $\frac{1}{\gamma}$. Интегрируя затем этот ряд, находим

$$W_{\text{вз}} \approx -\frac{M_1 M_2 G}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}} \left\{ 1 + \frac{3}{2^4} \frac{1}{\gamma^2} (3 + \cos 2\alpha) + \frac{105}{2^{12}} \frac{1}{\gamma^4} [41 + 20 \cos 2\alpha + 3 \cos 4\alpha] + \dots \right\}, \quad (14.65)$$

где M_1, M_2 — массы колец.

§ 14.5. Взаимная гравитационная энергия двух однородных круглых дисков, расположенных в параллельных плоскостях

Одна хорошая задача порождает другие хорошие задачи

Рассмотрим два однородных круглых диска, имеющих радиусы r_1 и r_2 и плотности σ_1 и σ_2 .

Оси симметрии дисков совпадают, и в системе отсчёта с началом O (рис. 121) они расположены на высотах $h_2 > h_1$, так что расстояние между дисками

$$2d = h_2 - h_1. \quad (14.66)$$

В принятой системе отсчёта эквигравитирующий стержень верхнего диска имеет плотность

$$\mu_2(\zeta) = -2i\sigma_2 \sqrt{r_2^2 + (\zeta - h_2)^2}, \quad (14.67)$$

а потенциал (9.36) нижнего диска на оси симметрии после замены $x_3 \rightarrow \zeta - h_1$ будет представлен выражением

$$\varphi_1(\zeta) = 2\pi G\sigma_1 \left[\sqrt{r_1^2 + (\zeta - h_1)^2} - (\zeta - h_1) \right]. \quad (14.68)$$

Взаимная гравитационная энергия дисков (или, с точностью до знака, их взаимный потенциал), согласно основной формуле (14.18), будет равна

$$W_{\text{вз}} = 4i\pi G\sigma_1\sigma_2 \int_{h_2 - ir_2}^{h_2 + ir_2} \sqrt{r_2^2 + (\zeta - h_2)^2} \left[\sqrt{r_1^2 + (\zeta - h_1)^2} - (\zeta - h_1) \right] d\zeta. \quad (14.69)$$

Для вычисления этого интеграла сделаем в нём замену

$$x = \frac{\zeta - h_2}{ir_2}. \quad (14.70)$$

Тогда

$$W_{\text{вз}} = -4\pi G\sigma_1\sigma_2 r_2^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} \left[\sqrt{m + in} - (h_2 - h_1 + ir_2 x) \right] dx, \quad (14.71)$$

где

$$m = r_1^2 + (h_2 - h_1)^2 - r_2^2 x^2; \quad n = 2r_2(h_2 - h_1)x. \quad (14.72)$$

Последний член в (14.71) нечётный и при интегрировании по симметричному интервалу его можно опустить; кроме того,

$$-2(h_2 - h_1) \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = -\frac{\pi}{2}(h_2 - h_1). \quad (14.73)$$

Тогда интеграл (14.71) будет равен

$$W_{вз} = -4\pi^2 G \sigma_1 \sigma_2 r_2^2 \left\{ -\frac{1}{2} (h_2 - h_1) + I \right\}, \quad (14.74)$$

где основным является интеграл

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \sqrt{m+in} dx. \quad (14.75)$$

Разбив его на два (от -1 до 0 , и от 0 до 1), используя нечётность величины n и извлекая корень, так что

$$\sqrt{m+in} + \sqrt{m-in} = \sqrt{2} \sqrt{m + \sqrt{m^2 + n^2}}, \quad (14.76)$$

избавляемся от мнимой единицы под знаком интеграла и имеем

$$I = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \sqrt{m + \sqrt{m^2 + n^2}} dx. \quad (14.77)$$

Но и дальнейшее вычисление интеграла (14.77) потребует усилий. Делая в нём замену

$$t = \sqrt{m^2 + n^2} + m, \quad (14.78)$$

и возведя в квадрат обе части (14.78), с учётом выражений (14.72) находим

$$x^2 = \frac{t^2 - 2t \left[r_1^2 + (h_2 - h_1)^2 \right]}{2r_2^2 \left[2(h_2 - h_1)^2 - t \right]}, \quad (14.79)$$

так что

$$1 - x^2 = \frac{(t-b)(t-c)}{2r_2^2 (t-l)}. \quad (14.80)$$

Здесь b и c — корни квадратного уравнения

$$t^2 - 2z_1 t - 2r_2^2 l = 0, \quad (14.81)$$

а именно:

$$\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = z_1 \pm z_2, \quad (14.82)$$

причём в данной задаче введены обозначения

$$l = 2(h_2 - h_1)^2; \quad z_1 = r_1^2 - r_2^2 + \frac{l}{2}; \quad z_2 = \sqrt{z_1^2 + 2lr_2^2}. \quad (14.83)$$

В силу (14.79) имеет место соотношение

$$x^2 = \frac{1}{2r_2^2} \left[-t + 2r_1^2 \left(1 + \frac{l}{t-l} \right) \right], \quad (14.84)$$

так что

$$x dx = -\frac{1}{4r_2^2} \left[1 + \frac{2lr_1^2}{(t-l)^2} \right] dt. \quad (14.85)$$

Таким образом, в результате известной замены (14.78) интеграл (14.77) примет теперь вид

$$I = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}r_2^2} (I_1 + 2lr_1^2 I_2), \quad (14.86)$$

где

$$I_1 = \int_b^a \sqrt{\frac{(t-b)(t-c)}{a-t}} dt; \quad (14.87)$$

$$I_2 = \int_b^a \sqrt{\frac{(t-b)(t-c)}{a-t}} \frac{dt}{(t-l)^2}, \quad (14.88)$$

причём

$$a = 2r_1^2 + l. \quad (14.89)$$

Заметим, что

$$a > b > c, \quad (14.90)$$

и для первого интеграла имеем

$$I_1 = \frac{2}{3} \sqrt{a-c} [(2a-b-c) E(k) - (b-c) K(k)]. \quad (14.91)$$

Упрощает дальнейшие расчёты и то, что здесь (и далее в этом параграфе) модуль у всех полных эллиптических интегралов первого $K(k)$, второго $E(k)$ и третьего $\Pi[n(l), k]$ рода² будет один и тот же и равен

$$k = \sqrt{\frac{a-b}{a-c}} \leq 1. \quad (14.92)$$

Далее, находим I_2 из (14.88). Прежде всего, имеем

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_b^a \frac{dt}{\sqrt{(a-t)(t-b)(t-c)}} \left[1 + \frac{2l-b-c}{t-l} + \frac{(l-b)(l-c)}{t-l} \right] = \\ &= \frac{2}{\sqrt{a-c}} \left\{ K(k) + \frac{2l-b-c}{a-l} \Pi[n, k] + (l-b)(l-c) I_3 \right\}, \end{aligned} \quad (14.93)$$

где

$$n \equiv n(l) = \frac{a-b}{a-l}, \quad (14.94)$$

а оставшийся интеграл

$$I_3 = \int_b^a \frac{dt}{(t-l)^2 \sqrt{(a-t)(t-b)(t-c)}}. \quad (14.95)$$

Для нахождения сложного интеграла I_3 (отсутствующего, кстати, в справочниках) дифференцируем его по параметру l , полагая пределы интегрирования постоянными. Прежде всего, так как

$$I_3 = \frac{d}{dt} \int_b^a \frac{dt}{(t-l) \sqrt{(a-t)(t-b)(t-c)}} = \frac{2}{\sqrt{a-c}} \frac{d}{dl} \left[\frac{\Pi[n(l), k]}{a-l} \right], \quad (14.96)$$

² Определение полных эллиптических интегралов дано в (7.23).

то

$$I_3 = \frac{2}{\sqrt{a-c}} \left[\frac{\Pi[n, k]}{(a-l)^2} + \frac{1}{a-l} \frac{d}{dl} \Pi[n(l), k] \right]. \quad (14.97)$$

Проведя расчёты, получим

$$I_3 = \frac{(n^2 - 2n - 2nk^2 + 3k^2) \Pi[n, k] - (k^2 - n) K(k) - nE(k)}{\sqrt{a-c} (a-l)^2 (1-n) (k^2 - n)}. \quad (14.98)$$

Подставляя затем найденное выражение I_3 в формулу (14.93) и используя (неочевидное!) равенство

$$\frac{2l - b - c}{a - c} + \frac{(l - b)(l - c) [n^2 - 2n - 2nk^2 + 3k^2]}{2(a - l)^2 (1 - n) (k^2 - n)} = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2r_1^2} \quad (14.99)$$

(здесь выражение слева есть коэффициент в (14.93) при $\Pi[n, k]$), после значительных упрощений имеем

$$I_2 = \frac{2}{\sqrt{a-c}} \left\{ \left[1 - \frac{(l-b)(l-c)}{2(a-l)^2 (1-n)} \right] K(k) - \frac{n(l-b)(l-c)}{2(a-l)^2 (1-n) (k^2 - n)} E(k) - \frac{r_2^2 - r_1^2}{2r_1^2} \Pi[n, k] \right\}. \quad (14.100)$$

Подставляя, в свою очередь, найденное I_2 в (14.86), находим уже само I

$$I = \frac{1}{3\pi\sqrt{2}r_2^2\sqrt{a-c}} \{ \alpha K(k) + \beta E(k) + \gamma \Pi[n, k] \}, \quad (14.101)$$

где мы обозначили

$$\begin{aligned} \alpha &= -(a-c)(b-c) + 3lr_1^2 \left(2 - \frac{(l-b)(l-c)}{(a-l)^2 (1-n)} \right), \\ \beta &= (a-c)(2a-b-c) - 3lr_1^2 \frac{n(l-b)(l-c)}{(a-l)^2 (1-n) (k^2 - n)}, \\ \gamma &= 3l(r_2^2 - r_1^2) = -3l(r_1^2 - r_2^2). \end{aligned} \quad (14.102)$$

Полезно заметить, что коэффициенты α и β после тождественных преобразований можно представить также в виде

$$\begin{aligned} \alpha &= (h_2 - h_1)^4 + \frac{5}{2}lr_1^2 - r_2^2 (h_2 - h_1)^2 - 2(r_1^2 - r_2^2) + z_2; \\ \beta &= \left[2(r_1^2 + r_2^2) - (h_2 - h_1)^2 \right] \left[(h_2 - h_1)^2 + r_1^2 + r_2^2 + z_2 \right]. \end{aligned} \quad (14.103)$$

Таким образом, взаимная гравитационная энергия (взаимный потенциал) однородных круглых дисков с разными, вообще говоря, радиусами, согласно (14.74), будет равна

$$W_{\text{вз}} = -\frac{4GM_1M_2}{r_1^2} \{-d + I\}, \quad (14.104)$$

где, напомним, d из (14.66) — половина расстояния между дисками, массы дисков равны $M_1 = \pi r_1^2 \sigma_1$ и $M_2 = \pi r_2^2 \sigma_2$, а сложная функция параметров I дана в (14.101).

В частном случае дисков, одинаковых по размерам ($r_1 = r_2 = R$) и по массе, выражение взаимной энергии (14.104) несколько упрощается (при $\gamma = 0$ исчезает, например, эллиптический интеграл третьего рода), и мы получим

$$W_{\text{вз}} = -\frac{4GM^2}{R^2} \left\{ -d + \frac{\left[4(a-c) - \frac{c^2}{a} \right] E(k) - (b-c) \left(2 + \frac{c}{a} \right) K(k)}{3\pi\sqrt{2}\sqrt{a-c}} \right\}, \quad (14.105)$$

где обозначения уже иные:

$$a = 2R^2, \quad b = 4d^2 \left(\sqrt{1 + \frac{R^2}{d^2}} - 1 \right), \quad c = -4d^2 \left(\sqrt{1 + \frac{R^2}{d^2}} + 1 \right), \quad (14.106)$$

и модуль эллиптических интегралов

$$k = \sqrt{\frac{a-b}{a-c}} = 1 - \frac{b}{a} \leq 1. \quad (14.107)$$

Проверим формулу (14.105) при $d \rightarrow \infty$. Очевидно, в этом случае

$$b = a(1-k), \quad c = -a \left(\frac{1}{k} - 1 \right), \quad b-c = a \left(\frac{1}{k} - k \right). \quad (14.108)$$

Кроме того, при малом R/d с достаточной для нас точностью имеем

$$k \approx \frac{1}{4} \frac{a^2}{d^2}, \quad (14.109)$$

и с той же точностью

$$E(k) \approx \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{k^2}{4} \right); \quad K(k) \approx \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4} \right). \quad (14.110)$$

После подстановки этих выражений в (14.105) и преобразований, приходим к результату

$$W_{\text{вз}} \approx -\frac{GM^2}{2d}, \quad (14.111)$$

который и следовало ожидать. Сила же притяжения между дисками в асимптотике больших расстояний описывается, как и должно быть, законом обратных квадратов

$$F = \frac{dW_{\text{вз}}}{d(2d)} = \frac{GM^2}{(2d)^2}. \quad (14.112)$$

Задача 14.7. Проверить и формулу (14.104) в асимптотике $d \rightarrow \infty$.

Решение. Оно проводится тем же методом, что и для одинаковых дисков. Однако выкладки в общем случае будут несколько более сложными. ▼

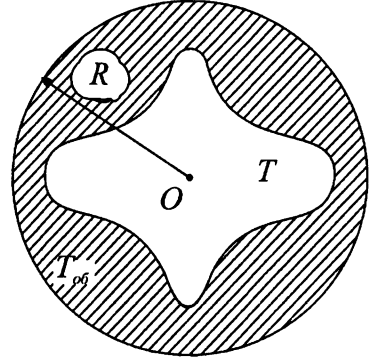
§ 14.6. Метод пятый (продолжение). Энергия изолированных тел

И вновь опираемся на эквигравитирующие стержни

Переходим к нахождению гравитационной энергии тела с помощью заменяющих отрезков, принадлежащих *этому телу*. Для этого вновь обратимся к той идее, что *часть потенциальной энергии изолированного тела можно представить через половину взаимной энергии эквигравитирующего стержня (стержней, если их несколько) или иных эквигравитирующих элементов этого тела в гравитационном поле исходного тела*³.

Окружим рассматриваемое однородное осесимметричное тело T вспомогательной сферой с радиусом $R_{\text{шара}}$ (рис. 122) и напомним пространство оболочки $T_{\text{об}}$ между телом и сферой веществом той же плотности ρ . Потенциал созданной однородной оболочки в точках тела T будет равен разности внутреннего потенциала вспомогательного шара $\varphi_{\text{шара}}$, данного в (6.36), и внутреннего потенциала φ_T самого тела T :

$$\varphi_{\text{об}} = \varphi_{\text{шара}} - \varphi_T. \quad (14.113)$$



Находим взаимную гравитационную энергию тела T и оболочки $T_{\text{об}}$. Делаем это двумя независимыми способами.

Первый способ: интегрируем потенциал (14.113) по объёму тела T :

$$W_{\text{вз}} = -\rho \iiint_T (\varphi_{\text{шара}} - \varphi_T) dV = -2\pi G\rho \left[R_{\text{шара}}^2 M_T - \frac{1}{3} J_T \right] - 2W_T, \quad (14.114)$$

где M_T — масса тела T , J_T — его момент инерции относительно начала координат, а W_T — искомая гравитационная энергия тела T .

С другой стороны, замена тела T набором эквигравитирующих одномерных стержней или других эквигравитирующих элементов (это могут быть и материальные точки) с плотностями на них

$$\mu_1(\zeta), \quad \mu_2(\zeta), \quad \dots, \mu_i(\zeta) \quad (14.115)$$

даёт, с учётом (14.18),

$$W_{\text{вз}} = - \int \varphi_{\text{об}} [\mu_1(\zeta) + \mu_2(\zeta) + \dots] d\zeta = - \int (\varphi_{\text{шара}} - \varphi_T) [\mu_1(\zeta) + \mu_2(\zeta) + \dots] d\zeta. \quad (14.116)$$

Поскольку внутренний потенциал объемлющего шара в данном случае

$$\varphi_{\text{шара}}(\zeta) = 2\pi G\rho \left(R_{\text{шара}}^2 - \frac{1}{3}\zeta^2 \right), \quad (14.117)$$

то первый из интегралов в правой части (14.116) принимает вид

³ Напомним: в § 12.6 данная идея уже применялась, правда в несколько ином виде, когда вместо эквигравитирующего стержня брался мысленно выделенный на поверхности тела обобщённый гомотетический слой.

$$\begin{aligned}
\Phi &= - \int \varphi_{\text{шара}}(\zeta) [\mu_1(\zeta) + \mu_2(\zeta) + \dots] d\zeta = \\
&= -2\pi G\rho \left[R^2 M_T - \frac{1}{3} \int \zeta^2 [\mu_1(\zeta) + \mu_2(\zeta) + \dots] d\zeta \right] + \\
&\quad + \int \varphi_T [\mu_1(\zeta) + \mu_2(\zeta) + \dots] d\zeta.
\end{aligned} \tag{14.118}$$

Приравнивая теперь $W_{\text{вз}}$ из формул (14.114) и (14.116), получим искомую гравитационную энергию тела

$$W_T = -\frac{1}{2} \int \varphi_T(\zeta) [\mu_1(\zeta) + \mu_2(\zeta) + \dots] d\zeta + \frac{1}{3} \pi G\rho \left[J_T - \int \zeta^2 [\mu_1(\zeta) + \mu_2(\zeta) + \dots] d\zeta \right]. \tag{14.119}$$

Интегрирование в (14.119) проводится по всем эквигравитирующим элементам тела.

Подчеркнём, что в формуле (14.119) вспомогательный шар о себе никак не напоминает (соответствующие члены сократились!).

В частном случае, когда у тела T есть *единственный эквигравитирующий стержень* (или один любой другой эквигравитирующий элемент) с плотностью $\mu(\zeta)$, имеем

$$W_T = -\frac{1}{2} \int \varphi_{\text{внутр}}(\zeta) \mu(\zeta) d\zeta + \frac{1}{3} \pi G\rho \left(J - \int \zeta^2 \mu(\zeta) d\zeta \right). \tag{14.120}$$

Интегрирование в этой формуле распространяется на все точки данного эквигравитирующего элемента.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Интеграл в круглых скобках в формуле (14.120) с точностью до знака равен моменту инерции эквигравитирующего стержня относительно его центра. Любопытно, что *момент инерции стержня выражается через моменты инерции исходного тела*.

Докажем сейчас следующую теорему.

Теорема 1. *Для однородного круглого диска формула (14.120) заметно упрощается и принимает вид*

$$W = -\frac{1}{2} \int \varphi_{\text{внешн}}(\zeta) \mu(\zeta) d\zeta, \tag{14.121}$$

где интегрирование распространяется на все точки эквигравитирующего стержня с плотностью (9.30).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Чтобы применить формулу (14.120), необходимо, как мы знаем, окружить плоский диск вспомогательным однородным шаром. Однако, прямо сделать это пока нельзя, поскольку исходный диск (имеющий не объёмную, а поверхностную плотность!) нарушает однородность вспомогательного шара. Воспользуемся следующим приёмом: «размажем» по высоте плоский диск и превратим его в объёмный круговой цилиндр плотности ρ и высотой $2H$. Чтобы этот цилиндр имел массу диска должно выполняться соотношение

$$\lim_{H \rightarrow 0} 2H\rho = \sigma. \tag{14.122}$$

Идея «размазывания» диска в цилиндр заключается в том, что однородный цилиндр уже можно окружить однородной оболочкой и дополнить его до вспомогательного однородного шара.

Превратив таким образом диск в цилиндр, необходимо обратиться к ранее найденным в задаче (9.11) *эквигравитирующим элементам однородного кругового цилиндра*: это три отрезка, два из них имеют чисто мнимую плотность $\mu_1(\zeta)$ и $\mu_2(\zeta)$, см. формулы (9.106) и (9.107), третий отрезок — вещественный и однородный с плотностью (9.108).

Далее дело техники. Интегралы с комплексными пределами, входящие в большие квадратные скобки (14.119), хотя и сложные, тем не менее вычисляются в конечном виде:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{H-iR_{\text{цил}}}^{H+iR_{\text{цил}}} \zeta^2 \mu_1(\zeta) d\zeta = \frac{1}{4} M_{\text{цил.}} R_{\text{цил.}}^2; \\ I_2 &= \int_{-H-iR_{\text{цил}}}^{-H+iR_{\text{цил}}} \zeta^2 \mu_2(\zeta) d\zeta = \frac{1}{4} M_{\text{цил.}} R_{\text{цил.}}^2; \\ I_3 &= \int_{-R_{\text{цил}}}^{R_{\text{цил}}} \zeta^2 \mu_3(\zeta) d\zeta = \frac{2}{3} M_{\text{цил.}} H_{\text{цил.}}^2. \end{aligned} \quad (14.123)$$

Выполним теперь, с учётом (14.122), *обратный предельный переход от цилиндра к диску*: тогда $\lim_{H \rightarrow 0} I_3 = 0$ и

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{2} M_{\text{диска}} R_{\text{диска}}^2. \quad (14.124)$$

Момент же инерции диска относительно оси симметрии очевидно равен

$$J_{\text{диска}} = \frac{1}{2} M_{\text{диска}} R_{\text{диска}}^2. \quad (14.125)$$

Следовательно,

$$J_{\text{диска}} - \int \zeta^2 [\mu_1(\zeta) + \mu_2(\zeta) + \mu_3(\zeta)] d\zeta = 0, \quad (14.126)$$

что и требовалось доказать⁴. ■

§ 14.7. Примеры на применение пятого метода

Применение формулы (14.120) поясним на примерах. Начнём с того, что рассмотрим однородный шар с несколько неожиданной точки зрения.

Задача 14.8. Пользуясь формулой (14.120), найти гравитационную энергию однородного шара (R, ρ, M_T) через его эквигравитирующий элемент — материальную точку массы M_T в центре.

Решение. В этом случае:

$$\mu(\zeta) = M_T \cdot \delta(r);$$

⁴ Заметим, что без предварительного «размазывания» диска соответствующий интеграл для момента инерции стержня диска (9.30)

$$2i\sigma \int_{-iR_{\text{диска}}}^{iR_{\text{диска}}} \zeta^2 \sqrt{R_{\text{диска}}^2 + \zeta^2} d\zeta = \frac{1}{4} M_{\text{диска}} R_{\text{диска}}^2$$

давал бы в два раза меньшую величину, нежели в (14.124), что для нас совсем неприемлемо!

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta) &= \varphi(0) = 2\pi G\rho R^2; \\ -\frac{1}{2} \int \varphi(\zeta) \cdot \mu(\zeta) d\zeta &= -\pi G\rho R^2 M_\tau; \\ J_\tau &= \frac{3}{5} M_\tau R^2; \\ \int \zeta^2 \mu(\zeta) d\zeta &= 0,\end{aligned}$$

где $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака. В итоге, формула (14.120) даёт:

$$W_{\text{шара}} = -\frac{4}{5} \pi G\rho M_\tau R^2. \quad (14.127)$$

Верно! См. (1.64). ▼

Но к шару можно подойти и иначе.

З а д а ч а 14.9. Пользуясь формулой (14.120), найти гравитационную энергию однородного шара (R, ρ, M_τ) через его эквигравитирующий элемент — однородный шар радиусом $R_1 \leq R$ той же массы.

Решение. В этом случае: $\rho_1 = \rho \frac{R^3}{R_1^3}$, и

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2} \int \varphi(\zeta) \mu(\zeta) d\zeta &= -\frac{4}{3} \pi^2 G\rho^2 \frac{R^3}{R_1^3} \int (3R^2 - r^2) r^2 dr = -\frac{4}{3} \pi^2 G\rho^2 R^3 \left(R^2 - \frac{1}{5} R_1^2 \right); \\ J_\tau - \int \zeta^2 \mu(\zeta) d\zeta &= \frac{3}{5} M_\tau (R^2 - R_1^2).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$W_{\text{шара}} = -\frac{4}{5} \pi G\rho M_\tau R^2.$$

Верно! См. (14.127). ▼

Применим теперь общую формулу (14.120) к однородным сфероидам.

З а д а ч а 14.10. С помощью формулы (14.120) вычислить гравитационную энергию однородного сжатого сфероида.

Решение. Для сжатого сфероида

$$\varphi(\zeta) = \pi G\rho (I - A_3 \zeta^2), \quad J_\tau = M (2a_1^2 + a_3^2)/5, \quad (14.128)$$

следовательно, с учётом (9.7),

$$\int_{-ia_1e}^{+ia_1e} \zeta^2 \mu(\zeta) d\zeta = -\frac{M_\tau}{5} (a_1^2 - a_3^2)^5; \quad (14.129)$$

$$-\frac{1}{2} \int_{-iR}^{iR} \mu(\zeta) \varphi(\zeta) d\zeta = -\frac{1}{5} \pi G\rho M a_1^2 \left(1 + 4 \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \arcsin e \right). \quad (14.130)$$

⁵ Очевидно, в данном примере момент инерции стержня относительно центральной точки равен разности моментов инерции сжатого сфероида относительно меридиональной и экваториальной его плоскостей.

В целом, подставляя полученные результаты в формулу (14.120)

$$W_{\text{сж}} = -\frac{4}{5}\pi G\rho M a_1^2 \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \arcsin e, \quad (14.131)$$

получим известное выражение для энергии однородного сжатого сфероида из (1.66). ▼

Случай вытянутого сфероида аналогичен рассмотренному выше.

Задача 14.11. С помощью формулы (14.120) вычислить гравитационную энергию однородного вытянутого сфероида.

Задача 14.12. Найти энергию однородного круглого диска, применив метод эквигравитирующего стержня.

Решение. Используя известные для диска выражения плотности эквигравитирующего стержня (9.30) и потенциала на оси симметрии (9.35) (где x_3 следует заменить на ζ), интеграл (14.121) запишем в виде

$$W = 2i\pi G\sigma^2 \int_{-ia}^{+ia} \sqrt{a^2 + \zeta^2} \left(\sqrt{a^2 + \zeta^2} - \zeta \right) d\zeta.$$

Последний член в круглых скобках нечётный по ζ и вклад в интеграл не даёт. Деля замену $\zeta = iRs$, легко вычисляем потенциальную энергию однородного плоского круглого диска

$$W_{\text{диска}} = -\frac{8}{3}\pi G\sigma^2 R^3. \quad (14.132)$$

▼

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Этот метод действительно изящен. Сравните с (8.19), когда энергия диска была найдена фактически через широкое кольцо. Краткость метода стержней ещё более выигрывает при его сравнении с *прямым методом*. Действительно, прямой метод опирается на формулу (8.8). Интегрируя внутренний потенциал (9.61) по площади диска, имеем

$$W_{\text{диска}} = -\frac{1}{2}\sigma \iint \varphi_{\text{внутр}}(r) dx_1 dx_2 = -4\pi G\sigma^2 R^3 \int_0^1 k E(k) dk, \quad (14.133)$$

где $k = r/R$. Последнее выражение с учётом вида полного эллиптического интеграла второго рода записывается в виде

$$W_{\text{диска}} = -4\pi G\sigma^2 R^3 \int_0^1 k dk \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi. \quad (14.134)$$

Меня здесь порядок интегрирования, получим

$$W_{\text{диска}} = \frac{4}{3}\pi G\sigma^2 R^3 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 \varphi - 1}{\sin^2 \varphi} d\varphi. \quad (14.135)$$

Но последний интеграл, как легко убедиться, равен -2 , и в итоге мы получим то же выражение (14.132).

Задача 14.13. Найти энергию неоднородного круглого диска с законом поверхностной плотности (9.150).

Решение. Для такого диска пара «стержень — диск» приводится в формулах (9.151) и (9.153). Перед подстановкой этих выражений в интеграл (14.121) потенциал следует представить в виде $\left(\zeta \rightarrow \frac{\zeta}{R} \right)$

$$\varphi(\zeta) = \pi G\sigma_0 R \left\{ \sqrt{1 + \zeta^2} - 2\zeta + \frac{\zeta^2}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \zeta^2}}{1 - \sqrt{1 + \zeta^2}} \right\}. \quad (14.136)$$

Тогда

$$W_{\text{диска}} = \frac{i}{2} \pi G \sigma_0^2 R^3 \{T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5\}. \quad (14.137)$$

Последовательно находим здесь

$$\begin{aligned} T_1 &= 2 \int_0^i (1 + \zeta^2) d\zeta = \frac{4}{3} i; \\ T_2 &= -2 \int_{-i}^i \zeta \sqrt{1 + \zeta^2} d\zeta = 0; \\ T_3 &= 2 \int_0^i \zeta^2 \sqrt{1 + \zeta^2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \zeta^2}}{1 - \sqrt{1 + \zeta^2}} d\zeta. \end{aligned} \quad (14.138)$$

Деля в T_3 замену $\zeta = ix$, интегрируем затем по частям. После подстановки пределов, проинтегрированный член исчезает. Остаётся

$$T_3 = \frac{i}{2} \int_0^1 \left(1 - 2x^2 - \frac{\arcsin x}{x\sqrt{1-x^2}} \right) dx.$$

Но здесь интеграл от последнего члена равен удвоенной постоянной Каталана G_K (см. 12.20). Тогда

$$T_3 = i \left(\frac{1}{6} - G_K \right). \quad (14.139)$$

Далее,

$$\begin{aligned} T_4 &= - \int_{-i}^i \zeta^3 \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \zeta^2}}{1 - \sqrt{1 + \zeta^2}} d\zeta = 0; \\ T_5 &= \frac{1}{2} \int_0^i \zeta^4 \ln^2 \frac{1 + \sqrt{1 + \zeta^2}}{1 - \sqrt{1 + \zeta^2}} d\zeta = \frac{i}{2} \int_0^1 x^4 \ln^2 \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{1 - \sqrt{1 - x^2}} dx. \end{aligned} \quad (14.140)$$

Применяя к T_5 два раза интегрирование по частям (до исчезновения логарифма), находим

$$T_5 = \frac{i}{10} \left(6G_K - \frac{11}{3} \right). \quad (14.141)$$

Объединяя эти выражения, в итоге получим

$$W_{\text{диска}} = -\frac{1}{30} \pi G \sigma_0^2 R^3 (17 - 6G_K) = -\frac{3}{10} \frac{M^2 G}{R} (17 - 6G_K). \quad (14.142)$$

Этот результат эквивалентен (13.95) и (14.208) и, в силу независимого способа получения, является веским подтверждением корректности общих формул трёх методов. ▼

Задача 14.14. Найти энергию «шапочки» на сфере.

Решение. Потенциал и плотность заменяющего стержня для «шапочки» ранее были получены и даны в (9.113) и (9.114). Подставляя эти выражения в формулу (14.121) и делая замену $z = \frac{\zeta}{R}$, получим

$$W = 2\pi i G \sigma^2 R^3 \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \frac{\sqrt{z^2 - 2z \cos \alpha + 1} - 1 + z}{z} \cdot \frac{\sqrt{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}}{z} dz. \quad (14.143)$$

В (14.143) имеем дело с тремя интегралами

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \frac{\sqrt{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}}{z} dz, \\ J_2 &= \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \frac{\sqrt{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}}{z^2} dz, \\ J_3 &= \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \frac{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}{z^2} dz. \end{aligned} \quad (14.144)$$

Заменой

$$x = \frac{z - \cos \alpha}{i \sin \alpha}$$

интеграл J_1 сводится к виду

$$J_1 = i \sin^2 \alpha \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\cos \alpha + ix \sin \alpha} dx. \quad (14.145)$$

Умножая здесь числитель и знаменатель на $\cos \alpha - ix \sin \alpha$ и опуская нечётный член, после некоторых преобразований получим

$$J_1 = i\pi (1 - \cos \alpha). \quad (14.146)$$

Интеграл J_2 берём сначала по частям; действуя затем по аналогии с вышерассмотренным, после преобразований находим

$$J_2 = i\pi (1 - \cos \alpha). \quad (14.147)$$

Поэтому разность двух интегралов равна нулю⁶:

$$J_2 - J_1 = 0.$$

Далее, легко убедиться, что

$$J_3 = 4i (\sin \alpha - \alpha \cdot \cos \alpha).$$

⁶ Обратим внимание: несмотря на разный вид подынтегральных выражений, выполняется равенство $J_1 = J_2$, что согласуется с результатами (13.40), см. там интегралы K_4 и K_5 .

В итоге, энергия «шапочки» на сфере оказывается равной

$$W_{\text{«шапочки»}} = -8\pi G\sigma^2 R^3 (\sin \alpha - \alpha \cdot \cos \alpha). \quad (14.148)$$

▼

Проверить формулу (14.148) можно в двух замечательных случаях. Во-первых, в случае полного сферического слоя, устремив угол $\alpha \rightarrow \pi$:

$$W_{\text{сфер. слоя}} = -8\pi^2 G\sigma^2 R^3 = -\frac{M^2 G}{2R} \quad (14.149)$$

(верно!). И во-вторых, в пределе однородного плоского круглого диска $\alpha \rightarrow 0$ (радиус диска $a = \alpha R$); подставляя в (14.148) приближенные значения $\sin \alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{6}$ и $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$, легко получим известное нам выражение (14.132). Переход от шапочки к плоскому диску, согласитесь, красив!

Формула (14.148) также гласит, что энергия тонкой пустотелой полусферы ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) равна

$$W_{\text{пуст. полусферы}} = -8\pi G\sigma^2 R^3, \quad (14.150)$$

так что расплыть элементарный полный сферический слой оказывается в π (а не в два!) раз труднее, чем расплыть одну только его полусферу.

Задача 14.15. Найти взаимную энергию кусков сферических поверхностей, составляющих асимметричную пустотелую линзу.

Решение. Дана пустотелая линза, образованная кусками однородных тонких сферических поверхностей. Расположим начало системы отсчёта в точке O (рис. 123). Очевидно, здесь

$$\begin{aligned} b &= R_1 \sin \alpha_1 = R_2 \sin \alpha_2, \\ h_1 &= R_1 (1 - \cos \alpha_1), \\ h_2 &= R_2 (1 - \cos \alpha_2). \end{aligned} \quad (14.151)$$

Для вычисления по формуле (14.121) взаимной потенциальной энергии двух сферических «шапочек», образующих пустотелую асимметричную линзу, используем стержень для второй (нижней) «шапочки», и потенциал на оси симметрии — для первой (верхней):

$$\begin{aligned} \mu_2(\zeta) &= -2i\sigma R_2 \frac{\sqrt{b^2 + \zeta^2}}{R_2 \cos \alpha_2 - \zeta}, \\ \varphi_1(\zeta) &= 2\pi G\sigma R_1 \left(\frac{\sqrt{b^2 + \zeta^2} - R_1}{R_1 \cos \alpha_1 + \zeta} + 1 \right). \end{aligned} \quad (14.152)$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} W_{\text{вз}} &= 4i\pi G\sigma^2 R_1 R_2 \int_{-ib}^{+ib} \left(\frac{b^2 + \zeta^2}{(R_1 \cos \alpha_1 + \zeta)(R_2 \cos \alpha_2 - \zeta)} \right. \\ &\quad \left. - R_1 \frac{\sqrt{b^2 + \zeta^2}}{(R_1 \cos \alpha_1 + \zeta)(R_2 \cos \alpha_2 - \zeta)} + \frac{\sqrt{b^2 + \zeta^2}}{R_2 \cos \alpha_2 - \zeta} \right) d\zeta. \end{aligned} \quad (14.153)$$

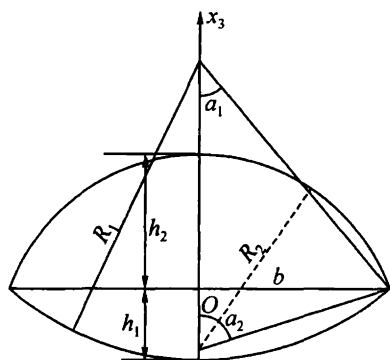


Рис. 123. Пустотелая асимметричная линза

Итогом расчётов, которые мы здесь опускаем, является формула для *взаимной энергии двух «шапочек» пустотелой линзы*:

$$W_{\text{вз. шапочек пуст. ас. линзы}} = -8\pi G\sigma^2 R_1 R_2 \left\{ -b + \frac{R_1^2 \alpha_1 + R_2^2 \alpha_2}{\Delta} + \right. \\ \left. + \frac{\pi}{2} \left(R_1 + R_2 - \frac{b^2 + R_1 R_2 + H_1^2 + H_2^2 + H_1 H_2}{\Delta} \right) \right\}, \quad (14.154)$$

где введены обозначения

$$H_1 = R_1 \cos \alpha_1, \quad H_2 = R_2 \cos \alpha_2, \quad \Delta = H_1 + H_2. \quad (14.155)$$

▼

Задача 14.16. С помощью формул (14.148) и (14.154), используя равенство (8.23), найти полную энергию асимметричной пустотелой линзы.

Решение. Получим

$$W_{\text{пуст ас линзы}} = -8\pi G\sigma^2 \{ R_1^2 (b - \alpha_1 H_1) + R_2^2 (b - \alpha_2 H_2) \} + W_{\text{вз}}, \quad (14.156)$$

где $W_{\text{вз}}$ из (14.154). Сравните выражения для энергии пустотелой (14.156) и сплошной (12.127) асимметричных линз. ▼

Частные случаи пустотелой линзы (14.154)

Начнём с простой задачи.

Задача 14.17. Доказать, что полная энергия двух соприкасающихся пустотелых сфер равна

$$W_{\text{двух пуст сфер}} = -8\pi^2 G\sigma^2 \left[R_1^3 + R_2^3 + \frac{2R_1^2 R_2^2}{R_1 + R_2} \right]. \quad (14.157)$$

Решение. Выражение (14.157) (сравните его с (12.129)) можно получить как прямым способом, так и подстановкой $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi$ в (14.156). Кстати, это хороший способ проверить последнюю формулу. ▼

Другие важные частные случаи:

а) *Симметричная пустотелая линза*

Взаимная энергия двух симметричных «шапок» получается из (14.154) подстановкой одинаковых характеристик обеих частей линзы:

$$W_{\text{вз. шапочек пуст. сим. линзы}} = -8\pi G\sigma^2 R^3 \left\{ \frac{\alpha - 2\pi \sin^4 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} - \sin \alpha \right\}. \quad (14.158)$$

Полная энергия симметричной пустотелой линзы равна

$$W_{\text{пуст. сим. линзы}} = -8\pi G\sigma^2 R^3 \left\{ \frac{\alpha - 2\pi \sin^4 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} + \sin \alpha - 2\alpha \cos \alpha \right\}. \quad (14.159)$$

б) *Линза из двух полусфер*

Взаимная энергия двух полусфер ($\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$). Внешне эта конфигурация напоминает известные со школьной скамьи Магдебургские полушария:

$$W_{\text{вз. двух полусфер}} = -8\pi G\sigma^2 R^3 (\pi - 2). \quad (14.160)$$

Полная же энергия тонкой пустотелой сферы оказывается равной

$$W_{\text{пуст. сферы}} = -8\pi^2 G \sigma^2 R^3 = \frac{M^2 G}{2R} \quad (14.161)$$

— в полном согласии с основами теории.

в) Пустотелая линза с плоским дном

Взаимная энергия «шапочки» с плоским дном ($R_2 \rightarrow \infty, \alpha_2 \rightarrow 0$)

$$W_{\text{вз. шапочки и дна}} = -8\pi G \sigma^2 R \left\{ R^2 \alpha - bH + \pi \left(RH - H^2 - \frac{b^2}{2} \right) \right\}. \quad (14.162)$$

Полная энергия пустотелой линзы с плоским дном

$$W_{\text{пуст. линзы с плоским дном}} = -8\pi G \sigma^2 R^3 \left\{ \frac{1}{3} + (\alpha + \sin \alpha)(1 - \cos \alpha) - 2\pi \sin^4 \frac{\alpha}{2} \right\}. \quad (14.163)$$

г) Пустотелая «лунка»

Как и в случае со сплошной асимметричной линзой (см. § 12.10), сейчас также допустим выгиб одной из сфер в обратную сторону. При этом асимметричная пустотелая линза превращается в пустотелую лунку!

Взаимную энергию сферических компонент пустотелой лунки мы получим, обращая формально в формуле (14.154) знаки у R_2, α_2 и H_2 (не надо забывать, что и сейчас речь идёт об аналитическом продолжении выражения (14.154) на область отрицательных значений параметров линзы, только пустотелой!); имеем

$$W_{\text{вз. поверхностей лунки}} = -8\pi G \sigma^2 R_1 R_2 \left\{ b + \frac{-R_1^2 \alpha_1 + R_2^2 \alpha_2}{\tilde{\Delta}} + \right. \\ \left. + \frac{\pi}{2} \left(R_2 - R_1 + \frac{b^2 - R_1 R_2 + H_1^2 + H_2^2 - H_1 H_2}{\tilde{\Delta}} \right) \right\}, \quad (14.164)$$

где $\tilde{\Delta} = R_1 \cos \alpha_1 - R_2 \cos \alpha_2$.

Задача 14.18. По аналогии с задачей 8.7 гл. 8, выполнить в (14.164) предельный переход к пустотелой «лунке» со сходящимися острыми краями.

Задача 14.19. Найти полную энергию пустотелой лунки.

§ 14.8. Метод «прогонки» (шестой)

Прометаем треугольную территорию шаг за шагом

Важным на практике оказывается метод, который назовём условно методом «прогонки». Он заключается в следующем. Рассмотрим гравитирующее тело с распределением плотности $\rho(x)$. Разобьём (расслоим) объём этого тела на некоторые элементы; каждый такой элемент будет представлен подмножеством точек с размерностью на единицу меньше, чем у исходной фигуры. Другими словами, семейство элементов зависит только от одного параметра $q_s \geq q \geq 0$. Так, шар можно расслоить на сферические, а эллипсоид — на гомотетические слои, круглый диск на кольца, одномерный отрезок — на материальные точки, и т. д.⁷ Следующий шаг заключается в нахождении взаимного потенциала (или, как говорилось выше, взаимной энергии по модулю) двух любых выделенных в данном семействе элементов

$$d\Phi_{12}(q_1, q_2).$$

⁷ Расслоение одного и того же тела с размерностью больше двух может быть произведено разными способами, и в конкретных случаях этот способ надо, разумеется, указывать.

Интегрируя затем найденный взаимный потенциал двух элементов по площади треугольника (рис. 124), мы получим полную гравитационную энергию тела

$$W = - \int_0^{q_s} dq_1 \int_{q_1}^{q_s} [d\Phi_{12}] dq_2 \quad (14.165)$$

(множитель $1/2$ отсутствует, так как при интегрировании *каждый элемент тела учитывается только один раз*).

На практике преимущество этого метода перед другими видно уже из того, что *трёхмерный интеграл в формуле (8.3) заменяется теперь на гораздо более простой двойной интеграл с универсальной для всех тел треугольной областью интегрирования*. Кроме того, в некоторых важных случаях и интеграл в (14.165) можно свести к однократному (см. узловую задачу для цилиндра в § 14.9).

Рассмотрим примеры.

1. Самый простой — это однородный шар радиусом R

Расслаиваем такой шар на *сферические слои* и выделяем два слоя с радиусами r_1 и r_2 и толщиной dr_1 и dr_2 . Тогда, как легко видеть,

$$d\Phi_{12} = \frac{4\pi G \rho r_1^2 dr_1}{r_2} \cdot 4\pi \rho r_2^2 dr_2. \quad (14.166)$$

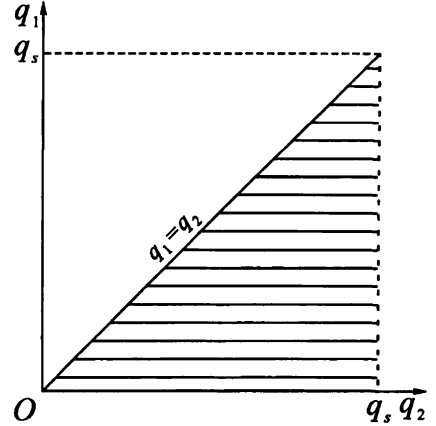


Рис. 124. Область интегрирования (заштрихована) в двойном интеграле (14.165)

Таким образом, полная гравитационная энергия однородного шара оказывается равной

$$W_{\text{шара}} = -16\pi^2 G \rho^2 \int_0^R r_1^2 dr_1 \int_{r_1}^R r_2 dr_2 = -\frac{16}{15} \pi^2 G \rho^2 R^5, \quad (14.167)$$

что совпадает с известным результатом (1.64).

2. Однородный сжатый сфероид

Расслаиваем его на элементарные *гомотетические слои* с известным из § 5.1 параметром расслоения m . Выделяем затем из них два гомеоида с параметрами m_1 (внутренний) и m_2 (внешний). Масса внутреннего гомеоида равна $4\pi \rho a_1^2 a_3 m_1^2 dm_1$, а потенциал внутри внешнего есть величина постоянная и равная

$$d\varphi_{\text{внутр}} = 2\pi G \rho a_1^2 a_3 m_2 dm_2 \int_0^\infty \frac{ds}{(a_1^2 + s) \sqrt{a_3^2 + s}}. \quad (14.168)$$

Поскольку этот потенциал не зависит от координат, то

$$d\Phi_{12} = 8\pi^2 G \rho^2 a_1^4 a_3^2 \int_0^\infty \frac{ds}{(a_1^2 + s) \sqrt{a_3^2 + s}} \cdot m_1^2 m_2 dm_1 dm_2.$$

Следовательно, по формуле (14.165) получаем

$$\begin{aligned} W_{\text{сж сфер}} &= -8\pi^2 G \rho^2 a_1^4 a_3^2 \int_0^\infty \frac{ds}{(a_1^2 + s) \sqrt{a_3^2 + s}} \cdot \int_0^1 m_1^2 dm_1 \int_{m_1}^1 m_2^2 dm_2 = \\ &= -\frac{16}{15} \pi^2 G \rho^2 a_1^4 a_3^2 \frac{\arcsin e}{e}, \end{aligned} \quad (14.169)$$

что совпадает с первым результатом из (1.66).

3. Однородный круглый диск и широкое кольцо

Ранее эта задача была решена, но другими способами (см. § 8.1 и (для диска) задачу 14.12 этой главы). Но теперь полезно решить её и методом «прогонки».

Рассматриваем диск состоящим из элементарных круглых колечек. Внешний потенциал колечка радиусом r_1 в компланарной плоскости находится из (9.38). Полагая в ней $x_3 = 0$, имеем

$$\varphi(r) = \frac{4G\sigma r_1 dr_1}{r + r_1} K\left(\frac{2\sqrt{k_1}}{1 + k_1}\right) = 4G\sigma k_1 K(k_1) dr_1, \quad (14.170)$$

где $k_1 = \frac{r_1}{r} \leq 1$. Тогда взаимный потенциал двух колец с r_1 и r_2 оказывается равен

$$d\Phi_{12} = 8\pi G \sigma^2 r_1 K\left(\frac{r_1}{r_2}\right) dr_1 dr_2. \quad (14.171)$$

Основная формула метода (14.165) теперь даёт

$$W_{\text{шир кольца}} = -8\pi G \sigma^2 \int_{R_1}^{R_2} r_1 dr_1 \int_{r_1}^{R_2} K\left(\frac{r_1}{r_2}\right) dr_2. \quad (14.172)$$

Представив полный эллиптический интеграл $K\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$ его стандартным выражением в тригонометрической форме, после изменения порядка интегрирования запишем (14.172) в виде

$$W_{\text{шир кольца}} = -8\pi G \sigma^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{R_1}^{R_2} r_1 dr_1 \int_{r_1}^{R_2} \frac{r_2 dr_2}{\sqrt{r_2^2 - r_1^2 \sin^2 x}}. \quad (14.173)$$

Находим вначале два внутренних интеграла:

$$\begin{aligned} &\int_{R_1}^{R_2} r_1 dr_1 \left(\sqrt{R_2^2 - r_1^2 \sin^2 x} - r_1 \cos x \right) = \\ &= -\frac{1}{3 \sin^2 x} (R_2^2 - r_1^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}} \Big|_{r_1=R_1}^{r_1=R_2} - \frac{1}{3} (R_2^3 - R_1^3) \cos x = \\ &= -\frac{R_2^3}{3 \sin^2 x} \left[\cos^3 x - (1 - k^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}} \right] - \frac{R_2^3}{3} (1 - k^3) \cos x = \\ &= \frac{R_2^3}{3} \left[-\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} + \frac{\Delta^3}{\sin^2 x} - (1 - k^3) \cos x \right], \end{aligned} \quad (14.174)$$

где

$$\Delta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}, \quad k = \frac{R_1}{R_2} \leq 1. \quad (14.175)$$

Подставив затем (14.174) в (14.172), получим

$$W_{\text{шир. кольца}} = -\frac{8}{3}\pi G\sigma^2 R^3 \{1 + k^3 + (1 - k^2) K(k) - (1 + k^2) E(k)\}. \quad (14.176)$$

Результат (14.176) совпадает с (8.18), полученным ранее другим методом.

При $R_1 = 0$, ($k = 0$), $R_2 \equiv R$ кольцо превращается в однородный полный диск, как и следовало ожидать, с энергией (8.19) или (14.132).

Итак, метод «прогонки» даёт независимое и, что немаловажно, более компактное решение задач на гравитационную энергию (см. также в § 13.6 изящное приложение этого метода к задаче об энергии однородного стержня).

Но чтобы по настоящему раскрыть возможности шестого метода, решим сейчас новую и трудную задачу об энергии цилиндра. Приступим.

§ 14.9. Гравитационная энергия однородного кругового цилиндра конечной высоты

14.9.1. Постановка задачи и решение

Дан однородный круговой цилиндр длины $2H$ и радиусом основания R (рис. 125). Для нахождения его гравитационной энергии применим метод «прогонки». С этой целью расслоим цилиндр на элементарные круглые диски. Выделим два из них и воспользуемся выведенной ранее формулой (14.105) для взаимной энергии (потенциала) двух однородных дисков. Расстояние между дисками примем теперь равным

$$2d = R(u_2 - u_1), \quad (14.177)$$

где u_1 и u_2 — нормированная на R высота расположения первого и второго дисков. Согласно данному методу, пределы изменения переменных u_1 и u_2 будут следующие:

$$u_1 \leq u_2 < \beta; \quad -\beta \leq u_1 \leq \beta, \quad (14.178)$$

причём, здесь

$$\beta = \frac{H}{R} \quad (14.179)$$

— параметр геометрической формы цилиндра. Массы первого и второго дисков:

$$M_1 = \pi G \rho R^3 du_1, \quad M_2 = \pi G \rho R^3 du_2. \quad (14.180)$$

Тогда, с учётом известного нам выражения для взаимной энергии двух однородных круглых дисков $W_{вз}$ из (14.105), основная формула шестого метода (14.165) для гравитационной энергии цилиндра принимает вид

$$W_{\text{цил}} = -2\pi^2 G \rho^2 R^5 \int_{-\beta}^{\beta} du_1 \int_{u_1}^{\beta} \Phi(u_2 - u_1) du_2, \quad (14.181)$$

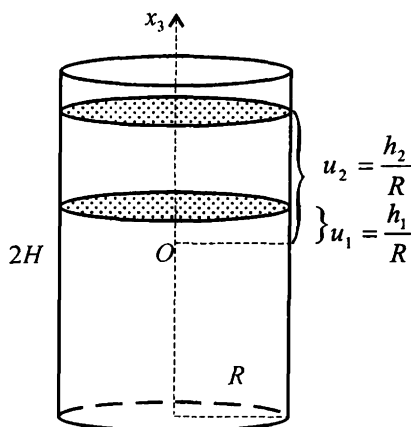


Рис. 125. Прямой круговой цилиндр. Выделены два элементарных круглых диска

где интегрируемая функция равна

$$\Phi(u_2 - u_1) = -(u_2 - u_1) + \frac{[8(2 - c) - c^2] E(k) - (b - c)(4 + c) K(k)}{3\pi\sqrt{2}\sqrt{2 - c}}, \quad (14.182)$$

а величины

$$\begin{aligned} b &= (u_2 - u_1)^2 \left(\sqrt{1 + \frac{4}{(u_2 - u_1)^2}} - 1 \right), \\ c &= -(u_2 - u_1)^2 \left(\sqrt{1 + \frac{4}{(u_2 - u_1)^2}} + 1 \right). \end{aligned} \quad (14.183)$$

Область интегрирования в двойном интеграле (14.181) показана на рис. 126.

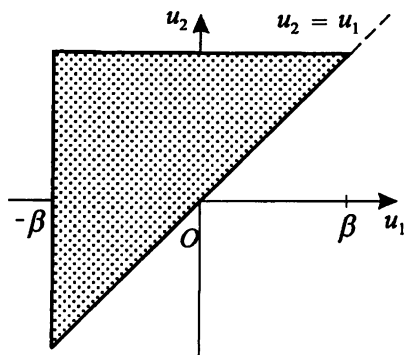


Рис. 126. Треугольная область интегрирования в двойном интеграле (14.181)

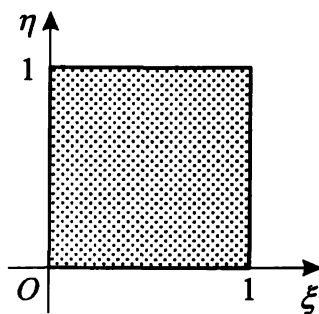


Рис. 127. Квадратная область интегрирования в интеграле (14.187)

Обратим внимание, что интегрируемая функция $\Phi(u_2 - u_1)$ зависит только от разности переменных $(u_2 - u_1)$. Учитывая это, двойной интеграл (14.181) можно, оказывается, привести к однократному.

Для этого *треугольную* область интегрирования следует вначале преобразовать в *квадратную*. Добиться этого можно, если переменные (u_1, u_2) заменить на новые (ξ, η) такие, что

$$u_1 = \beta(2\xi\eta - 1), \quad u_2 = \beta(1 - 2\xi + 2\xi\eta). \quad (14.184)$$

Якобиан данного преобразования

$$J = 4\beta^2. \quad (14.185)$$

Область на рис. 126 действительно преобразуется теперь в квадратную.

Существенно и то, что при указанном преобразовании (14.184) разность переменных $(u_2 - u_1)$ превращается в выражение

$$u_2 - u_1 = 2\beta(1 - \xi), \quad (14.186)$$

где только *одна* переменная ξ .

Таким образом, приводим двойной интеграл (14.181) к следующему виду:

$$W_{\text{цил.}} = -8\pi^2 G \rho^2 R^5 \beta^2 \int_0^1 \left\{ -2\beta(1-\xi) + \right. \\ \left. + \frac{[8(2-c) - c^2] E(k) - (b-c)(4+c) K(k)}{3\pi\sqrt{2}\sqrt{2-c}} \right\} \xi d\xi \int_0^1 d\eta, \quad (14.187)$$

где

$$b = 4\beta^2(1-\xi)^2 \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\beta^2(1-\xi)^2}} - 1 \right), \\ c = -\beta^2(1-\xi)^2 \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\beta^2(1-\xi)^2}} + 1 \right), \quad (14.188)$$

$$k = \sqrt{\frac{2-b}{2-c}} = 1 - \frac{b}{2} \leq 1. \quad (14.189)$$

В (14.187) интегрирование по переменной η легко выполняется; после интегрирования и очевидной замены

$$x = 1 - \xi, \quad (14.190)$$

получим

$$W_{\text{цил.}} = -8\pi^2 G \rho^2 R^5 \beta^2 \int_0^1 \left\{ -2\beta x + \right. \\ \left. + \frac{[8(2-c) - c^2] E(k) - (b-c)(4+c) K(k)}{3\pi\sqrt{2}\sqrt{2-c}} \right\} (1-x) dx, \quad (14.191)$$

причём

$$b = 4\beta^2 x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\beta^2 x^2}} - 1 \right), \\ c = -\beta^2 x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\beta^2 x^2}} + 1 \right), \quad (14.192) \\ k = \sqrt{\frac{2-b}{2-c}} = 1 - \frac{b}{2}.$$

В итоге, выражение для гравитационной энергии однородного кругового цилиндра конечной высоты (14.191) можно представить в виде

$$W_{\text{цил.}} = -\frac{8}{3}\pi^2 G \rho^2 R^5 \beta^2 \left\{ -\beta + \frac{1}{6\pi^2} I \right\}, \quad (14.193)$$

куда входит определённый интеграл⁸ от полных эллиптических интегралов первого и второго рода

$$I = \int_0^1 \frac{[8(2-c) - c^2] E(k) - (b-c)(4+c) K(k)}{\sqrt{2-c}} (1-x) dx. \quad (14.194)$$

Расчёты по формуле (14.193) показаны на рис. 128 и в табл. 1.

Важно подчеркнуть: корректность найденного выражения энергии цилиндра (14.193) подтверждается сравнением результатами расчётов энергии цилиндра совершенно независимым методом Монте-Карло.

Резюмируем: учитывая математическую трудность задачи для однородного кругового цилиндра, указанное выше её решение методом «прогонки» можно считать кратким и даже изящным. Другими методами эту задачу решить, как показывает практика, будет значительно труднее. Дело в том, что в данной задаче мы начали не с нуля и удачно применили то выражение для взаимной энергии двух круговых дисков, которое было найдено нами ранее методом эквивалентирующих стержней. Содружество новых методов помогает решать весьма нелёгкие задачи!

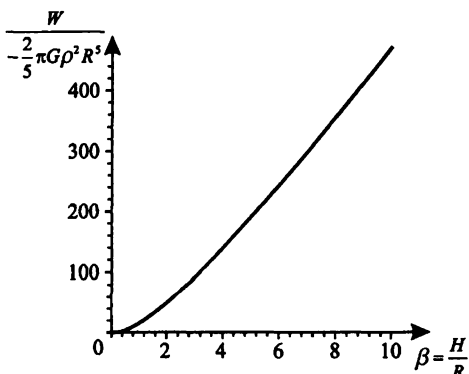


Рис. 128. Модуль гравитационной энергии (в единицах $-\frac{2}{5}\pi^2 G \rho^2 R^5$) однородного кругового цилиндра как функция геометрического параметра $\beta = \frac{H}{R}$

Таблица 1. Значения нормированной гравитационной энергии в зависимости от β

β	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0
$\frac{W}{-\frac{2}{5}\pi^2 G \rho^2 R^5}$	3.34	11.16	21.75	34.31	48.39	63.70	80.03	97.26	115.26	133.95

14.9.2. Представление интеграла (14.194) в конечном виде

Мы установили, что гравитационная энергия (14.193) однородного кругового цилиндра конечной высоты содержит сложный интеграл от полных эллиптических интегралов (14.194). Путём трудоёмких расчётов интеграл (14.194) можно выразить через элементарные функции, полные эллиптические интегралы первого и второго рода, а также через гипергеометрические функции. Результат имеет весьма впечатляющий вид:

⁸ Его можно выразить через эллиптические интегралы и гипергеометрические функции, см. ниже.

$$\begin{aligned}
I = & \frac{6\sqrt{2}G_k}{\beta} + \frac{5 + 16\beta(\beta + \sqrt{1 + \beta^2})}{\sqrt{2}\beta} E(n^2) - 4\sqrt{2}(n + \beta)(1 + 3\beta n) K(n^2) - \\
& - \frac{\pi}{10\sqrt{2}\beta^2} {}_3F_2\left(-\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{1}{4}, 1; 1\right) + \frac{\pi}{10\sqrt{2}\beta^2 n^5} {}_3F_2\left(-\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{1}{4}, 1; n^4\right) + \\
& + \frac{\pi}{10\sqrt{2}\beta^2} {}_3F_2\left(-\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{1}{4}, 1; 1\right) - \frac{\pi}{10\sqrt{2}\beta^2 n^5} {}_3F_2\left(-\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{1}{4}, 1; n^4\right) + \\
& + \frac{\pi}{\sqrt{2}\beta^2} {}_3F_2\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{4}, 1; 1\right) - \frac{\pi}{\sqrt{2}\beta^2 n^3} {}_3F_2\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{4}, 1; n^4\right) - \\
& - \frac{\pi}{\sqrt{2}\beta^2} {}_3F_2\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{4}, 1; 1\right) + \frac{\pi}{2\sqrt{2}\beta^2 n^3} {}_3F_2\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{4}, 1; n^4\right) + \\
& + \frac{3\pi}{\sqrt{2}\beta^2} {}_3F_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}; 1, \frac{5}{4}; 1\right) - \frac{3\pi n}{\sqrt{2}\beta^2} {}_3F_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}; 1, \frac{5}{4}; n^4\right) - \\
& - \frac{\pi}{2\sqrt{2}\beta} {}_3F_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, \frac{3}{2}; 1\right) + \frac{\pi n^2}{2\sqrt{2}\beta} {}_3F_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, \frac{3}{2}; n^4\right) - \\
& - \frac{\pi}{6\sqrt{2}\beta^2} {}_3F_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}; 1, \frac{7}{4}; 1\right) + \frac{\pi n^3}{6\sqrt{2}\beta^2} {}_3F_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}; 1, \frac{7}{4}; n^4\right) - \\
& - \frac{\pi}{\sqrt{2}\beta^2} {}_3F_2\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{4}, 1; 1\right) + \frac{\pi}{\sqrt{2}\beta^2 n} {}_3F_2\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{4}, 1; n^4\right) + \\
& + \frac{3\pi n}{\sqrt{2}\beta^2} {}_3F_2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, \frac{5}{4}; n^4\right) - \frac{\pi n^2}{\sqrt{2}\beta} {}_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, \frac{3}{2}; n^4\right) - \\
& - \frac{\pi}{6\sqrt{2}\beta^2} {}_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}; 1, \frac{7}{4}; 1\right) + \frac{\pi n^3}{6\sqrt{2}\beta^2} {}_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}; 1, \frac{7}{4}; n^4\right) + \\
& + \frac{3\pi}{10\sqrt{2}\beta^2} {}_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}; 1, \frac{9}{4}; 1\right) - \frac{3\pi n^5}{10\sqrt{2}\beta^2} {}_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}; 1, \frac{9}{4}; n^4\right) - \\
& - \frac{5\pi}{16\sqrt{2}\beta} {}_4F_3\left(\frac{1}{2}, 1, 1, \frac{3}{2}; 2, 2, 2; 1\right) + \frac{\pi n^4}{4\sqrt{2}\beta} {}_4F_3\left(1, 1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2, 2, 2; n^4\right) + \\
& + \frac{3\pi}{256\sqrt{2}\beta} {}_4F_3\left(1, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}; 2, 3, 3; 1\right) - \frac{3\pi n^4}{256\sqrt{2}\beta} {}_4F_3\left(1, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}; 2, 3, 3; n^4\right) + \\
& + \frac{9\pi}{256\sqrt{2}\beta} {}_4F_3\left(1, 1, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}; 2, 3, 3; 1\right) - \frac{9\pi}{256\sqrt{2}\beta} {}_4F_3\left(1, 1, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}; 2, 3, 3; n^4\right) + \\
& + \frac{1}{4\sqrt{2}\pi\beta^2} \left(-4 \left(48\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)^4 + \pi\beta(5 + \pi \ln(16)) \right) - 6\pi^2\beta \ln n \right).
\end{aligned} \tag{14.195}$$

Здесь $G_k = 0.915\,965\,594$ — постоянная Каталана, $\Gamma(\dots)$ — гамма-функция, а величина

$$n = \sqrt{1 + \beta^2} - \beta. \tag{14.196}$$

Гипергеометрические функции, которые не содержат n (таких здесь тринадцать), являются фактически некоторыми постоянными, оставшиеся же пятнадцать зависят от геометрического параметра цилиндра β .

Важно заметить, что очень сложную формулу (14.193) можно проверить и *аналитически в дисковом пределе*.

14.9.3. Энергия цилиндра в дисковом пределе

Однородный круговой диск поверхностной плотности σ и массой $M = \pi\sigma R^2$ получается из цилиндра в пределе бесконечно малой его высоты $H \rightarrow 0$. Следует только учитывать, что в этом пределе $\rho \rightarrow \infty$ и для сохранения массы тела нужно положить

$$\rho R = \frac{\sigma}{2\beta}. \quad (14.197)$$

Учитывая сказанное выше и разложив выражение для энергии цилиндра по степеням малого β , получим следующий ряд:

$$W_{\text{цил.}} = -\frac{2}{3}\pi G\sigma^2 R^3 \left\{ 4 - \pi\beta + \beta^2(2\ln 2 + \frac{1}{12}) - \beta^2 \ln \beta + \dots \right\}. \quad (14.198)$$

При $\beta = 0$ отсюда сразу следует известное выражение гравитационной энергии (14.132) для однородного круглого диска!

§ 14.10. Замечания о гравитационной энергии однородного кругового тора

Найти в конечном аналитическом виде гравитационную энергию однородного кругового тора — очень заманчивая задача. Проблема эта новаторская, и по своему значению занимает такое же место, как и классическая задача о потенциале однородного трёхосного эллипсоида. Последняя же, напомним, явилась целой эпохой в развитии математической физики прошлых веков. Но несмотря на многократные попытки, найти такую формулу для тора пока не удаётся. Вот задача для настоящего исследователя, не хуже знаменитой большой теоремы Ферма!

В отсутствие аналитического решения полезной разведкой является численный расчёт энергии однородного кругового тора. Однако «в лоб» выполнить численный расчёт для соответствующего шестикратного интеграла по объёму тора тоже не просто. Поэтому для решения задачи мы применили метод Монте-Карло. Результаты вычислений для тора показаны на графике на рис. 129.

Некоторый интерес представляет представление предыдущего численного результата с помощью формулы

$$W_{\text{тора}} = -\alpha \frac{M_{\text{тора}}^2 G}{r_0}, \quad (14.199)$$

где полная масса тора $M_{\text{тора}} = 2\pi^2 \rho R_0 r_0^2$ (обозначения величин для тора см. на рис. 41, § 7.1), а фактор α аппроксимируется сплайнами. Численное значение данного фактора можно найти, комбинируя эту общую формулу с выполненным нами расчётом энергии тора методом Монте-Карло. В результате удаётся построить график для α , показанный на рис. 130. Максимальное значение α имеет для тора без сквозного отверстия, т. е. при $r_0 = R_0$. Для наглядности значение этого фактора по порядку величины интересно сравнить с соответствующим множителем 0.6 в формуле гравитационной энергии (1.64) для однородного

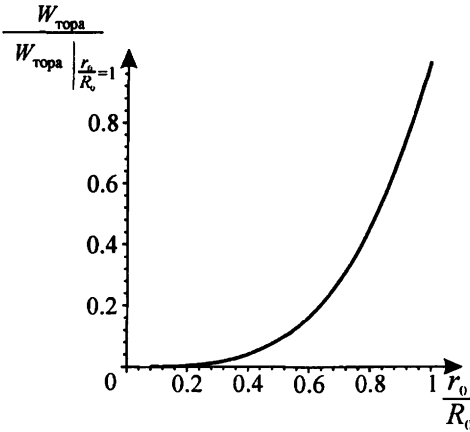


Рис. 129. Зависимость гравитационной энергии однородного кругового тора от геометрического параметра $\frac{r_0}{R_0}$

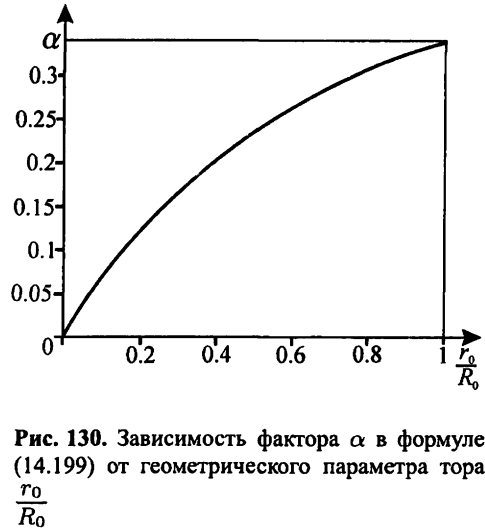


Рис. 130. Зависимость фактора α в формуле (14.199) от геометрического параметра тора $\frac{r_0}{R_0}$

шара. Разумеется, в пределе при $\frac{r_0}{R_0} \rightarrow 0$, когда тор вырождается в тонкий обруч и его объёмная плотность стремится к бесконечности, величина энергии $W_{\text{тора}}$ также логарифмически расходится.

§ 14.11. Метод седьмой. Нахождение энергии дисков асимптотическим переходом от слоисто-неоднородных эллипсоидов и сфероидов

Ещё одна важная роль софокусных преобразований

Переходим к плоским (не обязательно круглым!) дискам и двумерным слоям.

Здесь мы опираемся на результаты первого метода (см. формулы (8.84), (12.1) и (12.3)). А именно, в выражениях потенциальной энергии слоисто-неоднородных эллипсоидов (или сфероидов) выполняем предельный софокусный переход к эллиптическим (круглым) плоским дискам. При этом, опираясь на формулы из § 10.6 и § 10.9, мы заранее знаем, *каким для данного объёмного тела будет закон распределения поверхностной плотности у соответствующего ему диска*. Таким образом, круглый или эллиптический неоднородный диск по данной методике заранее проектируется!

Далее ограничимся для краткости случаем эллипсоидов и сфероидов с гомотетическими слоями. При софокусном «ужатии» исходного слоисто-неоднородного эллипсоида в диск масса первого сохраняется. С учётом этого преобразуем формулу (12.1), исключая в ней центральную объёмную плотность ρ_0 через массу тела M . Тогда в софокусном дисковом пределе при $e_{13} \rightarrow 1$ из неё находим⁹ энергию эллиптического диска

$$W_{\text{диска}} = -\frac{M_{\text{диска}}^2 G}{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} K(e) \cdot \psi(\tilde{\rho}), \quad (14.200)$$

где

⁹ Напомним, что, согласно (5.37), при софокусных преобразованиях мы делаем замены $a_1 \rightarrow a_1 m$, а $e_{13} \rightarrow \frac{e_{13}}{m}$, и поэтому произведение $a_1(m) \cdot e_{13}(m) = a_1 e_{13} = \sqrt{a_1^2 - a_3^2}$ не изменяет своего значения.

$$\psi(\tilde{\rho}) = \frac{\int_0^1 \left[m \tilde{\rho}(m) \int_0^m m^2 \tilde{\rho}(m) dm \right] dm}{\left(\int_0^1 m^2 \tilde{\rho}(m) dm \right)^2}, \quad (14.201)$$

а $\tilde{\rho}(m)$ — объёмная плотность эллипсоида, нормированная на ρ_0 . Здесь $e = \sqrt{\frac{a_1^2 - a_3^2}{a_1^2 - a_2^2}}$ —

эксцентриситет диска, а $\sqrt{a_1^2 - a_3^2}$ — его большая полуось.

Важно помнить: получаемые таким образом диски являются эквигравитирующими исходным слоисто-неоднородным эллипсоидам.

Для сфероидов с гомотетическими слоями указанный дисковый предел совершается при $e \rightarrow 1$; тогда исходный сфероид с объёмной плотностью $\rho(m)$ переходит в фокальный эквигравитирующий диск с поверхностной плотностью $\sigma(r)$, причём последнюю находим по формуле (10.56).

Но при нахождении энергии плоских дисков можно поступать и обратным образом. Пусть требуется найти энергию диска с каким-то конкретным распределением поверхностной плотности $\sigma(r)$. Тогда:

- 1) по заданному $\sigma(r)$, используя формулу (10.76), находим соответствующий интересующему нас диску эквигравитирующий сфероид с объёмной плотностью $\rho(m)$;
- 2) затем, применяя формулу (12.1), вычисляем энергию $W_{\text{сфер}}$ такого сфероиды;
- 3) наконец, выполняя в выражении $W_{\text{сфер}}$ указанный софокусный переход, получаем искомую гравитационную энергию $W_{\text{диска}}$ заданного диска.

Итак, в кратком изложении, в основе данного метода лежит переход по схеме:

«Диск — Сфероид — Диск»

Приведём примеры.

Дан эллиптический диск, у которого e — эксцентриситет, а $\sqrt{a_1^2 - a_3^2}$ — большая полуось. Этот диск может быть как однородным, так и неоднородным.

а) Однородному эллипсоиду соответствует, как мы знаем, неоднородный эллиптический диск с законом плотности (9.3).

В данном случае формула (14.201) даёт $\psi(\tilde{\rho}) = \frac{3}{5}$, так что из (14.200) сразу следует выражение энергии такого эллиптического диска

$$W_{\text{диска}} = -\frac{3}{5} \frac{M_{\text{диска}}^2 G}{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} K(e). \quad (14.202)$$

В частности, гравитационная энергия круглого диска ($e_{12} = 0$) радиуса $R = \sqrt{a_1^2 - a_3^2}$ с распределением плотности (9.5) оказывается равной

$$W_{\text{диска}} = -\frac{3}{10} \frac{\pi M_{\text{диска}}^2 G}{R}. \quad (14.203)$$

б) Однородные эллиптический и круглый диски. Однородный эллиптический диск получается в софокусном дисковом пределе из эллипсоида, состоящего из гомотетических слоёв и имеющего закон плотности (10.58). Для этого диска

$$\psi(\tilde{\rho}) = \frac{8}{3} \pi a_1 a_2 a_3 \rho_0^2,$$

и мы находим

$$W_{\text{диска}} = -\frac{16}{3\pi^2} \frac{M_{\text{диска}}^2 G}{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} K(e). \quad (14.204)$$

Круглый же однородный диск ($K(0) = \frac{\pi}{2}$) согласно (14.204), как легко убедиться, действительно имеет известную нам энергию (14.132).

в) *Эллиптический (или круглый) диск с плотностью*

$$\sigma(x_1, x_2) = \sigma_0 \left(1 - \frac{x_1^2}{R_1^2} - \frac{x_2^2}{R_2^2} \right), \quad R_1 = \sqrt{a_1^2 - a_3^2}, R_2 = \sqrt{a_2^2 - a_3^2}; \quad (14.205)$$

имеет эквигравитирующий слоисто-неоднородный эллипсоид из гомотетических слоёв с распределением плотности

$$\rho(m) = \frac{2R_1 R_2}{\pi a_1 a_2 a_3} \sigma_0 \sqrt{1 - m^2}. \quad (14.206)$$

Гравитационная энергия такого эллиптического диска:

$$W_{\text{диска}} = -\frac{2^{11}}{315\pi^2} \frac{M_{\text{диска}}^2 G}{R_1} K(e). \quad (14.207)$$

г) *Круглый диск с распределением поверхностной плотности* (13.94) удаётся моделировать эквигравитирующим сфероидом с законом плотности (10.87). Энергия данного сфероида получена в (12.19). Гравитационную же энергию диска теперь легко находим из (12.19) путём предельного софокусного перехода к плоской фигуре; она оказывается равной

$$W_{\text{диска}} = -\frac{3}{10} \pi \chi \frac{M^2 G}{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}}, \quad (14.208)$$

где фактор χ из (12.20).

Но кроме уже рассмотренных случаев, асимптотический переход от слоисто-неоднородных эллипсоидов и сфероидов позволяет вычислять энергию и многих других плоских эллиптических и круглых дисков. Так, часто используемый в астрофизике диск с гауссовским распределением плотности (10.101) также можно представить через эквигравитирующий сфероид с объёмной плотностью (10.102); следовательно, указанным методом мы находим, что гравитационная энергия такого диска оказывается равной

$$W_{\text{диска}} = -\gamma \frac{M^2 G}{R}. \quad (14.209)$$

Здесь $M_{\text{диска}}$ — масса диска, R — его радиус, фактор γ зависит от параметра a , входящего в формулу (10.101). Эта зависимость показана в табл. 2.

Таблица 2. Значения γ в формуле (14.209)

a	1	2	3	4	5
γ	0.09216	0.04797	0.02885	0.01931	0.01395

§ 14.12. Восьмой метод. Нахождение гравитационной энергии слоёв во внешнем гравитационном поле методом дифференциации

Предположим, что гравитационная энергия однородного тела нам известна. Тогда для вычисления энергии элементарного слоя вещества на его поверхности, т. е. взаимной энергии слоя и тела, можно применить *метод дифференциации*¹⁰ к выражению гравитационной энергии по выбранному параметру геометрической формы тела

$$W_{вз} = \frac{\partial W}{\partial q}. \quad (14.210)$$

В частности, если расширить однородное тело в $(1 + \varepsilon)$ раз с сохранением его плотности, исходная энергия изменится и станет равной $W(1 + 5\varepsilon)$. Приращение же

$$\delta W = 5 \varepsilon W \quad (14.211)$$

как раз и выражает энергию наложенного слоя.

Продemonстрируем данный метод на примерах. Сначала на двух простых.

Задача 14.20. *Найти работу, необходимую для удаления (соскребания) элементарного сферического слоя вещества с гравитирующего однородного шара.*

Решение. С геометрической точки зрения, элементарный слой на сфере образуется при дифференцировании её объёма по радиусу. Применяя метод дифференциации к выражению потенциальной энергии шара (1.64), находим энергию данного слоя в поле притяжения шара

$$W_{вз} = -\frac{16}{3} \pi^2 G \rho^2 R^4 dR = -\frac{GM_{ш} M_{сл}}{R}. \quad (14.212)$$

Именно на применении этой формулы и основана оценка траты времени гравитационной энергии нашего Солнца на свечение (см. выражение (8.20)). ▼

Задача 14.21. *Найти энергию элементарного колечка в гравитационном поле однородного плоского диска.*

Решение. Дифференцируя по R выражение (14.132), находим

$$W_{вз} = -8\pi G \sigma^2 R^2 dR = -\frac{GM_{кол} M_{д}}{\pi R}. \quad (14.213)$$

▼

Рассмотренные примеры несложные. Но метод дифференциации позволяет решать и более трудные задачи. С его помощью можно находить энергию расположенного на эллипсоиде *любого элементарного слоя* (а не только гомеоида или фокалоида). В случае однородного слоя для этого следует продифференцировать по параметру m выражение потенциальной энергии однородного эллипсоида (1.65), предварительно заменив там полуоси a_i на $a_i m \alpha_i(m)$:

$$dW_{вз} = -\frac{2}{5} \pi G \rho \frac{d}{dm} [M_{эл}(m) I(m)] dm. \quad (14.214)$$

Здесь величины $M(m)$ и $I(m)$ даны соответственно в (5.85) и (5.100).

В частности, энергия элементарного гомеоида на поверхности однородного эллипсоида (5.3) оказывается равной

¹⁰ Речь идёт о методе дифференциации в широком смысле, см. § 2.11.

$$dW_{\text{гом}} = -\frac{16}{3}\pi^2 G\rho^2 \frac{a_1^2 a_2^2 a_3^2}{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} F(\nu, q) dm = -\frac{GM_{\text{эл}} M_{\text{гом}}}{a_1 e_{13}} F(\nu, q), \quad (14.215)$$

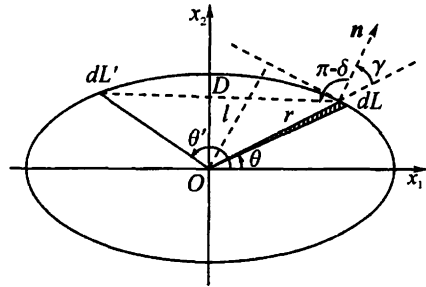
где $F(\nu, q)$ — неполный эллиптический интеграл первого рода, а

$$\nu = \arcsin e_{13}, \quad q = \frac{e_{12}}{e_{13}}. \quad (14.216)$$

В простейшем случае сферического слоя отсюда сразу получаем результат (14.212).

§ 14.13. Девятый метод. Гравитационная энергия однородных плоских тел. Двумерный вариант формулы (12.28)

Рис. 131. Плоское тело с хордой между двумя элементами длины dL и dL' на его границе. l — кратчайшее расстояние до касательной к dL . Заштрихована площадь элементарного треугольника



Плоская фигура площадью S ограничена контуром L и имеет поверхностную плотность $\sigma(x)$. Интегрируя по заданной площади тождество

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (\sigma \varphi x_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\sigma \varphi x_2) = 2\sigma \varphi + x \operatorname{grad}(\sigma \varphi), \quad (14.217)$$

получим выражение

$$\iint_S \operatorname{div}(\sigma \varphi x) dS = -4W + \iint_S x \operatorname{grad}(\sigma \varphi) dS. \quad (14.218)$$

Если плотность от координат не зависит, из (14.218) сразу следует *двумерный вариант формулы* (12.26):

$$W = -\frac{\sigma}{3} \iint_S \operatorname{div}(\varphi x) dS. \quad (14.219)$$

Применяя теперь формулу Грина для плоскости (см. сноску (1) в § 2.1), приводим (14.219) к интегралу по граничному контуру L

$$W_{\text{диска}} = -\frac{\sigma}{3} \oint_L \varphi (x_1 dx_2 - x_2 dx_1). \quad (14.220)$$

Удвоенную площадь заштрихованного треугольника (рис. 131) можно записать также как $r \cos \gamma dL$, где $r(x_1, x_2)$ есть радиус-вектор произвольной точки на контуре

фигуры, γ — угол между \mathbf{r} и внешней нормалью \mathbf{n} к контуру, dL — элемент длины контура. Таким образом, приходим к *двумерному варианту формулы* (12.28):

$$W_{\text{диска}} = -\frac{\sigma}{3} \oint_L \varphi(x_1, x_2) r \cos \gamma dL. \quad (14.221)$$

Следовательно, для вычисления гравитационной (электростатической) энергии однородной плоской фигуры достаточно знать её потенциал только на контуре L . Заметим, что потенциал этот, входящий под знак интеграла в (14.221), нам уже известен и даётся контурным интегралом (2.7). Формула (14.221) становится пригодной для решения поставленной задачи.

Пример. В простом частном случае однородного круглого диска радиуса R угол $\gamma = 0$ потенциал на границе даётся выражением (2.12). С учётом этого, формула (14.221) сразу даёт гравитационную энергию круглого диска (14.132). Вновь убеждаемся в полезности взаимного контроля разработанных методов.

Используя интеграл (14.221), в качестве примера вычислим теперь энергию *однородного эллиптического диска* с границей (4.1). Для решения поставленной задачи вначале параметризуем границу этого диска

$$x_1 = a_1 \cos \theta, \quad x_2 = a_2 \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi). \quad (14.222)$$

Тогда

$$dL = \sqrt{a_1^2 \sin^2 \theta + a_2^2 \cos^2 \theta} d\theta, \quad (14.223)$$

а направляющие косинусы нормали \mathbf{n} к эллипсу суть

$$n_1 = \frac{a_2 \cos \theta}{\frac{dL}{d\theta}}, \quad n_2 = \frac{a_1 \sin \theta}{\frac{dL}{d\theta}}. \quad (14.224)$$

Как легко видеть,

$$r \cos \gamma dL = a_1 a_2 d\theta. \quad (14.225)$$

Остаётся подставить в формулу (14.221) выражение потенциала фигуры. Для вычисления в (2.7) $\cos \delta$ следует знать направляющие косинусы отрезка D из (1.31), длину которого можно записать в виде

$$D = \sqrt{a_1^2 (\cos \theta - \cos \theta')^2 + a_2^2 (\sin \theta - \sin \theta')^2}. \quad (14.226)$$

Очевидно, эти косинусы таковы:

$$D_1 = \frac{a_1 (\cos \theta - \cos \theta')}{D}, \quad D_2 = \frac{a_2 (\sin \theta - \sin \theta')}{D}, \quad (14.227)$$

так что

$$\cos \delta = n_1 D_1 + n_2 D_2 = \frac{a_1 a_2}{D \cdot dL} [1 - \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta']. \quad (14.228)$$

Подставляя (14.225) и (14.228) в (14.221), после сокращения (в силу симметрии элементов длины dL и dL'), имеем

$$W_{\text{диска}} = -\frac{G\sigma^2}{3}a_1^2a_2^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos\theta \cos\theta' - \sin\theta \sin\theta'}{\sqrt{a_1^2(\cos\theta - \cos\theta')^2 + a_2^2(\sin\theta - \sin\theta')^2}} d\theta d\theta'. \quad (14.229)$$

Делая в этом двойном интеграле элементарные преобразования и вводя следующие обозначения:

$$\frac{\theta - \theta'}{2} = \xi, \quad \frac{\theta + \theta'}{2} = \eta, \quad (14.230)$$

после сокращения на $\sin\xi$, имеем

$$W_{\text{диска}} = -\frac{2}{3}G\sigma^2a_1^2a_2^2 \iint \frac{\sin\xi \, d\xi d\eta}{\sqrt{a_1^2 \sin^2\eta + a_2^2 \cos^2\eta}}. \quad (14.231)$$

Новая область интегрирования показана на рис. 132. Интегрирование по обоим переменным теперь выполняется раздельно и двойной интеграл (14.231) сводится к однократному

$$W_{\text{диска}} = -\frac{16}{3}G\sigma^2a_1^2a_2^2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\eta}{\sqrt{a_1^2 \sin^2\eta + a_2^2 \cos^2\eta}}; \quad (14.232)$$

следовательно,

$$W_{\text{диска}} = -\frac{16}{3}G\sigma^2a_1a_2^2 K(e) = -\frac{16}{3\pi^2} \frac{M^2 G}{a_1} K(e), \quad (14.233)$$

где $K(e)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода, а эксцентриситет диска $e = \sqrt{1 - a_2^2/a_1^2}$.

В (14.233) и дана энергия однородного эллиптического диска.

Для контроля заметим: формула (14.233) эквивалентна ранее найденной нами формуле (14.204) (очевидно, в последнем выражении $\sqrt{a_1^2 - a_3^2}$ и есть наибольшая полуось эллипса, полученного там другим методом).

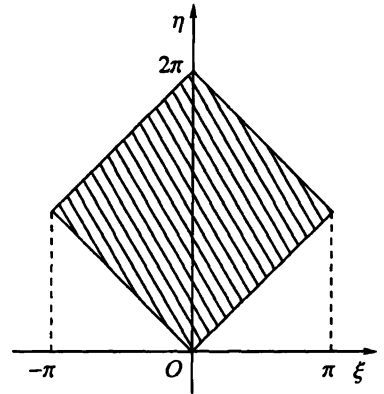


Рис. 132. Область интегрирования в двойном интеграле (14.231)

§ 14.14. Десятый метод. Гравитационная энергия однородных двумерных тел с логарифмическим потенциалом

Действуем по аналогии с выводом формулы (14.221). Для нахождения гравитационной энергии W двумерных цилиндров интегрируем потенциал (4.13) по $dx_1 dx_2$; меняя порядок интегрирования по площади и по контуру, получим

$$W_{\text{цил}} = \frac{G\rho^2}{6} \oint dL' \iint_S \left(R \ln R - \frac{R}{2} \right) dx_1 dx_2. \quad (14.234)$$

Во внутреннем интеграле переходим к полярным координаты и проводим интегрирование по $d\tau$. Тогда переменная точка x «садится» на контур, и в итоге приходим к следующему выражению для энергии¹¹:

$$W_{\text{цил}} = \frac{G\rho^2}{6} \oint \left(D^2 \ln D - \frac{5}{6} D^2 \right) \cos \gamma \cos \gamma' dL dL'. \quad (14.235)$$

Здесь $D = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2}$ есть длина хорды между концами векторов x и x' на контуре, восстановленными из начала отсчёта к элементам dL и dL' соответственно, а γ и γ' — углы между нормальными к контуру в данных точках и хордой D . Очевидно,

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{(x_1 - x'_1) dx_2 - (x_2 - x'_2) dx_1}{D \cdot dL}, \\ \cos \gamma' &= \frac{(x'_1 - x_1) dx'_2 - (x'_2 - x_2) dx'_1}{D \cdot dL'}. \end{aligned} \quad (14.236)$$

Эти формулы завершают решение задачи.

Таким образом, согласно (14.235), нахождение гравитационной энергии однородного двумерного тела сводится к вычислению двойного контурного интеграла по границе сечения данного тела. Обратим внимание: *Выражение (14.235) — это двумерный аналог формулы (12.32).*

Отметим характерную особенность формулы (14.235): при заданной массе M на единицу длины цилиндра гравитационная энергия цилиндра будет зависеть не только от геометрии сечения, но ещё и от размеров фигуры (из-за членов типа $\ln D$). Этого и следовало ожидать, так как указанная особенность имеется и в самом потенциале (4.12). Поэтому и необходимо делать нормировку потенциала или выражения для энергии на единицу длины цилиндра.

Для примера применим формулу (14.235) к цилиндру с круговым сечением с радиусом R . Введём полярную систему координат с началом в центре круга и направим полярную ось в точку x' . Тогда

$$D = 2R \sin \frac{\theta}{2}; \quad \cos \gamma = \cos \gamma' = \sin \frac{\theta}{2}; \quad dL = R d\theta. \quad (14.237)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} W_{\text{кругл. цил}} &= \frac{G\rho^2}{6} \oint dL' \int_0^{2\pi} 4R^3 \sin^4 \frac{\theta}{2} \left(\ln 2R - \frac{5}{6} + \ln \sin \frac{\theta}{2} \right) d\theta = \\ &= \frac{8}{3} \pi G\rho^2 R^4 \int_0^\pi \sin^4 x \left(\ln 2R - \frac{5}{6} + \ln \sin x \right) dx = \\ &= \pi^2 G\rho^2 R^4 \left(\ln R - \frac{1}{4} \right) = GM_{\text{кругл. цил}}^2 \left(\ln R - \frac{1}{4} \right). \end{aligned} \quad (14.238)$$

Здесь, как уже говорилось выше, $M_{\text{кругл. цил}}$ и $W_{\text{кругл. цил}}$ рассчитаны на единицу длины цилиндра.

¹¹ Напомним, что энергия (и масса M , см. ниже) рассчитываются в данной задаче на единицу длины цилиндра.

Используем сейчас этот результат для сравнения гравитационных энергий однородных цилиндров, имеющих равновеликие по площади круглое и квадратное сечения.

Задача 14.22. *Вычислить гравитационную энергию двумерного однородного цилиндра с прямоугольным сечением.*

Решение. Пусть в сечении цилиндра лежит прямоугольник со сторонами a_1 и a_2 . Для решения задачи используем метод 2, применённый ранее к кубоиду (см. § 12.5), с учётом, однако, специфики найденного выражения потенциала (4.13). После многих преобразований, в итоге приходим к выражению

$$W_{\text{прямоуг. цил}} = \frac{GM^2_{\text{прямоуг. цил}}}{12} \left\{ 6 \ln(a_1^2 + a_2^2) - \frac{a_1^2}{a_2^2} \ln\left(1 + \frac{a_2^2}{a_1^2}\right) - \frac{a_2^2}{a_1^2} \ln\left(1 + \frac{a_1^2}{a_2^2}\right) + 8 \left[\frac{a_1}{a_2} \operatorname{arctg} \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_2}{a_1} \operatorname{arctg} \frac{a_1}{a_2} \right] - 25 \right\}. \quad (14.239)$$

▼

Нормировку (14.239) удобно сделать на цилиндр с квадратным сечением $a = a_1 = a_2$. Для последнего

$$W_{\text{квадр. цил}} = \frac{GM^2_{\text{квадр. цил}}}{12} \{ 6 \ln(2a^2) - 2 \ln(2) + 4\pi - 25 \}. \quad (14.240)$$

Следовательно,

$$W_{\text{прямоуг. цил}} - W_{\text{квадр. цил}} = \frac{GM^2}{12} \left\{ 6 \ln\left(\frac{a_1^2 + a_2^2}{a^2}\right) - \frac{a_1^2}{a_2^2} \ln\left(1 + \frac{a_2^2}{a_1^2}\right) - \frac{a_2^2}{a_1^2} \ln\left(1 + \frac{a_1^2}{a_2^2}\right) + 8 \left[\frac{a_1}{a_2} \operatorname{arctg} \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_2}{a_1} \operatorname{arctg} \frac{a_1}{a_2} \right] - 4 \ln 2 - 4\pi \right\}. \quad (14.241)$$

Отсюда следует: *среди цилиндров с прямоугольным сечением наибольшей по модулю энергией обладает цилиндр с квадратным сечением.*

Сравним теперь энергии равновеликих (по площади сечений) цилиндров с круглым и квадратным сечениями. Согласно (14.238) и (14.240), находим

$$W_{\text{кругл. цил}} - W_{\text{квадр. цил}} = -1.7278221 \cdot 10^{-2} M^2 G. \quad (14.242)$$

Итак, *цилиндр с круглым сечением обладает меньшей потенциальной энергией, чем цилиндр с равновеликим ему квадратным.* Округление сечения тела энергетически выгодно! С аналогичной ситуацией мы встречались и в трёхмерном случае для кубоида (см. формулу (12.51)), но там речь шла о шаре.

Замечания

Материал главы разработан автором.

§ 14.1. Совокупность формул (14.3) и (14.4) дает для задач на потенциальную энергию перспективный метод — контролёр, но он годится и для нахождения энергии частей тела.

Первоисточник: [21].

§ 14.2. Пятый метод основан на осознании (вначале это была только гипотеза!) того, что взаимная энергия пары *стержень* — диск равна удвоенной полной гравитационной энергии исходного осесимметричного тела. Данный метод распространяется и на тела, имеющие эквиравитирующие «скелеты» из стержней.

Первоисточник: [21].

§ 14.3. Задача о параллельных кольцах — прелюдия к узловой задаче о двух дисках.

§ 14.4. Новый материал о кольцах. Удивительно, что очень сложный определённый интеграл (14.41) удаётся представить вначале компактным рядом, а затем и выразить его в конечном виде (14.49) или (14.53).

Первоисточник: [21].

§ 14.5. Новый материал. Формула для взаимной энергии двух дисков важна не только само по себе, но она удачно используется затем и в шестом методе (метод «прогонки», или метод интегральных элементов) в задаче об энергии цилиндра конечной высоты.

§ 14.6. Теория пятого метода усовершенствована по сравнению с изложением в [21]. Впервые доказана важная теорема 1.

§ 14.7. Здесь решено много новых интересных задач. Даже шар проявляет себя с неожиданной стороны! Задача о пустотелой асимметричной линзе требует тщательного анализа многих частных случаев.

§ 14.8. Шестой метод предполагает расслоение тела на элементы. Здесь, в частности, могут пригодиться результаты гл. 5 по эллипсоидальной стратификации, а также формула для взаимной энергии двух дисков из § 14.5. Метод имеет важное практическое значение.

Первоисточник: [21].

§ 14.9. Новый материал. Задача об энергии цилиндра конечной высоты — очень крепкий орешек, и «по зубам» он оказывается лишь шестому методу. Здесь применён оригинальный способ преобразования двойного интеграла в однократный (см. преобразования (14.184)).

§ 14.10. Численный расчёт энергии для однородного кругового тора — это разведка для будущих аналитических исследований!

§ 14.11. Переход от слоисто-неоднородных эллипсоидов и сфероидов к дискам позволяет находить не только потенциал (см. § 10.6 и § 10.7), но и гравитационную энергию дисков. Здесь применяется идея эквигравитирующих тел, детально разработанная в гл. 9. Облегчает дело то, что нам уже известно, как по данному диску находится заменяющий его эллипсоид (справедливо и обратное!).

Первоисточник: [21].

§ 14.12. Метод вычисления энергии слоёв путём дифференцирования общего выражения для W по параметру m допускает его обращение, т. е. интегрирование. Действительно, указанный выше шестой метод фактически и есть обращение метода дифференциации.

Первоисточник: [21].

§§ 14.13, 14.14. Формула (14.220) является двумерным аналогом выражения (12.28), а выражение (14.235) — это двумерный аналог формулы (12.32).

Первоисточник: [21].