показал очень сложную зависимость от зенитного расстояния, B—V и m. Строго говоря, наблюдения зенитных расстояний одних и тех же звезд в обеих кульминациях содержат всю информацию о поправках за хроматическую рефракцию. В действительности, из-за сложного характера самих поправок, больших случайных ошибок наблюдений, ограниченного числа наблюдений не представляется возможным получить закон влияния хроматической рефракции из наблюдений зенитных расстояний. Слишком много неизвестных необходимо получить. Отметим также, что количество звезд у южного полюса меньше, чем у северного, расстояние от места наблюдения до полюса велико ($\varphi=-33°$), поэтому число звезд, наблюдавшихся в двух кульминациях, мало (около 140 звезд). Однако была обнаружена общая закономерность разностей поправок за хроматическую рефракцию для различных станций. Оказалось, что эти разности могут быть аппроксимированы выражением $\mu \operatorname{tg} z$ с небольшими ошибками, не превышающими 0.01″. Здесь $\mu = f(\Delta_{i-j}, B-V, m)$, где Δ_{i-j} — разности поправок за хроматическую рефракцию двух станций. Только один из пунктов — Ла Пейнета (Чили) — расположенный на высоте 3000 м, выпадает из этой закономерности. Вычисления μ велись для шести значений B—V, для зенитных расстояний 0°—75°. Зависимость от звездных величин в разностях не обнаружена.

Таким образом, если предположить, что атмосфера Сантьяго (Чили, высота 850 м) обладает общей закономерностью, то можно исправлять наблюдения в Сантьяго поправками за хроматическую рефракцию, вычисленными по любой атмосфере из 11, имеющих общую закономерность, отмеченную выше. Затем, для приведения зенитных расстояний к атмосфере Сантьяго, необходимо по способу Бесселя найти коэффициенты перед тангенсом зенитного расстояния для различных B—V, которые будут представлять собой сумму коэффициентов неучтенной части рефракции для атмосферы Сантьяго. Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения наблюдения в Сантьяго были исправлены поочередно поправками за хроматическую рефракцию, вычисленными по различным атмосферам. Получено несколько массивов склонений звезд. Затем были выполнены решения по способу Бесселя для различных значений B—V для каждого из этих массивов и образовано несколько каталогов. Сравнение этих каталогов друг с другом показало очень хорошую сходимость. На зенитных расстояниях 45° максимальные разности склонений звезд не превышали 0,02″.

За окончательную версию каталога ФВК принята та, при которой поправки за хроматическую рефракцию вычислялись по данным исследования атмосферы Тололо-67 (т. к. эта обсерватория расположена недалеко от Сантьяго, внешние факторы, обуславливающие состояние атмосферы, близкие — рельеф местности, удаленность от моря, время наблюдения, высота). Систематические разности каталога FK5 — ФВК оказались небольшими — около 0.1″, тогда как значения учтенных поправок за хроматическую рефракцию достигают примерно 2-х секунд дуги.

Следует отметить, что использование такой методики — это вынужденная мера, и вызвана тем, что атмосфера в месте наблюдений не исследовалась вообще, не говоря уже об изменении ее характеристик во времени.

Здесь мы остановились на двух главных, на наш взгляд, проблемах — на влиянии гнутия инструмента и учете хроматической рефракции, тогда как для абсолютных определений склонений звезд имеются и другие трудные задачи: учет рефракции (аномальной, зальной), определение поправок делений кругов и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Орлов Б. А. Изв. ГАО № 150, Л., 1953, стр. 56—69.
2. Наумов В. А. Изв. ГАО № 196, Л., 1979, стр. 144—147.
3. Наумова А. А., Наумов В. А. В кн.: Современные проблемы позиционной астрометрии. М., МГУ, 1975, стр. 156—158.
4. Hog E. Mitt. Astron. Ges., 1973, Bd 32, s. 120—125.
5. Наумов В. А. В кн.: Современная астрометрия. Л., 1987, 248—251.
6. Немиро А. А., Стрелецкий Ю. С. Изв. ГАО № 205, Л., 1988, с. 15—17.
7. Днепровский Н. И. В кн.: Труды астрометр. конф. 1932 г. в Пулкове, 1933, с. 109—128.
8. Наумов В. А. Изв. ГАО № 193, Л., 1975, стр. 104—108.
9. Зверев М. С. Изв. ГАО № 166, Л., 1960, стр. 21—37.
10. Наумов В. А. и др. Information bulletin for the southern hemisphere. № 7, 1965, стр. 30—33.
11. Шапошников В. Г. А. Ж., т. 16, вып. 3, 1939, стр. 62—74.
12. Положенцев Д. Д. Изв. ГАО, № 157, 1957, стр. 41—71.
13. Наумов В. А. В кн.: Новые идеи в астрономии. Л., Наука, 1978, стр. 49—51.
14. Наумов В. А. В кн.: Проблемы астрометрии. М., МГУ, 1984, стр. 116—117.
15. Наумов В. А. Изв. ГАО, № 203, Л., Наука, 1985, стр. 3—9.
16. Наумов В. А. и др. Изв. ГАО № 203, Л., Наука, 1985, стр. 21—22.
17. Наумов В. А. и др. Изв. ГАО, № 205, Л., Наука, 1988, стр. 42—43.
18. Жилинский Е. Г. Исследование пулковского фотографич. вертикальн. круга. Автореферат кандидатской диссертации. Л., 1981.
19. Багильдинский Б. К., Жилинский Е. Г., Шкутов В. Д. В кн.: Современная астрометрия, Л., 1987, 453—466.

А. А. Ефимов, А. А. Шпитальная, В. И. Кузьмин, А. М. Финогенов, С. Д. Давыдов

ПОСТРОЕНИЕ АСТРОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ НА КВАЗАРАХ

Возможность построения астрономической системы координат по измерениям дуг между опорными небесными светилами отмечалась в [1].

В [3] и [4] изложены основные принципы построения астрономической (т.е. небесной) системы координат по измерениям дуг между опорными квазарами.

В настоящей работе излагается метод и техника построения астрономической системы координат по измерениям дуг между астрометрическими квазарами, выбранными в качестве опорных [5].

Как указывалось в [1, 2, 3, 4] в качестве осей небесной системы координат можно использовать главные оси эллипсоида инерции распределения материальных точек на небесной сфере единичного радиуса.

При построении квазарной системы координат масса каждого квазара принимается за единицу, т.к. квазары используются лишь в качестве опорных точек, а сам эллипсоид служит телом отсчета.

Собственное движение квазаров очень мало, поскольку весь массив квазаров находится от Солнечной системы на расстоянии более 700 млн. световых лет [6]. Учитывая высокую точность измерения дуг между квазарами (0″.001) [5, 9] и большую их удаленность, построенная на квазарах система координат будет практически неподвижной (с точностью ±0″.001) в течение 10 тысяч лет, даже если учесть, что Солнечная система имеет абсолютную скорость примерно 400 км/с [7].

Для того, чтобы найти ориентацию эллипсоида инерции распределения материальных точек (квазаров) на небесной сфере, необходимо знать осевые и центробежные моменты инерции этих материальных точек относительно любой исходной системы координат, связанной с квазарами. В качестве исходной (вспомогательной) системы координат можно взять систему координат, построенную на любых двух квазарах с началом в барицентре Солнечной системы. Для этого ось x вспомогательной системы координат направляется в один из квазаров, а основная плоскость xy проводится через первый и второй квазар. Тогда координаты 1-го и 2-го квазаров в этой системе координат будут соответственно равны:

$$x_1=1, \quad y_1=z_1=0; \quad x_2=\cos l_{12}, \quad y_2=\sin l_{12}, \quad z_2=0,$$

где l_{12} — дуга между первым и вторым квазаром.

Зная координаты двух квазаров и дуги между каждым из этих двух квазаров и третьим квазаром, нетрудно вычислить координаты третьего квазара.

Для вычисления осевых (I_x, I_y, I_z) и центробежных (I_{xy}, I_{yz}, I_{zx}) моментов инерции необходимо знать координаты всех астрометрических квазаров в исходной (вспомогательной) системе координат (x, y, z) т.к.:

$$I_x=\sum\left(y_i^2+z_i^2\right) \quad I_y=\sum\left(z_i^2+x_i^2\right) \quad I_z=\sum\left(x_i^2+y_i^2\right)$$
$$I_{xy}=\sum x_i y_i \quad I_{yz}=\sum y_i z_i \quad I_{zx}=\sum z_i x_i \tag{1}$$

Перенумеруем все квазары. Координаты первых трех квазаров нам известны. Допустим в общем случае, что известны координаты $n-1$, n, $n+1$ квазаров: x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}; x_n, y_n, z_n; x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}. Требуется найти координаты $n+2$ квазара: x_{n+2}, y_{n+2}, z_{n+2}.

Составим вектора:

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{r}_{n-1}&=x_{n-1}\mathbf{i}+y_{n-1}\mathbf{j}+z_{n-1}\mathbf{k}\\
\mathbf{r}_{n}&=x_{n}\mathbf{i}+y_{n}\mathbf{j}+z_{n}\mathbf{k}\\
\mathbf{r}_{n+1}&=x_{n+1}\mathbf{i}+y_{n+1}\mathbf{j}+z_{n+1}\mathbf{k}\\
\mathbf{r}_{n+2}&=x_{n+2}\mathbf{i}+y_{n+2}\mathbf{j}+z_{n+2}\mathbf{k}
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Образуем скалярные произведения:

$$\left.\begin{aligned}
(\mathbf{r}_{n-1}\mathbf{r}_{n+2})&=x_{n-1}x_{n+2}+y_{n-1}y_{n+2}+z_{n-1}z_{n+2}=l_{n-1,\,n+2}\\
(\mathbf{r}_{n}\mathbf{r}_{n+2})&=x_{n}x_{n+2}+y_{n}y_{n+2}+z_{n}z_{n+2}=l_{n,\,n+2}\\
(\mathbf{r}_{n+1}\mathbf{r}_{n+2})&=x_{n+1}x_{n+2}+y_{n+1}y_{n+2}+z_{n+1}z_{n+2}=l_{n+1,\,n+2}
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Правые части этих уравнений, т.е. косинусы дуг между квазарами, нам известны. Из системы уравнений (3) находим:

$$x_{n+2}=\frac{\Delta_x}{\Delta} \quad y_{n+2}=\frac{\Delta_y}{\Delta} \quad z_{n+2}=\frac{\Delta_z}{\Delta}, \tag{4}$$

где

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} & z_{n-1}\\ x_n & y_n & z_n\\ x_{n+1} & y_{n+1} & z_{n+1}\end{vmatrix} \quad \Delta_x=\begin{vmatrix} l_{n-1,\,n+2} & y_{n-1} & z_{n-1}\\ l_{n,\,n+2} & y_n & z_n\\ l_{n+1,\,n+2} & y_{n+1} & z_{n+1}\end{vmatrix}$$
$$\Delta_y=\begin{vmatrix} x_{n-1} & l_{n-1,\,n+2} & z_{n-1}\\ x_n & l_{n,\,n+2} & z_n\\ x_{n+1} & l_{n+1,\,n+2} & z_{n+1}\end{vmatrix} \quad \Delta_z=\begin{vmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} & l_{n-1,\,n+2}\\ x_n & y_n & l_{n,\,n+2}\\ x_{n+1} & y_{n+1} & l_{n+1,\,n+2}\end{vmatrix} \tag{5}$$

Мы получили своего рода рекурентные формулы (4), которые дают возможность по известным координатам трех квазаров, не лежащих на одном большом круге, вычислять координаты всех остальных квазаров. Зная координаты квазаров, нетрудно вычислить моменты инерции (1).

Для определения ориентации искомого эллипсоида инерции в системе координат x, y, z поступим следующим образом. Представим себе, что кроме системы координат x, y, z с началом в том же барицентре имеется система координат x', y', z' произвольно ориентированная относительно системы координат x, y, z. Если взаимную ориентацию этих систем задать с помощью направляющих косинусов, то имеют место следующие формулы для пересчета моментов инерции (1) из одной системы координат в другую [8]:

$$I_x=(\mathbf{ii}')^2 I_{x'}+(\mathbf{ij}')^2 I_{y'}+(\mathbf{ik}')^2 I_{z'}-2(\mathbf{ii}')(\mathbf{ij}')I_{x'y'}-$$
$$-2(\mathbf{ij}')(\mathbf{ik}')I_{y'z'}-2(\mathbf{ik}')(\mathbf{ii}')I_{z'x'} \tag{6}$$

$$I_y=(\mathbf{j}\mathbf{i}')^2 I_{x'}+(\mathbf{j}\mathbf{j}')^2 I_{y'}+(\mathbf{j}\mathbf{k}')^2 I_{z'}-2(\mathbf{j}\mathbf{i}')(\mathbf{j}\mathbf{j}')I_{x'y'}-$$
$$-2(\mathbf{j}\mathbf{j}')(\mathbf{j}\mathbf{k}')I_{y'z'}-2(\mathbf{j}\mathbf{k}')(\mathbf{j}\mathbf{i}')I_{zx'} \qquad (7)$$

$$I_z=(\mathbf{k}\mathbf{i}')^2 I_{x'}+(\mathbf{k}\mathbf{j}')^2 I_{y'}+(\mathbf{k}\mathbf{k}')^2 I_{z'}-2(\mathbf{k}\mathbf{i}')(\mathbf{k}\mathbf{j}')I_{x'y'}-$$
$$-2(\mathbf{k}\mathbf{j}')(\mathbf{k}\mathbf{k}')I_{y'z'}-2(\mathbf{k}\mathbf{k}')(\mathbf{k}\mathbf{i}')I_{z'x'} \qquad (8)$$

$$I_{xy}=-(\mathbf{i}\mathbf{i}')(\mathbf{j}\mathbf{i}')I_{x'}-(\mathbf{i}\mathbf{j}')(\mathbf{j}\mathbf{j}')I_{y'}-(\mathbf{i}\mathbf{k}')(\mathbf{j}\mathbf{k}')I_{z'}+$$
$$+[(\mathbf{i}\mathbf{i}')(\mathbf{j}\mathbf{j}')+(\mathbf{i}\mathbf{j}')(\mathbf{j}\mathbf{i}')]I_{x'y'}+[(\mathbf{i}\mathbf{j}')(\mathbf{j}\mathbf{k}')+(\mathbf{i}\mathbf{k}')(\mathbf{j}\mathbf{j}')]I_{y'z'}+$$
$$+[(\mathbf{i}\mathbf{k}')(\mathbf{j}\mathbf{i}')+(\mathbf{i}\mathbf{i}')(\mathbf{j}\mathbf{k}')]I_{z'x'} \qquad (9)$$

$$I_{yz}=-(\mathbf{j}\mathbf{i}')(\mathbf{k}\mathbf{i}')I_{x'}-(\mathbf{j}\mathbf{j}')(\mathbf{k}\mathbf{j}')I_{y'}-(\mathbf{j}\mathbf{k}')(\mathbf{k}\mathbf{k}')I_{z'}+$$
$$+[(\mathbf{j}\mathbf{i}')(\mathbf{k}\mathbf{j}')+(\mathbf{j}\mathbf{j}')(\mathbf{k}\mathbf{i}')]I_{x'y'}+[(\mathbf{j}\mathbf{j}')(\mathbf{k}\mathbf{k}')+(\mathbf{j}\mathbf{k}')(\mathbf{k}\mathbf{j}')]I_{y'z'}+$$
$$+[(\mathbf{j}\mathbf{k}')(\mathbf{k}\mathbf{i}')+(\mathbf{j}\mathbf{i}')(\mathbf{k}\mathbf{k}')]I_{z'x'} \qquad (10)$$

$$I_{zx}=-(\mathbf{k}\mathbf{i}')(\mathbf{i}\mathbf{i}')I_{x'}-(\mathbf{k}\mathbf{j}')(\mathbf{i}\mathbf{j}')I_{y'}-(\mathbf{k}\mathbf{k}')(\mathbf{i}\mathbf{k}')I_{z'}+$$
$$+[(\mathbf{k}\mathbf{i}')(\mathbf{i}\mathbf{j}')+(\mathbf{k}\mathbf{j}')(\mathbf{i}\mathbf{i}')]I_{x'y'}+[(\mathbf{k}\mathbf{j}')(\mathbf{i}\mathbf{k}')+(\mathbf{k}\mathbf{k}')(\mathbf{i}\mathbf{j}')]I_{y'z'}+$$
$$+[(\mathbf{k}\mathbf{k}')(\mathbf{i}\mathbf{i}')+(\mathbf{k}\mathbf{i}')(\mathbf{i}\mathbf{k}')]I_{z'x'} \qquad (11)$$

Здесь: $I_{x'}$, $I_{y'}$, $I_{z'}$, $I_{x'y'}$, $I_{y'z'}$, $I_{z'x'}$ — осевые и центробежные моменты инерции относительно осей системы координат (x', y', z'); $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — орты в направлении осей x, y, z; $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ — орты в направлении осей x', y', z'.

Поскольку штрихованная система координат в математическом отношении ничем не выделена перед системой координат x, y, z, то для получения обратных формул, т. е. формул для выражения моментов инерции относительно осей x', y', z' достаточно в формулах (6—11) перенести штрихи от заштрихованных значков к нештрихованным. В результате получим:

$$I_{x'}=(\mathbf{i}'\mathbf{i})^2 I_x+(\mathbf{i}'\mathbf{j})^2 I_y+(\mathbf{i}'\mathbf{k})^2 I_z-2(\mathbf{i}'\mathbf{i})(\mathbf{i}'\mathbf{j})I_{xy}-$$
$$-2(\mathbf{i}'\mathbf{j})(\mathbf{i}'\mathbf{k})I_{yz}-2(\mathbf{i}'\mathbf{k})(\mathbf{i}'\mathbf{i})I_{zx} \qquad (6)'$$

$$I_{y'}=(\mathbf{j}'\mathbf{i})^2 I_x+(\mathbf{j}'\mathbf{j})^2 I_y-(\mathbf{j}'\mathbf{k})^2 I_z-2(\mathbf{j}'\mathbf{i})(\mathbf{j}'\mathbf{j})I_{xy}-$$
$$-2(\mathbf{j}'\mathbf{j})(\mathbf{j}'\mathbf{k})I_{yz}-2(\mathbf{j}'\mathbf{k})(\mathbf{j}'\mathbf{i})I_{zx} \qquad (7)'$$

$$I_{z'}=(\mathbf{k}'\mathbf{i})^2 I_x+(\mathbf{k}'\mathbf{j})^2 I_y+(\mathbf{k}'\mathbf{k})^2 I_z-2(\mathbf{k}'\mathbf{i})(\mathbf{k}'\mathbf{j})I_{xy}-$$
$$-2(\mathbf{k}'\mathbf{j})(\mathbf{k}'\mathbf{k})I_{yz}-2(\mathbf{k}'\mathbf{k})(\mathbf{k}'\mathbf{i})I_{zx} \qquad (8)'$$

$$I_{x'y'}=-(\mathbf{i}'\mathbf{i})(\mathbf{j}'\mathbf{i})I_x-(\mathbf{i}'\mathbf{j})(\mathbf{j}'\mathbf{j})I_y-(\mathbf{i}'\mathbf{k})(\mathbf{j}'\mathbf{k})I_z+$$
$$+[(\mathbf{i}'\mathbf{i})(\mathbf{j}'\mathbf{j})+(\mathbf{i}'\mathbf{j})(\mathbf{j}'\mathbf{i})]I_{xy}+[(\mathbf{i}'\mathbf{j})(\mathbf{j}'\mathbf{k})+(\mathbf{i}'\mathbf{k})(\mathbf{j}'\mathbf{j})]I_{yz}+$$
$$+[(\mathbf{i}'\mathbf{k})(\mathbf{j}'\mathbf{i})+(\mathbf{i}'\mathbf{i})(\mathbf{j}'\mathbf{k})]I_{zx} \qquad (9)'$$

$$I_{y'z'}=-(\mathbf{j}'\mathbf{i})(\mathbf{k}'\mathbf{i})I_x-(\mathbf{j}'\mathbf{j})(\mathbf{k}'\mathbf{j})I_y-(\mathbf{j}'\mathbf{k})(\mathbf{k}'\mathbf{k})I_z+$$
$$+[(\mathbf{j}'\mathbf{i})(\mathbf{k}'\mathbf{j})+(\mathbf{j}'\mathbf{j})(\mathbf{k}'\mathbf{i})]I_{xy}+[(\mathbf{j}'\mathbf{j})(\mathbf{k}'\mathbf{k})+(\mathbf{j}'\mathbf{k})(\mathbf{k}'\mathbf{j})]I_{yz}+$$
$$+[(\mathbf{j}'\mathbf{k})(\mathbf{k}'\mathbf{i})+(\mathbf{j}'\mathbf{i})(\mathbf{k}'\mathbf{k})]I_{zx} \qquad (10)'$$

$$I_{z'x'}=-(\mathbf{k}'\mathbf{i})(\mathbf{i}'\mathbf{i})I_x-(\mathbf{k}'\mathbf{j})(\mathbf{i}'\mathbf{j})I_y-(\mathbf{k}'\mathbf{k})(\mathbf{i}'\mathbf{k})I_z+$$
$$+[(\mathbf{k}'\mathbf{i})(\mathbf{i}'\mathbf{j})+(\mathbf{k}'\mathbf{j})(\mathbf{i}'\mathbf{i})]I_{xy}+[(\mathbf{k}'\mathbf{j})(\mathbf{i}'\mathbf{k})+(\mathbf{k}'\mathbf{k})(\mathbf{i}'\mathbf{j})]I_{yz}+$$
$$+[(\mathbf{k}'\mathbf{k})(\mathbf{i}'\mathbf{i})+(\mathbf{k}'\mathbf{i})(\mathbf{i}'\mathbf{k})]I_{zx} \qquad (11)'$$

Поскольку эллипсоид инерции в общем случае — трехосный, то представим себе, что после некоторых поворотов системы координат x', y', z' относительно системы координат x, y, z, ось x' совпала с длинной главной осью эллипсоида, ось z' с малой осью, а ось y' совпала со средней главной осью эллипсоида инерции. В этом случае центробежные моменты инерции исчезнут, т. е. будет иметь место тождество:

$$I_{x'y'}=I_{y'z'}=I_{z'x'}=0.$$

Заменяя в этом случае обозначения x', y', z' на $x_\text{г}$, $y_\text{г}$, $z_\text{г}$, вместо уравнений (6—11) получим:

$$I_x=(\mathbf{i}\mathbf{i}_\text{г})^2 I_{x_\text{г}}+(\mathbf{i}\mathbf{j}_\text{г})^2 I_{y_\text{г}}+(\mathbf{i}\mathbf{k}_\text{г})^2 I_{z_\text{г}} \qquad (6)''$$

$$I_y=(\mathbf{j}\mathbf{i}_\text{г})^2 I_{x_\text{г}}+(\mathbf{j}\mathbf{j}_\text{г})^2 I_{y_\text{г}}+(\mathbf{j}\mathbf{k}_\text{г})^2 I_{z_\text{г}} \qquad (7)''$$

$$I_z=(\mathbf{k}\mathbf{i}_\text{г})^2 I_{x_\text{г}}+(\mathbf{k}\mathbf{j}_\text{г})^2 I_{y_\text{г}}+(\mathbf{k}\mathbf{k}_\text{г})^2 I_{z_\text{г}} \qquad (8)''$$

$$I_{xy}=-(\mathbf{i}\mathbf{i}_\text{г})(\mathbf{j}\mathbf{i}_\text{г})I_{x_\text{г}}-(\mathbf{i}\mathbf{j}_\text{г})(\mathbf{j}\mathbf{j}_\text{г})I_{y_\text{г}}-(\mathbf{i}\mathbf{k}_\text{г})(\mathbf{j}\mathbf{k}_\text{г})I_{z_\text{г}} \qquad (9)''$$

$$I_{yz}=-(\mathbf{j}\mathbf{i}_\text{г})(\mathbf{k}\mathbf{i}_\text{г})I_{x_\text{г}}-(\mathbf{j}\mathbf{j}_\text{г})(\mathbf{k}\mathbf{j}_\text{г})I_{y_\text{г}}-(\mathbf{j}\mathbf{k}_\text{г})(\mathbf{k}\mathbf{k}_\text{г})I_{z_\text{г}} \qquad (10)''$$

$$I_{zx}=-(\mathbf{k}\mathbf{i}_\text{г})(\mathbf{i}\mathbf{i}_\text{г})I_{x_\text{г}}-(\mathbf{k}\mathbf{j}_\text{г})(\mathbf{i}\mathbf{j}_\text{г})I_{y_\text{г}}-(\mathbf{k}\mathbf{k}_\text{г})(\mathbf{i}\mathbf{k}_\text{г})I_{z_\text{г}} \qquad (11)''$$

Здесь $I_{x_\text{г}}$, $I_{y_\text{г}}$, $I_{z_\text{г}}$ — моменты инерции системы материальных точек относительно главных осей $x_\text{г}$, $y_\text{г}$, $z_\text{г}$ эллипсоида инерции.

Известно, что из моментов инерции (1) можно составить три инварианта не меняющихся при любых поворотах системы координат (x, y, z) относительно системы материальных точек. Эти инварианты имеют вид [10]:

$$I_1=I_x+I_y+I_z=I_{x_\text{г}}+I_{y_\text{г}}+I_{z_\text{г}} \qquad (12)$$

$$I_2=(I_xI_y-I_{xy}^2)+(I_yI_z-I_{yz}^2)+(I_zI_x-I_{zx}^2)=$$
$$=I_{x_\text{г}}I_{y_\text{г}}+I_{y_\text{г}}I_{z_\text{г}}+I_{z_\text{г}}I_{x_\text{г}} \qquad (13)$$

$$I_3=I_xI_yI_z-I_xI_{yz}^2-I_yI_{zx}^2-I_zI_{xy}^2-2I_{xy}I_{yz}I_{zx}=I_{x_\text{г}}I_{y_\text{г}}I_{z_\text{г}} \qquad (14)$$

В справедливости инвариантов (12—14) можно убедиться, если подставить величины I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} из (6—11)$''$ в уравнения (12—14) с учетом условий ортогональности.

Из уравнений (12—14) видно, что согласно теореме Виета величины $I_{x_\text{г}}$, $I_{y_\text{г}}$, $I_{z_\text{г}}$ являются корнями следующего кубического уравнения:

$$x^3-I_1x^2+I_2x-I_3=0 \qquad (15)$$

Коэффициенты этого уравнения I_1, I_2, I_3 нам известны, поскольку они выражаются через известные величины I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} согласно уравнениям (12—14).

Наибольший корень уравнения (15) мы должны обозначить через $I_{z_г}$, наименьший через $I_{x_г}$, а среднее значение корня через $I_{y_г}$, т. к. мы условились, что ось $z_г$ совпадает с малой осью эллипсоида инерции, а $x_г$ — с большой.

Таким образом в уравнениях (6—11)″ в качестве неизвестных остались лишь направляющие косинусы, относительно которых можно разрешить систему уравнений (6—11)″ с учетом условий ортогональности осей.

Заметим, что имеют место два класса условий ортогональности. Первый класс условий ортогональности находится из формул разложения векторов **i**, **j**, **k** по ортам $\mathbf{i}_г$, $\mathbf{j}_г$, $\mathbf{k}_г$:

$$\mathbf{i} = (\mathbf{i}\mathbf{i}_г)\,\mathbf{i}_г + (\mathbf{i}\mathbf{j}_г)\,\mathbf{j}_г + (\mathbf{i}\mathbf{k}_г)\,\mathbf{k}_г$$
$$\mathbf{j} = (\mathbf{j}\mathbf{i}_г)\,\mathbf{i}_г + (\mathbf{j}\mathbf{j}_г)\,\mathbf{j}_г + (\mathbf{j}\mathbf{k}_г)\,\mathbf{k}_г$$
$$\mathbf{k} = (\mathbf{k}\mathbf{i}_г)\,\mathbf{i}_г + (\mathbf{k}\mathbf{j}_г)\,\mathbf{j}_г + (\mathbf{k}\mathbf{k}_г)\,\mathbf{k}_г \qquad (16)$$

В этих формулах уже содержится условие ортогональности векторов $\mathbf{i}_г$, $\mathbf{j}_г$, $\mathbf{k}_г$ и их нормировка.

Умножая уравнения (16) скалярно на вектора **i**, **j**, **k**, получим три независимых условия ортогональности осей x, y, z:

$$(\mathbf{i}\mathbf{i}_г)(\mathbf{j}\mathbf{i}_г) + (\mathbf{i}\mathbf{j}_г)(\mathbf{j}\mathbf{j}_г) + (\mathbf{i}\mathbf{k}_г)(\mathbf{j}\mathbf{k}_г) = 0$$
$$(\mathbf{i}\mathbf{i}_г)(\mathbf{k}\mathbf{i}_г) + (\mathbf{i}\mathbf{j}_г)(\mathbf{k}\mathbf{j}_г) + (\mathbf{i}\mathbf{k}_г)(\mathbf{k}\mathbf{k}_г) = 0$$
$$(\mathbf{j}\mathbf{i}_г)(\mathbf{k}\mathbf{i}_г) + (\mathbf{j}\mathbf{j}_г)(\mathbf{k}\mathbf{j}_г) + (\mathbf{j}\mathbf{k}_г)(\mathbf{k}\mathbf{k}_г) = 0 \qquad (17)$$

и три условия нормированности векторов **i**, **j**, **k**:

$$(\mathbf{i}\mathbf{i}_г)^2 + (\mathbf{i}\mathbf{j}_г)^2 + (\mathbf{i}\mathbf{k}_г)^2 = 1$$
$$(\mathbf{j}\mathbf{i}_г)^2 + (\mathbf{j}\mathbf{j}_г)^2 + (\mathbf{j}\mathbf{k}_г)^2 = 1$$
$$(\mathbf{k}\mathbf{i}_г)^2 + (\mathbf{k}\mathbf{j}_г)^2 + (\mathbf{k}\mathbf{k}_г)^2 = 1 \qquad (18)$$

Иногда удобнее пользоваться условиями ортогональности, записанными в другой форме. Они находятся из формул разложения векторов $\mathbf{i}_г$, $\mathbf{j}_г$, $\mathbf{k}_г$ по ортам **i**, **j**, **k**:

$$\mathbf{i}_г = (\mathbf{i}\mathbf{i}_г)\,\mathbf{i} + (\mathbf{j}\mathbf{i}_г)\,\mathbf{j} + (\mathbf{k}\mathbf{i}_г)\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{j}_г = (\mathbf{i}\mathbf{j}_г)\,\mathbf{i} + (\mathbf{j}\mathbf{j}_г)\,\mathbf{j} + (\mathbf{k}\mathbf{j}_г)\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{k}_г = (\mathbf{i}\mathbf{k}_г)\,\mathbf{i} + (\mathbf{j}\mathbf{k}_г)\,\mathbf{j} + (\mathbf{k}\mathbf{k}_г)\,\mathbf{k} \qquad (19)$$

Умножая эти уравнения скалярно на вектора $\mathbf{i}_г$, $\mathbf{j}_г$, $\mathbf{k}_г$, получим три независимых условий ортогональности осей $x_г$, $y_г$, $z_г$:

$$(\mathbf{i}\mathbf{i}_г)(\mathbf{i}\mathbf{j}_г) + (\mathbf{j}\mathbf{i}_г)(\mathbf{j}\mathbf{j}_г) + (\mathbf{k}\mathbf{i}_г)(\mathbf{k}\mathbf{j}_г) = 0$$
$$(\mathbf{i}\mathbf{i}_г)(\mathbf{i}\mathbf{k}_г) + (\mathbf{j}\mathbf{i}_г)(\mathbf{j}\mathbf{k}_г) + (\mathbf{k}\mathbf{i}_г)(\mathbf{k}\mathbf{k}_г) = 0$$
$$(\mathbf{i}\mathbf{j}_г)(\mathbf{i}\mathbf{k}_г) + (\mathbf{j}\mathbf{j}_г)(\mathbf{j}\mathbf{k}_г) + (\mathbf{k}\mathbf{j}_г)(\mathbf{k}\mathbf{k}_г) = 0 \qquad (20)$$

и три условия нормированности векторов $\mathbf{i}_г$, $\mathbf{j}_г$, $\mathbf{k}_г$:

$$(\mathbf{i}\mathbf{i}_г)^2 + (\mathbf{j}\mathbf{i}_г)^2 + (\mathbf{k}\mathbf{i}_г)^2 = 1$$
$$(\mathbf{i}\mathbf{j}_г)^2 + (\mathbf{j}\mathbf{j}_г)^2 + (\mathbf{k}\mathbf{j}_г)^2 = 1$$
$$(\mathbf{i}\mathbf{k}_г)^2 + (\mathbf{j}\mathbf{k}_г)^2 + (\mathbf{k}\mathbf{k}_г)^2 = 1 \qquad (21)$$

Перейдем к вычислению направляющих косинусов. Прежде всего ликвидируем две неопределенности, относящиеся к знакам направляющих косинусов $(\mathbf{k}\mathbf{k}_г)$ и $(\mathbf{k}\mathbf{i}_г)$. Покажем, что знаки этих направляющих косинусов без нарушения общности решения задачи можно взять положительными. Действительно, как бы не был ориентирован эллипсоид инерции относительно системы координат (x, y, z) всегда одна из малых полуосей эллипсоида с началом в центре эллипсоида будет составлять с осью z острый угол. Выберем это направление малой полуоси за направление оси $z_г$ системы координат $(x_г, y_г, z_г)$.

Большая ось эллипсоида также состоит из двух полуосей, исходящих из начала координат (центра эллипсоида). Выберем ту полуось, которая составляет острый угол с осью z, за положительное направление оси $x_г$. Направление же оси $y_г$ найдется по правилу правого буравчика. Это направление может составлять с осью z как острый, так и тупой угол, т. е. знак направляющего косинуса $(\mathbf{k}, \mathbf{j}_г)$ не может быть выбран произвольно, а задается распределением материальных точек относительно системы координат (xyz).

Для упрощения решения системы уравнений (6—11)″ относительно направляющих косинусов используем следующее свойство моментов инерции.

Оказывается, существуют определенные комбинации из моментов инерции, своего рода новые математические объекты, которые внутри своего круга преобразуются по тем же самым формулам (6—11). Эти объекты имеют следующую структуру.

$$S_x = -I_y I_z + I_{yz}^2 \quad S_{xy} = I_z I_{xy} + I_{yz} I_{zx}$$
$$S_y = -I_z I_x + I_{zx}^2 \quad S_{yz} = I_x I_{yz} + I_{zx} I_{xy}$$
$$S_z = -I_x I_y + I_{xy}^2 \quad S_{zx} = I_y I_{zx} + I_{xy} I_{yz} \qquad (22)$$

Назовем величины S_x, S_y, S_z, S_{xy}, S_{yz}, S_{zx} сложными моментами инерции первого порядка.

Сложными моментами инерции второго порядка назовем величины:

$$(IS)_x = -I_y S_z - S_y I_z + 2 I_{yz} S_{yz}$$
$$(IS)_y = -I_z S_x - S_z I_x + 2 I_{zx} S_{zx}$$
$$(IS)_z = -I_x S_y - S_x I_y + 2 I_{xy} S_{xy} \qquad (23)$$
$$(IS)_{xy} = I_z S_{xy} + I_{yz} S_{zx} + S_z I_{xy} + S_{yz} I_{zx}$$

$$(IS)_{yz} = I_x S_{yz} + I_{zx} S_{xy} + S_x I_{yz} + S_{zx} I_{xy}$$
$$(IS)_{zx} = I_y S_{zx} + I_{xy} S_{yz} + S_y I_{zx} + S_{xy} I_{yz}$$

Учитывая, что величины (22) и (23) при переходе от одной системы координат к другой ведут себя точно также, как обычные моменты инерции (1), в уравнениях (6—11)″ можно заменить реальные моменты инерции соответствующими величинами из (22) или (23). В результате к уравнениям (6—11)″ мы получим в дополнение еще 12 уравнений. Распишем все уравнения следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} I_x &= (\mathbf{ii}_\text{г})^2 I_{x_\text{г}} + (\mathbf{ij}_\text{г})^2 I_{y_\text{г}} + (\mathbf{ik}_\text{г})^2 I_{z_\text{г}} \\ S_x &= (\mathbf{ii}_\text{г})^2 S_{x_\text{г}} + (\mathbf{ij}_\text{г})^2 S_{y_\text{г}} + (\mathbf{ik}_\text{г})^2 S_{z_\text{г}} \\ (IS)_x &= (\mathbf{ii}_\text{г})^2 (IS)_{x_\text{г}} + (\mathbf{ij}_\text{г})^2 (IS)_{y_\text{г}} + (\mathbf{ik}_\text{г})^2 (IS)_{z_\text{г}} \end{aligned}\right. \qquad (24)$$

$$\left.\begin{aligned} I_y &= (\mathbf{ji}_\text{г})^2 I_{x_\text{г}} + (\mathbf{jj}_\text{г})^2 I_{y_\text{г}} + (\mathbf{jk}_\text{г})^2 I_{z_\text{г}} \\ S_y &= (\mathbf{ji}_\text{г})^2 S_{x_\text{г}} + (\mathbf{jj}_\text{г})^2 S_{y_\text{г}} + (\mathbf{jk}_\text{г})^2 S_{z_\text{г}} \\ (IS)_y &= (\mathbf{ji}_\text{г})^2 (IS)_{x_\text{г}} + (\mathbf{jj}_\text{г})^2 (IS)_{y_\text{г}} + (\mathbf{jk}_\text{г})^2 (IS)_{z_\text{г}} \end{aligned}\right. \qquad (25)$$

$$\left.\begin{aligned} I_z &= (\mathbf{ki}_\text{г})^2 I_{x_\text{г}} + (\mathbf{kj}_\text{г})^2 I_{y_\text{г}} + (\mathbf{kk}_\text{г})^2 I_{z_\text{г}} \\ S_z &= (\mathbf{ki}_\text{г})^2 S_{x_\text{г}} + (\mathbf{kj}_\text{г})^2 S_{y_\text{г}} + (\mathbf{kk}_\text{г})^2 S_{z_\text{г}} \\ (IS)_z &= (\mathbf{ki}_\text{г})^2 (IS)_{x_\text{г}} + (\mathbf{kj}_\text{г})^2 (IS)_{y_\text{г}} + (\mathbf{kk}_\text{г})^2 (IS)_{z_\text{г}} \end{aligned}\right. \qquad (26)$$

$$\left.\begin{aligned} I_{xy} &= -(\mathbf{ii}_\text{г})(\mathbf{ji}_\text{г}) I_{x_\text{г}} - (\mathbf{ij})_\text{г}(\mathbf{jj}_\text{г}) I_{y_\text{г}} - (\mathbf{ik}_\text{г})(\mathbf{jk}_\text{г}) I_{z_\text{г}} \\ S_{xy} &= -(\mathbf{ii}_\text{г})(\mathbf{ji}_\text{г}) S_{x_\text{г}} - (\mathbf{ij}_\text{г})(\mathbf{jj}_\text{г}) S_{y_\text{г}} - (\mathbf{ik}_\text{г})(\mathbf{jk}_\text{г}) S_{z_\text{г}} \\ (IS)_{xy} &= -(\mathbf{ii}_\text{г})(\mathbf{ji}_\text{г}) (IS)_{x_\text{г}} - (\mathbf{ij}_\text{г})(\mathbf{jj}_\text{г}) (IS)_{y_\text{г}} - (\mathbf{ik}_\text{г})(\mathbf{jk}_\text{г}) (IS)_{z_\text{г}} \end{aligned}\right. \qquad (27)$$

$$\left.\begin{aligned} I_{yz} &= -(\mathbf{ji}_\text{г})(\mathbf{ki}_\text{г}) I_{x_\text{г}} - (\mathbf{jj}_\text{г})(\mathbf{kj}_\text{г}) I_{y_\text{г}} - (\mathbf{jk}_\text{г})(\mathbf{kk}_\text{г}) I_{z_\text{г}} \\ S_{yz} &= -(\mathbf{ji}_\text{г})(\mathbf{ki}_\text{г}) S_{x_\text{г}} - (\mathbf{jj}_\text{г})(\mathbf{kj}_\text{г}) S_{y_\text{г}} - (\mathbf{jk}_\text{г})(\mathbf{kk}_\text{г}) S_{z_\text{г}} \\ (IS)_{yz} &= -(\mathbf{ji}_\text{г})(\mathbf{ki}_\text{г}) (IS)_{x_\text{г}} - (\mathbf{jj}_\text{г})(\mathbf{kj}_\text{г}) (IS)_{y_\text{г}} - (\mathbf{jk})_\text{г})(\mathbf{kk}_\text{г}) (IS)_{z_\text{г}} \end{aligned}\right. \qquad (28)$$

$$\left.\begin{aligned} I_{zx} &= -(\mathbf{ki}_\text{г})(\mathbf{ii}_\text{г}) I_{x_\text{г}} - (\mathbf{kj}_\text{г})(\mathbf{ij}_\text{г}) I_{y_\text{г}} - (\mathbf{kk}_\text{г})(\mathbf{ik}_\text{г}) I_{z_\text{г}} \\ S_{zx} &= -(\mathbf{ki}_\text{г})(\mathbf{ii}_\text{г}) S_{x_\text{г}} - (\mathbf{kj}_\text{г})(\mathbf{ij}_\text{г}) S_{y_\text{г}} - (\mathbf{kk}_\text{г})(\mathbf{ik}_\text{г}) S_{z_\text{г}} \\ (IS)_{zx} &= -(\mathbf{ki}_\text{г})(\mathbf{ii}_\text{г}) (IS)_{x_\text{г}} - (\mathbf{kj}_\text{г})(\mathbf{ij}_\text{г}) (IS)_{y_\text{г}} - (\mathbf{kk}_\text{г})(\mathbf{ik}_\text{г}) (IS)_{z_\text{г}} \end{aligned}\right. \qquad (29)$$

Из уравнений (24—29) с учетом условий ортогональности (20) однозначно определяются все направляющие косинусы.

Система восемнадцати уравнений (24—29), содержащая 9 неизвестных (направляющих косинусов), очевидно, является избыточной, но совместной системой. Существует много способов решения полученной системы уравнений. Например, из первых девяти уравнений можно найти абсолютные величины всех направляющих косинусов. Остальные 9 уравнений помогут нам определить знаки направляющих косинусов.

Зная направляющие косинусы, задающие ориентацию системы координат ($x_\text{г}$, $y_\text{г}$, $z_\text{г}$) относительно вспомогательной системы координат (x, y, z), нетрудно пересчитать координаты квазаров из вспомогательной системы в квазарную ($x_\text{г}$, $y_\text{г}$, $z_\text{г}$), которую обозначим теперь через (x^*, y^*, z^*):

$$\left.\begin{aligned} x_i^* &= (\mathbf{ii}_\text{г})\, x_i + (\mathbf{ji}_\text{г})\, y_i + (\mathbf{ki}_\text{г})\, z_i \\ y_i^* &= (\mathbf{ij}_\text{г})\, x_i + (\mathbf{jj}_\text{г})\, y_i + (\mathbf{kj}_\text{г})\, z_i \\ z_i^* &= (\mathbf{ik}_\text{г})\, x_i + (\mathbf{jk}_\text{г})\, y_i + (\mathbf{kk}_\text{г})\, z_i \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

где i — номер квазара.

Сферические координаты (α_i^*, δ_i^*) квазаров (или других объектов) по значениям x_i^*, y_i^*, z_i^* в квазарной системе координат (x^*, y^*, z^*) найдутся из известных формул:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha_i^* \cos\delta_i^* &= x_i^* \\ \sin\alpha_i^* \cos\delta_i^* &= y_i^* \\ \sin\delta_i^* &= z_i^* \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

Ориентацию эллипсоида инерции относительно вспомогательной системы координат (x, y, z) можно определить также через углы Эйлера:

$\psi_\text{г}$ — угол в плоскости xy, отсчитываемый от оси x до линии узлов, образуемой пересечением плоскости $x_\text{г}y_\text{г}$ с плоскостью xy (для однозначности условимся отсчитывать этот угол от оси x до восходящего узла);

$\theta_\text{г}$ — угол, образованный плоскостью $x_\text{г}y_\text{г}$ с плоскостью xy, или угол между осями $z_\text{г}$ и z;

$\varphi_\text{г}$ — угол в плоскости $x_\text{г}y_\text{г}$, отсчитываемый от восходящего узла до оси $x_\text{г}$.

Для определения $\psi_\text{г}$, $\theta_\text{г}$, $\varphi_\text{г}$ введем две промежуточные системы координат: (x_1, y_1, z_1) — система координат, повернутая относительно исходной системы (x, y, z) лишь вокруг оси z на угол $\psi_\text{г}$ (ось x_1 совпадает с линией узлов); (x_2, y_2, z_2) — система координат, отличающаяся от системы координат (x_1, y_1, z_1) лишь поворотом вокруг линии узлов на угол $\theta_\text{г}$. Очевидно, ось x_2 также совпадает с линией узлов. Поворот системы координат (x_2, y_2, z_2) вокруг оси z_2 на угол $\varphi_\text{г}$ приведет к совмещению ее с системой координат ($x_\text{г}$, $y_\text{г}$, $z_\text{г}$), относительно осей которой центробежные моменты равны нулю.

Выражения направляющих косинусов, задающих ориентацию произвольной системы координат (x', y', z') относительно исходной системы координат (x, y, z), через углы Эйлера могут быть выведены из рассмотрения сферических треугольников. Они приведены, например, в [11], а также в ([8], с. 186) и имеют следующий вид:

	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}'$	$\cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\cos\theta\sin\varphi$	$\sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\cos\theta\sin\varphi$	$\sin\theta\sin\varphi$
$\mathbf{j}'$	$-\cos\psi\sin\varphi-$ $-\sin\psi\cos\theta\cos\varphi$	$-\sin\psi\sin\varphi+$ $+\cos\psi\cos\theta\cos\varphi$	$\sin\theta\cos\varphi$
$\mathbf{k}'$	$\sin\psi\sin\theta$	$-\cos\psi\sin\theta$	$\cos\theta$

(32)

Если $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ связаны с главными осями эллипсоида инерции, т. е. $\mathbf{i}'=\mathbf{i}_г$, $\mathbf{j}'=\mathbf{j}_г$, $\mathbf{k}'=\mathbf{k}_г$, то в этом случае $\psi=\psi_г$, $\theta=\theta_г$, $\varphi=\varphi_г$.

Лемма: центробежный момент инерции относительно главной оси и любой другой оси, перпендикулярной к ней, равен нулю.

По определению:

$$I_{x_г y_г}=I_{y_г z_г}=I_{z_г x_г}=0 \tag{33}$$

Покажем сначала, что если ось z_2 системы координат (x_2, y_2, z_2) является главной, то будет иметь место равенство:

$$I_{y_2 z_2}=I_{z_2 x_2}=0 \tag{34}$$

даже, если оси x_2 и y_2 не совпадают с главными осями эллипсоида инерции.

Из условия построения системы координат (x_2, y_2, z_2) вытекает, что ось z_2 действительно совпадает с главной осью $z_г$. Любая другая система координат (x', y', z_2) будет отличаться от системы координат (x_2, y_2, z_2) поворотом на некоторый угол φ вокруг оси z_2.

Центробежные моменты инерции $I_{y_2 z_2}$ и $I_{z_2 x_2}$ могут быть выражены через моменты инерции относительно осей x', y', z_2 и угол Эйлера φ, для чего достаточно в уравнениях (10) и (11) положить:

$$x\to x_2,\quad y\to y_2,\quad z\to z_2,\quad z'\to z_2,\quad \psi=\psi_г=0,\quad \theta=\theta_г=0$$

В результате получим:

$$\left.\begin{aligned} I_{y_2 z_2}&=I_{y' z_2}\cos\varphi+I_{z_2 x'}\sin\varphi\\ I_{z_2 x_2}&=-I_{y' z_2}\sin\varphi+I_{z_2 x'}\cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Повернем систему координат (x', y', z_2) вокруг оси z_2 на такой угол φ, чтобы оси x' и y' совпали с главными осями эллипсоида инерции ($x_г$ и $y_г$). Очевидно, при поворотах на любой угол φ величины $I_{y_2 z_2}$ и $I_{z_2 x_2}$ не будут меняться, поскольку система координат (x_2, y_2, z_2) неподвижна относительно эллипсоида инерции.

Тогда, вместо (35) в силу (33) получим:

$$\left.\begin{aligned} I_{y_2 z_2}&=I_{y_г z_г}\cos\varphi_г+I_{z_г x_г}\sin\varphi_г\equiv 0\\ I_{z_2 x_2}&=-I_{y_г z_г}\sin\varphi_г+I_{z_г x_г}\cos\varphi_г\equiv 0 \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Поскольку оси x_2 и y_2 физически ничем не связаны с эллипсоидом инерции, то можно написать в общем случае:

$$I_{y' z_2}=I_{z_2 x'}=0$$

Лемма доказана.

Теперь можно получить формулы для выражения углов Эйлера $\psi_г$, $\theta_г$, $\varphi_г$, задающих ориентацию эллипсоида инерции в исходной системе координат (x, y, z), через моменты инерции (1) относительно осей этой системы координат.

Получим сначала формулу для определения $\psi_г$.

Пусть исходной системой координат является система (x_1, y_1, z_1), которая получена путем поворота системы координат (x, y, z) вокруг оси z на угол $\psi_г$, а конечной системой координат является система (x_2, y_2, z_2), которая получена путем поворота системы координат (x_1, y_1, z_1) вокруг оси x_1 (линии узлов) на угол $\theta_г$. Найдем выражения центробежных моментов инерции $I_{y_2 z_2}$ и $I_{z_2 x_2}$ через моменты инерции относительно осей x_1, y_1, z_1 и угол $\theta_г$. Для этого в уравнениях $(10)'$ и $(11)'$ мы должны положить (с учетом (32)):

$$x\to x_1,\quad y\to y_1,\quad z\to z_1,\quad x'\to x_2,\quad y'\to y_2,\quad z'\to z_2;$$
$$\psi=0,\quad \theta=\theta_г,\quad \varphi=0.$$

В результате получим:

$$\left.\begin{aligned} I_{y_2 z_2}&=\frac{1}{2}(I_{y_1}-I_{z_1})\sin 2\theta_г+I_{y_1 z_1}\cos 2\theta_г\\ I_{z_2 x_2}&=-I_{x_1 y_1}\sin\theta_г+I_{z_1 x_1}\cos\theta_г \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Однако, согласно доказанной лемме левые части уравнений (37) тождественно равны нулю, так что уравнения (37) дают:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\theta_г&=\frac{2I_{y_1 z_1}}{I_{z_1}-I_{y_1}}\\ \operatorname{tg}\theta_г&=\frac{I_{z_1 x_1}}{I_{x_1 y_1}} \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Подставляя выражения (38) в тригонометрическое тождество

$$\operatorname{tg} 2\theta_г=\frac{2\operatorname{tg}\theta_г}{1-\operatorname{tg}^2\theta_г}, \tag{39}$$

получим соотношение:

$$I_{y_1 z_1}\left(I_{x_1 y_1}^2-I_{z_1 x_1}^2\right)=I_{x_1 z_1}I_{x_1 y_1}(I_{z_1}-I_{y_1}) \tag{40}$$

Все входящие в соотношение (40) моменты инерции относительно осей x_1, y_1, z_1 выражаются через моменты инерции относительно осей исходной системы координат (x, y, z) и искомый угол $\psi_г$. Действительно, если в уравнениях $(6\text{—}11)'$ положить: $x'\to x_1$, $y'\to y_1$, $z'\to z_1$, $\theta=\varphi=0$, $\psi=\psi_г$, то получим:

$$I_{x_1}=I_x\cos^2\psi_г+I_y\sin^2\psi_г-I_{xy}\sin 2\psi_г \qquad (41)$$

$$\left.\begin{aligned} I_{y_1}&=I_x\sin^2\psi_г+I_y\cos^2\psi_г+I_{xy}\sin 2\psi_г\\ I_{z_1}&=I_z\\ I_{x_1y_1}&=\frac{1}{2}(I_x-I_y)\sin 2\psi_г+I_{xy}\cos 2\psi_г\\ I_{y_1z_1}&=I_{yz}\cos\psi_г-I_{zx}\sin\psi_г\\ I_{z_1x_1}&=I_{yz}\sin\psi_г+I_{zx}\cos\psi_г \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

Подставляя (42) в (40), после некоторых преобразований получим уравнение для определения $\psi_г$:

$$\begin{aligned}&[I_{xy}S_{yz}-S_{xy}I_{yz}]\operatorname{tg}^3\psi_г+[(S_x-S_y)I_{yz}-(I_x-I_y)S_{yz}+\\&+(S_{zx}I_{xy}-I_{zx}S_{xy})]\operatorname{tg}^2\psi_г+[I_{zx}(S_x-S_y)-S_{zx}(I_x-I_y)-\\&-(I_{xy}S_{yz}-S_{xy}I_{yz})]\operatorname{tg}\psi_г-[S_{zx}I_{xy}-I_{zx}S_{xy}]=0 \qquad (43)\end{aligned}$$

Уравнение получилось кубическим в соответствии с тем, что в плоскости xy имеется три линии узлов, образованные пересечением с этой плоскостью трех главных плоскостей эллипсоида инерции.

После решения уравнения (43) относительно $\operatorname{tg}\psi_г$ из шести возможных значений угла $\psi_г$ необходимо выделить такое, которое задавало бы угловое расстояние от оси x до восходящего узла той главной плоскости, которая перпендикулярна малой оси эллипсоида инерции. Для этого достаточно знать направление оси $z_г$. В первом приближении его можно определить по таблице, содержащей значения осевых моментов инерции относительно осей дискретных направлений (взятых, например, через каждые пять градусов по всей небесной сфере), которые вычисляются по формуле:

$$I_l=\sum^{N}[\mathbf{l}^0\times\mathbf{r}_i^0]^2, \qquad (44)$$

где $\mathbf{l}^0$ — единичный вектор, задающий направление оси l, $\mathbf{r}_i^0$ — единичный вектор, задающий направление на i-й квазар. Направление оси, относительно которой I_l максимально, и будет являться приблизительно искомым направлением $z_г$, которое поможет определить угол $\psi_г$, т. к. линия узлов всегда перпендикулярна проекции оси $z_г$ на плоскость xy.

После того, как будет выделено точное значение угла $\psi_г$, можно определить величину угла $\theta_г$, использовав для этого либо первое, либо второе уравнение из (38) и взять то его значение, которое меньше 90° (в соответствии с договоренностью, что угол между осями z и $z_г$ должен быть острым).

Зная угол $\theta_г$ и моменты инерции относительно осей x_1, y_1, z_1, из уравнений (6—11)′ находим моменты инерции относительно осей x_2, y_2, z_2:

$$\left.\begin{aligned} I_{x_2}&=I_{x_1}\\ I_{y_2}&=I_{y_1}\cos^2\theta_г+I_{z_1}\sin^2\theta_г-I_{y_1z_1}\sin 2\theta_г\\ I_{z_2}&=I_{y_1}\sin^2\theta_г+I_{z_1}\cos^2\theta_г+I_{y_1z_1}\sin 2\theta_г\\ I_{x_2y_2}&=I_{x_1y_1}\cos\theta_г+I_{x_1z_1}\sin\theta_г\\ I_{x_2z_2}&=I_{y_2z_2}=0 \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

Последний угол Эйлера $\varphi_г$ найдется из уравнений, которые вытекают, например, из (6—11)″ при $x\to x_2$, $y\to y_2$, $z\to z_2$; $\psi=\theta=0$, $\varphi=\varphi_г$, а именно:

$$\left.\begin{aligned} I_{x_2}&=I_{x_г}\cos^2\varphi_г+I_{y_г}\sin^2\varphi_г\\ I_{y_2}&=I_{x_г}\sin^2\varphi_г+I_{y_г}\cos^2\varphi_г\\ I_{x_2y_2}&=\frac{I_{y_г}-I_{x_г}}{2}\sin 2\varphi_г \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

Переходя к изложению практических результатов, заметим, что каталог астрометрических квазаров [5], который положен нами в фундамент неподвижной системы координат, представляет собою список координат 128 квазаров в экваториальной системе координат. Следовательно, роль вспомогательной системы координат в данном случае будет играть экваториальная система координат. Каталог [5] отнесен на эпоху 1950.0.

При построении системы координат был использован как метод направляющих косинусов, так и метод углов Эйлера. Разумеется, оба метода дали одинаковые результаты, поскольку они взаимосвязаны: один вытекает из другого. Однако, определять ориентацию одной системы координат относительно другой через углы Эйлера оказалось сложнее, чем через направляющие косинусы.

Построенный нами эллипсоид инерции на 128 астрометрических квазарах характеризуется следующими параметрами.

1. Моменты инерции относительно главных осей:

$$I_{x_г}=74.17916140$$

$$I_{y_г}=80.27220113$$

$$I_{z_г}=101.54863747$$

В сумме они составляют удвоенную величину полярного момента инерции, т. е. 256.

2. Направляющие косинусы осей $x_г$, $y_г$, $z_г$ относительно осей экваториальной системы координат на момент 1950.0:

	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}_г$	+0.90122064	−0.43293217	+0.01915701
$\mathbf{j}_г$	+0.42809876	+0.89378575	+0.13369507
$\mathbf{k}_г$	−0.07435417	−0.11125247	+0.99100466

(эти значения подлежат еще уточнению).

Разумеется, направляющие косинусы будут меняться во времени, но лишь потому, что экваториальная система координат вращается относительно неподвижного эллипсоида инерции, построенного на квазарах.

Полученные здесь результаты не являются окончательными. Предстоит еще выяснить много вопросов, в частности, исследовать устойчивость осей $x_г$, $y_г$, $z_г$ в зависимости от случайных возмущений в положениях квазаров.

Квазарная система координат является радиоастрометрической. Определение координат оптических небесных объектов (звезд, планет и т. д.) в квазарной системе координат предлагается произвести в два этапа. Сначала с помощью РСДБ в квазарной системе координат определяются координаты радиозвезд, несколько десятков которых хорошо наблюдаются в оптическом диапазоне с помощью обычных телескопов. Затем, измеряя дуги между этими радиозвездами и оптическими небесными светилами с помощью специального дугомерного инструмента [12] определяем их координаты в квазарной системе координат.

При пересчете результатов оптических измерений в квазарную систему координат необходимо учитывать возможное несовпадение положений радиозвезд в оптическом и радиодиапазонах.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Ефимов. Определение величины атмосферной рефракции непосредственно из наблюдений звезд. В кн.: XIV Всесоюзная конференция по распространению радиоволн (Ленинград, 1984), М., Наука, 1984, часть 2, с. 58—59.
2. А. А. Ефимов, А. А. Шпитальная. Об анизотропии вспышечной и пятнообразовательной деятельности Солнца в инерциальном пространстве. В сб.: Проблемы исследования Вселенной, вып. 11, Л., 1985, с. 149.
3. А. А. Ефимов, В. П. Рыльков, А. А. Шпитальная. О принципах построения астрономической декартовой системы координат по измерениям дуг. В кн.: Современная астрометрия (по материалам 23 астрометрической конференции СССР), издание Главной астрономической обсерватории АН СССР, Л., 1987, с. 267—271.
4. А. А. Ефимов. К измерению дуг между опорными светилами (о новом направлении в фундаментальной астрометрии). В кн.: Исследования в области истории науки и техники, издание Ленинградского отделения института истории, естествознания и техники АН СССР, Л., 1988, с. 139—141.
5. Astrometric results of 1978—1985 deep space network radio interferometry: the JPL 1987—1 Extragalactic source Catalog. In: The astronomical Journal, vol. 95, N 6, 1647—1658.
6. Физический энциклопедический словарь, М., 1983, с. 247.
7. Я. Б. Зельдович, Р. А. Сюняев. Межгалактический газ в скоплениях галактик, микроволновое фоновое излучение и космология. В сб.: Астрофизика и космическая физика, М., Наука, 1982, с. 47.
8. А. А. Ефимов. Исследование проблемы n тел методом теории гироскопа. В кн.: Проявление космических факторов на Земле и звездах из серии «Проблемы исследования Вселенной» вып. 9, М.—Л., 1980, с. 173—214.
9. В. С. Губанов, А. М. Финкельштейн, П. А. Фридман. Введение в радиоастрометрию. М., Наука, 1983.
10. И. Виттенбург. Динамика систем твердых тел. Изд-во «Мир», Москва, 1980.
11. Ю. А. Архангельский. Аналитическая динамика твердого тела. Изд. «Наука», М., 1977, с. 16.
12. Наст. сборник, с. 265—284.