

которых значение l больше нуля. Этот результат можно легко объяснить. В самом деле, в случае колебаний последнего рода то условие, что жидкость не должна скользить вдоль стенок сосуда, дает для слоев газа, расположенных ближе к поверхности, более значительную деформацию частиц и соответственно с этим большее значение для рассеяния энергии.

Метод функции рассеяния, который мы применяли в § 348 к случаю волн в воде, можно было бы приложить к выводу формулы (12) для *радиальных* колебаний; однако, для $l > 0$ этот метод привел бы к неверному результату, так как лежащее в основе его условие, что движение лишь в незначительной степени зависит от вязкости, не выполняется вблизи от граничной поверхности.

Для самого медленного радиального колебания мы имеем $ka = 4,493$ отсюда следует

$$\tau = 0,0743 \frac{a^2}{\nu}.$$

В случае воздуха при 0°C эта формула дает $\tau = 0,56 a^2$ ¹⁾.

Турбулентное движение.

§ 365. Остается теперь обратить внимание на нерассмотренный до сих пор наиболее трудный вопрос нашего предмета.

Уже было указано, что отбрасывание членов второго порядка $\left(u \frac{\partial u}{\partial x} \text{ и т. д.} \right)$ очень ограничивает приложимость многих из полученных нами выше результатов к жидкостям, обладающим обыкновенной степенью подвижности. В тех случаях, когда скорости или линейные размеры не очень малы, можно установить, насколько это позволяет наблюдение, что действительное движение значительно отклоняется от того движения, которое представляют наши формулы. Если, например, твердое тело обтекаемой формы движется в жидкости, то в слое жидкости, прилегающем к телу, возникает нерегулярное вихревое движение, и за телом образуется цепочка вихрей, тогда как на некотором расстоянии по сторонам движение оказывается сравнительно спокойным и однообразным.

Указанная здесь недостаточность математического анализа не относится к случаям *прямолинейного* течения, такого, как мы исследовали в §§ 330, 331; но даже и здесь наблюдение показывает, что теоретически возможные движения практически при известных условиях становятся неустойчивыми.

Рейнольдс ²⁾ произвел очень тщательные экспериментальные исследования течения жидкости по трубе с круговым сечением по-

¹⁾ Этот параграф с небольшими изменениями взят из указанной на стр. 799 работы автора.

²⁾ Reynolds, An Experimental Investigation of the Circumstances which determine whether the Motion of Water shall be Direct or Sinuous, and of the Law of Resistance in Parallel Channels, Phil. Trans., CLXXIV, 935 (1883) (Papers, II, 51). Исторический обзор этих исследований и относящиеся к этому соображения более ранних авторов можно найти в работе К и н б с а, Proc. Roy. Soc., N. S. W., XXXI, 314 (1897). В частности в этой работе есть ссылки на Гагена, Berl. Abh., 1854, стр. 17.

средством введения в течение окрашенных жидких струек. Опыты Рейнольдса показали, что пока средняя скорость w_0 в сечении не превосходит некоторой границы, зависящей от диаметра трубы и свойств жидкости, движение протекает спокойно, в согласии с законом Пуазейля; случайные возмущения быстро сглаживаются, и режим течения оказывается совершенно устойчивым. Если же w_0 , постепенно возрастая, переходит упомянутую границу, то течение становится все более чувствительным к маленьким возмущениям; но все же, если соблюдать большую осторожность и предохранять поток от возмущений, то плавный прямолинейный характер движения еще может поддерживаться в течение некоторого промежутка времени, пока, наконец, не будет достигнуто такое положение, после которого спокойное движение становится уже невозможным. После того как прямолинейный режим окончательно прекращается, движение становится совершенно беспорядочным, труба оказывается заполненной переплетающимися струйками, которые все время меняют свою форму и пересекают трубу в различных направлениях. Рейнольдс из соображений размерности сделал заключение, что „верхняя критическая скорость“, т. е. верхняя граница средней скорости для плавного прямолинейного движения, должна быть пропорциональна $\frac{\nu}{D}$, где D обозначает диаметр трубы и ν — кинематический коэффициент вязкости.

Так как размерность ν равна L^2T^{-1} , то это выражение и на самом деле представляет единственную возможную комбинацию, имеющую размерность скорости. В результате своих опытов Рейнольдс дал для критической скорости формулу

$$U = \frac{P}{BD}, \quad (1)$$

где P — множитель, представляющий изменение вязкости воды с температурой (по стоградусной шкале) в том виде, как его нашел Пуазейль, именно

$$P = (1 + 0,03368 \theta + 0,00022099 \theta^2)^{-1}$$

и $B = 43,79$; за единицу длины здесь взят метр.

Если пересчитать этот результат на сантиметры, положить $P = \frac{\nu}{\nu_0}$ и взять значение для ν_0 , данное на стр. 721, то для критического отношения получится значение

$$\frac{w_0 D}{\nu} = 12830. \quad (2)$$

Зависимость критической скорости от ν была проверена путем изменения температуры ¹⁾.

¹⁾ Пропорциональность между критической скоростью и кинематическим коэффициентом вязкости ν была установлена для широкого интервала температур Барнесом и Кокером, Proc. R. S., LXXIV, 341 (1904).

Позднейшие наблюдатели получили для числовой постоянной в формуле (2) более высокие значения; многое здесь зависит от того, насколько удастся избежать возмущений ¹⁾.

§ 366. Одновременно с изменением характера движения происходит также и изменение зависимости между градиентом давления $(-\frac{dp}{dz})$ и средней скоростью w_0 .

Пока сохраняется прямолинейная форма движения, градиент, как это было найдено Пуазейлем, пропорционален w_0 , но как только движение становится беспорядочным, турбулентным ²⁾, градиент возрастает быстрее; во многих случаях он возрастает, с большим или меньшим приближением, примерно, как w_0^2 . Это более быстрое возрастание сопротивления без сомнения обусловлено воздействием пульсаций, благодаря которым к стенкам подходят все новые и новые массы жидкости, движущиеся с сравнительно большей скоростью, благодаря чему растет скорость деформации $(\frac{\partial w}{\partial n})$, далеко превосходя то значение, при котором еще возможно правильное „ламинарное“ движение ³⁾.

Рейнольдс нашел, что переход от линейного закона сопротивления к закону сопротивления при турбулентном течении происходит при определенном значении $\frac{w_0 D}{\nu}$. Так как при такого рода опытах едва ли можно избежать возмущающих влияний, то соответствующее значение w_0 следует рассматривать как нижнюю критическую скорость и отличать ее от той, о которой шла речь в § 365. Результат Рейнольдса равносителен соотношению

$$\frac{w_0 D}{\nu} = 2030. \quad (3)$$

Зависимость от ν , как и выше, была проверена путем изменения температуры ⁴⁾.

Некоторые указания на возможные формы закона касательного сопротивления на единицу поверхности стенки трубы можно получить из соображений размерности. Предполагая, что p_{rz} пропорционально $\rho^m \nu^n w_0^r a^s$, мы должны иметь

$$ML^{-1}T^{-2} = (ML^{-3})^m (L^2T^{-1})^n (LT^{-1})^r L^s;$$

¹⁾ Ср. Barnes and Coker (см. выше) и Ekman, Arkiv för Matem., VI (1910). Опыты Экмана были произведены при помощи оригинальной аппаратуры Рейнольдса.

²⁾ Этот очень выразительный термин был введен лордом Кельвином.

³⁾ Ср. Stokes, Papers, I, 99.

⁴⁾ Значения этого нижнего критического числа Рейнольдса, близкие к 2000, были получены из различных экспериментов, см., например, Coker and Clement, Phil. Trans. A, CCI, 45 (1902).

отсюда следует $m = 1$, $s = -n$, $r = 2 - n$, так что должно быть

$$p_{rz} \text{ пропорционально } \rho w_0^2 \left(\frac{v}{w_0 a} \right)^n. \quad (4)$$

Обобщая этот результат, получаем формулу

$$p_{rz} = \rho w_0^2 \cdot f \left(\frac{w_0 a}{v} \right), \quad (5) \quad ^1)$$

Подставляя $n = 1$ в соотношение (4), получим закон Пуазейля для прямолинейного течения. Если же подставить $n = 0$, то получим формулу, которую обычно применяют в гидравлике в случае турбулентного течения в трубе, диаметр которой превосходит известную границу, именно

$$p_{rz} = k \rho w_0^2, \quad (6)$$

где k — числовая постоянная, зависящая от свойства поверхности.

В качестве грубого среднего значения для случая воды, движущейся по гладкой железной трубе, мы можем взять $k = 0,0025$ ²⁾.

Более полную эмпирическую формулу для p_{rz} , учитывающую также влияние диаметра, дал Дарси на основании очень большого числа наблюдений над течением воды в водопроводных трубах ³⁾.

Нужно заметить следующее: если бы сопротивление было точно пропорционально квадрату скорости, то оно не должно было бы зависеть от вязкости и от диаметра трубы. Это непосредственно следует из формулы (5) ⁴⁾.

Рейнольдс и некоторые другие наблюдатели нашли, что более хорошее совпадение с опытами получится, если в формуле (4) дать n значение, отличное от нуля. Было предложено значение $n = \frac{1}{4}$, в то время как Рейнольдс принимал значение $n = 0,277$. Наиболее подходящее значение для показателя зависит, повидимому, от степени гладкости поверхности трубы, и по всей вероятности любая формула вида (4) имеет лишь ограниченную возможность применения.

¹⁾ Rayleigh, On the Question of the Stability of the Flow of Fluids, Phil. Mag. (5), XXXIV, 59 (1892) (Papers, III, 575).

Формула (5) экспериментально была проверена для очень различных условий и для таких различных жидкостей, как вода и воздух. При этом оказалось, что сопротивление пропорционально $\rho_0 w_0^2$, если значение $\frac{v}{w_0 a}$ остается тем же самым. См. Stanton and Pannell, Similarity of Motion in Relation to the Surface Friction of Fluids, Phil. Trans. A, CCXIV, 199 (1913); Blasius, Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen, Zeitschr. d. Ver. deutscher Ingenieure, (1912), стр. 639.

²⁾ Rankine, Applied Mechanics, § 638; Unwin, Encyc. Britann. 11-е изд. „Hydraulics“.

³⁾ Darcy, Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux, Paris (1855). Формула Дарси приводится в работах Ранкина и Уивина.

⁴⁾ Rayleigh, см. выше.

Блазиус, на основании сопоставления тщательно проведенных экспериментов над турбулентным течением в *гладких* трубах, дает для градиента давления формулу вида $\frac{1}{2} \lambda \rho \frac{w_0^2}{D}$, где $\lambda = 0,316 \left(\frac{\nu}{w_0 D}\right)^{1/4}$ и D — диаметр. Так как

$$\pi D p_{rz} = - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\pi}{4} D^2,$$

то это дает

$$p_{rz} = 0,027 \rho w_0^2 \left(\frac{\nu}{w_0 D}\right)^{1/4}. \quad (7)$$

Рэлей обратил внимание на то, что вид функции f в формуле (5) можно определить при помощи опытов, в которых изменяется только ν . Опыты, повидимому, указывают на то, что функция f с возрастанием значения $\frac{w_0 D}{\nu}$ стремится к определенному предельному значению, так что формула (6) есть в некотором роде асимптотический закон сопротивления¹⁾.

Если мы будем рассматривать формулу (6) как формулу, выражающую результаты наблюдений, то сейчас же можно получить одно интересное заключение. Возьмем ось z в направлении общего течения и обозначим через \bar{w} *среднюю* (по отношению к времени) скорость в произвольной точке пространства; тогда на граничной поверхности будем иметь

$$\mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} = k \rho w_0^2,$$

если обозначим через w_0 общую скорость течения и через dl элемент нормали. Если мы введем линейную величину l , определенную равенством

$$\frac{w_0}{l} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial n},$$

то l будет измерять расстояние между двумя плоскостями, движущимися с относительной скоростью w_0 в упорядоченном ламинарном движении, при котором должны иметь место те же самые касательные напряжения.

Таким образом, находим

$$w_0 l = \frac{\nu}{k}. \quad (8)$$

Если положим, например, $\nu = 0,018$, $w_0 = 300$ см/сек, $k = 0,0025$, то получим $l = 0,024$ см²). Малость полученного значения для l указывает на то обстоятельство, что при турбулентном течении жидкости значение \bar{w} на очень небольшом протяжении от стенок быстро убывает до нуля²⁾.

¹⁾ Stanton, Friction, Лондон (1923), стр. 55.

²⁾ Ср. W. Thomson, Phil. Mag. (5), XXIV, 277 (1887).

³⁾ Это и в действительности было найдено экспериментально Дарси, см. выше.

Распределение средней скорости (\bar{w}) по поперечному сечению исследовал Стантон¹⁾ при помощи опытов над течением воздуха в слегка шероховатых трубах, для которых было установлено, что имеет место закон пропорциональности сопротивления квадрату скорости.

На небольшом протяжении от стенок скорость изменяется приблизительно по параболическому закону

$$\bar{w} = \bar{w}_c \left(1 - \beta \frac{r^2}{a^2} \right), \quad (9)$$

где \bar{w}_c обозначает среднюю скорость на оси и β — некоторая постоянная. В некоторых из своих более поздних опытов²⁾ он подтверждает справедливость того мнения, что в непосредственной близости от стенки существует область строго ламинарного течения. Толщина этого слоя в рассмотренных случаях оказалась равной некоторой доле миллиметра.

§ 366а. В указанной на стр. 737 экспериментальной установке Маллока и Кутта мы имели другую простую форму установившегося движения, которую значительно легче подвергнуть экспериментальному исследованию. Когда внутренний цилиндр был в покое, то Маллок нашел, что представляемое формулой (5) § 333 установившееся движение до тех пор оставалось устойчивым, пока угловая скорость внешнего цилиндра не превосходила известную границу, и определенно становилось неустойчивым, когда скорость переходила через другую более высокую границу. В промежуточном интервале наблюдалась чувствительность к возмущениям, большая, чем в случае трубы³⁾.

В том же случае, когда внешний цилиндр оставался в покое, оказалось, что установившееся движение было неустойчивым при всевозможных угловых скоростях внутреннего цилиндра. Эти заключения нуждаются в уточнении в свете последующих работ, но тем не менее названные опыты интересны как первая попытка экспериментального исследования случая турбулентного движения, происходящего не в трубе.

Влияние несимметричного, но происходящего в двух измерениях возмущения было исследовано математически Гаррисоном⁴⁾ методами Рейнольдса и Орра (§ 369). Он определял наибольшее значение относительной угловой скорости цилиндра, совместимое с устойчивостью по отношению к возмущениям указанного рода.

¹⁾ Stanton, Proc. Roy. Soc. A, LXXXV, 366 (1911).

²⁾ Stanton, Proc. Roy. Soc. A, XCVII, 413 (1920); см. выше Friction, стр. 30.

³⁾ См. одно письмо Кельвина, которое цитирует Рэлей, Phil. Mag. (6), XXVIII (1914) (Papers, VI, 266).

⁴⁾ Harrison, Camb. Trans., XXII, 425 (1920) и Proc. Camb. Phil. Soc., XX, 455 (1921).

Вопрос этот снова был исследован математически и экспериментально Тэйлором ¹⁾, который и получил вполне определенные результаты. Отправляясь из устойчивого состояния и постепенно увеличивая отношение угловых скоростей, Тэйлор нашел, что неустойчивость проявляется в форме трехразмерного, вначале стационарного возмущения, симметричного относительно оси вращения, но периодически повторяющегося вдоль прямой, параллельной оси. Если спроектировать линии тока на плоскость меридиана, то эта проекция даст систему вихрей, расположенных в прямоугольных клетках, причем направления вращений попеременно противоположны. Если цилиндры вращаются в одном и том же направлении, то каждая такая клетка простирается на все радиальное расстояние между ними; в противоположном же случае она примыкает к внешнему цилиндру, и сами вихри много слабее, чем в первом случае.

Было доказано как теоретически, так и экспериментально, что, если внутренний цилиндр остается неподвижным, установившееся движение оказывается устойчивым при всех тех угловых скоростях внешнего цилиндра, которые имели место в опытах. Когда неподвижным оставался внешний цилиндр, тогда устойчивость наблюдалась при достаточно малых угловых скоростях внутреннего цилиндра. Во всех случаях угловая скорость, при которой движение становилось неустойчивым, была строго определенной.

§ 366b. Неоднократно указывалось, что в тех случаях, когда скорости не очень малы или пространственные размеры сильно сокращены, вычисления, основывающиеся на предположении прямолинейного течения, такие, как в § 330, приводят к результатам, находящимся в резком противоречии с опытом. Если бы, например, в случае, рассмотренном в § 334а, п. 3, мы захотели подставить вместо μ обычное значение этого коэффициента для воды, то оказалось бы, что должно пройти очень много времени, пока действие поверхностных сил распространится на сравнительно небольшую глубину. В действительности же благодаря возникновению пульсаций происходит обмен количества движения между соседними слоями жидкости.

Картина здесь примерно оказывается такой же, как и в максвелловой теории газов, с той только разницей, что здесь речь идет о „молярных“, а не о молекулярных количествах движения, т. е. о количествах движения элементарных частиц жидкости, рассматриваемой как непрерывная среда.

Начиная с Рейнольдса ²⁾, многие авторы предлагали, чтобы учесть эти обстоятельства, ввести вместо μ коэффициент μ „молярной“, „механической“, „турбулентной“ вязкости. Это значит, что мы должны

¹⁾ Taylor, Stability of a Viscous Liquid contained between Two Rotating Cylinders, Phil. Trans. A, CCXXIII, 289 (1922).

²⁾ Reynolds, см. выше, стр. 837 (1886) (Papers, II, 236).

считать составляющие тангенциального напряжения в плоскости, перпендикулярной к оси Oz , равными

$$-\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \quad -\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial z},$$

где \bar{u} , \bar{v} — средние значения величин u , v в рассматриваемой точке за небольшой промежуток времени. Этим мы отказываемся от всякой попытки отдельно проследить за имеющими место быстрыми изменениями скорости и ограничиваемся лишь учетом среднего, в указанном выше смысле, эффекта.

Этот коэффициент μ , естественно, нельзя рассматривать как физическую постоянную, характеристическую для жидкости. Его значение в большой мере будет зависеть от вида и масштаба рассматриваемого движения, и будет часто меняться довольно значительно при переходе от одной части жидкости к другой. Этот коэффициент нельзя, таким образом, знать а priori, хотя иногда оценка его и возможна на основании аналогий; его находят путем сравнения вычислений с опытами. Значение этого коэффициента до некоторой степени может служить мерой степени турбулентности при рассматриваемых обстоятельствах.

Если, например, в опытах Стантона, цитированных на стр. 842, рассматривать силы, действующие на единицу длины воздушного цилиндра радиуса r , то будем иметь

$$\mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \cdot 2\pi r = \frac{\partial p}{\partial z} \pi r^2, \quad (1)$$

где $\frac{\partial p}{\partial z}$ обозначает градиент давления вдоль трубы. Далее из формулы (6) следует

$$2\pi a k \rho w_0^2 = -\frac{\partial p}{\partial z} \cdot \pi a^2, \quad (2)$$

а отсюда имеем

$$\frac{\mu}{r} \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} = -\frac{k r}{a} w_0^2. \quad (3)$$

Следовательно, получаем

$$\frac{\mu}{\rho} = \frac{k w_0^2 a}{2\beta \bar{w}_c}. \quad (4)$$

Это дает значение для $\frac{\mu}{\rho}$, одинаковое для всего поперечного сечения и пропорциональное среднему значению скорости в сечении и радиусу. Полагая¹⁾

$$\bar{w}_c = 1500, \quad w_0 = 1125, \quad a = 2,5, \quad k = 0,0025, \quad \beta = 0,5,$$

получим

$$\frac{\mu}{\rho} = 5,3 \quad \text{или} \quad \mu = 0,0068.$$

¹⁾ Приводимые здесь данные имеют тот же порядок, как и в опытах Стантона.

Значительно большие значения, чем можно было ожидать, получаются в тех случаях, когда движение совершается в достаточно больших масштабах ¹⁾.

§ 366с. Подобными же рассуждениями можно воспользоваться, чтобы найти закон, по которому изменяется ²⁾ ветер с изменением высоты над поверхностью земли, если, как и в аналогичной задаче § 334а, п. 5, принять во внимание вращение Земли. Положим, что ось z направлена вверх противоположно кажущемуся направлению силы тяжести, и оси x и y вращаются вокруг оси Oz с угловой скоростью ω , равной проекции на Oz угловой скорости вращения Земли. Если мы будем считать движение относительно этих осей установившимся, положим $\dot{w} = 0$, и отбросим горизонтальные градиенты величин u и v , то на основании уравнений (1) § 203 будем иметь ³⁾

$$\left. \begin{aligned} -2\omega v &= -\frac{\partial p}{e \partial x} + \bar{\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ 2\omega u &= -\frac{\partial p}{e \partial y} + \bar{\nu} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial z} + g e, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $\bar{\nu} = \frac{\mu}{e}$. Предположим теперь, что градиент давления вблизи начала постоянен и определяется равенствами

$$-\frac{\partial p}{e \partial x} = 0, \quad -\frac{\partial p}{e \partial y} = f. \quad (2)$$

В таком случае имеем

$$\bar{\nu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (u + iv) - 2i\omega (u + iv) = -if. \quad (3)$$

Если положить

$$\beta^2 = \frac{\omega}{\bar{\nu}}, \quad \frac{f}{2\omega} = V, \quad (4)$$

то решение, конечное при $z = \infty$, будет иметь вид

$$u + iv = V + C e^{-(1+i)\beta z}. \quad (5)$$

На большой высоте имеем $u = V$, $v = 0$; это есть параллельный изобарам „градиентный ветер“, который преобладал бы, если бы не было трения.

¹⁾ Ср. Jeffreys, On Turbulence in the Ocean, Phil. Mag. (6), XXXIX, 578 (1920).

²⁾ G. I. Taylor, Eddy Motion in the Atmosphere, Phil. Trans. A, CCXV, 1 (1915).

³⁾ Черточки для обозначения средних во времени значений u , v и p здесь опущены, так как в них нет необходимости.

Допустим, что направление ветра у поверхности земли ($z = 0$) составляет с положительным направлением оси x угол α , так что

$$u_0 + iv_0 = V_0 e^{i\alpha}. \quad (6)$$

В таком случае имеем

$$\left. \begin{aligned} u &= V + e^{-\beta z} \{ V_0 \cos(\alpha - \beta z) - V \cos \beta z \}, \\ v &= e^{-\beta z} \{ V_0 \sin(\alpha - \beta z) + V \sin \beta z \}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Мы можем принять, что у поверхности земли тангенциальные напряжения имеют одинаковые направления со скоростями, или

$$\frac{\partial u}{\partial z} : \frac{\partial v}{\partial z} = u : v \quad \text{при } z = 0. \quad (8)$$

Отсюда получается после соответствующих приведений

$$V_0 = V (\cos \alpha - \sin \alpha). \quad (9)$$

Подставляя из формулы (9) в равенства (7), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{V} &= 1 - \sin \alpha \{ \cos(\alpha - \beta z) + \sin(\alpha - \beta z) \} e^{-\beta z}, \\ \frac{v}{V} &= \sin \alpha \{ \cos(\alpha - \beta z) - \sin(\alpha - \beta z) \} e^{-\beta z}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Высоты, на которых ветер по направлению совпадает с „градиентным ветром“, определяются условием $v = 0$ или

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta z) = 1. \quad (11)$$

Уравнение (9) показывает, что должно быть $\alpha < \frac{1}{4}\pi$, так что первое значение z , удовлетворяющее уравнению (11), определяется формулой

$$z = \frac{\left(\alpha + \frac{3}{4}\pi\right)}{\beta}. \quad (12)$$

Сравнение теоретических и опытных результатов дает для кинематического коэффициента $\bar{\nu}$ турбулентной вязкости значение порядка 10^5 в системе CGS.

§ 367. Хотя по этому вопросу и было много написано, однако теоретическое объяснение для неустойчивости линейного течения, имеющей место в действительности при установленных в §§ 365, 366 условиях, равно, как и объяснение того, каким образом беспорядочные пульсации поддерживаются несмотря на действие вязкости, остается все еще не установленным. Мы можем попытаться дать здесь лишь краткий обзор различных попыток, которые были предприняты для выяснения этого вопроса.

Рэлей исследует в ряде работ¹⁾ устойчивость различных форм установившегося движения, допускаемых вязкостью при бесконечно малых возмущениях. Хотя вязкость в возмущенном движении и не принимается во внимание, все же можно ожидать, что результаты работ Рэрея прольют некоторый свет на этот вопрос, за исключением, впрочем, тех случаев, в которых преобладающее значение имеет влияние границ. Это исключение тем не менее очень существенно.

Так как метод достаточно прост, а результаты представляют интерес сами по себе, то мы можем изложить коротко задачу для двух измерений.

Предположим, что в результате небольшого возмущения установившегося ламинарного движения

$$u = U, \quad v = 0, \quad w = 0,$$

где U — функция только y , мы имеем

$$u = U + u', \quad v = v', \quad w = 0. \quad (1)$$

Уравнение непрерывности получит вид

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Динамические уравнения (4) § 146 приводятся к условию постоянства вихря $\frac{D\zeta}{Dt} = 0$ или

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + (U + u') \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v' \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

где

$$\zeta = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{dU}{dy}. \quad (4)$$

Отсюда следует, если пренебречь членами второго порядка относительно u', v' ,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) - \frac{d^2 U}{dy^2} v' = 0. \quad (5)$$

Рассмотрим теперь периодическое относительно x возмущение и положим, что u', v' пропорциональны $e^{ikx + i\sigma t}$.

Из уравнений (2) и (5) следует

$$iku' + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

и

$$i(\sigma + kU) \left(ikv' - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) - \frac{d^2 U}{dy^2} v' = 0. \quad (7)$$

Исключая u' , получаем

$$(\sigma + kU) \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} - k^2 v' \right) - \frac{d^2 U}{dy^2} kv' = 0; \quad (8)$$

это есть основное уравнение.

¹⁾ Rayleigh, Proc. Lond. Math. Soc., X, 4 (1879), XI, 57 (1880), XIX, 67 (1887), XXVII, 5 (1895); Phil. Mag. (5), XXXIV, 59, 177 (1892); (6) XXVI, 6001 (1913) (Papers, I, 361, 374, III, 575, 594, IV, 203).

Если $\frac{dU}{dy}$ испытывает разрыв при каком-нибудь значении y , то уравнение (8) должно быть заменено через

$$(\sigma + kU) \Delta \left(\frac{\partial v'}{\partial y} \right) - \Delta \left(\frac{dU}{dy} \right) kv' = 0, \quad (9)$$

где Δ обозначает разность соответствующих величин на обеих сторонах плоскости разрыва. Уравнение (9) получается из уравнения (8) интегрированием по y , причем разрыв рассматривается как предел бесконечно быстрого изменения. Это уравнение можно также получить из условия непрерывности давления или как условие того что на граничной поверхности (смещенной) не должно быть скольжения.

На неподвижной границе должно быть $v' = 0$.

1. Предположим, что слой жидкости с равномерной завихренностью, ограниченный в невозмущенном состоянии плоскостями $y = \pm h$, помещен между двумя массами жидкости, находящимися в безвихревом движении; скорость при этом предполагается всюду непрерывной. Этот случай представляет интересное видоизменение задачи, рассмотренной в § 234.

Положим, что

$$\begin{aligned} U &= u \quad \text{для } y > h, \\ U &= \frac{uy}{h} \quad \text{для } h > y > -h, \\ U &= -u \quad \text{для } y < -h, \end{aligned}$$

и заметим, что $\frac{d^2U}{dy^2} = 0$ всюду, за исключением поверхностей раздела, так что уравнение (8) приведет к виду

$$\frac{\partial^3 v'}{\partial y^3} - k^2 v' = 0. \quad (10)$$

Соответствующие решения этого уравнения будут

$$\left. \begin{aligned} v' &= Ae^{-ky} && \text{для } y > h; \\ v' &= Be^{-ky} + Ce^{ky} && \text{для } h > y > -h; \\ v' &= De^{ky} && \text{для } y < -h. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Непрерывность v' требует, чтобы выполнялись условия

$$\left. \begin{aligned} Ae^{-kh} &= Be^{-kh} + Ce^{kh}, \\ De^{-kh} &= Be^{kh} + Ce^{-kh}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

При помощи этих соотношений уравнение (9) дает

$$\left. \begin{aligned} 2(\sigma + ku) Ce^{kh} - \frac{u}{h} (Be^{-kh} + Ce^{kh}) &= 0, \\ 2(\sigma - ku) Be^{kh} + \frac{u}{h} (Be^{kh} + Ce^{-kh}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Исключая отношение $B:C$, получим

$$\sigma^2 = \frac{u^2}{4h^2} \left((2kh - 1)^2 - e^{-4kh} \right). \quad (14)$$

Для малых значений kh эта формула дает $\sigma^2 = -k^2 u^2$, как и в случае одной плоскости разрыва (§ 234). Для больших же значений kh получающееся значение $\sigma = \pm ki$ указывает на устойчивость. Отсюда следует, что вопрос относительно устойчивости при возмущениях с длиной волны λ зависит от отношения $\frac{\lambda}{2h}$. Для функции в фигурных скобках в правой части формулы (14) Рэлея составил таблицы. Оказывается, что неустойчивость наступает примерно при $\frac{\lambda}{2h} > 5$ и становится наибольшей при $\frac{\lambda}{2h} = 8$.

2. Далее Рэлея исследовал в названных работах различные случаи течений между параллельными стенками с целью пролить больше света на условия устойчивости для прямолинейного течения в трубе. Главный результат этих исследований заключается в следующем: если $\frac{d^2U}{dy^2}$ не меняет свой знак, другими словами, если кривая с абсциссой y и с ординатой U всюду искривлена в одну и ту же сторону, то движение устойчиво. Так как, однако, в возмущенном движении предполагалось наличие скольжения у стенок, то возникает сомнение, в какой мере эти заключения справедливы для тех случаев, для которых условие отсутствия всякого скольжения является основным.

3. Введение уравнения (10) вместо уравнения (8) в том случае, когда $\frac{d^2U}{dy^2} = 0$, равносильно предположению, что вектор вихря ζ должен быть таким же, как и при невозмущенном движении, так как при таком предположении имеют место равенства

$$\frac{\partial u'}{\partial y} = \frac{\partial v'}{\partial x} = ikv', \quad (15)$$

а это вместе с равенством (16) и приводит к уравнению (10).

Нужно, однако, обратить внимание на следующее: если $\frac{d^2U}{dy^2} = 0$, то уравнение (8) при некотором частном значении y может также удовлетворяться вследствие равенства $\sigma + kU = 0$. Мы можем, например, предположить, что на плоскости $y=0$ расположен тонкий слой с бесконечно малым дополнительным завихрением.

Тогда, предполагая, что жидкость не ограничена, будем иметь

$$v' = Ae^{\mp ky + i(\sigma t + kx)}, \quad (16)$$

причем нужно взять верхний или нижний знак, смотря по тому, положительно y или отрицательно. Условие (9) будет тогда выполняться вследствие равенств

$$\sigma + kU_0 = 0, \quad \Delta \left(\frac{dU}{dy} \right) = 0, \quad (17)$$

где U_0 обозначает значение U при $y=0$.

Так как наложение одинаковой для всех частиц скорости в направлении оси x не изменяет задачу, то мы можем положить $U_0 = 0$ и вместе с тем $\sigma = 0$. Возмущенное движение оказывается установившимся; другими словами первоначальная форма течения по отношению к возмущениям рассматриваемого вида находится (с точностью до малых величин второго порядка) в безразличном состоянии ¹⁾.

¹⁾ Ср. W. Thomson, On a Disturbing Infinity in Lord Rayleigh's solution for Waves in a plane Vortex Stratum, Brit. Ass. Rep., 1880, стр. 492 (Papers, IV, 186) и ответ Рэлея, Proc. Lond. Math. Soc., XXVII, 5 (Papers, IV, 203).

§ 368. Кельвин поставил перед собой трудную задачу непосредственно исследовать устойчивость ламинарного движения, принимая во внимание вязкость ¹⁾. Он рассмотрел следующие частные случаи: 1) течение под давлением между неподвижными параллельными стенками (см. § 330), 2) равномерное движение сдвига между двумя параллельными плоскостями, из которых одна движется с постоянной скоростью относительно другой, предполагаемой неподвижной, и 3) движение потока по наклонно плоскому дну. Его общее заключение таково: ламинарное течение во всех случаях устойчиво по отношению к бесконечно малым возмущениям, но становится неустойчивым, когда возмущения переходят за известную границу; эти границы устойчивости оказываются тем теснее, чем меньше вязкость. Само исследование является достаточно трудным и в некоторых частях оно встретило возражения со стороны Рэля ²⁾ и Орра. Последнему мы обязаны детальным рассмотрением всей задачи ³⁾. Большинство авторов, которые занимались этими проблемами, склонялось, однако, считать приведенное выше заключение вероятным, хотя еще и строго недоказанным. Следует отметить, что оно совпадает и с приведенными в §§ 365, 366 наблюдениями Рейнольдса и других.

В случае равномерного движения сдвига между параллельными плоскостями $y=0$, $y=h$, из которых первая неподвижна, исследование начинается с того, что для невозмущенного движения принимается

$$u = \beta y, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad (1)$$

а для возмущенного движения

$$u = \beta y - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad w = 0. \quad (2)$$

Вихрь при этом получается равным

$$\zeta = -\beta + \Delta_1 \psi. \quad (3)$$

Третье из уравнений (8) § 328 дает

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_i \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \nu \Delta_1 \zeta. \quad (4)$$

Подставляя в это уравнение соотношения (2) и пренебрегая членами второго порядка по отношению к ψ , получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta y \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta_1 \psi = \nu \Delta_1^2 \psi. \quad (5)$$

¹⁾ Kelvin, Rectilinear Motion of Viscous Fluid between two Parallel Planes, Phil. Mag. (5), XXIV, 188 (1887); Broad River flowing down an Inclined Plane Bed., Phil. Mag. (5), XXIV, 272 (1887) (Papers, VI, 321).

²⁾ Rayleigh, см. выше, стр. 847.

³⁾ Orr, The Stability or Instability of the Steady Motions of a Perfect Liquid and of a Viscous Liquid, Proc. Roy. Irish. Acad., XXVII, 9, 69 (1906 до 1907).

Если мы возьмем возмущение в виде $e^{i(\sigma t + kx)}$, то будем иметь

$$\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \left\{ k^2 + \frac{i(\sigma + k\beta y)}{\nu} \right\} S, \quad (6)$$

где

$$S = \Delta_1 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - k^2 \psi, \quad (7)$$

причем показательная функция как множитель опущена.

Так как условия (1) должны иметь место и на границе, то должно быть

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \text{ или}$$

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

для $y=0$ и для $y=h$.

Если обозначим через S полное решение уравнения (6), то интегриация уравнения (7) по методу „вариации постоянных“ дает

$$\psi = \frac{1}{2k} \left\{ e^{ky} \int e^{-ky} S dy - e^{-ky} \int e^{ky} S dy \right\}, \quad (9)$$

а отсюда следует

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{2} \left\{ e^{ky} \int e^{-ky} S dy + e^{-ky} \int e^{ky} S dy \right\}. \quad (10)$$

Благодаря неопределенным интегралам войдут, конечно, еще две произвольные добавочные постоянные кроме двух, уже содержащихся в S .

Условия (8) будут выполнены для $y=0$, если мы возьмем в качестве нижнего предела для интеграла значение нуль. Условия для $y=h$ приведутся к виду

$$\int_0^h e^{-kh} S dy = 0, \quad \int_0^h e^{kh} S dy = 0. \quad (11)$$

Если положим теперь

$$S = C_1 S_1 + C_2 S_2, \quad (12)$$

где S_1, S_2 — два независимых решения уравнения (6), то после исключения произвольных постоянных C_1, C_2 будем иметь уравнение

$$\int_0^h e^{ky} S_1 dy \cdot \int_0^h e^{-ky} S_2 dy - \int_0^h e^{-ky} S_1 dy \cdot \int_0^h e^{ky} S_2 dy = 0, \quad (13)$$

которое получили Orr ¹⁾ и позднее независимо от него Зоммерфельд ²⁾. Это уравнение определяет значения σ , когда k дано. Для устойчивости существенно, чтобы, если $\sigma = p + iq$, q было положительным.

Если положить

$$k^2 + \frac{i(\sigma + k\beta y)}{\nu} = \left(\frac{k\beta}{\nu} \right)^{3/2} \eta, \quad (14)$$

то уравнение (6) примет вид

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \eta^2} + \eta S = 0; \quad (15)$$

¹⁾ Orr, см. выше, стр. 850.

²⁾ Sommerfeld, Atti del IV. Congr. intern. dei matematici, Рим, 1909, II, 116.

это уравнение интегрируется рядами ¹⁾. Таким способом получим

$$S = A_1 \left\{ 1 - \frac{\eta^2}{2 \cdot 3} + \frac{\eta^4}{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 6} - \frac{\eta^6}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 9} + \dots \right\} + \\ + A_2 \eta \left\{ 1 - \frac{\eta^2}{3 \cdot 4} + \frac{\eta^4}{3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 7} - \frac{\eta^6}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10} + \dots \right\} \quad (16)$$

или

$$S = B_1 \eta^{1/2} J_{-1/2} \left(\frac{2}{3} \eta^{3/2} \right) + B_2 \eta^{1/2} J_{1/2} \left(\frac{2}{3} \eta^{3/2} \right) \quad (17)$$

в обозначениях бесселевых функций ²⁾.

Дальнейшее исследование проблемы представляет трудности. Оно было значительно продвинуто Орром и в более позднее время Рэлеем ³⁾; в работах последних авторов имеются также и дальнейшие литературные указания.

Профессор Соутвелл совсем недавно в своем исследовании этого вопроса ⁴⁾, отходя от уравнения (5), предположил снова $\sigma = p + iq$, так что множитель, зависящий от времени, представлялся в виде $e^{-qt + i(pt + kx)}$, и затем приступил к тому, чтобы показать, что если $p = 0$, т. е. если возмущение не носит характера колебаний, то допустимые значения q необходимо должны быть положительными, и пока это будет иметь место, движение сдвига будет устойчиво. Он изучил, далее, характер соответствующих видов затухания и иллюстрировал их целым рядом интересных рисунков относительных линий тока.

§ 369. Рейнольдс в своей замечательной работе ⁵⁾ рассматривает общую задачу с другой точки зрения. Он предполагает, что турбулентное движение уже имеет место, и старается установить критерий, на основании которого можно решить, возрастает турбулентность, убывает, или остается стационарной.

Для этой цели скорость (u, v, w) разлагается на две составляющие. Положим на момент

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{\tau} \int_{t-1/2\tau}^{t+1/2\tau} u dt, \\ \bar{v} &= \frac{1}{\tau} \int_{t-1/2\tau}^{t+1/2\tau} v dt, \\ \bar{w} &= \frac{1}{\tau} \int_{t-1/2\tau}^{t+1/2\tau} w dt, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

¹⁾ Ср. Stokes, Camb. Trans., X, 106 (1857) (Papers, IV, 77).

²⁾ По поводу связи уравнения (15) с уравнением Риккати и с уравнением Бесселя см. Forsyth, Differential Equations, § 111.

³⁾ Rayleigh, Stability of Viscous Fluid Motion, Phil. Mag. (6), XXVIII (1914); On the Stability of the Simple Shearing Motion of a Viscous Incompressible Fluid, Phil. Mag. (6), XXX, 329 (1915) (Papers, VI, 266, 341).

⁴⁾ Southwell, Phil. Trans. A, CCIX, 205 (1930).

⁵⁾ Reynolds, On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion, Phil. Trans. A, CLXXVI, 123 (1894) (Papers, II, 535).

несущей с собой свое собственное количество движения. Поток проекции на ось x количества движения через единичные площадки, перпендикулярные к Ox , Oy , Oz , равен соответственно $\rho u \cdot u$, $\rho v \cdot u$, $\rho w \cdot u$. Если мы составим разность потоков количества движения через противоположные грани элемента $\delta x \delta y \delta z$, то и получим изменение за единицу времени слагающей по оси x количества движения в виде

$$-\frac{\partial}{\partial x} (\rho u \delta y \delta z \cdot u) \delta x - \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \delta z \delta x \cdot u) \delta y - \frac{\partial}{\partial z} (\rho w \delta x \delta y \cdot u) \delta z.$$

Составим теперь осредненное значение каждого члена уравнений (5), используя соотношения (3). Мы будем предполагать, что без существенной ошибки можно положить осредненные значения величин \bar{u} , $\bar{u}u'$, $\bar{v}v'$, $\bar{w}w'$. . . соответственно равными \bar{u} , 0, 0, 0, . . . Хотя такое предположение и не вполне точно, однако, оно допустимо в тех случаях, когда колебания u , v , w около их средних значений в течение промежутка времени τ достаточно часты. Отсюда следует, что

$$\left. \begin{aligned} \bar{uu} &= \bar{u} \bar{u} + \overline{u'u'}, \\ \bar{uv} &= \bar{u} \bar{v} + \overline{u'v'}, \\ \bar{uw} &= \bar{u} \bar{w} + \overline{u'w'}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Таким способом получим

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= \rho X + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p}_{xx} - \rho \bar{u} \bar{u} - \rho \overline{u'u'}) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} (\bar{p}_{yx} - \rho \bar{u} \bar{v} - \rho \overline{u'v'}) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} (\bar{p}_{zx} - \rho \bar{u} \bar{w} - \rho \overline{u'w'}) , \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

между тем как уравнение непрерывности дает

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0. \quad (9)$$

Уравнения (8) и (9) суть уравнения осредненного движения ¹⁾. Следует заметить, что эти уравнения движения примут ту же форму, что и точные уравнения (5), если только мы введем добавочные компоненты напряжения

$$P_{xx} = -\rho \overline{u'u'}, \quad P_{yx} = -\rho \overline{u'v'}, \quad P_{zx} = -\rho \overline{u'w'}. \quad (10)$$

Эти формулы несколько напоминают объяснение вязкости в газах, данное Максвеллом (см. выше).

¹⁾ Или скорее „осредненного от среднего движения“, пользуясь выражением Рейнольдса. Он применяет выражение „осредненное движение“ для системы скоростей (u, v, w) , чтобы отличить рассматриваемое движение от „молекулярного движения“. Турбулентное движение (u', v', w') он называет „относительным средним движением“.

Уравнения (8) в силу соотношения (9) могут быть написаны в виде

$$\left. \begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial z} \right) \bar{e} u = \\ &= e X + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p}_{xx} - \bar{e} u' u') + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{p}_{yx} - \bar{e} u' v') + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{p}_{zx} - \bar{e} u' w') . \end{aligned} \right\} (11)$$

.....

Умножая эти уравнения последовательно на \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} и складывая, получим

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{1}{2} e (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2) = e (X \bar{u} + Y \bar{v} + Z \bar{w}) + \\ &+ \bar{u} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p}_{xx} - \bar{e} u' u') + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{p}_{yx} - \bar{e} u' v') + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{p}_{zx} - \bar{e} u' w') \right\} + \\ &+ \bar{v} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p}_{xy} - \bar{e} v' u') + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{p}_{yy} - \bar{e} v' v') + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{p}_{zy} - \bar{e} v' w') \right\} + \\ &+ \bar{w} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p}_{xz} - \bar{e} w' u') + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{p}_{yz} - \bar{e} w' v') + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{p}_{zz} - \bar{e} w' w') \right\} . \end{aligned} \quad (12)$$

Предположим, прежде всего, что внешних сил X , Y , Z нет, и применим уравнение (12) к области, ограниченной неподвижными стенками, на которых u , v , w и вместе с тем также все \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} исчезают. Если положить

$$T_0 = \frac{1}{2} e \iiint (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2) dx dy dz, \quad (13)$$

то получим после нескольких интегрирований по частям

$$\frac{dT_0}{dt} = - \iiint \Phi_0 dx dy dz + \iiint \Psi dx dy dz, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_0 = &\bar{p}_{xx} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{p}_{yy} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{p}_{zz} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \\ &+ \bar{p}_{yz} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) + \bar{p}_{zx} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) + \bar{p}_{xy} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = \\ = &\mu \left\{ 2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

и

$$\begin{aligned} \Psi = &e \left\{ \bar{u}' u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}' v' \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w}' w' \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \right. \\ &\left. + \bar{v}' w' \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) + \bar{w}' u' \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) + \bar{u}' v' \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \right\} . \end{aligned} \quad (16)$$

Формула (14) представляет скорость изменения энергии осредненного движения $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$. Первый член в правой части представляет рассеяние, происходящее только от одного осредненного движения, и является величиной, существенно отрицательной. Второй же член представляет работу, которую производят фиктивные напряжения (10) в единицу времени.

Если теперь обозначим через T истинную кинетическую энергию, то можем на основании уже сделанного предположения считать

$$\bar{T} = T_0 + \bar{T}', \quad (17)$$

где

$$T' = \frac{1}{2} \rho \iiint (u'^2 + v'^2 + w'^2) dx dy dz, \quad (18)$$

т. е. T' — кинетическая энергия пульсационного движения. При помощи метода § 344 можно показать, что при рассматриваемом предположении неподвижности границ, вдоль которых имеет место прилипание, полное рассеяние в среднем равно сумме рассеяний, происходящих от осредненного движения и от пульсационного движения. Поэтому имеем

$$\frac{d\bar{T}}{dt} = - \iiint \Phi_0 dx dy dz - \iiint \bar{\Phi}' dx dy dz, \quad (19)^1$$

где

$$\begin{aligned} \Phi' = \mu \left\{ 2 \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Из сравнения с формулой (14) получается

$$\frac{dT'}{dt} = - \iiint \bar{\Phi}' dx dy dz - \iiint \Psi dx dy dz. \quad (21)$$

Знак выражения в правой части показывает, будет ли средняя энергия \bar{T}' пульсационного движения (u', v', w') возрастать или убывать.

Первый интеграл, который только один содержит коэффициент вязкости μ , существенно отрицателен; второй интеграл зависит от инерции жидкости и, смотря по обстоятельствам, может быть положительным или отрицательным.

Если в расчет будут приняты внешние силы X, Y, Z и если скорости u, v, w на границе рассматриваемой области не обязательно должны исчезать, то уравнение (14) потребует поправки, а именно добавления членов, которые частью выражают передачу кинетической энергии осредненного движения границам, частью представляют работу, которую производят силы X, Y, Z , и, наконец, работу, которую производят на границе области средние напряжения $\bar{P}_{xx}, \bar{P}_{yx}, \bar{P}_{zx}, \dots$ и фиктивные напряжения $P_{xx}, P_{yx}, P_{zx}, \dots$.

Уравнение же (21) требует добавления только одного члена, который выражает переход энергии турбулентного движения через границу.

Вывод замечательных формул (14) и (21) и только что намеченные преобразования их при сделанных предположениях кажутся безукоризненными. Однако, при приложении этих формул к действительным случаям

¹⁾ Следует заметить, что мы, собственно говоря, принимаем здесь, что дифференциал dt элемента времени имеет тот же порядок величины, как и взятый в определениях (1) интервал τ . Способ, примененный в тексте, позволяет избежать рассмотрения некоторых очень длинных уравнений, которые встречаются в оригинале.

следует всегда иметь в виду те предположения и ограничения относительно характера турбулентного движения, которые были сделаны.

Приведем здесь некоторые следствия из формулы (21)¹⁾. Прежде всего относительная величина членов в правой части не изменится, если изменить знаки при u' , v' , w' или умножить эти величины на произвольный постоянный множитель. Устойчивость заданного состояния осредненного движения не должна поэтому зависеть от абсолютной величины возмущения. С другой стороны, некоторые комбинации u' , v' , w' кажутся более благоприятными для устойчивости, чем другие. Так, например, в случае возмущенного ламинарного движения, параллельного оси Ox и происходящего между двумя твердыми плоскими стенками $y = \pm b$, формула (16) приводится к виду

$$\Psi = \rho \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad (22)$$

так что будут иметь стремление возрастать те возмущения, в которых для $y > 0$ преобладают комбинации u' , v' с одинаковыми знаками. Это указывает на стремление к выравниванию скоростей в различных слоях. Далее, относительное значение второго члена правой части формулы (21), от которого только и зависит возрастание \bar{T}' становится тем больше, чем больше значения скоростей деформаций $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$, ... в осредненном движении. Здесь-то мы и получаем указание на причину того, почему данный вид осредненного движения начинает нарушаться лишь в тот момент, когда будет достигнута определенная критическая скорость.

Если мы применим (видоизмененные) формулы к течению в цилиндрической трубе постоянного сечения при условии, что градиент давления $\left(-\frac{dp}{dx}\right)$ равен нулю, то получим

$$\frac{dT_0}{dt} = \rho X \bar{u} \pi a^2 - 2\pi \int_0^a \Phi_0 r dr + 2\pi \int_0^a \Psi r dr \quad (23)$$

и

$$\frac{d\bar{T}'}{dt} = - \int \int \bar{\Phi}' dy dz - 2\pi \int_0^a \Psi r dr, \quad (24)$$

где

$$\Phi_0 = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right)^2, \quad \Psi = \rho \overline{u'q'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}. \quad (25)$$

Рассматриваемая здесь область лежит между двумя поперечными сечениями трубы (с площадью πa^2), находящимися друг от друга на расстоянии *единицы длины*; ось x совпадает с осью трубы и q обозначает составляющую скорости, перпендикулярную к этой оси. При этом, конечно, предполагается, что

$\bar{q} = 0$ и $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0$, так что осредненное состояние для каждого сечения трубы во всех отношениях одно и то же. Условия установившегося движения мы получим, если члены в правой части формул (23) и (24) положим равными нулю.

Рейнольдс подробно рассматривает задачу для двух измерений, а именно, тот случай, когда течение, параллельное оси x , происходит между двумя неподвижными стенками $y = \pm b$. Он предполагает в согласии с § 330, что \bar{u}

¹⁾ Ср. L o r e n t z, Über die Entstehung turbulenter Flüssigkeitsbewegungen und über den Einfluss dieser Bewegungen bei der Strömung durch Röhren, Abh. über theoret. Physik, Leipzig, 1907, I, 43. Эта работа представляет в исправленном виде работу, опубликованную в 1897 г.

изменяется по закону $b^2 - y^2$, и старается найти для потока минимум, совместимый с условием $\frac{dT'}{dt} = 0$; но за всем, что относится к этому исследованию, мы отсылаем к оригинальной статье. Рейнольдс получает следующий результат: критическое значение отношения $\frac{u_0 b}{\nu}$, где u_0 — осредненное значение \bar{u} в интервале $y = \pm b$, должно превосходить значение 258 ¹⁾.

Сопротивление жидкостей.

§ 370. Сопротивление жидкостей имеет значение во многих практических вопросах, например, в вопросах, относящихся к движению судов, к полету снарядов и к действию ветра на сооружения. Хотя вопрос о сопротивлении жидкостей благодаря своему значению для авиации разрабатывался в последнее время с возросшей энергией, все же наши знания в этой области все еще имеют, главным образом, эмпирический характер.

Мы видели следующее: если изолированное тело движется в идеальной жидкости в некотором удалении от границы (если последняя вообще существует), то не происходит никакой потери энергии; если в частности движение жидкости начинается из состояния покоя и, следовательно, является движением невихревым и нециклическим, то влияние его может быть вполне охарактеризовано изменением массы твердого тела ²⁾ (§§ 92, 117).

Первая попытка при помощи точных теоретических рассуждений получить результат, менее противоречащий обычному опыту, содержится в исследованиях Кирхгофа и Рэля, относящихся к плоской задаче о движении плоской пластинки (§§ 76, 77). Следует заметить, что движение жидкости в такого рода задачах уже нельзя считать совершенно свободным от вихрей, так как поверхность разрыва равносильна вихревому слою (§ 151).

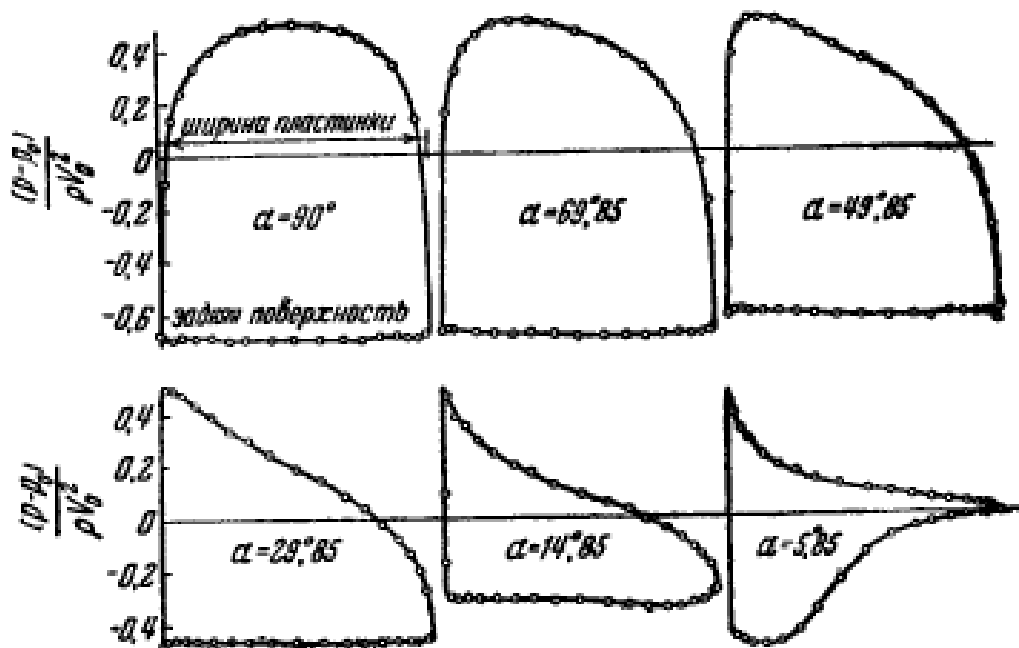
Помимо того факта, что вязкость здесь не учитывается, эта теория встречает еще то возражение, что следующая за пластинкой неограниченная масса „мертвой воды“ должна обладать бесконечно большой кинетической энергией, и потому, а также и по другим соображениям, необходимо будет признать, что методы Гельмгольца

¹⁾ Другой результат получил Sh a r p e, On the Stability of the Motion of a Viscous Liquid, Trans. Amer. Math. Soc., VI, 496 (1905), который исследовал также течение в цилиндрических трубах. Эта задача, так же как задача равномерного движения сдвига между параллельными плоскостями, подробнее была рассмотрена Орром, см. выше, стр. 850. Расхождения в числовых результатах происходят, повидимому, от разницы в формах рассматривавшихся возмущений. Последняя из названных задач рассматривалась также Лоренцом (см. выше).

²⁾ Отсутствие сопротивления в собственном смысле авторами континента часто обозначается как „парадокс Даламбера“. Рэлей показал способом последовательных приближений, что этот парадокс имеет место также и в случае сжимаемой (идеальной) жидкости, пока скорость переноса остается меньше, чем скорость звука. Phil. Mag. (6), XXXII, 1 (1913).

и Кирхгофа собственно можно применять только к случаю *свободной* поверхности, такой, как струя¹⁾.

Вычисления Кирхгофа и Рэлея дают верный результат, что сопротивление пропорционально квадрату скорости, как это и требуется на основе их допущений по теореме импульсов²⁾ и как это подтверждается внутри некоторых пределов и практикой, но распределение давления по поверхности пластинки оказывается совершенно различным. Имеется не только избыток давления на передней стороне, но и недостаток давления, или подсос, на задней; оба обстоятельства способствуют увеличению общего сопротивления. Эти результаты иллюстрируются на прилагаемых диаграммах (фиг. 83)³⁾,



Фиг. 83.

где ордината указывает распределение давления и подсоса по ширине пластинки при различных углах α наклона ее к направлению потока.

Были попытки со стороны некоторых авторов распространить методы Кирхгофа на случай криволинейной пластинки⁴⁾, но по указанной выше причине они имели малое значение для практических вопросов.

§ 370а. Двойная цепочка вихрей с противоположными направлениями вращений, следующая в хвосте за вытянутой (в поперечном направлении) пластинкой или вообще за цилиндрическим телом, изображалась

¹⁾ Kelvin, Nature, I, 524 (1894) (Papers, IV, 215).

²⁾ Ср. Newton, Principia, lib. II, prop. 33.

³⁾ Из работы Fage и Johannsen, On the Flow of Air behind an Inclined Flat Plate of Infinite Span, Aeronautical Research Committee, R. and M. № 1104 (Proc. Roy. Soc., CXVI, 170 (1927)). За некоторыми более ранними измерениями можно отослать к Стантону, On the Resistance of Plane Surfaces in a Uniform Current of Air, Proc. Inst. Civ. Eng., CLVI, 78 (1904); Эйффель, La Résistance de l'Air, Paris (1910).

⁴⁾ Ссылки были даны на стр. 133.

многими исследователями, и иногда очень удачно, с помощью фотографии¹⁾. При некоторой, достаточно умеренной скорости вихри последовательно отделяются с двух сторон тела, и общее расположение вихрей оказывается аналогичным тому случаю шахматного расположения, который был исследован Карманом (§ 156); исключение составляло только то обстоятельство, что вихри не являлись концентрированными в точках, что принималось для упрощения исследования. Эти исследования и послужили основой теории сопротивления для плоского случая. Предполагая движение всюду, за исключением изолированных вихрей, безвихревым, Карман из рассмотрения количеств движения выводит формулу²⁾

$$\frac{\rho k b}{a} (U - 2V) + \frac{\rho k^2}{2\pi a}, \quad (1)$$

где U обозначает скорость тела относительно жидкости, а остальные обозначения те же, что и в § 156. В частности V обозначает скорость цепочки вихрей относительно невозмущенной жидкости. В устойчивом случае мы нашли, что

$$\frac{b}{a} = 0,281, \quad k = \sqrt{8} \cdot V a. \quad (2)$$

Если мы подставим эти значения в (1), то все еще останутся неизвестными отношение $\frac{V}{U}$ и зависимость между b (или a) и размерами препятствия. Формула (1) только тогда становится полной формулой сопротивления, когда эти неизвестные будут как-то определены. В силу диффундирующей природы реальных вихрей точное наблюдение их затруднено, но все же оно было выполнено Карманом для воды и Фаге для воздуха.

Прежде чем оставить эту тему, следует указать, что и для объяснения многих явлений акустики мы должны обращаться к образованию двойной цепочки вихрей. Известным примером является тот характерный звук, который вызывается действием порыва ветра на деревья. Здесь мы имеем образование при соответствующих условиях тонов³⁾ различной силы. В авиации мы встречаемся с завыванием троссов аэропланов⁴⁾ и ревом пропеллера различной силы.

¹⁾ Например, Ahlborn, Ueber den Mechanismus des hydrodynamischen Widerstandes, Hamburg (1902); Bénard, Comptes Rendus, CXLVII, 839 (1908); Kármán and Rubach, Phys. Zeitschr. (1913), стр. 49; Prandtl, The generation of vortices..., London (1927); Rosenhead, Proc. Roy. Soc. A, CXXIX, 115 (1930).

²⁾ Независимое вычисление проф. Syngé, Proc. Roy. Irish. Acad., XXXVI, A, 95 (1929) в предположении существования только „полубесконечной“ цепочки вихрей приводит к аналогичному результату. Соответствующая формула для случая движения жидкости между параллельными стенками получена Rosenhead и (приблизительно) Glaucert, см. выше, стр. 288.

³⁾ Rayleigh, Phil. Mag. (6), VI, 29 (1915) (Papers, VI, 315).

⁴⁾ Reif, Phil. Mag. (6) XLII, 173 (1921).

На основе рассмотрения размерностей Рэлей заметил, что частота тона N , производимого воздухом, набегающим на цилиндрический провод диаметра D , должна удовлетворять формуле типа

$$N = \frac{U}{D} f\left(\frac{v}{UD}\right). \quad (3)$$

Эмпирическая же формула, которую он построил на основании некоторых наблюдений Струхалея, имеет вид

$$\frac{ND}{U} = 0,195 \left(1 - \frac{20,1v}{UD}\right). \quad (4)$$

Теперь мы можем сравнить этот результат с частотой, с которой вихри отделяются от круглого цилиндра в потоке воды по наблюдениям Кармана. Его результаты для двух различных скоростей эквивалентны формулам

$$N = 0,207 \frac{U}{D} \text{ и } 0,198 \frac{U}{D}.$$

Фаге, экспериментируя в воздухе, нашел, что для значительного интервала скоростей частота вихрей, отделяющихся с одного края *плоского лезвия*, перпендикулярного к потоку, может быть представлена хорошо согласующейся с наблюдениями формулой

$$N = 0,146 \frac{U}{D},$$

где D — ширина лезвия. Аналогичные наблюдения Кармана для воды дают числовой множитель в пределах от 0,139 до 0,145.

§ 370б. Единственный случай, когда действие *равномерного*¹⁾ потока идеальной жидкости на погруженное в него тело дает результирующую силу, есть случай плоского контура с циркуляцией вокруг него. Эта результирующая сила есть подъемная сила, перпендикулярная к скорости потока и равная на единицу длины

$$L = k\rho U, \quad (1)^2$$

где U — скорость потока, а k — циркуляция. Эта теорема, содержание которой совершенно не зависит от вида и размера поперечного сечения, и составляет основу современной теории подъемной силы крыла аэроплана³⁾. Доказательство этой теоремы было уже дано отдельно в § 72б, но важность этого вопроса может оправдать включение дополнительного доказательства, которое имеет менее искусственный характер.

¹⁾ Необходимость такого ограничения иллюстрировалась в §§ 72б, 143.

²⁾ Kutta, см. выше, стр. 102; теорема была дана в неопубликованной диссертации в 1902 г. Первое опубликованное сообщение принадлежит Жуковскому (1906).

³⁾ Lanchester, *Aerodynamics*, London (1907); Prandtl, *Gött. Nachr. math. phys. Classe* (1918), (1919).

Если (u, v) суть составляющие скорости жидкости, исчезающие в бесконечности, то формула для давления представляется в виде

$$\frac{p}{\rho} = \text{const.} - \frac{1}{2} \{ (u-U)^2 + v^2 \}, \quad (2)$$

так как движение относительно тела является установившимся. Предполагая, что l, m суть направляющие косинусы внешней нормали к элементу ds контура поперечного сечения, результирующую давлений на тело в направлении оси x получим в виде

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} \rho \int (u^2 + v^2) l \, ds - \rho U \int ul \, ds = \\ &= -\rho \iint \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \, dy - \rho U \int ul \, ds = \\ &= \rho \int (lu + mv) u \, ds - \rho U \int ul \, ds. \end{aligned} \quad (3)$$

Мы здесь опускаем два криволинейных интеграла, взятых по бесконечно большому контуру; они обращаются в нуль, так как скорость в бесконечности имеет порядок $\frac{1}{r}$, где r — расстояние от начала.

Таким же способом мы найдем

$$Y = \rho \int (lu + mv) v \, ds - \rho U \int um \, ds. \quad (4)$$

Но на поверхности контура мы имеем

$$lu + mv = lU, \quad (5)$$

следовательно, $X = 0$ и

$$Y = \rho U \int (lv - mu) \, ds = \rho k U. \quad (6)$$

Случай эллиптического цилиндра, который содержит в себе как предельную форму случай плоской пластинки, может быть исследован на основании формулы, данной в конце § 72. При указанных там обозначениях давления жидкости на эллиптический цилиндр с полуосями a и b (когда $\omega = 0$) приводятся к силе

$$X = -\pi \rho k V, \quad Y = \pi \rho k U \quad (7)$$

и к паре

$$N = -\pi \rho U V (a^2 - b^2). \quad (8)$$

§ 371. Замечательно то, что формула

$$R = k \rho U^2 \quad (1)$$

для сопротивления на единицу поверхности [§ 366 (6)] с приблизительно тем же значением коэффициента k имеет силу для обширного класса случаев турбулентного течения вдоль неподвижной граничной поверхности большой протяженности. Она, например, применима для трения ветра, дующего¹⁾ над ровной поверхностью, и для сопротивления морского дна приливным течениям. Основываясь на этом, Тэйлор в своей интересной работе²⁾ вычислил по известным ско-

¹⁾ G. I. Taylor, Proc. Roy. Soc. A, XCII, 196 (1915).

²⁾ Taylor, см. выше, стр. 710 и Monthly Notices R. A. S., LXXX, 308 (1920).

ростам течения скорость рассеяния энергии в Ирландском море. Эту скорость можно также вычислить совершенно другим способом, а именно по скоростям и высотам приливных течений в северном и южном проходах при входе и выходе и по работе, произведенной силами притяжения луны. Результаты обоих этих способов вычисления были порядка $3 \cdot 10^{17}$ эргов в секунду. Жеффрей¹⁾ на основании тех же соображений произвел оценку приливного рассеяния для всего океана и получил при этом результат $2,2 \cdot 10^{19}$. Рассеяние же, которое оказывается необходимым, чтобы объяснить ускорение среднего движения луны, равно $1,41 \cdot 10^{19}$.

Что же касается полного сопротивления жидкости (или газа, когда сжатие его незначительно) при поступательном движении в соответствующих направлениях подобных между собою тел произвольной формы, то на основании рассмотрения размерностей можно прийти к формуле вида

$$F = \rho U^2 l^2 f\left(\frac{Ul}{\nu}\right), \quad (2)$$

где l обозначает какую-либо длину, определяющую размеры тела (например, радиус в случае шара). Приблизительная пропорциональность U^2 , найденная во многих случаях, указывает на то, что в этих случаях функция f оказывается приблизительно постоянной и что сопротивление поэтому почти не зависит от вязкости. Как и в рассмотренных ранее случаях, это не означает, что вязкость не оказывает никакого влияния; это влияние сказывается наряду с сопротивлением скольжению на поверхности в установлении того *режима*, который в конце концов в действительности наступает.

Формула (2) служит основанием метода, при помощи которого определяют силы, действующие на воздушный корабль или крыло аэроплана, по опытам над уменьшенной моделью в аэродинамической трубе. Множитель $f\left(\frac{Ul}{\nu}\right)$ представляет в действительности то, что определяется как коэффициент сопротивления. Если значение числа Рейнольдса $\frac{Ul}{\nu}$ взять одинаковым как в случае модели, так и в случае натуральных размеров, то силы будут пропорциональны соответствующим значениям $\rho U^2 l^2$.

Относительная малость линейных размеров l в модели может компенсироваться до некоторого предела увеличением скорости U или, как это делается в трубах больших скоростей, применением сильно сжатого воздуха, так как для газа при данной температуре значение ν обратно пропорционально плотности.

Возрастание коэффициента сопротивления от нуля носит произвольный характер; с некоторого момента он начинает уменьшаться и затем возрастать, обнаруживая несомненное стремление к постоянному значению.

¹⁾ Jeffreys, Phil. Trans. A, CCXXI, 239 (1920).

Форма тела наименьшего сопротивления может быть определена лишь опытным путем. При обычном очертании воздушного корабля, профиль которого тупой спереди и суживается к концу, центральные линии тока плотно прилегают к профилю, и турбулентность оказывается заметной только в тонком слое около поверхности тела и в кильватере. Подобная „обтекаемая“ форма, как ее называют, применяется также и для поперечных сечений аэропланов стоек и тросов.

Метод „размерностей“, который был использован в §§ 365, 366, может быть представлен в иной форме¹⁾. Возьмем одно из динамических уравнений движения несжимаемой жидкости, например,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \quad (3)$$

и представим себе другое состояние движения той же или другой жидкости, отличающееся только масштабами линейных размеров и времени. Отличая штрихами буквы, относящиеся к этому состоянию, мы полагаем, что x' , y' , z' находятся в постоянном отношении соответственно к x , y , z , а t' — в постоянном отношении к t . Члены в том уравнении, которое соответствует уравнению (3), будут отличаться все от соответствующих членов уравнения (3) на один и тот же множитель только тогда, когда будут существовать следующие равенства отношений:

$$\frac{u'}{t'} : \frac{u}{t} = \frac{u'^2}{x'} : \frac{u^2}{x} = \frac{p'}{\rho' x'} : \frac{p}{\rho x} = \frac{\nu' u'}{x'^2} : \frac{\nu u}{x^2}. \quad (4)$$

Эти равенства эквивалентны

$$u' : u = \frac{x'}{t'} : \frac{x}{t}; \quad p' : p = \rho' u'^2 : \rho u^2; \quad \frac{u' x'}{\nu'} = \frac{u x}{\nu}. \quad (5)$$

Уравнение неразрывности будет, очевидно, также удовлетворено новыми переменными. Мы заключаем отсюда, что видоизмененное состояние движения будет динамически возможным при условии, что значения чисел Рейнольдса $\frac{U l}{\nu}$ будут одинаковыми, где U и l будут представлять соответственно характерную скорость и характерный линейный размер. Тогда давления в соответствующих точках будут пропорциональны ρU^2 , а силы на соответствующие площадки — $\rho U^2 l^2$.

Пограничный слой.

§ 371а. Совершенно ясно, что всякая рациональная теория сопротивления должна также учитывать и то абсолютное сопротивление, которое тело противопоставляет скольжению жидкости вдоль его

¹⁾ Ср. Helmholtz, Berl. Ber., июнь 26, 1873 (Wiss. Abh., I, 158), где приведены некоторые интересные применения принципов динамического подобия.

поверхности. С другой стороны, небольшого наблюдения достаточно, чтобы заметить, что переход от скорости на поверхности к скорости жидкости вблизи нее часто совершается на очень коротком расстоянии. В самом деле, когда тело достаточно плавной формы, такое, как шар или цилиндр, или крыло аэроплана, движется в такой подвижной жидкости, как вода, со скоростью, значительно превышающей те скорости, которые имелись в виду в исследованиях §§ 337—343, то оказывается, что вихри сосредоточиваются почти только в узкой полоске вдоль передней части поверхности и в хвосте. К изучению этой переходной области как с математической, так и с экспериментальной стороны и были направлены в течение некоторого времени усилия многих исследователей. Конечно, здесь не предполагается существование определенной поверхности раздела между слоем и прилегающей жидкостью, ибо сам переход должен быть непрерывным, но обычно бывает возможно указать предел, и зачастую очень тесный, внутри которого этот переход полностью практически завершается.

Для последующего удобнее представлять тело покоящимся, а жидкость обтекающей его со скоростью U , постоянной до тех пор, пока она не претерпевает возмущений от присутствия тела.

Условия будут наиболее простыми, если рассматривать плоскую задачу о пластинке или плоскости, помещенных по потоку. Пограничный слой здесь начинается в самом переднем крае или вблизи него и постепенно утолщается с возрастанием расстояния (x) от края. До тех пор пока местное число Рейнольдса $\frac{Ux}{\nu}$ будет ниже некоторого предела (приблизительно порядка 10^6), движение внутри слоя будет установившимся и часто обозначается как „ламинарное“ в том смысле, что линии тока будут идти почти параллельно поверхности. Когда же этот предел будет превзойден, тогда слой становится турбулентным, и его толщина возрастает значительно быстрее.

Ламинарное течение в слое изучалось математически различными авторами. Точные уравнения установившегося движения, а именно

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\rho \partial x} + \nu \Delta_1 u, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\rho \partial y} + \nu \Delta_1 v_1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

едва ли могут быть подвергнуты разрешению, если не прибегать к различным возможным упрощениям.

Возьмем начало на переднем крае, а ось x вдоль пластинки в направлении течения. Так как ν сравнительно мало, то второе уравнение показывает, что p практически не зависит от y . Затем мы пренебрегаем $\frac{\partial p}{\partial x}$, так как оно обращается в нуль для больших зна-

чений u , где поток не возмущается присутствием пластинки. Далее, так как $u \frac{\partial u}{\partial x}$ обращается в нуль на поверхности пластинки, то значением $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ внутри пограничного слоя можно пренебречь по сравнению со значением $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Уравнения (1), таким образом, приводятся к одному уравнению

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (3)$$

к которому, конечно, надо присоединить уравнение (2). Эти рассуждения и составляют исходную точку зрения работы Прандтля и Блазиуса¹⁾. Эти приближения более подробно были разъяснены Блазиусом; в конечном счете они могут быть проверены в получаемых решениях. Пограничные же условия представлялись в виде $u=0, v=0$ для $y=0$ и $u=U$ для $y \rightarrow \infty$.

После несколько сложных вычислений Блазиус для тангенциального напряжения на пластинку получает следующий результат:

$$(p_{xy})_{y=0} = 0,332 \rho U^2 \sqrt{\frac{\nu}{Ux}}. \quad (4)$$

Предполагается, конечно, что условия для ламинарного движения в слое выполнены, т. е. что значение $\frac{Ux}{\nu}$ не превышает ранее указанного предела. Если это имеет место для всей ширины (l) пластинки, то полное сопротивление одной ее стороны будет равно

$$\int_0^l p_{xy} dx = 0,664 U^2 l \sqrt{\frac{\nu}{Ul}}; \quad (5)$$

следовательно, это сопротивление пропорционально $U^{3/2}$.

Несколько иным путем подошел к этому вопросу Карман²⁾. Он вычислил изменение количества движения в направлении оси x в области, ограниченной пластинкой ($y=0$), двумя соседними ординатами кривой

$$y = \eta(x), \quad (6)$$

¹⁾ Prandtl, Über Flüssigkeitsbewegung mit kleiner Reibung (1904), напечатано в Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik..., Göttingen (1927); Blasius, Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung (Dissertation), Leipzig (1907). Интересное независимое рассмотрение вопроса смотреть у R. Mises, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., VII, 425 (1927).

²⁾ Kármán, Abh. des aerodynamischen Instituts, Aachen (1921).

которая представляет границу пограничного слоя, и прилегающей дугой этой кривой.

На фиг. 84 имеем

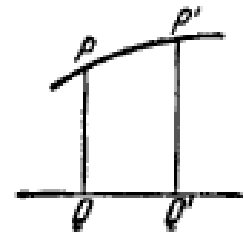
$$QQ' = \delta x, \quad PQ = \eta, \quad P'Q' = \eta + \delta\eta.$$

Поток количества движения через грань $P'Q'$ превосходит такой же поток через грань PQ на величину

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\eta} \rho u^2 dy \cdot \delta x.$$

Далее, поток протекающей жидкости через $P'Q'$ превосходит такой же поток через PQ на величину

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\eta} \rho u dy \cdot \delta x,$$



Фиг. 84.

и эта величина в точности должна быть равна количеству жидкости, протекшей в единицу времени внутрь слоя через PP' , где скорость почти равна U и параллельна оси x . Следовательно, полное изменение количества движения в единицу времени через все границы области будет

$$\left\{ \frac{d}{dx} \int_0^{\eta} \rho u^2 dy - U \frac{d}{dx} \int_0^{\eta} \rho u dy \right\} \delta x.$$

Эта величина должна быть приравнена тем силам, которые действуют в направлении оси x на жидкость, занимающую в данный момент рассматриваемую область. Они состоят из компоненты давления

$$- \frac{dp}{dx} \eta \delta x$$

и силы трения на самой пластинке

$$- \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \delta x.$$

Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\eta} u^2 dy - U \frac{d}{dx} \int_0^{\eta} u dy = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} - \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad (7)$$

которое и представляет „интегральное соотношение“ Кармана¹⁾. Следует заметить, что до сих пор кривая (6) могла быть проведена, как угодно внутри той области, где переход от скорости нуль на пластинке до скорости U потока полностью завершается. Таким образом, это уравнение еще ничего не говорит о „толщине“ пограничного слоя или о характере его изменения с x . Для последнего мы должны будем сделать более или менее правдоподобное предположение о распределении скорости u внутри интервала от 0 до η , благодаря чему результат по необходимости будет зависеть до некоторой степени от сделанного частного предположения. При этом должны быть удовлетворены условия: $u = U$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ для $y = \eta$ и $u = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ для $y = 0$; последнее условие вытекает из уравнения (3). Эти условия могут быть удовлетворены, например, функцией

$$u = U \sin \frac{\pi y}{2\eta}. \quad (8)$$

Подставляя в (7), где член $\frac{\partial p}{\partial x}$ должен быть опущен, мы найдем

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{\pi^2}{4 - \pi} \frac{\nu}{U\eta}, \quad (9)$$

и, следовательно,

$$\eta = 4,80 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \quad (10)$$

в предположении, что слой начинается у переднего края.

Тогда получаем

$$(\rho_{xy})_{y=0} = \frac{\pi}{2} \frac{\mu U}{\eta} = 0,328 \rho U^2 \sqrt{\frac{\nu}{Ux}}, \quad (11)$$

что хорошо приближается к результату (4) Блазиуса.

Принятое частное допущение дает

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\pi U y}{2\eta^2} \cos \frac{\pi y}{2\eta} \frac{d\eta}{dx},$$

откуда

$$v = U \frac{d\eta}{dx} \left\{ \frac{y}{\eta} \sin \frac{\pi y}{2\eta} - \frac{2}{\pi} \left(1 - \cos \frac{\pi y}{2\eta} \right) \right\}. \quad (12)$$

¹⁾ Оно может быть также получено из уравнения (1) с помощью интегрирования по y от 0 до η с учетом уравнения неразрывности. Так, будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^\eta \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy &= \int_0^\eta u \frac{\partial u}{\partial x} + [uv] \Big|_0^\eta - \int_0^\eta u \frac{\partial v}{\partial y} dy = \\ &= \int_0^\eta \frac{\partial(u^2)}{\partial x} dy + U(v)_\eta = \int_0^\eta \frac{\partial(u^2)}{\partial x} dy + U \int_0^\eta \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_0^\eta \frac{\partial}{\partial x} (u^2 - Uu) dy. \end{aligned}$$

Последняя часть эквивалентна левой части уравнения (7).

§ 371b. Если нетурбулентный поток набегаёт на тело с непрерывной кривизной, то в области перед телом, вблизи по крайней мере передней части поверхности, движение остается, несомненно, безвихревым и имеет в общем тот же характер, который указан на фигурах 13 и 29¹⁾. В частности, имеется центральная линия тока, примыкающая к телу в передней „точке застоя“, характеризуемой нулевой скоростью. Здесь начинается пограничный слой, который, будучи ламинарным, стелется по поверхности с обеих сторон до некоторого расстояния; в случае круглого цилиндра, например, он даже доходит до 70 или 80° от точки застоя. В случае же крыла аэроплана он может распространяться почти до задней кромки. Обстоятельства, конечно, меняются в зависимости от формы тела, а также от скорости U потока. Обычно встречается такая точка, в которой слой становится турбулентным и отрывается от поверхности, оставляя между собой и телом область сильной турбулентности с возвратным потоком вдоль поверхности.

Плоский случай был изучен теоретически Блазиусом и другими при помощи криволинейных координат: дуги s профиля и нормали n , проведенной от поверхности внутрь жидкости. Уравнения, принятые для пограничного слоя, тогда принимают вид

$$u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial p}{\rho \partial s} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad (14)$$

причем эффектом от кривизны мы пренебрегаем²⁾. Мы пренебрегаем попрежнему величиной $\frac{\partial p}{\partial n}$, но величина $\frac{\partial p}{\partial s}$ здесь уже не обращается в нуль, как это предполагалось в случае плоской пластинки. В безвихревой области вблизи поверхности имеет место уравнение Бернулли

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} U^2 = \text{const.}, \quad (15)$$

и, следовательно,

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = U \frac{\partial U}{\partial s}. \quad (16)$$

Положение точки на поверхности, в которой происходит „отрыв“ слоя, определяется из условия $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

¹⁾ Сравнение результатов экспериментальных измерений нормальных давлений в различных точках вытянутого эллипсоида вращения с теоретическими данными, вычисленными в §§ 104, 105, было выполнено R. I о n e s. Phil. Trans. A, CCXXVI, 231 (1927). Когда эллипсоид был направлен острым концом к потоку, совпадение получилось очень хорошим почти по всей длине.

²⁾ Сравнить то, что получится при $r \rightarrow \infty$ в уравнениях § 328a в полярных координатах.

Блазиус в названной работе применил эти уравнения к случаю цилиндра (произвольной формы сечения), расположенного симметрично по отношению к скорости потока, и затем далее более подробно рассмотрел частный случай кругового сечения. При установившемся режиме было найдено, что отрыв происходит где-то около 90° от передней точки застоя. С другой стороны, если цилиндр приходит в движение из состояния покоя либо внезапно, либо с постоянным ускорением, отрыв начинается при 180° и затем переходит вперед. В последнем случае он установил формулу для сопротивления, обусловленного отчасти нормальными давлениями, а отчасти тангенциальными напряжениями¹⁾.

Эти вычисления выполнены с замечательным аналитическим искусством, но все же результаты нуждаются в некотором уточнении в силу того допущения, что скорость U вне пограничного слоя такая же, как если бы жидкость свободно скользила вдоль поверхности. Строгой точности на самом деле для этого не требуется. Последующие авторы принимали для U то алгебраическое выражение от s — дуги профиля, которое можно поставить в соответствие с экспериментальными значениями $p^2)$.

В приведенных выше исследованиях §§ 337, 342 и др. предполагалось, что число Рейнольдса ($R = \frac{Ul}{\nu}$) не превосходит очень малое числовое значение. В тех же случаях, которые мы теперь рассматриваем, напротив, значения R могут быть очень большими и в силу линейных размеров, и в силу малой кинематической вязкости обыкновенных жидкостей. В связи с этим очень интересный вопрос поставил Озеен: каков будет предельный характер движения жидкости в любом данном случае, если $\nu \rightarrow 0$ или $R \rightarrow \infty$? Конечно, нельзя будет ожидать, что в этом случае будет иметь место совпадение с тем результатом, который мы получим, когда с самого начала предположим $\nu = 0$.

Вопрос этот кажется очень трудным и почти безнадежным, если исходить из точных уравнений гидродинамики. Озеен же взял за основу линеаризированные уравнения (6) § 342, но здесь мы встречаем а priori то затруднение, что сами эти уравнения получены в результате пренебрежения квадратичными членами, что, как известно, можно делать только в случаях, когда число Рейнольдса очень мало. Поэтому они едва ли могут быть приняты без каких-либо опасений в качестве основы для установления того, что будет в случае реальной жидкости, когда R неограниченно возрастает.

Если оставить это в стороне, то исследования Озеена имеют значительный математический интерес. Они не могут быть здесь воспроиз-

¹⁾ Аналогичные вычисления для трехмерного случая тела вращения, ось которого совпадает с направлением потока, были выполнены Boltze, Göttingen (1908) (Dissertation). Подробное применение сделано для шара.

²⁾ Pohlhausen, Abh. d. aerodynam. Inst. Aachen (1921); Goldstein, Camb. Proc., XXVI, 1 (1930).

ведены¹⁾, но на общих заключениях можно коротко остановиться. Рассматривая, например, установившееся перемещение тела в неограниченной массе жидкости, он нашел, что решение в той цилиндрической области, которую уже прорезало само тело (и которую мы можем на момент называть „хвостом“), будет иметь совершенно другой аналитический характер, чем в остальной безграничной области. Во всей последней области движение оказывается безвихревым, и жидкость, следовательно, плавно скользит вдоль передней стороны тела. В хвосте, напротив, нет скольжения на задней стороне поверхности, и движение является вихревым (но не чисто „турбулентным“). Вдоль той цилиндрической поверхности, где смыкаются эти две области, имеет место непрерывность нормальной компоненты скорости и разрыв тангенциальной компоненты, сопровождающийся недопустимым разрывом давления. Аналитическое решение в этом направлении было получено Цейлоном²⁾ для частных случаев круглого цилиндра, круглого диска и полусферы, перемещающейся вперед либо искривленной частью, либо плоским дном; при этом автор прибегает к некоторым искусственным приемам с целью избежания того недопустимого разрыва, который был указан выше. Как и требуется, результаты дают почти адекватную картину того, что имеет место в действительных случаях. В частности для давлений обнаруживается тот факт, что теоретическое распределение давлений по передней части цилиндра находится в общем согласии с экспериментальными данными. Это и должно получаться почти для всякой приемлемой конфигурации безвихревого движения в примыкающей области (ср. § 371а). Но точка, в которой хвост отделяется от тела, граница хвоста и его внутреннее строение совершенно отличны от того, что наблюдается в действительности. Еще более сильное расхождение, несомненно, будет обнаруживаться, если этот метод применить к дирижаблю или к крылу аэроплана³⁾.

§ 371с. Когда мы переходим к рассмотрению *турбулентного* движения вокруг тела, обозначения U , v должны пониматься в некотором статистическом смысле, как, например, осредненные по времени за очень короткий интервал. Отмечая этот измененный смысл обозначений, как и в § 369, черточкой над соответствующими буквами, перепишем уравнение (7) § 371а в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\eta} \bar{u}^2 dy - U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\eta} \bar{u} dy = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \eta - \nu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (1)$$

¹⁾ Полное изложение дано со ссылками в руководстве, цитированном выше, на стр. 775.

²⁾ Z ellon, On potential problems in the theory of fluid resistance, Stockholm (1924). См. также добавление Цейлона к книге Озена, упомянутой выше, на стр. 775.

³⁾ Я нашел, что аналогичная критика, но еще с большими подробностями была высказана F. No ether, Handb. d. phys. u. techn. Mechanik, Leipzig (1928), стр. 792.

Здесь же следует заметить, что среднее значение (\bar{u}^2) от квадрата скорости не тождественно значению квадрата средней скорости (\bar{u}). Это различие, каково бы ни было его практическое значение, не отмечалось авторами работ по рассматриваемому вопросу. Тогда, как можно заметить, если скорость турбулентного потока определяется комбинацией трубки Пито с трубкой статического давления (§ 24), эта комбинация вернее всего показывает скорость „среднего квадрата“.

На основе уравнения (1) были сделаны попытки рассмотреть случаи турбулентного течения, но всякий раз требовалось по необходимости какое-либо предположение о распределении средней скорости в пограничном слое или другие эквивалентные допущения. Принимаемая обычно формула

$$\frac{\bar{u}}{U} = \left(\frac{y}{\eta}\right)^n \quad (2)$$

нуждалась в уточнении, так как она обращает $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ либо в нуль, либо в бесконечность при $y \rightarrow 0$, за исключением того недопустимого случая, когда $n = 1$ ¹⁾.

Здесь мы находимся уже на границах теории. Дальнейшие наши знания по этой части предмета могут быть извлечены из эксперимента, и за этим необходимо будет обращаться к опубликованным работам различных аэродинамических лабораторий. Литература эта очень обширна и непрерывно увеличивается в своем объеме; она не может быть изложена здесь в сжатом виде.



Фиг. 85.

К ранее рассмотренному вопросу о подъемной силе крыла аэроплана можно добавить одно замечание. Характер обтекания *идеальной* жидкостью крыла аэроплана показан на фиг. 85, причем показана только одна центральная линия тока, но представление о

полной картине может быть составлено из фиг. 18 на стр. 110. Реальная жидкость не может обтекать подобным способом в силу наличия сопротивления скольжению, а из-за этого получается бесконечная скорость и, следовательно, бесконечное отрицательное давление на остром конце задней кромки. Предположение наличия тонкого пограничного слоя, устраняя эти бесконечности, не улучшает значительно

¹⁾ Формула, свободная от этого недостатка, например,

$$y = \frac{\bar{u}}{a} + \left(\eta - \frac{U}{a}\right) \left(\frac{\bar{u}}{U}\right)^n,$$

где

$$a = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)_{y \rightarrow 0},$$

принималась в работе H e g g e (при $n = 7$), Publications of the Delft aeronautical laboratory, № 6 (1924).

общей картины; влияние вязкости, а следовательно, и образование вихрей вблизи острой кромки слишком велико, чтобы им можно было пренебречь.

Но если на безвихревое движение фиг. 85 наложить циркуляцию в направлении вращения часовой стрелки, то возможно последнюю подобрать так, что скорость на задней кромке будет конечной¹⁾. В этом случае элементарные струйки с обеих сторон встречаются и сходят плавно с кромки, без разрыва. Результат показан на фиг. 86; теперь становится возможным уяснить, как можно мысленно представить себе поведение реальной жидкости при помощи введения пограничного слоя и тонкого хвоста.



Фиг. 86.

Несмотря на попытки, которые были сделаны, пока еще не вполне легко чисто логическим путем обнаружить те стадии, которые должны быть пройдены, прежде чем установится указанная выше картина, после того, как начнется относительное движение²⁾. К счастью, на помощь нам приходят некоторые прекрасные эксперименты³⁾ с малыми моделями в канале. Вначале образуется вихрь с вращением против часовой стрелки и отделяется от кромки, затем он переходит в поток по течению, вызывая дополнительную циркуляцию вокруг крыла с противоположным вращением. С обеих сторон поверхности сползают пограничные слои и заполняют хвост вихрями с противоположными вращениями, которые постепенно диффундируют и погашают друг друга.

Влияние сжимаемости.

§ 371d. Течение сжимаемой жидкости вокруг препятствия, повидимому, впервые математически изучалось Рэлеем⁴⁾. Принимая адиабатический закон, будем иметь

$$\frac{c^2}{c_0^2} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}, \quad (1)$$

где c обозначает скорость звука, соответствующую местному значению ρ , а значок нуль относится к невозмущенной части потока. Далее, если движение является безвихревым, то из § 24а будем иметь

$$q^2 - U^2 = \frac{2}{\gamma-1} (c_0^2 - c^2). \quad (2)$$

¹⁾ Это показано на примере в § 70, в случае дуги круга.

²⁾ Однако должна быть сделана ссылка на исследование Jeffreys Proc. Roy. Soc. A, CXXVIII, 376 (1930).

³⁾ Prandtl, см. выше, стр. 860; Walker, Aeronautical Research Comm., R. and M., 1402 (1932). (Сообщения об экспериментах, проведенных под руководством проф. В. М. Jones и W. S. Farren).

⁴⁾ Rayleigh, Phil. Mag. (6), XXXII, I (1916) (Papers, VI, 402).

Отсюда получаем

$$\frac{d\varphi}{e} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{d(c^2)}{c^2} = -\frac{1}{2c^2} d(q^2). \quad (3)$$

Уравнение неразрывности § 7 при установившемся движении принимает вид

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2c^2} \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial(q^2)}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial(q^2)}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \frac{\partial(q^2)}{\partial z} \right\}, \quad (4)$$

где c выражается через q формулой (2).

Для плоского случая это уравнение в полярных координатах представляется в виде

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = \frac{1}{2c^2} \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial r} \frac{\partial(q^2)}{\partial r} + \frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} \frac{\partial(q^2)}{r\partial\theta} \right\}, \quad (5)$$

где

$$q^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} \right)^2. \quad (6)$$

Последнее уравнение и было применено Рэлеем к течению вокруг круглого цилиндра. Вначале в правую часть уравнения (5) он подставляет значения φ и q , соответствующие случаю несжимаемости, и затем интегрирует уравнение. Оказывается, что в этом первом приближении не появляется результирующая сила сопротивления цилиндра, и легко заметить, что это будет иметь место и далее по мере продолжения процесса, ибо значения q^2 будут всегда симметричными по отношению к плоскости, проходящей через ось цилиндра под прямым углом к направлению потока.

Однако, это заключение справедливо при условии сходимости получаемых последовательных приближений, а имеются данные, более чем достаточные, что это не имеет места для случая, когда значение $\frac{U}{c_0}$ превышает некоторый предел. Оставляя пока этот вопрос в стороне, легко распространить метод Рэля на случай цилиндра с произвольной формой сечения, включая также и эффект циркуляции¹⁾. Если бы c было равно бесконечности, то значение φ на большом расстоянии стремилось бы к виду

$$\varphi_1 = -Ur \cos\theta + \frac{k\theta}{2\pi}, \quad (7)$$

где начало r взято в непосредственной близости от самого препятствия, а начальная линия θ параллельна общему направлению потока. Мы принимаем это выражение как первое приближение и подставляем его в правую часть уравнения (5). Мы можем также, для совмест-

¹⁾ L a m b, Aeronautical Research. Comm., R. and M., 1156 (1928).

ности, в следующем приближении заменить величину c ее постоянным значением (c_0) в бесконечности. Из формулы (7) получим

$$q_1^2 = U^2 + \frac{kU}{\pi r} \sin \theta, \quad (8)$$

$$\frac{\partial (q_1^2)}{\partial r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial (q_1^2)}{r \partial \theta} \frac{\partial \varphi_1}{r \partial \theta} = \frac{kU^2}{\pi r^2} \sin 2\theta, \quad (9)$$

оставляя только те члены, которые надо будет рассмотреть при возрастании r до бесконечности. Подставляя в (5), интегрируя и принимая во внимание условия в бесконечности, будем иметь для удаленных областей

$$\varphi = -Ur \cos \theta + \frac{k\theta}{2\pi} - \frac{kU^2}{8\pi c_0^2} \sin 2\theta. \quad (10)$$

Здесь опущены те дополнительные члены, которые содержат только отрицательные степени от r и, следовательно, не могут влиять на последующие вычисления сил. Отсюда с достаточным приближением получаем радиальную и тангенциальную составляющие скорости

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r} = U \cos \theta, \quad -\frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = -U \sin \theta - \frac{k}{2\pi r} + \frac{kU^2}{4\pi c_0^2 r} \cos 2\theta; \quad (11)$$

следовательно,

$$q^2 = U^2 + \frac{kU}{2\pi r} \left(1 - \frac{U}{2c_0^2} \cos 2\theta\right) \sin \theta. \quad (12)$$

Составляющие же скорости, параллельная и перпендикулярная к потоку, будут представляться в виде

$$\left. \begin{aligned} u &= U + \frac{k}{2\pi r} \left(1 - \frac{U}{2c_0^2} \cos 2\theta\right) \sin \theta, \\ v &= -\frac{k}{2\pi r} \left(1 - \frac{U}{2c_0^2} \cos 2\theta\right) \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Силы, действующие на препятствие, могут теперь быть определены из видоизмененного потока в бесконечности так, как это сделано в оригинальном доказательстве теоремы Кутта-Жуковского. Изменение количества движения в единицу времени в направлении, перпендикулярном к направлению потока, массы жидкости, заключенной в какой-то момент внутри круга бесконечно большого радиуса r , согласно формулам (10) и (13), будет равно

$$\int_0^{2\pi} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) \rho v r d\theta = -\frac{1}{2} k \rho_0 U \left(1 - \frac{U}{4c_0^2}\right). \quad (14)$$

Кроме того, из (3) имеем

$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = \int_q^U \frac{d(q^2)}{2c_0^2} = \frac{U^2 - q^2}{2c_0^2}, \quad (15)$$

а следовательно, согласно с принятым приближением,

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + \frac{U^2 - q^2}{2c_0^2}. \quad (16)$$

Так как для больших значений r плотность стремится к значению ρ_0 , то мы можем положить

$$p = p_0 + c_0^2(\rho - \rho_0) = p_0 - \frac{k\rho_0 U}{2\pi r} \left(1 + \frac{U^2}{2c_0^2} \cos 2\theta\right) \sin \theta. \quad (17)$$

Следовательно, перпендикулярная к направлению потока результирующая сил давлений, приложенных к окружающей массе жидкости, будет равна

$$- \int_0^{2\pi} p \sin \theta r d\theta = \frac{1}{2} k\rho_0 U \left(1 + \frac{U^2}{4c_0^2}\right). \quad (18)$$

При сравнении с формулой (14) мы и получаем, что „подъемная“ сила, перпендикулярная к потоку, дается известной формулой Жуковского

$$L = k\rho_0 U, \quad (19)$$

причем ошибка приближения оказывается (почти) порядка $\left(\frac{U}{c_0}\right)^4$. По-прежнему очень легко показать, что при данном приближении сопротивление равно нулю.

Формула (19) была впервые обобщена на случай сжимаемой жидкости Глауэртом¹⁾. Его исследование предполагает ограниченность величины отношения $\frac{U}{c_0}$ без точного указания предела, лишь бы оно не превышало единицы. Полученные им формулы для движения в бесконечности эквивалентны выражению

$$\varphi = -Ur \cos \theta + \frac{k}{2\pi} \operatorname{arctg} \left\{ \sqrt{1 - \frac{U^2}{c_0^2}} \operatorname{tg} \theta \right\}, \quad (20)$$

которое можно сравнить с формулой (10).

§ 371e. Чтобы изучить, при каких пределах будет возможно установившееся движение сжимаемой жидкости около препятствия данной формы, проф. Тэйлор прибег к электрическому методу, отличающемуся от метода § 60a только тем, что толщина проводящего слоя берется переменной.

Кинематические условия плоского потенциального установившегося движения содержатся в равенствах

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \rho u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho v = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1)$$

¹ Glaupert, Proc. Roy. Soc. A, CXVIII, 113 (1927).

Уравнения же электрического тока в проводящем слое переменной толщины h будут

$$\sigma f = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \sigma g = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad hf = -\frac{\partial W}{\partial y}, \quad hg = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad (2)$$

где (f, g) есть плотность тока, σ — удельное сопротивление, V — электрический потенциал и W — функция тока. Эти два ряда равенств будут тождественно совпадать, если положить

$$\varphi = V, \quad \psi = W, \quad u = \sigma f, \quad v = \sigma g, \quad \varrho u = hf, \quad \varrho v = hg, \quad (3)$$

причем равенства (3) включают в себя $h = \varrho\sigma$; иначе мы можем положить

$$\varphi = W, \quad \psi = -V, \quad u = -hg, \quad v = hf, \quad \varrho u = -\sigma g, \quad \varrho v = \sigma f, \quad (4)$$

откуда следует $h = \frac{\sigma}{\varrho}$. До сих пор соответствие было чисто кинематическим, кроме того, должно удовлетворяться условие (2) § 371d. Отсюда, при первой форме аналогии, мы должны иметь

$$\frac{h}{h_0} = \frac{\varrho}{\varrho_0} = \left\{ 1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{U^2}{c_0^2} \left(\frac{q^2}{U^2} - 1 \right) \right\}^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (5)$$

где значок нуль относится к областям, в которых течение почти не возмущено. Фиксируя значение $\frac{U}{c_0}$, вначале из эксперимента с электропроводящим слоем постоянной толщины находим распределение значений $\frac{q}{U}$. Найденные значения подставляются в формулу (5) и таким способом определяется исправленное значение h , затем в сосуде изменяется U в соответствии с полученным значением h , процесс повторяется, и так далее. За полными подробностями мы можем отослать к оригинальным работам¹⁾.

В случае течения около круглого цилиндра проф. Тэйлор нашел что последовательные конфигурации очень быстро сходятся для значений $\frac{U}{c_0}$, меньших, чем 0,45, и перестают сходиться после этого предела.

Вторая аналогия была применена в случае сечения крыла аэроплана при наличии циркуляции, подобранной так, чтобы избежать бесконечной скорости на задней кромке. В этом случае найденный предел сходимости составляет $\frac{U}{c_0} = 0,58$.

§ 371f. Следует указать и иную форму уравнений сжимаемой жидкости. Если мы допустим, что движение является только установившимся и необязательно будет потенциальным, то для случая двух измерений будем иметь (§ 165)

$$u \frac{\partial \chi}{\partial x} + v \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

¹⁾ Taylor a. Shearman, Proc. Roy. Soc. A, CXXI, 194 (1928); Taylor, Journal of the Lond. Math. Soc., v. 224 (1890).

где

$$\chi = \int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} q^2. \quad (2)$$

Отсюда

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial (q^2)}{\partial x} + v \frac{\partial (q^2)}{\partial y} \right) = 0. \quad (3)$$

Полагая $\frac{dp}{d\rho} = c^2$ и используя уравнение неразрывности, будем иметь

$$c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial (q^2)}{\partial x} + v \frac{\partial (q^2)}{\partial y} \right) = 0 \quad (4)$$

или, наконец,

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{uv}{c^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

В случае безвихревого движения это последнее уравнение принимает вид

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{2uv}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (6)$$

что эквивалентно уравнению Рэля (5) § 371d.

Уравнение (6) обращается в линейное уравнение, если мы прибегнем к „принципу двойственности“¹⁾ и будем рассматривать u и v как независимые переменные. Полагая

$$\Phi = ux + vy - \varphi, \quad (7)$$

мы найдем

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{2uv}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} + \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = 0. \quad (8)$$

Некоторые интересные замечания о характере задач, связанных с этим уравнением, были сделаны Батеманом²⁾.

§ 371g. Если мы принимаем во внимание сжимаемость, то формулу (2) § 371 следует несколько изменить. Обозначим через k коэффициент объемной упругости; тогда по методу размерностей легко придти к формуле

$$F = \rho U^2 l^2 f \left(\frac{Ul}{v}, \rho \frac{U^2}{k} \right). \quad (1)$$

Если U мало в сравнении со скоростью звука в газах, т. е. в сравнении со значением $\sqrt{\frac{k}{\rho}}$, то эта формула приближается к уже рассмотренному виду

$$F = \rho U^2 l^2 f \left(\frac{Ul}{v}, 0 \right). \quad (2)$$

¹⁾ Forsyth, Differential Equations, § 242.

²⁾ Bateman, Proc. Roy. Soc. A, CXXV, 598 (1929).

Закон сопротивления, изменяющегося пропорционально квадрату скорости, достаточно хорошо оправдывается на опыте в случае снарядов, движущихся в воздухе со скоростью, не превышающей примерно 250 метров в секунду. Если же скорость приближается к скорости звука или превосходит ее, то, как и следовало ожидать, закон сопротивления видоизменяется. В этом случае, кроме сопротивления, обусловленного трением, возникает еще волновое сопротивление, подобное тому, о котором говорилось в § 249.

Если $U > c_0$, где c_0 обозначает обыкновенную скорость звука, то образуется волна (приблизительного) разрыва, как это видно из фотографий, полученных Махом, Бойсом¹⁾ и др. Формулы Ранкина (§ 284), справедливые для этого случая, Рэлей²⁾ применил для вычисления давления у носа снаряда.

Предполагая, что задача приведена к случаю установившегося движения, рассмотрим движение на линии симметрии. При этом должны быть рассмотрены две стадии. Если обозначить через q относительную скорость воздуха, то впереди волны будем иметь, например, $q = U$ и $p = p_0$, $\rho = \rho_0$. Соответствующие значения непосредственно за волной обозначим через q_1 , p_1 , ρ_1 . Отсюда, если положить в уравнениях (14) и (15) § 284 $m = q\rho$, будем иметь

$$\rho_1 q_1^2 = \frac{1}{2} (\gamma - 1) p_1 + \frac{1}{2} (\gamma + 1) p_0, \quad (3)$$

$$\rho_0 U^2 = \frac{1}{2} (\gamma + 1) p_1 + \frac{1}{2} (\gamma - 1) p_0. \quad (4)$$

Так как $c_0^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$, то второе уравнение дает

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{U^2}{c_0^2} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad (5)$$

и определяет таким образом $\frac{p_1}{p_0}$.

Далее, скорость воздуха в промежутке от задней стороны волны до носовой части снаряда непрерывно падает от q_1 до 0. Поэтому на основании формулы (1) § 25 имеем

$$q_1^2 = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} \left\{ \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right\}, \quad (6)$$

где p_2 , ρ_2 относятся к носу снаряда. Подставляя вместо $\frac{\rho_1 q_1^2}{p_1}$ выражение этой величины из уравнения (3), получаем

$$\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{(\gamma + 1)^2}{4\gamma} + \frac{\gamma^2 - 1}{4\gamma} \frac{p_0}{p_1}. \quad (7)$$

¹⁾ Bouss, Nature, XLVII, 440 (1893).

²⁾ Rayleigh, см. выше, стр. 601.

Эта формула в соединении с уравнением (5) и дает искомое значение p_2 .

Принимая $\gamma=1,41$, получим

$$\frac{p_2}{p_0} = 1,90, \quad 5,67 \quad 11,7 \quad 20,7$$

для случаев $\frac{U_0}{c_0} = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4.$

Обратно, этот способ можно применить для того, чтобы измерить скорости воздуха, превосходящие скорость звука. Отношение $\frac{p_2}{p_0}$ находят из отсчетов по трубке Пито, направленной отверстием против потока, и трубки „статического давления“. Уравнение (7) определяет тогда значение отношения $\frac{p_1}{p_0}$, а отсюда находят U при помощи формулы (5). Таким способом Стантон измерил скорости, превосходящие скорость звука в два-три раза, и нашел, что эти измерения очень точно совпадают с другими независимыми и тщательно выполненными экспериментальными определениями ¹⁾.

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

ВРАЩАЮЩИЕСЯ МАССЫ ЖИДКОСТИ.

§ 372. Содержание этой главы имеет свое начало в исследованиях о фигуре земли, которые были начаты еще Ньютоном и Маклореном и далее продолжены большой французской школой математиков, находившейся в расцвете в конце 18 и в начале 19-го столетий. В позднейшее время теория вращающихся жидких масс получила значительное развитие главным образом благодаря трудам Томсона и Тэта, Пуанкаре, Дарвина и Джинса.

Задача заключается в том, чтобы найти возможные формы относительного равновесия однородной гравитирующей жидкой массы, вращающейся с постоянной угловой скоростью около неподвижной оси, и затем определить устойчивость или неустойчивость такого рода форм.

Примем ось вращения за ось z и возьмем начало в центре масс, который, очевидно, должен лежать на этой оси. Если обозначить через ω угловую скорость вращения, то компоненты ускорения в точке

¹⁾ Stanton, Rep. of the Nat. Phys. Lab. for., 1921, стр. 146.

(x, y, z) будут равны $-\omega^2 x, -\omega^2 y, 0$, и уравнения движения приведутся к виду

$$\left. \begin{aligned} -\omega^2 x &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ -\omega^2 y &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где Ω обозначает потенциальную энергию на единицу массы. Отсюда следует

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) - \Omega + \text{const.} \quad (2)$$

На свободной поверхности мы должны иметь $p = \text{const.}$

Некоторые общие свойства форм равновесия были указаны Пуанкаре и Лихтенштейном.

Прежде всего, если внешнее давление равно нулю¹⁾, то для всякой заданной жидкости существует верхний предел для угловой скорости. Рассматривая произвольную область внутри жидкости, на основании формулы (3) § 42 будем иметь

$$\iint \frac{\partial p}{\partial n} dS = - \iiint \Delta p dx dy dz = 2\rho (2\pi\rho - \omega^2) \iiint dx dy dz, \quad (3)$$

где $\frac{\partial p}{\partial n}$ обозначает градиент p в направлении *внутренней* нормали, и ρ выражено в „астрономической“ мере²⁾.

Применяя эту формулу к какой-либо малой сферической области, мы увидим, что давление во внутренней точке не может иметь минимума, если $\omega^2 < 2\pi\rho$, и не может иметь максимума, если $\omega^2 > 2\pi\rho$. Если же давление на границе обращается в нуль, то в первом случае оно нигде внутри не может быть отрицательным, а во втором случае нигде не может быть положительным. В промежуточном случае $\omega^2 = 2\pi\rho$ имеем $\Delta p = 0$ во всех точках внутри жидкости и $p = 0$ на границе, а потому повсюду $p = 0$ (§ 40).

Отсюда следует, что в жидкости, которая не может выдерживать растягивающие усилия, существует верхняя граница для угловой скорости, равная $\sqrt{2\pi\rho}$ ³⁾. Если взять плотность равную средней плотности земли, т. е. положить $\rho = \frac{3}{4} \pi g a$, то наибольшее значение для ω , выраженное через угловую скорость ω_0 вращения земли, получится из формулы

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{3}{2} \frac{g}{\omega_0^2 a} = 433.$$

¹⁾ Вскоре будет показано, что это ограничение является излишним.

²⁾ Это определяет, конечно, специальную единицу и для давления.

³⁾ Poincaré, Bull. Astr. (1885); Figures d'Équilibre, Париж (1902), стр. 11. В тексте дано несколько измененное доказательство.

Кратчайший возможный период оказывается поэтому равным 1 ч. 7 мин.

Далее, форма равновесия необходимо должна быть симметричной относительно плоскости, проходящей через центр масс и перпендикулярной к оси вращения¹⁾. Представим себе жидкую массу составленную из колонн, параллельных оси z , с бесконечно малым поперечным сечением. Центры масс этих колонн будут лежать на некоторой поверхности (которая, однако, может состоять из различных отдельных частей). Если бы эта поверхность была неплоской, то на ней нашлась бы точка M , для которой z имеет наибольшее значение; пусть PQ есть отрезок в жидкости, параллельный оси Oz , который обоими концами лежит на граничной поверхности и в точке M делится пополам, и пусть $|z_P| > |z_Q|$. Из теории притяжения прямой линии легко получается, что значение потенциала (потенциальной энергии) на единицу массы, обусловленное воздействием какой-либо элементарной колонны, в точке P не может быть меньше, чем в точке Q , а будет, как правило, больше. А тогда получаем, что для всего потенциала имеет место неравенство $\Omega_P > \Omega_Q$ и вместе с тем на основании уравнения (2) $p_P < p_Q$, что противоречит допущению.

До сих пор предполагалось, что точки P и Q отличны друг от друга. Если же они совпадают, то из подобных соображений найдем, что в случае отсутствия плоскости симметрии для точки M должно было бы иметь место неравенство $\frac{\partial \Omega}{\partial z} > 0$ и вместе с тем $\frac{\partial p}{\partial z} < 0$, причем точка M теперь уже принадлежала бы свободной поверхности. Но если касательная плоскость в точке M параллельна оси Oz , то в ней должно было бы быть $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$, тогда как если M была бы особой точкой свободной поверхности, то все пространственные производные p обращались бы в нуль.

Заметим между прочим, что как следствие предыдущих рассуждений получается, что при отсутствии вращения каждая плоскость, проходящая через центр тяжести, должна быть плоскостью симметрии. Мы получаем, таким образом, простое доказательство того предложения, что единственная форма равновесия однородной жидкой массы, находящейся под действием сил собственного притяжения, есть шар²⁾.

Мы заключаем также, что точки середин всех параллельных оси вращения хорд свободной поверхности лежат в плоскости, перпендикулярной к этой оси; эту плоскость можно назвать экваториальной

¹⁾ Lichtenstein, Berl. Ber. (1918), стр. 1120. В тексте приведено несколько упрощенное доказательство.

²⁾ Cartesman, Math. Zeitschr. III, 1 (1918). Принадлежащее Ляпунову доказательство того, что шар есть единственная устойчивая форма, приводит Пуанкаре, Figures d'Equilibre, гл. II.

плоскостью. Тогда каждая прямая, параллельная оси, пересекает свободную поверхность не более, чем в двух точках. Далее следует, что составляющая по оси z притяжения в произвольной внутренней или внешней точке, не лежащей в плоскости симметрии, будет направлена к этой плоскости. В самом деле, теория притяжения однородной прямой линии, на которую мы уже ссылались, показывает, что высказанное положение справедливо для каждой из элементарных колонн, на которые мы мысленно разделили всю жидкость. Из высказанного заключения следует неравенство $\frac{\partial \Omega}{\partial z} > 0$, а тем самым и $\frac{\partial p}{\partial z} < 0$ для всех точек, лежащих с положительной стороны плоскости симметрии. Далее следует, что $\frac{\partial p}{\partial n} > 0$ для всех точек свободной поверхности и что $p > 0$ для всех внутренних точек. Первое из этих положений оказывается несовместимым с равенством (3) тогда, когда $\omega^2 > 2\pi\rho$. Таким образом, ограничение $\omega < \sqrt{2\pi\rho}$ имеет место совершенно независимо от каких-либо вопросов о внутренних напряжениях.

Меньший предел для ω был указан Круделем¹⁾. Его доказательство, слегка видоизмененное, состоит в следующем. Согласно теории притяжения оказывается, что функция, значение которой всюду в жидкости есть $p - p_0$ (где p_0 — давление на границе), а вне есть нуль, может рассматриваться как гравитационный потенциал соответственно распределенной (положительной или отрицательной) массы, а именно с поверхностной плотностью

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{\partial p}{\partial n}$$

вдоль границы и с объемной плотностью

$$-\frac{1}{4\pi} \Delta p = \frac{\rho}{2\pi} (2\pi\rho - \omega^2)$$

всюду внутри. Тогда получаем

$$4\pi(p - p_0) = - \iint \frac{\partial p}{\partial n} \frac{dS}{r} + 2\rho(2\pi\rho - \omega^2) \iiint \frac{dx dy dz}{r}. \quad (1)$$

Но для внутренних точек имеем

$$\iiint \frac{\rho dx dy dz}{r} = -\Omega = \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2} \omega^2(x^2 + y^2) + \text{const.},$$

следовательно,

$$\frac{2\omega}{\rho} p = 4\pi p_0 - \iint \frac{\partial p}{\partial n} \frac{dS}{r} - \omega^2(2\pi\rho - \omega^2)(x^2 + y^2) + \text{const.} \quad (5)$$

¹⁾ Crudele, *Accad. d. Lincei*, (5), XIX, 666 (1910).

Теперь рассмотрим касательную плоскость, перпендикулярную к оси вращения, именно ту, которая оставляет область, занятую жидкостью, всю по одну сторону от себя, и пусть P есть точка соприкосновения ¹⁾.

Составим теперь производные по внутренней нормали в точке P от обеих частей уравнения (5). Так как, как мы видели, $\frac{\partial p}{\partial n}$ должна быть положительной во всех точках границы, то из теории притяжения и из только что сделанных предположений следует, что производная по нормали от выражения

$$-\iint \frac{\partial p}{\partial n} \frac{dS}{r}$$

в точке P должна быть меньше, чем $2\pi \frac{\partial p}{\partial n}$, и тогда получаем

$$\frac{2\omega^2}{g} \frac{\partial p}{\partial n} < 2\pi \frac{\partial p}{\partial n}, \quad (6)$$

или $\omega^2 < \pi g$. Это изменяет наименьший возможный период вращения жидкой массы с плотностью, равной средней плотности земли, до значения 1 час 35 мин.

§ 373. Мы переходим теперь к рассмотрению специальных форм и начнем с того случая, когда внешняя граница представляет собою поверхность эллипсоида. Прежде всего напомним некоторые формулы, относящиеся к притяжению эллипсоида.

Потенциал притяжения однородной массы, ограниченной поверхностью

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (1)$$

для внутренних точек имеет вид

$$\Omega = \pi \rho abc \int_0^\infty \left(\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} - 1 \right) \frac{d\lambda}{\Delta}, \quad (2) ^2)$$

где

$$\Delta = \{ (a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda) \}^{1/2}. \quad (3)$$

Это может быть написано в виде

$$\Omega = \pi \rho (a_0 x^2 + \beta_0 y^2 + \gamma_0 z^2 - \chi_0), \quad (4)$$

¹⁾ К р у д е л и, кажется, предполагал границу всюду конвексной. Из приведенного доказательства следует, что, повидимому, в этом нет необходимости. Например, кольцевая форма не исключается.

²⁾ Указания литературы см. на стр. 758. Знак у Ω по сравнению с обычным способом обозначения изменен.

где, как в § 114,

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= abc \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda) \Delta}, \\ \beta_0 &= abc \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(b^2 + \lambda) \Delta}, \\ \gamma_0 &= abc \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(c^2 + \lambda) \Delta} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

и

$$\chi_0 = abc \int \frac{d\lambda}{\Delta}. \quad (6)$$

Потенциальная же энергия притягивающей массы определяется выражением

$$V = \frac{1}{2} \iiint \Omega \rho \, dx \, dy \, dz, \quad (7)$$

причем интегрирование распространено на весь объем. Подставляя значение Ω из формулы (4), получим

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3} \pi^2 \rho^2 abc \left\{ \frac{1}{5} (\alpha_0 a^2 + \beta_0 b^2 + \gamma_0 c^2) - \chi_0 \right\} = \\ &= \frac{2}{3} \pi^2 \rho^2 a^2 b^2 c^2 \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{5} \left(\frac{a^2}{a^2 + \lambda} + \frac{b^2}{b^2 + \lambda} + \frac{c^2}{c^2 + \lambda} \right) - 1 \right\} \frac{d\lambda}{\Delta} = \\ &= \frac{2}{3} \pi^2 \rho^2 a^2 b^2 c^2 \int_0^{\infty} \left\{ \frac{2}{5} \lambda d \left(\frac{1}{\Delta} \right) - \frac{2}{5} \frac{d\lambda}{\Delta} \right\} = \\ &= - \frac{8}{15} \pi^2 \rho^2 a^2 b^2 c^2 \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta}. \end{aligned} \quad (8)$$

Это выражение отрицательно, так как нулевая точка отсчета соответствует состоянию бесконечного рассеяния массы. Если в качестве нулевого значения потенциальной энергии мы возьмем потенциал массы, имеющей форму шара с радиусом $R = (abc)^{1/3}$, то должны будем прибавить член

$$\frac{16}{15} \pi^2 \rho^2 R^5. \quad (9)$$

Для эллипсоида вращения интегралы упрощаются. Если эллипсоид сплюснутый, то, применяя обозначения § 107, мы можем положить

$$a = b = \frac{(\xi^2 + 1)^{1/2}}{\xi} c \quad (10)$$

и получим ¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 = \beta_0 &= (\zeta^2 + 1) \zeta \operatorname{arccctg} \zeta - \zeta^2, \\ \gamma_0 &= 2(\zeta^2 + 1)(1 - \zeta \operatorname{arccctg} \zeta), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$V = \frac{16}{15} \pi^2 \varrho^2 R^5 \left\{ 1 - \left(\frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2} \right)^{1/2} \zeta \operatorname{arccctg} \zeta \right\} \quad (12)$$

в предположении, что нулевое значение V отвечает сферической форме. Если обозначить через e эксцентриситет меридиана, то будем иметь

$$e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{\zeta^2 + 1}, \quad (13)$$

и формулы могут быть тогда переписаны в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 = \beta_0 &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^2} \arcsin e - \frac{1-e^2}{e^2}, \\ \gamma_0 &= \frac{2}{e^2} \left\{ 1 - \sqrt{1-e^2} \frac{\arcsin e}{e^2} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$V = \frac{16}{15} \pi^2 \varrho^2 R^5 \left\{ 1 - (1-e^2)^{1/2} \frac{\arcsin e}{e} \right\}. \quad (15)$$

В случае же *вытянутого* эллипсоида положим (§ 103)

$$a = b = \frac{(\zeta^2 - 1)^{1/2}}{\zeta} c; \quad (16)$$

тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 = \beta_0 &= \zeta^2 - (\zeta^2 - 1) \zeta \operatorname{arccctgh} \zeta, \\ \gamma_0 &= 2(\zeta^2 - 1)(\zeta \operatorname{arccctgh} \zeta - 1), \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$V = \frac{16}{15} \pi^2 \varrho^2 R^5 \left\{ 1 - \left(\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2} \right)^{1/2} \zeta \operatorname{arccctgh} \zeta \right\}. \quad (18)$$

Отметим также случай бесконечно длинного эллиптического цилиндра. Если в формулах (5) положим $c = \infty$, то получим

$$\alpha_0 = \frac{2b}{a+b}, \quad \beta_0 = \frac{2a}{a+b}, \quad \gamma_0 = 0. \quad (19)$$

Энергия, отнесенная к единице длины цилиндра, будет равна

$$V_1 = \frac{4}{15} \pi^2 \varrho^2 a^2 b^2 \log \frac{(a+b)^2}{4ab}. \quad (20)$$

¹⁾ Проще будет положить $c^2 + \lambda = (a^2 - c^2) u^2$. Тогда результат, предложенный Томсоном и Тэтом (§ 771) и другими авторами, выразится через величину l , обратную величине ζ .

Эллипсоиды Маклорена.

§ 374. Предположим теперь, что эллипсоид, находясь в относительном равновесии, вращается около оси z с угловой скоростью ω . Так как

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) - \Omega + \text{const.}, \quad (1)$$

то поверхности равного давления определяются уравнением

$$\left(\alpha_0 - \frac{\omega^2}{2\pi\rho}\right) x^2 + \left(\beta_0 - \frac{\omega^2}{2\pi\rho}\right) y^2 + \gamma_0 z^2 = \text{const.} \quad (2)$$

Для того чтобы одна из них совпадала с внешней поверхностью

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (3)$$

необходимо, чтобы

$$\left(\alpha_0 - \frac{\omega^2}{2\pi\rho}\right) a^2 = \left(\beta_0 - \frac{\omega^2}{2\pi\rho}\right) b^2 = \gamma_0 c^2. \quad (4)$$

В случае эллипсоида вращения ($a = b$) эти условия приводятся к одному, а именно, к условию

$$\left(\alpha_0 - \frac{\omega^2}{2\pi\rho}\right) a^2 = \gamma_0 c^2. \quad (5)$$

Так как $\frac{a^2}{a^2 + \lambda}$ больше или меньше, чем $\frac{c^2}{c^2 + \lambda}$, смотря по тому, больше или меньше a , чем c , то из данных в § 373 выражений (5) для α_0 и γ_0 следует, что условие (5) при подходящем выборе ω может быть выполнено для каждого заданного сжатого эллипсоида, но не может быть выполнено для вытянутого эллипсоида. Этот важный результат принадлежит Маклорену¹⁾.

Подставляя выражения для α_0 , γ_0 из формул (11) § 373, приведем условие (5) к виду

$$\frac{\omega^2}{2\pi\rho} = (3\zeta^2 + 1) \zeta \operatorname{arccctg} \zeta - 3\zeta^2 \quad (6)$$

или, в обозначениях § 107, к виду

$$\frac{\omega^2}{2\pi\rho} = \zeta q_2(\zeta). \quad (7)$$

¹⁾ Mac Laurin, см. выше, стр. 386.

Заметим, что значение ω , соответствующее произвольной заданной форме эллипсоида, зависит от плотности ρ , а не от действительных размеров эллипсоида. Легко усмотреть, что этот результат согласуется с теорией „размерности“.

Если обозначим через M общую массу и через H главный момент количеств движения относительно оси вращения, то будем иметь

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho a^2 c, \quad H = \frac{2}{5} M a^2 \omega; \quad (8)$$

отсюда следует

$$\frac{H^2}{M^2 R} = \frac{6}{25} \left(\frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2} \right)^{3/2} \{ (3\zeta^2 + 1) \zeta \operatorname{arccotg} \zeta - 3\zeta^2 \}; \quad (9)$$

Формула (6) в различных видах исследовалась Симпсоном, Даламбером и (более исчерпывающим образом) Лапласом¹⁾. Легко можно показать, что правая часть формулы (6) обращается в нуль при $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$; для остальных же значений ζ она конечна и положительна; следовательно, для некоторого промежуточного значения ζ правая часть принимает наибольшее значение. Поэтому при заданной плотности ρ существует верхний предел для угловых скоростей, при которых эллипсоид вращения будет возможной формой относительного равновесия. Для того чтобы показать, что правые части формул (6) и (7) имеют только один максимум, а следовательно, не имеют минимума, потребовалось бы более подробное исследование.

Лаплас с той же точки зрения исследовал формулу для главного момента количеств движения. Оказывается, что правая часть формулы (9) непрерывно возрастает от 0 до ∞ , когда ζ уменьшается от ∞ до 0. Поэтому при заданном объеме определенной жидкости существует одна и только одна форма эллипсоида Маклорена, обладающая заданным наперед главным моментом количеств движения.

Эти вопросы можно также исследовать путем непосредственного вычисления функций, стоящих в правых частях формул (6) и (9). Следующая таблица, содержащая числовые данные для ряда эллипсоидов Маклорена, взята из книги Томсона и Тэта²⁾. Единица момента количеств движения в последнем столбце есть $M^{3/2} R^{1/2}$, причем конечно подразумеваются „астрономические“ единицы.

¹⁾ Laplace, Mécanique Céleste, кн. 3, гл. III. Дальнейшие указания литературы находятся у Тодрентера, History of the Theories of Attraction. . . , Лондон, 1873, гл. X, XVI.

²⁾ Thomson and Tait, Natural Philosophy, § 772.

e	$\frac{a}{R}$	$\frac{c}{R}$	$\frac{\omega^2}{2\pi\rho}$	Момент количества движения
0	1,0000	1,0000	0	0
0,1	1,0016	0,9967	0,0027	0,0255
0,2	1,0068	0,9865	0,0107	0,0514
0,3	1,0159	0,9691	0,0243	0,0787
0,4	1,0295	0,9435	0,0436	0,1085
0,5	1,0491	0,9086	0,0690	0,1417
0,6	1,0772	0,8618	0,1007	0,1804
0,7	1,1188	0,7990	0,1387	0,2283
0,8	1,1856	0,7114	0,1816	0,2934
0,827	1,1973	0,6976	0,1868	0,3035
0,9	1,3189	0,5749	0,2203	0,4000
0,91	1,341	0,5560	0,2225	0,4156
0,92	1,367	0,5355	0,2241	0,4330
0,93	1,396	0,5131	0,2247	0,4525
0,94	1,431	0,4883	0,2239	0,4748
0,95	1,474	0,4603	0,2213	0,5008
0,96	1,529	0,4280	0,2160	0,5319
0,97	1,602	0,3895	0,2063	0,5692
0,98	1,713	0,3409	0,1890	0,6249
0,99	1,921	0,2710	0,1551	0,7121
1,00	∞	0	0	∞

Максимум величины $\frac{\omega^2}{2\pi\rho}$ есть 0,2247 и соответствует значениям $e = 0,9299$, $\frac{a}{c} = 2,7198$. Для каждого меньшего значения $\frac{\omega^2}{2\pi\rho}$ существует два возможных эллипсоида вращения: эксцентриситет одного из них меньше, а другого больше, чем 0,9299.

В случае однородной жидкой массы, плотность которой равна средней плотности земли, имеем

$$\frac{4}{3} \pi \rho R = 980, \quad R = 6,37 \cdot 10^8,$$

если за единицы длины и времени взяты сантиметр и секунда. Отсюда получается, что самое быстрое вращение, возможное в случае эллипсоида вращения, имеет период 2 ч. 25 мин.

Если значение ζ велико, то правую часть формулы (7) приближенно можно считать равной $\frac{4}{15} \zeta^{-2}$. Поэтому в случае сжатого эллипсоида вращения, бесконечно мало отличающегося от шара, сжатие будет равно

$$e = \frac{a-c}{a} = \frac{1}{2} \zeta^{-2} = \frac{15}{16} \frac{\omega^2}{\pi\rho}.$$

Обозначая через g силу притяжения на поверхности шара радиуса a с постоянной плотностью, будем иметь

$$g = \frac{4}{3} \pi \rho a,$$

и, следовательно,

$$\varepsilon = \frac{5}{4} \frac{\omega^2 a}{g}.$$

Если положить $\frac{\omega^2 a}{g} = \frac{1}{289}$, то окажется, что однородная жидкая масса, имеющая такую же величину и плотность, как Земля, должна иметь сжатие, равное $\frac{1}{231}$, чтобы вращаться с тем же периодом, как Земля.

Эллипсоиды Якоби.

§ 375. Чтобы установить, будет ли эллипсоид с тремя *неравными* осями возможной формой относительного равновесия, обратимся снова к условиям (4) § 374. Эти условия равносильны уравнениям

$$(a_0 - \beta_0) a^2 b^2 + \gamma_0 c^2 (a^2 - b^2) = 0 \quad (1)$$

и

$$\frac{\omega^2}{2\pi\rho} = \frac{\alpha_0 a^2 - \beta_0 b^2}{a^2 - b^2}. \quad (2)$$

Подставляя значения α_0 , β_0 , γ_0 из § 373, приведем условие (1) к виду

$$(a^2 - b^2) \int_0^\infty \left\{ \frac{a^2 b^2}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)} - \frac{c^2}{c^2 + \lambda} \right\} \frac{d\lambda}{\Delta} = 0. \quad (3)$$

Если положить первый множитель равным нулю, то придем к случаю эллипсоидов Маклорена, рассмотренному в предыдущем параграфе. Равенство нулю второго множителя дает условие

$$\int_0^\infty \left\{ a^2 b^2 - (a^2 + b^2 + \lambda) c^2 \right\} \frac{\lambda d\lambda}{\Delta^3} = 0, \quad (4)$$

которое можно рассматривать как уравнение для определения c через a и b . Если $c^2 = 0$, то все элементы интеграла положительны, а если

$$c^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2},$$

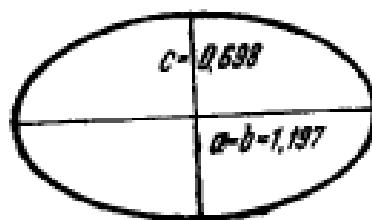
то все элементы отрицательны. Отсюда следует, что существует значение c , меньшее, чем наименьшая из полуосей a и b , для которого рассматриваемый интеграл будет исчезать.

Соответствующее значение ω определяется из формулы (2); это уравнение принимает теперь вид

$$\frac{\omega^2}{2\pi\rho} = abc \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)\Delta}, \quad (5)$$

так что значение ω будет действительным. Следует заметить, что отношение $\frac{\omega^2}{2\pi\rho}$, так же как и выше, зависит только от формы, но не от абсолютных размеров эллипсоида ¹⁾.

Уравнения (4) и (5) были тщательно исследованы С. О. Мейером ²⁾, который показал, что при заданных a и b существует только одно значение c , удовлетворяющее уравнению (4), и далее, что при $a = b = 1,7161c$ величина $\frac{\omega^2}{2\pi\rho}$ достигает наибольшего значения (именно $0,1871$) ³⁾. Эллипсоид Якоби совпадает тогда с одной из форм эллипсоида Маклорена. Эта предельная форма, изображенная на фиг. 87, получится, если во втором множителе левой части равенства (3) положить



Фиг. 87.

$$a = b, \quad c^2 + \lambda = (a^2 - c^2)u^2, \quad c^2 = (a^2 - c^2)\zeta^2.$$

Таким образом, находим

$$\int_{\zeta}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1 + \zeta^2}{1 + u^2} \right)^2 - \frac{\zeta^2}{u^2} \right\} \frac{du}{1 + u^2} = 0; \quad (6)$$

отсюда следует

$$\operatorname{arccctg} \zeta = \frac{13\zeta + 3\zeta^3}{3 + 14\zeta^2 + 3\zeta^4}. \quad (7) \quad ^4)$$

Это уравнение имеет только один конечный корень, именно $\zeta = 0,7171$; в этом случае для эксцентриситета меридиана получаем значение $e = 0,8127$.

Так как в общем случае два отношения $a : b : c$ подчинены условию (4), то фактически имеется только один переменный параметр, и эллипсоиды Якоби образуют так называемую „линейную серию“.

¹⁾ Возможность эллипсоидальной формы с тремя неравными осями в первый раз высказал Якоби в работе „Über die Figur des Gleichgewichts“, Pogg. Ann., XXXIII, 229 (1834) (Werke, II, 17); см. также Liouville, Sur la figure d'une masse fluide homogène, en équilibre, et douée d'un mouvement de rotation, Journ. de l'École Polytechn., XIV, 290 (1834).

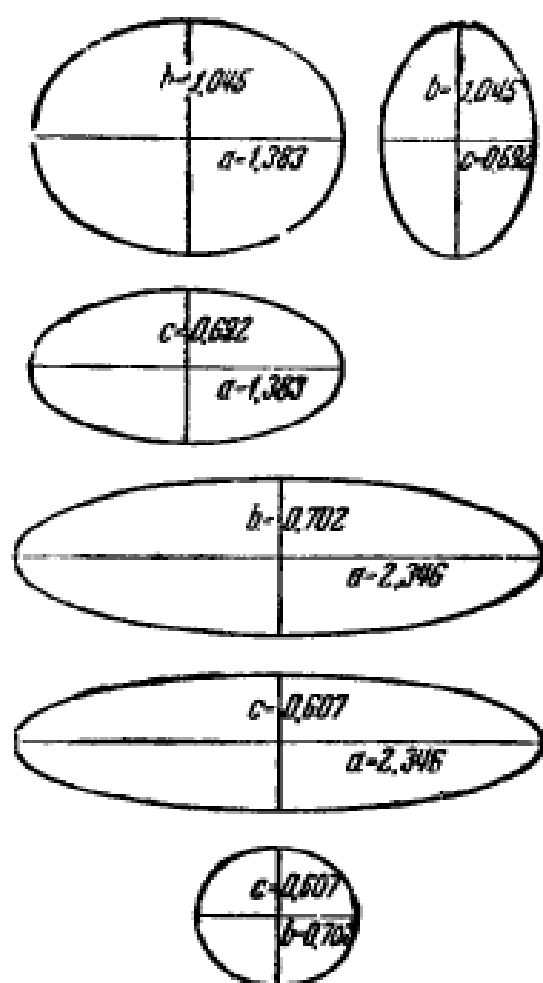
²⁾ С. О. Мейер, De aequilibrii formis ellipsoidicis, Crelle, XXIV (1842).

³⁾ Согласно Томсону и Тэту наибольшее значение было бы $0,1868$. См. таблицу предыдущего параграфа.

⁴⁾ Thomson a. Tait, § 778.

Последовательность фигур в этой серии иллюстрируется следующей таблицей, вычисленной Дарвином ¹⁾.

О с и			$\frac{\omega^2}{2\pi\rho}$	Момент количества движения
$\frac{a}{R}$	$\frac{b}{R}$	$\frac{c}{R}$		
1,197	1,197	0,698	0,187	0,304
1,216	1,179	0,694	0,187	0,304
1,279	1,123	0,696	0,186	0,306
1,383	1,045	0,692	0,181	0,313
1,601	0,924	0,677	0,166	0,341
1,899	0,811	0,649	0,141	0,392
2,346	0,702	0,607	0,107	0,481
3,136	0,586	0,545	0,067	0,644
5,04	0,45	0,44	0,026	1,016
∞	0	0	0	∞



Фиг. 88.

Когда значения $\frac{\omega^2}{2\pi\rho}$ уменьшаются, начиная с верхней границы 0,1871, тогда отношение одной из экваториальных осей эллипсоида к полярной оси возрастает, а отношение другой — убывает; предельная форма представляет собою бесконечно длинный круговой цилиндр, вращающийся около оси, перпендикулярной к образующим ($a = \infty$, $b = c$). Фиг. 88 показывает две промежуточные формы; за единицу длины при этом принят радиус R шара, объем которого равен объему эллипсоида.

Следует заметить, что бесконечно длинный эллиптический цилиндр может находиться в относительном равновесии при вращении вокруг своей продольной оси. При помощи формул (19) § 373 можно легко показать, что в этом случае угловая скорость определится из формулы

$$\frac{\omega^2}{2\pi\rho} = \frac{2ab}{(a+b)^2}. \quad (8)^2$$

¹⁾ Darwin, On Jacobi's Figure of Equilibrium for a Rotating Mass of Fluid, Proc. Roy. Soc., XLI, 319 (1886) (Papers, III, 119).

²⁾ Matthiessen, Neue Untersuchungen über frei rotirende Flüssigkeiten, Schriften d. Univ. zu Kiel, VI (1859). Эта работа содержит очень полный перечень ранее появившихся исследований в этой области.

Другие специальные формы.

§ 376. Проблема относительного равновесия, в которой эллипсоиды Маклорена и Якоби представляют лишь частные случаи, была предметом большого числа интересных исследований, о которых здесь следует кратко напомнить.

Случай кольца в первый раз был исследован Лапласом ¹⁾ в связи с теорией колец Сатурна.

Предположим, что кольцо есть тело вращения около оси z , и возьмем начало координат в точке пересечения этой оси с экваториальной плоскостью симметрии, относительно которой мы наверное знаем, что она должна существовать (§ 372). Далее, будем предполагать, что поперечное сечение представляет собою эллипс, полуоси которого, параллельные Ox и Oz , соответственно суть a и c . Обозначим через C центр этого поперечного сечения и положим $OC = D$; мы будем предполагать, что оба отношения $\frac{a}{D}$ и $\frac{c}{D}$ малы.

При этих условиях можно считать, что в первом приближении составляющие притяжения в произвольной точке кольца такие же, как в случае бесконечно большого радиуса D , так что в согласии с формулами (19) § 373 мы можем положить

$$\Omega = \pi \rho (a_0 x^2 + \gamma_0 z^2) + \text{const.}, \quad (1)$$

где

$$a_0 = \frac{2c}{a+c}, \quad \gamma_0 = \frac{2a}{a+c}, \quad (2)$$

и начало абсцисс x теперь перенесено в точку C . Уравнение давления для точек поперечного сечения будет в этом случае иметь вид

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \omega^2 (D+x)^2 - \Omega + \frac{S}{\sqrt{(D+x)^2 + z^2}} + \text{const.}, \quad (3)$$

где S обозначает массу притягивающего своим центром ядра в точке O . Это выражение можно разложить в ряд в виде

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \omega^2 (D^2 + 2Dx + x^2) - \pi \rho (a_0 x^2 + \gamma_0 z^2) + \\ + \frac{S}{D} \left(1 - \frac{x}{D} + \frac{2x^2 - z^2}{2D^2} - \dots \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Если p всюду по поперечному сечению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (5)$$

¹⁾ Laplace, Mémoire sur la théorie de l'anneau de Saturne, Mém. de l'Acad. des Sciences, 1789 (1787) (Mécanique Céleste, т. 3, гл. VI).

остается приблизительно постоянным, то члены с x необходимо приравнять нулю, а коэффициенты при x^2 и z^2 должны будут относиться, как $c^2 : a^2$. Отсюда получаем

$$\omega^2 D^3 = S \quad (6)$$

и

$$a^2 \left(a_0 - \frac{3\omega^2}{2\pi\rho} \right) = c^2 \left(\gamma_0 + \frac{\omega^2}{2\pi\rho} \right). \quad (7)$$

Первое из этих уравнений показывает, что период вращения кольца должен быть равным периоду спутника, находящегося на таком же расстоянии; второе уравнение может быть написано в виде

$$\frac{\omega^2}{2\pi\rho} = \frac{2ac(a-c)}{(3a^2+c^2)(a+c)}, \quad (8)$$

откуда следует, что экваториальный диаметр должен быть наибольшим.

Выражение в правой части формулы (8) имеет максимум 0,1086, соответствующий значению $\frac{a}{c} = 2,594$. Тогда для жидкого кольца, находящегося на заданном расстоянии D от центрального ядра, существует нижняя граница плотности.

Лаплас отмечает, что кольцо такого рода, какое мы рассматриваем здесь, должно было бы быть неустойчивым, даже если бы оно было твердым, а тем более должно быть неустойчивым, когда оно жидкое. В настоящее время вообще принимают, что кольца Сатурна состоят из метеоров.

Если центрального ядра нет или если его масса относительно мала, то притяжение кольца в точках самого кольца можно вычислить с большою степенью точности. В этом случае легко получаем, что поперечное сечение приблизительно должно быть круговым, и угловая скорость должна быть значительно меньше, чем в предыдущем случае. Для $S=0$ находим приближенно

$$\frac{\omega^2}{2\pi\rho} = \frac{a^2}{2D^2} \left(\ln \frac{8D}{a} - \frac{5}{4} \right), \quad (9)^1$$

если $\frac{a}{D}$ мало.

В справедливости формулы (9) можно убедиться следующим образом. Если возьмем начало координат в центре кольца и введем цилиндрические координаты, то потенциал во внешних точках будет удовлетворять уравнению вида (1) § 100, а именно

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \tilde{\omega}^2} + \frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\omega}} = 0. \quad (10)$$

Если в плоскости поперечного сечения ввести полярные координаты и положить

$$z = r \sin \theta, \quad \tilde{\omega} = D + r \cos \theta, \quad (11)$$

¹⁾ Несколько другой результат получил Маттиссен, см. выше. Формула (9) принадлежит Софье Ковалевской, *Astr. Nachr.*, CXI (1885). Poincaré, см. ниже; Dyson, см. выше, стр. 197. Ср. также Basset, *Amer. Journ. Math.*, XI (1888).

то уравнение (10) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta^2} + \frac{1}{D+r \cos \theta} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \sin \theta \right) = 0. \quad (12)$$

Чтобы получить решение, которое должно иметь место для значений r , малых по сравнению с D , примем в качестве первого приближения $\Omega = \Omega_0$, где Ω_0 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_0}{\partial r} = 0. \quad (13)$$

Таким образом, мы получаем

$$\Omega_0 = A + B \ln r. \quad (14)$$

В качестве второго приближения возьмем

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_1 \cos \theta. \quad (15)$$

Подставляя, находим

$$\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_1}{\partial r} - \frac{\Omega_1}{r^2} = -\frac{1}{D} \frac{\partial \Omega_0}{\partial r} = -\frac{B}{Dr}; \quad (16)$$

отсюда получаем

$$\Omega_1 = Cr + \frac{C'}{r} - \frac{B}{2D} r \ln r. \quad (17)$$

На расстояниях r , малых по сравнению с D , но больших по сравнению с радиусом поперечного сечения, полученный таким способом результат должен быть близок к потенциалу материальной окружности радиуса D и линейной плотности $\pi r a^2$. Этот потенциал определяется формулой

$$\Omega = -\pi r a^2 D \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{r_1^2 \cos^2 \frac{1}{2} x + r_2^2 \sin^2 \frac{1}{2} x}} = -\frac{4\pi r a^2 D}{r_2} F_1(k), \quad (18)$$

где r_1 и r_2 , как в § 161, обозначают наименьшее и наибольшее расстояния рассматриваемой точки от окружности, а модуль k эллиптического интеграла определяется из равенства

$$k^2 = 1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}. \quad (19)$$

Так как это [выражение приблизительно равно единице, то будем иметь ¹⁾

$$F_1(k) = \ln \frac{4r_2}{r_1} + \frac{1}{4} \frac{r_1^2}{r_2^2} \left(\pi \frac{4r_2}{r_1} - 1 \right) + \dots; \quad (20)$$

первый член этого ряда достаточен для наших целей.

В соответствии с применяемыми нами обозначениями положим приближенно

$$r_1 = r, \quad r_2 = \sqrt{4D^2 + 4rD \cos \theta + r^2} = 2D \left(1 + \frac{r}{2D} \cos \theta \right). \quad (21)$$

¹⁾ Cayley, Elliptic Functions, стр. 54.

Тогда получим

$$\Omega = -2\pi\rho a^2 \left(\ln \frac{8D}{r} - \frac{r \cos \theta}{2D} \ln \frac{8D}{r} + \frac{r \cos \theta}{2D} \right). \quad (22)$$

Результат, выраженный формулами (15), (14) и (17), будет все больше приближаться к значению (22), по мере того как r возрастает, но остается еще малым по сравнению с D в предположении, что

$$B = 2\pi\rho a^2 \quad C = \frac{\pi\rho a^2}{D} (\ln 8D - 1). \quad (23)$$

Мы возьмем поэтому в качестве значения внешнего потенциала жидкого кольца для точек, лежащих вблизи поверхности, выражение

$$\Omega = -2\pi\rho a^2 \left\{ \ln \frac{8D}{r} - \left(\ln \frac{8D}{r} - 1 \right) \frac{r \cos \theta}{2D} \right\} + \frac{C' \cos \theta}{r}. \quad (24)$$

Чтобы найти потенциал во внутренней точке, мы должны заменить правую часть уравнения (12) через $4\pi\rho$. При помощи того же самого приближенного способа, как и раньше, находим, принимая во внимание условие конечности для $r=0$,

$$\Omega = \text{const.} + \pi\rho r^2 + C'' r \cos \theta - \frac{\pi\rho r^3}{4D} \cos \theta. \quad (25)$$

Значения Ω и $\frac{\partial\Omega}{\partial r}$, получаемые из формул (24) и (25), должны быть непрерывными при $r=a$. Это условие дает

$$C'' = \frac{\pi\rho a^2}{D} \left(\ln \frac{8D}{a} - 1 \right), \quad C' = -\frac{\pi\rho a^4}{4D}. \quad (26)$$

Условие для свободной поверхности требует, чтобы выражение

$$\frac{1}{2} \omega^2 (D + r \cos \theta)^2 - \Omega \quad (27)$$

имело постоянное значение для $r=a$. Пренебрегая квадратом величины $\frac{r}{D}$, получаем

$$\omega^2 D = C'' - \frac{\pi\rho a^2}{4D}. \quad (28)$$

Если подставить сюда значение C'' из формулы (26), то придем к формуле (9).

Дейсон показал, что такого рода кольцо должно быть неустойчивым только по отношению к возмущениям, при которых площадь поперечного сечения изменяется по длине. Кольцо при этом стремится распасться на отдельные части.

Дарвин очень подробно исследовал тот случай¹⁾, когда две отдельные жидкие массы, находясь в относительном равновесии, вращаются около их общего центра тяжести как две составные части одной двойной звезды.

Если расстояние между обеими массами велико по сравнению с их размерами, то ряд, расположенный по сферическим функциям, через

¹⁾ Darwin, On Figures of Equilibrium of Rotating Masses of Fluid, Phil. Trans. A, CLXXVIII, 379 (1887) (Papers, III, 135).

который выражается решение, сходится очень быстро; во всех же остальных случаях приближенный способ оказывается довольно утомительным¹⁾.

Особенно интересный случай, когда одна масса значительно меньше другой, впервые, повидимому, исследовал Рохе в 1847 г.²⁾.

Общая задача относительного равновесия.

§ 377. Вопрос о возможных фигурах относительного равновесия вращающейся однородной жидкой массы с более общей точки зрения был рассмотрен Пуанкаре в его знаменитой работе³⁾.

Рассмотрим сначала обыкновенную динамическую систему с n степенями свободы, строение которой зависит от переменного параметра λ , так что потенциальная энергия V есть функция от n обобщенных координат q_1, q_2, \dots, q_n и от λ . Конфигурации равновесия, возможные при заданном значении λ , определяются n уравнениями вида

$$\frac{\partial V}{\partial q_r} = 0; \quad (1)$$

если мы будем изменять λ , то получим одну или несколько „линейных серий“ конфигураций равновесия. Каждая из таких серий может быть представлена при помощи кривой в пространстве n измерений, в котором q_1, q_2, \dots, q_n обозначают декартовы координаты.

Если мы рассмотрим малые отклонения от конфигурации равновесия, то будем иметь

$$V = c_{11} \delta q_1^2 + c_{22} \delta q_2^2 + \dots + 2c_{12} \delta q_1 \delta q_2 + \dots, \quad (2)$$

где $c_{11}, c_{22}, c_{12}, \dots$ суть „коэффициенты устойчивости“ (§ 168), определяемые соотношениями

$$c_{rr} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_r^2}, \quad c_{rs} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_r \partial q_s}. \quad (3)$$

При помощи линейного преобразования вариаций $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ выражение (2) можно бесконечным числом способов привести к сумме квадратов: но при любом способе приведения число положительных и число отрицательных коэффициентов по теореме Сильвестера остается неизменным. Коэффициенты в преобразованном выражении мы будем

¹⁾ Подробное изложение задач §§ 374—376 находится в курсе Tisserand, *Traité de Mécanique Céleste*, Париж, 1889—1896, II.

²⁾ См. Darwin, *On the Figure and Stability of a Liquid Satellite*, Phil. Trans. A, CCVI, 161 (1906) (Papers, III, 436). Относительно приложения к этой задаче метода Пуанкаре отсылаем к работе Schwarzschild, *Die Poincaré'sche Theorie des Gleichgewichts...*, Ann. d. Münch. Sternwarte, III, 233 (1897) и Jeans, *Problems of Cosmogony...*, Кембридж, 1919.

³⁾ Poincaré, *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation*, Acta Math., VII, 259 (1885). См. также его *Figures d'équilibre*. Относительно обзора более ранних исследований и некоторых указаний, встречающихся уже у Ляпунова, см. Lichtenstein, *Math. Zeitschr.*, I, 228 (1918).

называть главными коэффициентами устойчивости. Для того чтобы конфигурация была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы все эти коэффициенты были положительными.

При изменении λ различные линейные серии остаются отличными друг от друга, пока дискриминант Δ квадратичной формы (2) не исчезает, т. е. пока не исчезает ни один из главных коэффициентов устойчивости. Если же в то время, когда пробегается некоторая линейная серия, дискриминант Δ при некотором частном значении λ исчезает и меняет знак, то соответствующая конфигурация оказывается „формой бифуркации“, т. е. эта конфигурация представляет точку пересечения рассматриваемой линейной серии с другой. Может даже случиться, что при некотором значении λ две линейные серии совпадают, а после этого становятся мнимыми. Если рассматриваемая конфигурация не принадлежит ни к какой другой линейной серии, то мы имеем так называемую „предельную форму“ равновесия, и можно показать, что Δ в обеих сериях вблизи от точки соединения имеет различные знаки. Особенно важным оказывается тот случай, когда две серии соединяются и после этого делаются мнимыми, в то время как третья серия непрерывно переходит через эту общую точку.

Высказанные положения можно пояснить на случае системы с одной степенью свободы. Положения равновесия определяются уравнением

$$\frac{\partial V}{\partial q} = 0, \quad (4)$$

из которого можно определить одно или несколько значений q , как функции от λ . Дифференцируя уравнение (4) по λ , получаем

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} \frac{dq}{d\lambda} + \frac{\partial^2 V}{\partial q \partial \lambda} = 0. \quad (5)$$

Это уравнение дает для каждой линейной серии одно единственное значение $\frac{dq}{d\lambda}$ и определяет, таким образом, последовательность конфигураций равновесия, за исключением того случая, когда $\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} = 0$. Различные серии оказываются, таким образом, разделенными, пока коэффициент устойчивости не исчезает; если же $\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} = 0$, то $\frac{dq}{d\lambda}$ оказывается бесконечно большим или неопределенным, смотря по тому, отлична от нуля или нет производная $\frac{\partial^2 V}{\partial q \partial \lambda}$. В первом случае обе серии вообще совпадают.

Положим

$$\frac{\partial V}{\partial q} = \varphi(\lambda, q) \quad (6)$$

и рассмотрим поверхность

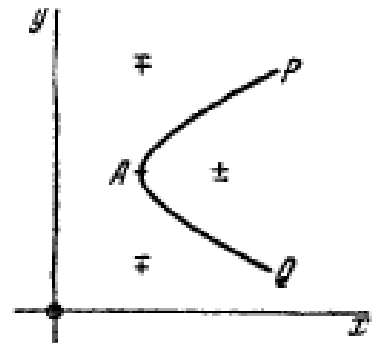
$$z = \varphi(x, y), \quad (7)$$

где x, y, z — обыкновенные декартовы координаты. Кривая $\varphi(x, y)$, отделяющая те части плоскости xy , для которых z положительно, от тех частей, для которых z отрицательно, представляет различные линейные серии форм равновесия. Далее, та часть кривой, для которой градиент $\frac{\partial z}{\partial y}$ положителен,

соответствует устойчивым конфигурациям, а та часть, для которой $\frac{\partial z}{\partial y}$ отрицательно, неустойчивым конфигурациям.

Критические точки ($\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} = 0$) соответствуют условию $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$; касательная к кривой в этом случае параллельна оси y , в противном случае рассматриваемая точка есть особая точка кривой.

В первом случае, если никакая другая ветвь кривой не проходит через точку касания, мы будем иметь „предельную форму“; без дальнейших рассуждений ясно, что в этой точке имеет место переход от устойчивости к неустойчивости. Этот случай и представляет фиг. 89, на которой две серии PA и QA соединяются в предельную форму A . Если к значениям z в соответствующих областях относятся верхние знаки на фиг. 89, то PA соответствует неустойчивым положениям, а QA — устойчивым положениям. Если взять нижние знаки, то результаты получатся обратные.

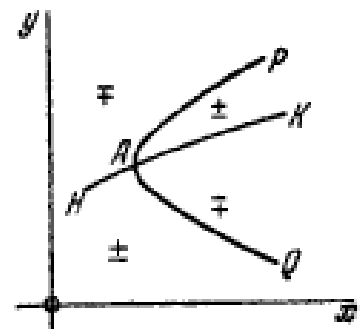


Фиг. 89.

Если же $\frac{\partial^2 V}{\partial q \partial \lambda} = 0$ или $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, то мы имеем особую точку. Случай, когда две серии (PA и QA) соединяются и становятся минимумами, в то время как третья серия (HA) проходит через общую точку и остается действительной, изображен на фиг. 90. В последней серии имеет место переход от устойчивости к неустойчивости или наоборот, тогда как две другие серии вблизи от точки A будут обе устойчивыми или обе неустойчивыми¹⁾.

Если мы имеем n степеней свободы, то уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial V}{\partial q_n} = 0. \quad (8)$$



Фиг. 90.

Мы можем воспользоваться $n-1$ уравнениями, начиная со второго, чтобы выразить q_2, \dots, q_n через q_1 и λ . Обозначим результат подстановки этих значений в общее выражение для V через $\psi(q_1, \lambda)$. Тогда на основании уравнений (8) будем иметь

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial q_1} + \frac{\partial V}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial q_1} + \dots + \frac{\partial V}{\partial q_n} \frac{\partial q_n}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad (9)$$

¹⁾ В качестве простого примера рассмотрим случай матеральной точки, которая может двигаться внутри гладкой изогнутой трубочки (с точками перегиба), лежащей в вертикальной плоскости; положение трубочки в вертикальной плоскости может изменяться в результате вращения вокруг какой-либо оси, перпендикулярной к этой плоскости. Другие примеры доставляют исследования положений равновесия плавающего тела в их зависимости от плотности и исследования, касающиеся устойчивости этих положений равновесия. Случай бруска с квадратным сечением был исследован автором в Статике, Кембридж, 1912, стр. 221, 234.

Случай простого пересечения двух серий, когда обе серии по обе стороны от точки пересечения действительны, можно исследовать подобным же способом.

так что остающееся условие равновесия может быть написано в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_1} = 0. \quad (10)$$

Отсюда получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial q_1^2} \frac{\partial q_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_1 \partial \lambda} = 0, \quad (11)$$

которое показывает, что последовательность конфигураций равновесия определяется однозначно, за исключением случая $\frac{\partial^2 \psi}{\partial q_1^2} = 0$. Дальнейший ход доказательства протекает так же, как и раньше, только вместо V нужно подставить ψ . Легко можно показать, что условие $\frac{\partial^2 \psi}{\partial q_1^2} = 0$ аналитически равнозначно условию $\Delta = 0^1$.

§ 378. Покажем сейчас связь этих рассуждений с теорией относительного равновесия вращающейся системы.

В случае относительного равновесия по отношению к системе осей, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω около неподвижной оси, удобнее всего взять условия равновесия в виде

$$\frac{\partial}{\partial q_r} (V - T_0) = 0, \quad (1)$$

где V — потенциальная и T_0 — кинетическая энергия системы, когда эта система в заданной конфигурации (q_1, q_2, \dots, q_n) вращается как твердое тело; ср. § 205. Если мы будем изменять ω , то получим различные линейные серии конфигураций равновесия. Если система, кроме того, подвержена действию диссипативных сил, оказывающих влияние на *относительные* движения, то условие для вековой устойчивости заключается в том, что разность $V - T_0$ должна обращаться в минимум.

Напротив, когда случай, если система свободна, подходит под общую теорию гиростатических систем, тогда для условий равновесия оказывается более удобной форма

$$\frac{\partial}{\partial q_r} (V + K) = 0, \quad (2)$$

где K представляет кинетическую энергию системы в предположении, что она вращается как твердое тело в конфигурации (q_1, q_2, \dots, q_n) , и компоненты обобщенных импульсов, соответствующие игнорируемым координатам, остаются постоянными (§ 254). Условие для вековой устойчивости заключается в этом случае в том, что $V + K$ должно иметь минимальное значение. В нашем случае единственная игнорируемая координата, которую мы должны иметь в виду, есть угол, определяющий положение плоскости отсчета, проходящей

¹⁾ Доказательство с небольшими изменениями взято из руководства Пуанкаре.

через ось вращения и, следовательно, через центр инерции. Соответствующая компонента обобщенного импульса есть момент количества движения относительно оси; мы будем обозначать этот момент через κ . Изменяя κ , мы получим различные линейные серии конфигураций равновесия.

В случае вращающейся жидкой массы число обобщенных координат бесконечно велико, все же в некоторых отношениях теория остается неизменной. Предположим на мгновение, что жидкость покрывает твердое вращающееся ядро. Если ядро вынуждено вращаться с постоянной угловой скоростью или (что по существу сводится к тому же) если оно обладает очень большой массой, то мы имеем первую форму задачи; если же, наоборот, ядро свободно, то имеет место вторая форма. Различие между обеими формами исчезает, если мы ограничимся такими возмущениями, которые не оказывают влияния на момент инерции системы относительно оси вращения.

Вторая форма задачи для нашей точки зрения важнее. Мы придем к случаю однородной вращающейся жидкой массы, если примем, что ядро становится бесконечно малым. Для этого случая решение задачи о относительного равновесия отчасти известно. Прежде всего мы имеем линейную серию эллипсоидов Маклорена, в которой $\frac{a}{R}$ возрастает от 1 до ∞ , когда κ изменяется от 0 до ∞ (§ 374). Далее мы имеем две ¹⁾ серии эллипсоидов Якоби, в которых $\frac{a}{b}$ изменяется в одном случае от 1 до ∞ , а в другом от 1 до 0, когда κ изменяется от $0,304 M^{2/3} R^{1/3}$ до ∞ ; a и b обозначают здесь обе экваториальные полуоси (§ 375). Если $\kappa = 0,304 M^{2/3} R^{1/3}$, то имеет место форма бифуркации и вместе с тем изменение характера устойчивости.

§ 379. В качестве простого приложения предшествующей теории исследуем вековую устойчивость эллипсоида Маклорена для таких эллипсоидальных возмущений, при которых ось вращения остается главной осью ²⁾.

Пусть ω будет угловая скорость в состоянии равновесия и κ — момент количества движения.

Если обозначить через I момент инерции возмущенной системы, то в случае, когда система вращается как твердое тело, угловая скорость будет равна $\frac{\kappa}{I}$. Отсюда следует

$$V + K = V + \frac{1}{2} I \left(\frac{\kappa}{I} \right)^2 = V + \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{I}, \quad (1)$$

¹⁾ Обе серии содержат одинаковую последовательность геометрических форм; однако, с рассматриваемой здесь точки зрения их следует считать аналитически различными.

²⁾ Poincaré, см. выше. Более аналитическое исследование находится у Basset, On the Stability of Maclaurin's Liquid Spheroid, Proc. Camb. Phil. Soc., VIII, 23 (1892).

и условие для вековой устойчивости заключается в том, что это выражение должно быть минимумом. Мы будем предполагать для определенности, что нулевое значение V соответствует состоянию бесконечной протяженности. При всякой другой конфигурации значение V будет отрицательным.

В наших прежних обозначениях имеем

$$I = \frac{1}{5} M (a^2 + b^2), \quad (2)$$

где c — ось вращения. Так как $abc = R^3$, то мы можем положить

$$V + \frac{5}{2} \frac{\kappa^2}{M(a^2 + b^2)} = f(a, b), \quad (3)$$

где $f(a, b)$ — симметрическая функция обеих независимых переменных a, b . Если мы рассмотрим поверхность, ордината которой есть $f(a, b)$, причем a, b должны рассматриваться как прямоугольные координаты точки на горизонтальной плоскости, то фигуры относительного равновесия будут соответствовать точкам стационарной высоты, и для вековой устойчивости, кроме того, высота должна быть минимумом.

Для $a = \infty$ или $b = \infty$ будет $f(a, b) = 0$. Для $a = 0$ имеем $V = 0$ и $f(a, b)$ пропорционально $\frac{1}{b^2}$; аналогичный результат имеет место для $b = 0$. Если одновременно $a = 0, b = 0$, то $f(a, b) = \infty$. Известно, что для любого значения κ всегда существует одна и только одна возможная форма эллипсоида Маклорена. Отсюда, если рассмотрим пересечение названной поверхности с плоскостью симметрии ($a = b$), то заметим, что ордината будет изменяться от ∞ до 0 и будет иметь в этом интервале одно и только одно стационарное значение. Это значение, очевидно, отрицательное и представляет собою минимум¹⁾.

Поэтому высота в этой точке не может быть максимумом. Более того, так как существует предел для отрицательных значений V (который соответствует тому моменту, когда эллипсоид обращается в шар), то на поверхности всегда существует, по крайней мере одна, конечная точка с минимальной (и притом отрицательной) высотой.

На основании таблиц на стр. 892 получается, что для $\kappa < 0,304 M^{3/2} R^{1/2}$ существует одна и только одна форма эллипсоидального равновесия, и эта форма есть эллипсоид вращения. Предшествующие рассуждения показывают, что она соответствует точке минимальной высоты и для симметрических эллипсоидальных возмущений вековым образом устойчива.

Если $\kappa > 0,304 M^{3/2} R^{1/2}$, то имеются три точки стационарной высоты: одна соответствует эллипсоиду Маклорена и лежит в плоскости симметрии, а две другие соответствуют формам Якоби и расположены симметрично по обе стороны этой плоскости. Из топографических соображений тотчас же видим, что высота обеих последних точек должна быть минимумом, а в первой точке не может быть ни максимума, ни минимума. Всякое другое расположение обусловило бы наличие дополнительных точек стационарной высоты.

Окончательный результат исследования можно высказать так: эллипсоид Маклорена при эллипсоидальных возмущениях оказывается вековым образом устойчивым или неустойчивым, смотря по тому, меньше эксцентриситет e или больше, чем 0,8127; таков именно эксцентриситет того эллипсоида вращения, с которого начинается

¹⁾ Оказывается, что эллипсоид Маклорена для деформаций, при которых поверхность его остается эллипсоидом вращения, всегда устойчив.

серия Якоби. Эллипсоиды Якоби все устойчивы по отношению к такого рода возмущениям¹⁾.

Дальнейшее исследование устойчивости эллипсоида Маклорена завело бы нас слишком далеко. Пуанкаре показал, что в этом случае равновесие обладает вековой устойчивостью относительно *всякого* рода возмущений, пока ϵ лежит ниже названного выше предела. Это устанавливается тем, что для эллипсоида вращения с меньшим эксцентриситетом не существует формы бифуркации.

Из рассмотрения „обмена устойчивостей“ следует, что серия Якоби вначале вполне устойчива.

§ 380. Пуанкаре исследовал далее коэффициенты устойчивости рядов эллипсоидов Маклорена и Якоби при помощи функций Ламе, чтобы выяснить, какие члены представляют формы бифуркации. Он нашел, что существует бесконечно много форм такого рода, а следовательно, и бесконечно много других линейных серий фигур равновесия. В каждом случае оказывается возможным указать форму членов новой серии в окрестности точки бифуркации. Исследование этого вопроса было продолжено Дарвином²⁾ и самим Пуанкаре в более поздней работе³⁾.

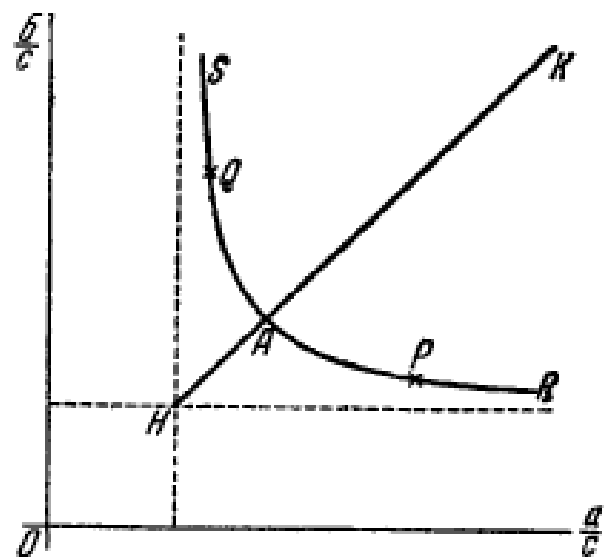
Наибольший интерес привлек к себе случай первой бифуркации, которая имеет место в серии эллипсоидов Якоби. По Дарвину критическим эллипсоидом оказывается

тот, для которого $\frac{a}{R} = 1,8858$,

$\frac{b}{R} = 0,8150$, $\frac{c}{R} = 0,6507$. Начи-

ная с этого места, эллипсоиды Якоби оказываются неустойчивыми.

На фиг. 91⁴⁾, где отношения $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$ взяты в качестве координат, прямая $НАК$ представляет серии эллипсоидов Маклорена, отвечающих различным значениям κ , тогда как ветви AR и AS представляют серии фигур Якоби. Точка H соответствует случаю шара, для которого $\kappa = 0$; серия Маклорена от H до



Фиг. 91.

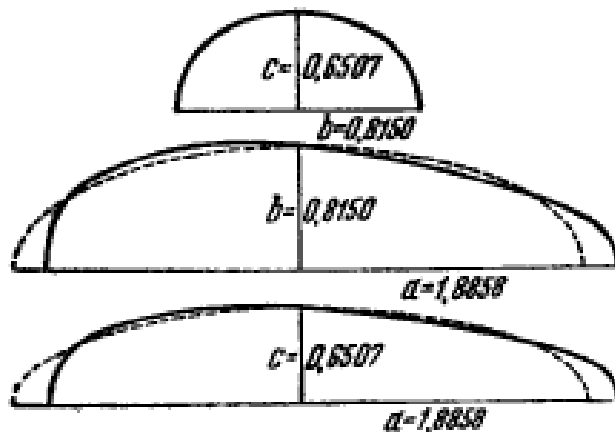
¹⁾ Этот результат, так же как и предшествующий, был высказан без доказательства Томсоном и Тэтом, *Natural Philosophy* (2 изд.), § 778*.

²⁾ Darwin, On the Pear-shaped Figure of Equilibrium of a Rotating Mass of Liquid, *Phil. Trans.*, A, CXCVIII, 301 (1901) (*Papers*, III, 288).

³⁾ Poincaré, Sur la stabilité des figures pyriformes affectées par une masse fluide en rotation, *Phil. Trans.* A, CXCVIII, 333 (1901).

⁴⁾ Рисунок построен по таблицам на стр. 889, 892. Набросок находится в книге Пуанкаре.

A устойчива, а далее неустойчива. Точки P , Q обозначают места, в которых эллипсоиды Якоби становятся неустойчивыми. В этих точках ответвляются новые серии.



Фиг 92

Трудный вопрос об устойчивости этих последних серий был исследован Дарвином, Пуанкаре и Джинсом¹⁾. Последний из этих авторов пришел к определенному заключению, что эти серии вначале неустойчивы. Первые члены этих новых серий имеют „грушевидную“ форму, показанную на фиг. 92. Эти фигуры взяты из только что указанной работы Дарвина.

Соответствующая плоская задача была исследована Джинсом²⁾ при помощи специального метода.

Малые колебания.

§ 381. Малые колебания вращающихся эллипсоидальных масс были исследованы различными авторами.

Простейшие из всех возможных типов возмущений суть те, при которых поверхность жидкой массы остается эллипсоидом, и ось вращения является главной осью этого эллипсоида. В случае эллипсоида Маклорена существует два различных типа возмущений этого рода; при одном из них поверхность жидкой массы остается эллипсоидом вращения, в то время как при другом экваториальные оси становятся неравными, причем одна ось возрастает, а другая убывает, полярная же ось остается неизменной. Риман³⁾ показал, что второй тип становится неустойчивым, когда эксцентриситет e меридионального сечения превосходит значение 0,9529. В этом исследовании не принимались во внимание силы трения, и критерий относится к „обыкновенной устойчивости“.

В § 379 мы видели, что равновесие становится практически неустойчивым, когда e превосходит значение 0,8127. Периоды обоих римановых типов колебаний (для $e < 0,9529$) были вычислены Лявом⁴⁾,

¹⁾ Poincaré, см. выше; Darwin, The Stability of the Pear-shaped Figure of Equilibrium, Phil. Trans. A, CC, 251 (1902) (Papers, III, 317); Jeans, см. выше, стр. 897.

²⁾ Jeans, On the Equilibrium of Rotating Liquid Cylinders, Phil. Trans. A, CC, 67 (1902).

³⁾ Riemann, Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoides, Gött. Abh., IX, 3 (1860) (Werke, стр. 192). См. также Basset, Hydrodynamics, § 367. Риман указывает также, что эллипсоиды Якоби устойчивы по отношению к эллипсоидальным возмущениям (в указанном выше ограниченном смысле).

⁴⁾ Love, On the Oscillations of a Rotating Liquid Spheroid and the Genesis of the Moon, Phil. Mag. (5), XXVII, 254 (1889). Симметрическая форма может быть легко исследована посредством уравнения (23) § 384 этой книги.

который исследовал также колебания в двух измерениях (эллиптического типа) вращающегося эллиптического цилиндра¹⁾.

В более общей постановке проблема малых колебаний была исследована Пуанкаре²⁾. Из § 207 получается, что уравнения малых движений относительно вращающихся осей могут быть написаны в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где

$$\varphi = \frac{p}{\rho} + \Omega - \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (2)$$

и Ω обозначает потенциал тяготения жидкой массы. Из этих уравнений и из уравнения непрерывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

следует

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta \varphi + 4\omega^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (4)$$

Если мы примем, что u, v, w пропорциональны $e^{i\sigma t}$, то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{i\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2\omega \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\sigma^2 - 4\omega^2}, \\ v &= \frac{-2\omega \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\sigma^2 - 4\omega^2}, \\ w &= \frac{i}{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

и, следовательно, на основании уравнения (3) или непосредственно из уравнения (4) получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \left(1 - \frac{4\omega^2}{\sigma^2}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (6)$$

Если положить

$$1 - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} = \tau^2, \quad z = \tau z', \quad (7)$$

¹⁾ Love, On the Motion of a Liquid Elliptic Cylinder under its own Attraction, Quart. Journ. Math., XXIII, 153 (1888).

²⁾ См. выше, стр. 897.

то уравнение (6) примет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0. \quad (8)$$

Если уравнение невозмущенного эллипсоида имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (9)$$

то подходящими решениями уравнения (8) будут те, которые содержат эллипсоидальные функции, отвечающие поверхности

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (10)$$

которая получается из поверхности (9) при помощи однородной деформации¹⁾.

На поверхности (9) мы должны иметь $p = \text{const.}$ и, следовательно,

$$\psi = \Omega - \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2). \quad (11)$$

Потенциал Ω возмущенной формы зависит от нормального к поверхности перемещения ζ ; эта величина связана с ψ соотношением вида

$$lu + mv + nw = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = i\sigma\zeta, \quad (12)$$

причем значения u , v , w на поверхности должны быть взяты из формул (5).

Ход вычислений при этом получается следующий. В предположении, что ζ есть эллипсоидальная поверхностная гармоническая функция, относящаяся к поверхности (9), вычисляется значение Ω на поверхности и подставляется в уравнение (11). Получающееся поверхностное значение ψ выражается затем через эллипсоидальные функции, относящиеся к вспомогательной поверхности (10); соответствующее выражение функции ψ для внутренних точек может быть тогда записано в пространственных эллипсоидальных гармонических функциях. Условие (12) дает затем уравнение для определения σ , и при этом оказывается, что это уравнение всегда алгебраическое.

В случае эллипсоида Маклорена ход вычислений несколько упрощается, так как входящие при этом гармонические функции принадлежат к виду, исследованному в §§ 104, 107. Эта задача исчерпывающим образом была разрешена Брианом²⁾, который, в частности,

¹⁾ Оказывается, что для некоторых форм свободных колебаний τ получается мнимым, и потому поверхность (9) для этих случаев есть гиперболоид.

²⁾ B r y a n, The Waves on a Rotating Liquid Spheroid of Finite Ellipticity, Phil. Trans. A, CLXXX, 187 (1888).

дополнил исследование Римана, показав, что будет иметь место „обыкновенная“ устойчивость равновесия, пока эксцентриситет меридиана будет меньше, чем 0,9529.

Эллипсоиды Дирихле.

§ 382. Движение жидкой массы под действием взаимного притяжения ее частиц с меняющейся эллипсоидальной граничной поверхностью в первый раз было исследовано Дирихле¹⁾. Положив в основу метод Лагранжа, изложенный в § 13, он подверг исследованию целый класс движений, при которых перемещения выражаются как линейные функции координат. Эти исследования на той же основе были продолжены Дедекиндом²⁾ и Риманом³⁾. Позднее Гринхилль⁴⁾ и другие авторы показали, что некоторые части этой проблемы с большим успехом могут быть исследованы при помощи метода Эйлера.

Рассмотрим прежде всего случай, когда эллипсоид не меняет направления осей и внутреннее движение является потенциальным. Этот случай интересен как пример конечных колебаний жидкой массы около сферической формы.

Выражение для потенциала скоростей было дано в § 110, а именно:

$$\rho = -\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a} x^2 + \frac{\dot{b}}{b} y^2 + \frac{\dot{c}}{c} z^2 \right), \quad (1)$$

причем условие постоянства объема представляется в виде

$$\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} = 0. \quad (2)$$

Давление на основании (4) § 20 определяется из уравнения

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Omega - \frac{1}{2} q^2 + F(t); \quad (3)$$

подставляя значение Ω из § 373, получим

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} x^2 + \frac{\ddot{b}}{b} y^2 + \frac{\ddot{c}}{c} z^2 \right) - \pi \rho (\alpha_0 x^2 + \beta_0 y^2 + \gamma_0 z^2) + F(t). \quad (4)$$

¹⁾ Dirichlet, Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik, Gött. Abh., VIII, 3 (1860); Crelle, LVIII, 181 (Werke, II, 263). Эта работа появилась впервые после смерти автора и была издана и расширена Дедекиндом.

²⁾ Dedekind, Crelle, LVIII, 217 (1861).

³⁾ Riemann, см. выше, стр. 904.

⁴⁾ Greenhill, On the Rotation of a Liquid Ellipsoid about its Mean Axis, Proc. Camb. Phil. Soc., III, 233 (1879); On the general Motion of a Liquid Ellipsoid under the Gravitation of its own parts, Proc. Camb. Phil. Soc., IV, 4 (1880).

Условие, что давление всюду на ограничивающей поверхности

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (5)$$

должно быть одинаковым, приводится поэтому к виду

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\pi\rho\alpha_0\right)a^3 = \left(\frac{\ddot{b}}{b} + 2\pi\rho\beta_0\right)b^3 = \left(\frac{\ddot{c}}{c} + 2\pi\rho\gamma_0\right)c^3. \quad (6)$$

Эти уравнения вместе с условием (2) определяют изменения величин a , b , c . Умножая три слагаемых в условии (2) на одинаковые величины (6), получим

$$\dot{a}\ddot{a} + \dot{b}\ddot{b} + \dot{c}\ddot{c} + 2\pi\rho(\alpha_0 a\dot{a} + \beta_0 b\dot{b} + \gamma_0 c\dot{c}) = 0. \quad (7)$$

Подставляя в это уравнение значения α_0 , β_0 , γ_0 из § 373, можем написать интеграл его в виде

$$\dot{a}^2 + \dot{b}^2 + \dot{c}^2 - 4\pi\rho abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\Delta} = \text{const.} \quad (8)$$

Уже было доказано (§ 373), что потенциальная энергия равна

$$V = \text{const.} - \frac{8}{15} \pi^2 \rho^2 a^2 b^2 c^2 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\Delta}; \quad (9)$$

из формулы же (1) легко получается, что кинетическая энергия будет равна

$$T = \frac{2}{15} \pi\rho abc (\dot{a}^2 + \dot{b}^2 + \dot{c}^2). \quad (10)$$

Поэтому формула (8) есть не что иное, как уравнение энергии

$$T + V = \text{const.} \quad (11)$$

Если эллипсоид есть эллипсоид вращения ($a = b$), то уравнение (8) вместе с равенством $a^2 c = R^3$ достаточно для определения движения. В этом случае получаем

$$\frac{2}{15} \pi\rho R^3 \left(1 + \frac{R^3}{2c^3}\right) \dot{c}^2 + V = \text{const.} \quad (12)$$

Характер движения зависит от полной энергии. Если полная энергия меньше, чем потенциальная энергия в состоянии бесконечного рассеяния, то эллипсоид совершает правильные колебания между сплюсщенной и вытянутой формами с периодом, зависящим от амплитуды; если, наоборот, энергия превосходит это предельное значение, то колебания прекращаются, и эллипсоид стремится к одной из двух предельных форм, а именно: либо к бесконечной материальной линии

совпадающей с осью z , либо к безгранично распространенному во все стороны тонкому слою, совпадающему с плоскостью xy ¹⁾.

Если в случае эллипсоида вращения наложить на потенциальное движение, определяемое формулой (1), равномерное вращение вокруг оси z с угловой скоростью ω , то составляющие скорости, параллельные неподвижным осям, будут равны

$$u = \frac{\dot{a}}{a} x - \omega y, \quad v = \frac{\dot{a}}{a} y + \omega x, \quad w = \frac{\dot{c}}{c} z. \quad (13)$$

Уравнения Эйлера [§ 6 (2)] приводятся в этом случае к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} x - \dot{\omega} y - 2 \frac{\dot{a}}{a} \omega y - \omega^2 x &= -\frac{1}{e} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \frac{\ddot{a}}{a} y + \dot{\omega} x + 2 \frac{\dot{a}}{a} \omega x - \omega^2 y &= -\frac{1}{e} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ \frac{\ddot{c}}{c} z &= -\frac{1}{e} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \Omega}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Первые два уравнения после перекрестного дифференцирования дают

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} + 2 \frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (15)$$

или

$$\omega a^2 = \omega_0 a_0^2, \quad (16)$$

что и представляет собой выражение теоремы Гельмгольца о том, что „интенсивность“ вихря постоянна (§ 146). В силу соотношения (15) уравнения (14) имеют интеграл

$$\frac{p}{e} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \omega^2 \right) (x^2 + y^2) - \frac{1}{2} \frac{\ddot{c}}{c} z^2 - \Omega + \text{const.} \quad (17)$$

Если ввести для Ω значение (4) из § 373, то найдем, что давление на поверхности

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (18)$$

будет постоянным при условии

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\pi\rho a_0 - \omega^2 \right) a^2 = \left(\frac{\ddot{c}}{c} + 2\pi\rho c_0 \right) c^2. \quad (19)$$

В силу соотношения (15) и условия постоянства объема

$$2 \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{c}}{c} = 0 \quad (20)$$

равенство (19) может быть написано в виде

$$2\dot{a}\ddot{a} + \dot{c}\ddot{c} + 2(\omega^2 a \dot{a} + \omega \dot{\omega} a^2) + 4\pi\rho a_0 a \dot{a} + 2\pi\rho c_0 c \dot{c} = 0; \quad (21)$$

¹⁾ Dirichlet, см. выше, стр. 907. Когда амплитуда колебаний мала, то период должен совпадать с тем, который мы получим, если в формуле (10) § 262 положим $n=2$. Это было подтверждено Хиксом. Proc. Camb Phil. Soc., IV, 309 (1883).

отсюда следует

$$2a^3 + c^2 + 2\omega^2 a^2 - 4\pi\rho a^2 c \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)^{1/2}} = \text{const.} \quad (22)$$

Последнее равенство опять можно рассматривать как уравнение энергии.

Если мы примем c за независимую переменную, то соотношение (22) можно написать в виде

$$\frac{2}{15} \pi\rho R^3 \left\{ \left(1 + \frac{R^2}{2c^2}\right) c^2 + \frac{2\omega_0^2 a_0^4}{R^2} c \right\} + V = \text{const.} \quad (23)$$

При подходящих начальных условиях поверхность будет совершать правильные колебания между двумя крайними формами. Так как в случае вытянутого эллипсоида V возрастает вместе с c , то очевидно, что для вращающегося эллипсоида независимо от начальных условий существует предел возможного удлинения в направлении оси. Напротив, в экваториальной плоскости мы можем иметь неограниченное расширение ¹⁾.

Полагая

$$K = \frac{4}{15} \pi\rho\omega_0^2 a_0^4 c, \quad (24)$$

будем иметь условие относительного равновесия, выводя его из уравнения (22), в виде

$$\frac{d}{dc} (V + K) = 0, \quad (25)$$

в согласии с (2) § 378. Малые колебания (симметрического типа) около положения равновесия можно исследовать, полагая $c = c_0 + c'$, где c_0 есть решение уравнения (25), и рассматривая c' как величину малую.

§ 383. Исследование движения жидкой массы, ограниченной поверхностью эллипсоида переменной формы, было проведено далее Риманом в названной выше работе. Эта проблема явилась с того времени предметом обширной литературы, которую мы отчасти приводим в примечании ²⁾. Случай, когда эллипсоидальная граничная поверхность имеет неизменную форму, но вращается вокруг главной оси (Oz), может быть исследован очень простым способом ³⁾.

Если обозначить через u , v , w относительные скорости по отношению к системе осей (xy), вращающейся в своей собственной плоскости с постоян-

¹⁾ Dirichlet, см. выше, стр. 907.

²⁾ Brioschi. Développemens relatifs au § 3 des Recherches de Dirichlet sur un problème d'Hydrodynamique, Crelle, LIX, 63 (1861); Lipschitz, Reduction der Bewegung eines flüssigen homogenen Ellipsoids auf das Variationsproblem eines einfachen Integrals. . . , Crelle, LXXVIII, 245 (1874); Greenhill, см. выше, стр. 907; Basset, On the Motion of a Liquid Ellipsoid under the Influence of its own Attraction, Proc. Lond. Math. Soc., XVII, 255 (1886) (Hydrodynamics, гл. XV); Tedone, Il moto di un ellipsoide fluido secondo l'ipotesi di Dirichlet, Pisa, 1894; Stekloff, Problème du mouvement d'une masse fluide incompressible de la forme ellipsoïdale..., Ann. de l'école normale (3), XXVI (1909); Hargreaves, Camb. Trans., XXII, 61 (1914).

³⁾ Greenhill, см. выше, стр. 907.

ной угловой скоростью ω , то уравнения движения на основании § 207 ¹⁾ будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{Du}{Dt} - 2\omega v - \omega^2 x &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \frac{Dv}{Dt} + 2\omega u - \omega^2 y &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \Omega}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Если вектор-вихрь ζ , направление которого параллельно оси z , всюду в жидкости имеет постоянное значение, то проекции абсолютной скорости на мгновенные направления осей будут соответственно равны

$$\left. \begin{aligned} u - \omega y &= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \left(\omega - \frac{1}{2} \zeta \right) y - \frac{1}{2} \zeta y, \\ v + \omega x &= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \left(\omega - \frac{1}{2} \zeta \right) x + \frac{1}{2} \zeta x, \\ w &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

так как все условия, очевидно, будут выполнены, если на равномерное вращение с угловой скоростью $\frac{1}{2} \zeta$ будет наложено безвихревое движение которое получится благодаря вращению твердой эллипсоидальной оболочки с угловой скоростью $\omega - \frac{1}{2} \zeta$ (ср. § 110). Отсюда следуют равенства

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{2a^2}{a^2 + b^2} \left(\omega - \frac{1}{2} \zeta \right) y, \\ v &= -\frac{2b^2}{a^2 + b^2} \left(\omega - \frac{1}{2} \zeta \right) x, \\ w &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (1) и интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= \frac{2a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^2} \left(\omega - \frac{1}{2} \zeta \right)^2 (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) - \\ &\quad - \frac{2(b^2 x^2 + a^2 y^2)}{a^2 + b^2} \omega \left(\omega - \frac{1}{2} \zeta \right) - \Omega + \text{const.} \end{aligned} \quad (4)$$

Откуда условия на свободной поверхности будут иметь вид

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{2a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^2} \left(\omega - \frac{1}{2} \zeta \right)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 - \frac{2b^2}{a^2 + b^2} \omega \left(\omega - \frac{1}{2} \zeta \right) - \pi \rho \alpha_0 \right\} a^2 = \\ &= \left\{ \frac{2a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^2} \left(\omega - \frac{1}{2} \zeta \right)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 - \frac{2a^2}{a^2 + b^2} \omega \left(\omega - \frac{1}{2} \zeta \right) - \pi \rho \beta_0 \right\} b^2 = \\ &\quad = -\pi \rho \gamma_0 c^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Это выражение содержит в себе ряд интересных случаев:

1. Полагая $\omega = \frac{1}{2} \zeta$, приходим к условиям для эллипсоида Якоби [§ 374 (5)].

¹⁾ Можно было бы применить также уравнения § 12, если принять во внимание измененное значение u , v , w .

2. Полагая $\omega = 0$, что означает, что внешняя граница будет неизменной в пространстве, получаем

$$\left\{ \pi \rho \alpha_0 - \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)^2} \zeta^2 \right\} a^2 = \left\{ \pi \rho \beta_0 - \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)^2} \zeta^2 \right\} b^2 = \pi \rho \gamma_0 c^2. \quad (6)$$

Эти условия равносильны соотношениям

$$(\alpha_0 - \beta_0) a^2 b^2 + \gamma_0 c^2 (a^2 - b^2) = 0 \quad (7)$$

и

$$\frac{\zeta^2}{2\pi\rho} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2 b^2} \cdot \frac{a^2 \alpha_0 - b^2 \beta_0}{a^2 - b^2}. \quad (8)$$

Из сравнения с § 375 становится ясным, что c должна быть наименьшей осью эллипсоида и что значение (8) величины $\frac{\zeta^2}{2\pi\rho}$ положительно.

Траектории частиц определяются уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{a^2}{a^2 + b^2} \zeta y, \\ \dot{y} &= \frac{b^2}{a^2 + b^2} \zeta x, \\ \dot{z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

откуда следует

$$\left. \begin{aligned} x &= ka \cos(\sigma t + \varepsilon), \\ y &= kb \sin(\sigma t + \varepsilon), \\ z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где

$$\sigma = \frac{ab}{a^2 + b^2} \zeta, \quad (11)$$

и k, ε — произвольные постоянные.

Эти результаты принадлежат Дедекенду ¹⁾. Ляв заметил, что серии эллипсоидов Дедекенда и Якоби по своей внешней форме тождественны.

3. Пусть $\zeta = 0$, т. е. движение свободно от вихрей. Условия (5) приводятся тогда к виду

$$\left\{ \alpha_0 - \frac{(a^2 - b^2)(a^2 + 3b^2)}{(a^2 + b^2)^2} \frac{\omega^2}{2\pi\rho} \right\} a^2 = \left\{ \beta_0 - \frac{(b^2 - a^2)(3a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2)^2} \frac{\omega^2}{2\pi\rho} \right\} b^2 = \gamma_0 c^2. \quad (12)$$

Эти условия можно заменить соотношениями

$$\alpha_0(3a^2 + b^2) + \beta_0(3b^2 + a^2) - \gamma_0(a^4 + 6a^2b^2 + b^4) c^2 = 0 \quad (13)$$

и

$$\frac{\omega^2}{2\pi\rho} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^4 + 6a^2b^2 + b^4} \cdot \frac{\alpha_0 a^2 - \beta_0 b^2}{a^2 - b^2}. \quad (14)$$

Уравнение (13) определяет c через a, b . Предположим, что $a > b$; тогда легко видеть, что левая часть уравнения (13) при $c = a$ отрицательна, а при $c = b$ положительна. Поэтому между a и b имеется такое действительное значение c , для которого условие (13) будет выполняться; значение ω , полученное из уравнения (14), на том же основании, как в § 375, будет в этом случае действительным.

¹⁾ Dedekind, см. выше, стр. 907. См. также Love, On Dedekind's Theorem..., Phil. Mag. (5) XXV, 40 (1888).

4. В случае эллиптического цилиндра, вращающегося вокруг своей оси, условия (5) на основании формул (19) § 373 приводятся к виду

$$\omega^2 + \frac{4a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2} \left(\omega - \frac{1}{2} \zeta \right)^2 = \frac{4\pi\rho ab}{(a+b)^2}. \quad (15)^1$$

Полагая $\omega = \frac{1}{2} \zeta$, получим случай (8) § 375.

Если $\omega = 0$, т. е. внешняя граница является установившейся, то будем иметь

$$\zeta^2 = 4\pi\rho \frac{(a^2 + b^2)^2}{ab(a+b)^2}. \quad (16)$$

Когда $\zeta = 0$, т. е. когда движение свободно от вихрей, имеем

$$\omega^2 = 4\pi\rho \frac{ab(a^2 + b^2)^2}{(a+b)^2(a^4 + 6a^2b^2 + b^4)}. \quad (17)$$

§ 384. Колебания вращающейся эллипсоидальной жидкой массы, заключенной в твердую оболочку, были исследованы различными авторами ²⁾. Мы будем следовать вначале (с некоторыми дополнениями) очень изящному способу Пуанкаре.

Предполагается, что центр масс и главные оси инерции оболочки и жидкости совпадают, а завихрение жидкости всюду одинаково.

Наложим на движение, определяемое формулами (13) § 146, при котором оболочка предполагается твердой, равномерное вращение (p, q, r); тогда будем иметь при небольшом изменении обозначений

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{a}{c} q_1 z - \frac{a}{b} r_1 y + qz - ry, \\ v &= \frac{b}{a} r_1 x - \frac{b}{c} p_1 z + rx - pz, \\ w &= \frac{c}{b} p_1 y - \frac{c}{a} q_1 x + py - qx. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Компоненты вектора вихря будут поэтому равны

$$\left. \begin{aligned} \xi &= 2p + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c} \right) p_1, \\ \eta &= 2q + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) q_1, \\ \zeta &= 2r + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) r_1. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Кинетическая энергия всей системы будет равна

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + C r^2 + A_1 p_1^2 + B_1 q_1^2 + C_1 r_1^2 + 2F p p_1 + 2G q q_1 + 2H r r_1, \quad (3)$$

¹⁾ Greenhill, Proc. Camb. Phil. Soc., III, 233 (1879).

²⁾ Greenhill, см. выше, стр. 27; Hough, The Oscillations of a Rotating Ellipsoidal Shell containing fluid, Phil. Trans. A, CLXXXVI, 469 (1895); Poincaré, Sur la précession des corps déformables, Bull. Astr., 1910; Vassetz, Quart. J. of Math., XLV, 223 (1914). Приложение к прецессионным задачам сделал, повидимому, впервые Кельвин (Papers, III, 322 и IV, 129); точное решение принадлежит Гафу и Пуанкаре.

где A, B, C — главные моменты инерции всей системы, в то время как A_1, B_1, C_1, F, G, H относятся только к жидкости; в частности, имеем

$$A_1 = \frac{b^2}{c^2} \sum (mz^2) + \frac{c^2}{b^2} \sum (my^2) = \frac{1}{5} \sum (m) (b^2 + c^2) \quad \text{и т. д.} \quad (4)$$

$$F = \frac{b}{c} \sum (mz^2) + \frac{c}{b} \sum (my^2) = \frac{2}{5} \sum (m) bc \quad \text{и т. д.} \quad (5)$$

Суммирование здесь распространяется на всю массу жидкости. Главные же моменты инерции оболочки равны

$$A_0 = A - A_1, \quad B_0 = B - B_1, \quad C_0 = C - C_1. \quad (6)$$

Главный момент количества движения системы относительно оси Ox равен

$$\begin{aligned} A_0 p + \sum m(yw - zv) &= A_0 p + \left(p + \frac{c}{b} p_1\right) \sum (my^2) + \left(p + \frac{b}{c} p_1\right) \sum (mz^2) = \\ &= Ap + F p_1 = \frac{\partial T}{\partial p}. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения движения относительно подвижных осей имеют при этом вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p} - r \frac{\partial T}{\partial q} + q \frac{\partial T}{\partial r} &= L, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q} - p \frac{\partial T}{\partial r} + r \frac{\partial T}{\partial p} &= M, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial r} - q \frac{\partial T}{\partial p} + p \frac{\partial T}{\partial q} &= N, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где L, M, N — главные моменты внешних сил.

Уравнения Гельмгольца (4) § 146 в подвижных осях принимают вид

$$\frac{D\xi}{Dt} - r\eta + q\zeta = \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{и т. д.;} \quad (9)$$

отсюда после подстановки из формул (1) и (2) получаем

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{a}{c} q_1 \zeta - \frac{a}{b} r_1 \eta \quad \text{и т. д.;} \quad (10)$$

при этом мы смогли применить обозначение полной производной $\left(\frac{d}{dt}\right)$, так как, согласно предположению, ξ, η, ζ суть функции только времени.

Теперь на основании формул (2) можем написать

$$\frac{1}{5} \sum (m) bc \xi = F p + A_1 p_1 = \frac{\partial T}{\partial p_1}, \quad (11)$$

и уравнения Гельмгольца соответственно этому примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p_1} - q_1 \frac{\partial T}{\partial r_1} + r_1 \frac{\partial T}{\partial q_1} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_1} - r_1 \frac{\partial T}{\partial p_1} + p_1 \frac{\partial T}{\partial r_1} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial r_1} - p_1 \frac{\partial T}{\partial q_1} + q_1 \frac{\partial T}{\partial p_1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Подставляя T из формулы (3) в уравнения (8) и (12), получаем следующие две системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} (Ap + Fp_1) - r (Bq + Gq_1) + q (Cr + Hr_1) &= L, \\ \frac{d}{dt} (Bq + Gq_1) - p (Cr + Hr_1) + r (Ap + Fp_1) &= M, \\ \frac{d}{dt} (Cr + Hr_1) - q (Ap + Fp_1) + p (Bq + Gq_1) &= N, \end{aligned} \right\} \quad (13).$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} (Fp + A_1p_1) + r_1 (Gq + B_1q_1) - q_1 (Hr + C_1r_1) &= 0, \\ \frac{d}{dt} (Gq + B_1q_1) + p_1 (Hr + C_1r_1) - r_1 (Fp + A_1p_1) &= 0, \\ \frac{d}{dt} (Hr + C_1r_1) + q_1 (Fp + A_1p_1) - p_1 (Gq + B_1q_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Мы ограничимся теперь случаем симметрии относительно оси z ¹⁾; тогда будем иметь

$$a = b, \quad A = B, \quad A_1 = B_1, \quad C_1 = H, \quad F = G. \quad (15)$$

Если теперь главный момент внешних сил относительно оси симметрии будет равен нулю, то будут иметь место уравнения

$$C \frac{dr}{dt} + C_1 \frac{dr_1}{dt} + F (pq_1 - p_1q) = 0, \quad (16)$$

$$C_1 \left(\frac{dr}{dt} + \frac{dr_1}{dt} \right) + F (pq_1 - p_1q) = 0. \quad (17)$$

Отсюда получается $\frac{dr}{dt} = 0$, что динамически и непосредственно ясно. Следовательно, имеем

$$r = \text{const.} = \omega \quad (18)$$

и

$$C_1 \frac{dr}{dt} + F (pq_1 - p_1q) = 0. \quad (19)$$

Если имеет место небольшое возмущение из состояния установившегося движения, когда жидкость и твердое тело вращаются вместе как одно тело около оси симметрии, то p , q , p_1 , q_1 (вначале для всех случаев) будут малыми величинами. Если пренебречь их произведениями, то величина r_1 на основании уравнения (19) будет постоянной и может считаться малой, так как можно принять, что при установившемся движении она исчезает. При этих упрощениях остальные уравнения системы (13) и (14) приводятся

¹⁾ Свободные колебания эллипсоида с тремя неравными осями были исследованы Гафом (см. выше), который, однако, предполагал отклонения от шаровой формы малыми.

к уравнениям

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + F \frac{dp_1}{dt} + (C - A) \omega q - F \omega q_1 &= L, \\ A \frac{dq}{dt} + F \frac{dq_1}{dt} - (C - A) \omega p + F \omega p_1 &= M, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} F \frac{dp}{dt} + A_1 \frac{dp_1}{dt} - C_1 \omega q_1 &= 0, \\ F \frac{dq}{dt} + A_1 \frac{dq_1}{dt} + C_1 \omega p_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Для астрономических возмущающих сил можно считать типичными соотношения

$$L = \kappa \cos \sigma t, \quad M = \kappa \sin \sigma t. \quad (22)$$

Тогда, полагая

$$p + iq = \tilde{\omega}, \quad p_1 + iq_1 = \tilde{\omega}_1, \quad (23)$$

будем иметь

$$A \frac{d\tilde{\omega}}{dt} + F \frac{d\tilde{\omega}_1}{dt} - i(C - A) \omega \tilde{\omega} + iF \omega \tilde{\omega}_1 = \kappa e^{i\sigma t}, \quad (24)$$

$$F \frac{d\tilde{\omega}}{dt} + A_1 \frac{d\tilde{\omega}_1}{dt} + iC_1 \omega \tilde{\omega}_1 = 0. \quad (25)$$

Для вынужденных колебаний получаем, таким образом,

$$\tilde{\omega} = - \frac{A_1 \sigma + C_1 \omega}{\Delta(\sigma)} i \kappa e^{i\sigma t}, \quad (26)$$

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{F \sigma}{\Delta(\sigma)} i \kappa e^{i\sigma t}, \quad (27)$$

где

$$\Delta(\sigma) = \begin{vmatrix} A\sigma - (C - A)\omega & F(\sigma + \omega) \\ F\sigma & A_1\sigma + C_1\omega \end{vmatrix}. \quad (28)$$

Свободные колебания определяются уравнением

$$\Delta(\sigma) = 0. \quad (29)$$

Мы, главным образом, рассмотрим тот случай, когда отклонение полости от сферической формы мало. Если бы полость была в точности сферической, то на основании формул (4) и (5) мы имели бы

$$A_1 = C_1 = F \quad (30)$$

и потому

$$\Delta(\sigma) = C_1(\sigma + \omega) \{ A_0\sigma - (C_0 - A_0)\omega \}. \quad (31)$$

Отсюда для колебаний (по отношению к вращающимся осям) мы имели бы

$$\sigma = -\omega \text{ и } \sigma = \frac{C_0 - A_0}{A_0} \omega. \quad (32)$$

На основании уравнения (25) первый корень дает $p = 0$, $q = 0$ и соответствует незначительному постоянному перемещению в пространстве оси вихревого вектора жидкости. Второй корень соответствует свободной „эйлеровой нутации“ оболочки, не зависящей в этом случае от наличия жидкости. Равным образом и вынужденные колебания оболочки также не зависят от жидкости.

В общем же случае формула (28) может быть приведена к виду

$$\Delta(\sigma) = A_1(\sigma + \omega) \{ A_0\sigma - (C - A)\omega \} + (A_1^2 - F^2)\sigma^2 + \\ + \{ (C_1 - A_1)A_0 + C_1A_1 - F^2 \} \omega\sigma - (C_1 - A_1)(C - A)\omega^2. \quad (33)$$

Положим

$$\varepsilon = \frac{C_1 - A_1}{A_1} = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2}. \quad (34)$$

Будем предполагать эту величину малой; в таком случае она будет совпадать с эллиптичностью полости согласно обычному определению. Из формул (4) и (5) следует также

$$\frac{C_1A_1 - F^2}{C_1A_1} = \varepsilon, \quad \frac{A_1^2 - F^2}{A_1^2} = \varepsilon^2. \quad (35)$$

В качестве первого приближения к свободным колебаниям имеем на основании уравнения (33)

$$\sigma = -\omega \quad \text{и} \quad \sigma = \frac{C - A}{A_0} \omega; \quad (36)$$

второй корень показывает, что период свободной эйлеровой нутации оказывается короче в отношении $\frac{A_0}{A}$, чем в том случае, когда вся масса представляет твердое тело, что и следовало ожидать. Приближение можно продолжить, что, однако, не представляет интереса. Влияние малой эллиптичности во всех случаях оказывается незначительным.

Дело меняется в случае вынужденных колебаний, в особенности при большом периоде. Если бы распределение возмущающих сил в пространстве было неизменным, то угловая скорость по отношению к движущимся осям была бы равна $-\omega$. Подставляя $\sigma = -\omega$ в формулы (26) и (28), получаем

$$p + iq = \tilde{\omega} = \frac{\kappa}{C\omega} i e^{-i\omega t}. \quad (37)$$

Этот результат можно сравнить с формулой для медленной прецессии волчка, которую можно рассматривать теперь уже как частный случай. Полученный результат оказывается совершенно таким же, как если бы масса была во всех отношениях твердой. Следует заметить, что эти рассуждения не зависят от малости ε .

Если, однако, распределение возмущающих сил в пространстве медленно меняется и множитель времени есть e^{int} , то мы должны положить $\sigma = -\omega + n$, и тогда получаем

$$p + iq = - \frac{(C_1 - A_1)\omega + A_1n}{\Delta(-\omega + n)} i \kappa e^{-i(\omega - n)t}. \quad (38)$$

Знаменатель этой дроби можно написать в виде

$$\Delta(-\omega + n) = (A_0A_1 + A_1^2 - F^2)n^2 - \\ - \{ C_1A_1 - A(C_1 - A_1) + C_1A_1 - F^2 \} n\omega - C(C_1 - A_1)\omega^2. \quad (39)$$

Если принять во внимание формулы (34) и (35), то получаем следующий результат: если отношение $\frac{n}{\omega}$ не только вообще мало, но мало именно по сравнению с ε , то формула (38) может быть приближенно написана в виде

$$p + iq = \frac{i\kappa}{C\omega} e^{-i(\omega - n)t}; \quad (40)$$

а это опять та же формула, которая должна была бы иметь место, если бы жидкость затвердела. Положенное здесь в основу допущение заключается в том, что отношение (абсолютного) периода $\frac{2\pi}{n}$ возмущающей силы к периоду $\frac{2\pi}{\omega}$ вращения должно быть велико по сравнению с $\frac{1}{\varepsilon}$.

Отсюда следует, что совершенно незначительное отклонение формы полости от сферической было бы достаточно, чтобы вынужденные колебания большого периода практически были бы таковы, как если бы вся масса была твердым телом. Если бы земной шар состоял из твердой оболочки, охватывающей жидкую массу с эллиптичностью того же порядка $\left(\frac{1}{300}\right)$, как и у внешней поверхности Земли, то указанное выше условие, конечно, с избытком будет выполняться для случая лунно-солнечной прецессии, период которой равен 26 000 лет. Напротив, влияние жидкого внутреннего ядра на лунную нутацию с периодом в девятнадцать лет было бы заметно, а на солнечную и лунную нутации с периодами в полгода и в четырнадцать дней (соответственно) это влияние было бы даже существенно ¹⁾.

Следует еще добавить, что результаты, заключающиеся в формулах (36), поскольку они относятся к свободным колебаниям, основаны на предположении, что масса оболочки сравнима с массой жидкости. В предельном случае, когда массой оболочки можно пренебречь, имеет место соотношение

$$\Delta(\sigma) = (A_1^2 - F^2)\sigma(\sigma + \omega) - C_1(C_1 - A_1)\omega^2. \quad (41)$$

Уравнение для определения периодов свободных колебаний будет в этом случае иметь вид

$$(a^2 - c^2)\sigma(\sigma + \omega) - 2a^2\omega^2 = 0. \quad (42)$$

Оказывается, что периоды для $c < a$ или для $c > 3a$ будут действительны, а для $a < c < 3a$ становятся мнимыми. Это согласуется с наблюдением Кельвина ²⁾, согласно которому жидкий гириостат, оболочка которого представляет несколько удлиненный эллипсоид вращения, неустойчив, между тем как сплюснутая форма устойчива.

§ 385. Прецессия жидкого эллипсоида со свободной поверхностью также была исследована Пуанкаре; он подтвердил высказывание Кельвина, что если период возмущающих сил достаточно велик, то прецессия практически такова, как если бы масса была твердой. Эта задача значительно труднее, чем предшествующая, так как возмущающие силы вызывают также приливные колебания, и поэтому оказывается необходимым отделить прецессию от деформации, обусловленной этими колебаниями.

Пуанкаре, следуя Дирихле, применяет упомянутый в § 382 метод Лагранжа, но представляет интерес, а также и некоторое преимущество, воспользоваться здесь методом предыдущего параграфа (с необходимыми изменениями).

При том и другом способе вычисление имеет несколько косвенный характер. Представим себе, что граничная поверхность жидкости вначале вынуждена (если это необходимо), благодаря соответствующему

¹⁾ Эти результаты были установлены Кельвином в 1876 г. (Papers, III, 322). Математическое исследование, на котором они основываются, не было опубликовано.

²⁾ Kelvin, Papers, IV, 129, 183. Более точный критерий для устойчивости был дан Гринхиллем; см. также Нough, см. выше.

давлению, оставаться эллипсоидом, но при этом размеры его могут меняться. В конце же оказывается, что в этих вынуждающих давлениях нет необходимости (ср. § 382).

Равенства (1) заменятся теперь в соответствии с формулой (5) § 110 следующими:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{a}{c} q_1 z - \frac{a}{b} r_1 y + qz - ry + \frac{\dot{a}}{a} x, \\ v &= \frac{b}{a} r_1 x - \frac{b}{c} p_1 z + rx - pz + \frac{\dot{b}}{b} y, \\ w &= \frac{c}{b} p_1 y - \frac{c}{a} q_1 x + py - qx + \frac{\dot{c}}{c} z, \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

причем изменения осей эллипсоида связаны условием несжимаемости

$$\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} = 0. \quad (44)$$

Формула (3) для кинетической энергии изменится благодаря этому добавлением члена

$$\frac{1}{5} \sum (m) (\dot{a}^2 + \dot{b}^2 + \dot{c}^2). \quad (45)$$

Значки у величин A_1, B_1, C_1 , определяемых формулами (4), можно теперь отбросить, так как $A_0, B_0, C_0 = 0$.

Составляющие главного момента количества движения выражаются так же, как в формуле (7), и уравнения движения (13), следовательно, все еще будут иметь силу; при этом следует помнить, что коэффициенты A, B, C, F, G, H не являются уже постоянными, так как они содержат переменные величины a, b, c . Обозначения L, M, N должны естественно включать в себя моменты (если они существуют) вынуждающих давлений на поверхность.

Составляющие вектора-вихря попрежнему определяются формулами (2) и формула (11) остается неизменной; вместо же формул (10) будем иметь

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\dot{a}}{a} \xi + \frac{a}{c} q_1 \zeta - \frac{a}{b} r_1 \eta \text{ и т. д.} \quad (46)$$

Отсюда следует, если принять во внимание соотношение (44),

$$\frac{d}{dt} (bc\xi) = abq_1 \zeta - car_1 \eta \text{ и т. д.} \quad (47)$$

Уравнения Гельмгольца сохраняют согласно с этим вид (12), но коэффициенты в уравнениях (14) будут, конечно, переменными.

Проекция ускорения в произвольной точке жидкости можно получить из формул § 12; например, проекция ускорения на ось x будет равна

$$\frac{\partial u}{\partial t} - rv + qw + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{Dx}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{Dy}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{Dz}{Dt}, \quad (48)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \frac{Dx}{Dt} &= \frac{\dot{a}}{a} x + \frac{a}{c} q_1 z - \frac{a}{b} r_1 y, \\ \frac{Dy}{Dt} &= \frac{\dot{b}}{b} y + \frac{b}{a} r_1 x - \frac{b}{c} p_1 z, \\ \frac{Dz}{Dt} &= \frac{\dot{c}}{c} z + \frac{c}{b} p_1 y - \frac{c}{a} q_1 x. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Проекции ускорения оказываются, таким образом, линейными функциями от x , y , z с коэффициентами, зависящими от t . Условия для интегрируемости гидродинамических уравнений показывают тотчас, что эти функции должны приводиться к виду

$$\alpha x + \beta y + \gamma z, \quad hx + \beta y + fz, \quad gx + fy + \gamma z. \quad (50)$$

Это можно, хотя и несколько кропотливо, установить при помощи уравнений Гельмгольца (14), которые и представляют на самом деле упомянутые выше условия интегрируемости. Гидродинамические уравнения принимают поэтому вид

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= \alpha x + \beta y + \gamma z + \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega'}{\partial x}, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} &= hx + \beta y + fz + \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \frac{\partial \Omega'}{\partial y}, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} &= gx + fy + \gamma z + \frac{\partial \Omega}{\partial z} + \frac{\partial \Omega'}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

где P — давление, Ω — потенциал самой эллипсоидальной массы и Ω' — потенциал отдаленных возмущающих тел.

В обозначениях § 373 будем иметь

$$\Omega = \pi \rho (\alpha_0 x^2 + \beta_0 y^2 + \gamma_0 z^2 - \chi_0). \quad (52)$$

Потенциал же возмущающих сил для точек в окрестности начала можно разложить в ряд по сферическим функциям положительной степени. Члены первого порядка не оказывают никакого влияния на движение по отношению к центру масс, в то время как члены порядка выше второго по обыкновенно могут быть отброшены. Мы положим поэтому

$$\Omega' = \frac{1}{2} (A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 + 2F'yz + 2G'zx + 2H'xy), \quad (53)$$

причем коэффициенты, которые представляют известные функции времени, вследствие уравнения $\Delta \Omega' = 0$ должны удовлетворять условию $A' + B' + C' = 0$.

Уравнения (51) удовлетворятся поэтому решением вида

$$P = \lambda \rho \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right), \quad (54)$$

если

$$\alpha + 2\pi \rho \alpha_0 + A' = \frac{2\lambda}{a^2}, \quad \beta + 2\pi \rho \beta_0 + B' = \frac{2\lambda}{b^2}, \quad \gamma + 2\pi \rho \gamma_0 + C' = \frac{2\lambda}{c^2}, \quad (55)$$

и

$$f + F' = 0, \quad g + G' = 0, \quad h + H' = 0. \quad (56)$$

Уравнения (14), (44), (55), (56) представляют систему десяти уравнений, связывающих десять зависимых переменных a , b , c , p , q , r , p_1 , q_1 , r_1 , λ с временем.

Следует заметить, что уравнения (56) представляют в точности те уравнения, которые могли бы быть получены из формул (51) и (53) при выражении того обстоятельства, что скорости изменения моментов количеств движения по отношению к фиксированным осям, совпадающим с мгновенными положениями осей эллипсоида, равны соответствующим моментам внешних сил. Уравнения (56) действительно эквивалентны системе (13), причем L , M , N теперь должны относиться только к одним возмущающим силам, так как при том распределении давления, которое дается формулой (54), моменты этих давлений относительно указанных осей будут равны нулю. Нетрудно также и непосредственно показать тождественность уравнений (56) и (13).

Подставим, хотя это и не существенно для наших целей, значения α , β , γ , полученные из (48), в уравнения (55). Тогда, исключая λ , будем иметь

$$\begin{aligned} \dot{a}a - a^2(q^2 + r^2 + q_1^2 + r_1^2) - 2caqq_1 - 2abrr_1 + 2\pi qa^2 a_0 + A'a^2 = \\ = b\dot{b} - b^2(r^2 + p^2 + r_1^2 + p_1^2) - 2abrr_1 - 2bcpp_1 + 2\pi eb^2 \beta_0 + B'b^2 \\ = c\dot{c} - c^2(p^2 + q^2 + p_1^2 + q_1^2) - 2bcpp_1 - 2caqq_1 + 2\pi c^2 \gamma_0 + C'c^2. \end{aligned} \quad (57)$$

Эти уравнения вместе с уравнениями (13), (14) и (44) мы можем рассматривать как нашу основную систему уравнений.

До сих пор мы ничем не пренебрегали, и уравнения были бы, например, приложимы к конечным колебаниям эллипсоида Якоби при существовании потенциала вида (53). Но в случае *малого* возмущения из состояния равномерного вращения вокруг оси z величины p , q , p_1 , q_1 , r_1 будут малыми, в то время как r будет приблизительно постоянным. Оказывается, что коэффициенты можно рассматривать как постоянные, если пренебречь малыми величинами второго порядка в первых двух уравнениях системы (13) и в первых двух уравнениях системы (14). Изменения мгновенных осей при этом будут независимы от приливной деформации и оказываются точно такими же, как если бы жидкость была заключена в твердую оболочку, массой которой можно пренебречь.

Приливные колебания свободной поверхности, с другой стороны, определяются уравнениями (57) вместе с уравнением (44) и третьими уравнениями систем (13) и (14). Следует заметить, что эти последние два уравнения принимают вид

$$\frac{d}{dt} (Cr + Hr_1) = N, \quad \frac{d}{dt} (Hr + Cr_1) = 0. \quad (58)$$

Если эллипсоид в невозмущенном состоянии есть эллипсоид вращения вокруг оси z , то уравнения, определяющие прецессию, приводятся, как и раньше, к виду (20) и (21). Кроме того, в астрономических приложениях та часть возмущающего потенциала, которая оказывает влияние на прецессию, состоит из членов вида

$$\Omega' = -kr^2 \sin \theta \cos \theta \cos(\sigma t + \varphi), \quad (59)$$

где σ приблизительно равно ω ; ср. § 219 (1) и стр. 453. В декартовых координатах имеем

$$\Omega' = kz(y \sin \sigma t - x \cos \sigma t). \quad (60)$$

Это дает

$$L = -k(C - A) \sin \sigma t, \quad M = -k(C - A) \cos \sigma t, \quad N = 0. \quad (61)$$

Таким образом, имеем

$$L + iM = -ik(C - A)e^{-i\sigma t}. \quad (62)$$

Ход доказательства, которое ведет к заключению, что прецессия при известных условиях оказывается такой же, как в случае твердой массы, таков же, как и в предыдущем параграфе.

Когда возмущающая функция имеет вид (59), то в случае Земли колебания длин полуосей a и c соответствуют суточным приливам.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адамар (Hadamard, J.) 448, 607, 752.
Альборн (Ahlborn) 860
Арган 90.
- Барнес (Barnas) 838.
Барнсайд (Barnside) 524.
Бассе (Basset) 168, 197, 229, 243, 780, 789, 811, 901, 913.
Батеман (Bateman) 878.
Бельтрами (Beltrami) 109, 185.
Бернулли (Bernoulli D.) 37, 40, 453.
Берри (Berry, A.) 760.
Берстоу (Bairstow L.) 772, 775.
Бессель (Bessel F) 171.
Блазиус (Blasius H.) 117, 841, 866.
Бобылёв 130, 727.
Боджио (Boggio) 811.
Бойс (Boys) 879.
Больц (Boltze) 870.
Больцман (Boltzmann) 136, 250.
Борда (Borda) 41.
Бриан (Bryan) 147, 228, 906.
Бромвич (Bromwich) 449, 565.
Бургес (Burgess R.) 769.
Буркхардт (Burkhardt) 83.
Буссинеск (Boussinesk) 529.
Бьеркнес (Bjerknes V.) 168, 312.
Бьеркнес (Bjerknes S.) 168, 185, 196.
Бэрд (Baird) 446.
- Вайнштейн (Weinstein) 531.
Ванцель (Wantzel) 43.
Ватсон (Watson, G.) 369.
Вебб (Webb) 467.
Вебер (Weber) 31, 621.
Ведербарн (Wedderburn) 475.
Велш (Welsh) 271.
Виглей (Wigley W.) 548.
Вильямс (Williams) 751.
Вип (Wien) 511.
Вуд (Wood) 595.
Вудол (Woodall) 587.
- Гадлей (Hadley) 386.
Гамильтон (Hamilton) 478.
Ганземан (Hansemann) 554.
Ганкель (Hankel) 52, 367, 675.
- Ганлон (Hanlon) 42.
Гансен (Hansen) 171.
Гаррисон (Harrison) 465, 775, 842.
Гаусс (Gauss) 58, 90, 132.
Гвайтер (Gwyther) 532.
Гейне (Heine) 641.
Гельмгольц (Helmholtz) 38, 74, 98, 120, 243, 251, 253, 260, 306, 468, 534, 623, 721, 743, 776, 803, 823.
Герман (Herman R.) 168.
Герстнер (Gerstner F) 526.
Гильберт (Hilbert) 315, 484.
Глезер (Glaisher) 143, 504.
Гляуэрт (Glauret) 860, 876.
Гобсон (Hobson) 683.
Гогнер (Hogner) 546, 548.
Гольдсброу (Goldsbrough) 341, 412, 443, 444.
Гольдштейн (Goldstein) 364, 409.
Григ (Graig) 215.
Грин (Green G.) 62, 82, 193, 345, 478.
Гринхилл (Greenhill) 133, 217, 222, 281, 467, 735, 907, 918.
Грёбли (Gröbli) 281, 305.
Гуг (Gough) 478, 913.
Гутри (Guthrie) 240.
Гюонио (Hugoniot) 44, 607.
- Дайсон (Dyson) 197, 307, 896.
Даламбер (d'Alembert J.).
Дарвин (Darwin G.) 317, 355, 427, 430, 446, 453, 807, 892, 896, 903.
Дарси (Darcy) 840.
Дебюн 653.
Девриз (De Vries) 532.
Дедекинд (Dedekind) 907, 912.
Джинс (Jeans) 904.
Джонс (Jones J.) 638.
Джонс (Jones R.) 869:
Динник А. Н. 630.
Дирихле (Dirichlet) 155, 390, 907.
Додсон (Doodson) 349, 385, 453.
Дэ (De K.) 280.
Дюпрез (Duprez) 576.
- Жеффрей (Jeffreys) 349, 364, 737, 786, 863, 873.
Жуковский Н. Е. 102, 861.

- Эильберштейн 312.
 Зоммерфельд (Sommerfeld A.) 83, 448, 675, 851.
 Ирншоу (Earnshaw) 352, 601.
 Карман (Kármán V.) 283, 860, 866.
 Карслоу (Carslaw) 675.
 Келланд (Kelland) 322, 559.
 Кельвин (Kelvin) 20, 52, 57, 66, 224, 240, 253, 290, 310, 317, 434, 494, 507, 513, 563, 568, 575, 585, 703, 839, 850, 913, 918.
 Кирхгоф (Kirchhoff) 57, 120, 128, 136, 200, 205, 218, 224, 250, 289, 554, 627, 654, 809, 815, 819, 858.
 Клебш (Clebsch) 195, 312, 641, 799.
 Клейн (Klein) 448.
 Ковалевская С. 894.
 Кован (Cowan M.) 326, 532.
 Кокер (Coker) 838.
 Колладон (Colladon) 595.
 Кортвег (Korteweg) 532, 776.
 Кох (Koch) 721.
 Коши (Cauchy) 33, 49, 481, 486, 539.
 Крайстл (Chrystal) 349.
 Кристоффель (Christoffel) 104, 656.
 Крудели (Krudeli) 883.
 Кундт 819.
 Кутта (Kutta) 102, 861.
 Кэли 389.
 Лагранж (Lagrange) 15, 33, 85, 319, 323.
 Ламб (Lamb H.) 109, 154, 215, 341, 449, 464, 478, 492, 541, 546, 647, 812, 899.
 Ламэ (Lamé) 187.
 Ланденбург 751.
 Лаплас (Laplace) 140, 150, 383, 414, 430, 434, 596, 631, 888, 893.
 Лармор (Larmor) 83, 224, 243, 306, 627.
 Леви-Чивита (Levi-Civita) 133, 374, 525.
 Лежандр (Legendre) 144.
 Липшиц (Lipschitz) 173, 371.
 Лисем (Leathem) 67, 133.
 Лиувиль (Liouville) 617, 891.
 Лихтенштейн (Lichtenstein) 304, 881.
 Лодж (Lodge A.) 143, 404.
 Ломмель (Lommel) 484, 630.
 Лоренц (Lorentz) 653, 751, 858.
 Ляв (Love) 133, 440, 449, 475, 565, 627, 654, 656, 799, 904, 912.
 Ляпунов 448, 882.
 Макдональд (Macdonald) 385, 561, 653.
 Маклорен (Maclaurin) 386, 887.
 Максвелл (Maxwell) 42, 52, 94, 185, 300, 576, 720, 782.
 Маллок (Mallok) 737, 842.
 Маргулис (Margules) 701, 703.
 Маттиссен (Matthiessen L.) 894.
 Мах 879.
 Мейер (Meyer C.) 891.
 Мейер (Meyer O.) 811.
 Мейер (Meyer W.) 83.
 Мелер (Mehler) 171, 369.
 Мерриан (Merian) 551.
 Мизес (Mises) 866.
 Митчелл (Michell) 133, 523, 548, 732.
 Мортон (Morton W.) 113.
 Навье (Navier) 723.
 Нейман (Neumann C.) 168, 170.
 Нейман (Neumann F.) 146.
 Нетер (Noether F.) 766.
 Нильсен (Nielsen N.) 369.
 Никольсон (Nicholson J.) 653.
 Ньютон (Newton J.) 736.
 Обербек (Oberbeck) 759.
 Озеен (Oseen) 766, 769, 870.
 Опп (Opp) 850, 858.
 Остроградский 551.
 Перри (Perry) 143.
 Планк (Planck) 121.
 Покелс (Pockels) 623.
 Попов 498.
 Прандтль (Prandtl) 860, 866.
 Прудман (Proudman) 294, 349, 385, 407, 447.
 Пуазейль (Poiseuille) 720, 733, 839.
 Пуанкаре (Poincaré) 320, 365, 445, 653, 881, 897, 903, 905, 913, 918.
 Пуассон (Poisson) 34, 361, 371, 471, 481, 486, 492, 539, 617, 723.
 Раус (Routh) 243, 281, 390.
 Рейнольдс (Reynolds O.) 38, 43, 44, 479, 720, 730, 837, 839, 843, 852, 857.
 Рибчинский 752.
 Риман (Riemann) 74, 89, 350, 601, 904, 907, 910.
 Ритц (Ritz) 319.
 Розенхед (Rosenhead) 288, 292, 860.
 Рэлей (Rayleigh) 44, 58, 128, 171, 328, 346, 361, 371, 446, 478, 498, 521, 524, 529, 568, 585, 591, 597, 608, 623, 634, 639, 643, 653, 678, 739, 777, 821, 841, 847, 858, 861, 873, 879.

- Ренкин (Rankine) 85, 162, 526, 604, 608.
- Саутвелл (Southwell) 852.
- Свейн (Miss Swain L.) 341, 760.
- Севелл (Sewell) 829.
- Сен-Венан (Saint-Venant) 43, 114, 723.
- Сильвестер (Sylvester) 140.
- Симпсон (Simpson T.) 888.
- Синдж (Synge) 860.
- Скотт Расселл (Scott Russell) 528, 530, 585, 793.
- Сольборн 444.
- Стантон (Stanton) 44, 842, 859, 880.
- Стефан (Stefan) 160.
- Стирн (Stearn) 812.
- Стокс (Stokes G.) 33, 43, 48, 52, 115, 155, 161, 166, 257, 260, 309, 326, 359, 371, 467, 478, 494, 521, 558, 597, 606, 613, 636, 723, 736, 750, 811, 815.
- Стрейк (Struik) 525.
- Стюарт (Stuart F.) 314.
- Теразава (Terazawa K.) 493, 541, 739.
- Тёплер (Töpler) 136.
- Томсон (Thomson W.) 141, 187, 200, 233, 237, 243, 245, 250, 304, 307, 391, 452, 574, 585, 886, 903.
- Торричелли (Torricelli) 40.
- Тэйлор (Taylor G.) 119, 402, 610, 694, 739, 843, 862, 876.
- Тэт (Tait) 141, 200, 233, 237, 243, 391, 453, 886, 903.
- Уолтон (Walton) 280.
- Фэге (Fage) 859, 860.
- Файлон (Filon L.) 775.
- Факсен (Faxen) 751, 776.
- Феррел (Ferrel) 434.
- Фёппль (Föppl L) 280.
- Фойхт (Voigt) 168.
- Форслайк (Forsdyke) 306.
- Фосет (Miss Fawcett) 224, 229.
- Франклин (Franklin B.) 464.
- Фрезер (Frazer) 737.
- Фрост (Frost) 58.
- Фруд (Froude) 38, 477, 548.
- Хавелок (Havelock) 515, 519, 546, 548, 780.
- Хаф (Hough) 425, 437, 440, 546, 702, 789, 913.
- Хегге (Hegge) 872.
- Хевисайд (Heaviside) 263, 376.
- Хеле-Шоу (Hele Shaw) 111.
- Хидак (Hidak) 364.
- Хикс (Hicks W.) 162, 168, 197, 279, 304, 909.
- Хилл (Hill) 309.
- Цейлон (Zeilon) 871.
- Чаплыгин С. А. 117.
- Чапман (Chapman) 702.
- Чизотти (Cisotti) 120, 133, 512.
- Шарп (Sharpe) 858.
- Шварц (Schwarz) 104.
- Шверд (Schwerd) 633.
- Шлемильх (Schlömilch O.) 504.
- Штурм (Sturm) 595.
- Эверетт (Everett) 597.
- Эйлер (Euler) 15, 18.
- Экман (Ekman) 549, 839.
- Энке (Encke) 740.
- Эри (Airy) 326, 329, 336, 350, 430, 434, 460.
- Якоби (Jacobi) 150, 187, 891.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Бассейн круглый, 364, 409, 412.
— прямоугольный, 413, 551.
- Вектор соленоидальный 311.
- Вещество непрерывное 13.
— однородное 13.
- Вихрь 49, 252.
— винтовой 307.
— круговой 299, 301.
— прямолинейный 275.
— сферический 309.
- Возмущение безвихревое 290.
— начальное произвольное 324.
— постоянное 580.
— эллиптическое 291, 292.
- Волна атмосферная 678.
— в неоднородной жидкости 473.
— длинная 320, 322, 325, 558.
— звуковая 815.
— колебательная 532.
— конечной амплитуды 601.
— краевая 558.
— красная 560.
— на глубокой воде 481.
— — горизонтальной плоскости 576.
— — плоской поверхности 570.
- Волна одиночная 528, 531.
— плоская 594, 597.
— приливная 315.
— прогрессивная 314, 317, 328, 346.
— расходящаяся 369, 374.
— стоячая 457, 558.
— сферическая 611.
— установившаяся 525, 534, 604.
- Волны сферические симметричные 612.
- Вращение жидкости 45.
- Вязкость 703.
— турбулентная 843.
- Глубина критическая 442.
- Давление концентрированное 518.
— установившееся 498.
- Движение апериодическое 705.
— безвихревое 48, 50, 53, 67, 70, 76, 79, 136.
— безграничной жидкости 182.
— вертикальное 325.
— вихревое 251.
- Движение волновое 526.
— длинных волн 326.
— затухающее 802.
— ламинарное 49, 719, 739, 850.
— непрерывное 15.
— неустановившееся 739.
— обратимое 246.
— осредненное 854.
- Движение плоское 83.
— прерывное 133.
— стационарное 307.
— турбулентное 839, 854.
— установившееся 36, 213, 223, 328, 728, 736, 760.
— циклическое 82, 225.
- Детерминант косой 389.
- Диафрагма 69.
- Дивергенция 18, 31, 64.
- Диполь 78.
- Диск круглый тонкий 175, 183.
— эллиптический 190.
- Дно гофрированное 511.
- Дублет 78.
- Жидкость вязкая 716, 802.
— капельная 19, 40.
— несжимаемая 19.
— очень вязкая 790.
— сжимаемая 873.
- Завихрение равномерное 293.
- Закон адиабатический 607.
— Грина 347.
- Изменение движения внезапное 25.
- Импульс 202, 227, 271.
- Интеграл Френеля 483.
- Истечение газа 42.
- Источник 78.
— гармонический простой 374.
- Источник переменный 375.
- Канал переменного поперечного сечения 344, 347.
— постоянного поперечного сечения 337, 339, 340, 341, 348, 555.
— прямолинейный 401.
— эллиптический 364.
- Колебание вынужденное 318, 336, 364, 396, 407.

- Колебание вынужденное первого рода 425.
 — — второго рода 429.
 — — третьего рода 431.
 — гравитационное 563.
 — малое 315, 317, 386, 779.
 — нормальное 317, 319.
 — поперечное 555.
 — свободное 316, 317.
 — — первого класса 441.
 — — второго класса 441.
 — собственное 391.
 — цилиндра 662.
 — шара 638.
 — эллиптическое 317.
 Кольцо 893.
 — вихревое 302, 305, 306.
 Компонент вихря 252.
 — нормальный возмущающей силы 316.
 Компоненты скорости пульсаций 853.
 Контур кратно неприводимый 69.
 — простой неприводимый 69.
 Конформное отображение 90, 122.
 Координаты главные 388.
 — нормальные 316.
 — параболические 675.
 Коэффициент вязкости 719, 721.
 — — кинематический 720.
 — инерции 178, 316, 388.
 — сжатия 40.
 — трения скольжения 722.
 — турбулентного трения 743.
 — уплотнения 594.
 Коэффициенты устойчивости главные 316, 388.
 Кривая приводимая 54, 68.
 — эквипотенциальная 89.
 Кривые взаимно переводимые 54, 68.
 Крыло аэроплана 872.
 Линия вихревая 252.
 — тока 34, 89.
 Масса присоединенная 155.
 Маятник квадрантный 219.
 — шаровой 654, 809.
 Мера напряжения вихря 253.
 Метод Гамильтона 233.
 — Кулона 782.
 — обобщенных координат 233.
 — размерностей 864.
 — решения плоских гидрокинетических задач 87.
 — сферических функций 137.
 Модуль затухания 705.
 Мощность источника 78.
 Напряжение тангенциальное 13.
 Насадка Борда 123.
 Натяжение поверхностное 569.
 Нить вихревая 252, 277.
 Ньютонова скорость звука 596.
 Область аперифрактическая 58.
 — двусвязная 69.
 — п-связная 69.
 — односвязная 55, 69.
 — перифрактическая 58.
 — связная 68.
 Оболочка сферическая 152, 633, 803
 Ось растяжения 49.
 — дублета 78.
 — объемной сферической функции 140.
 — круговая системы вихревых колец 302.
 — системы вихрей 277.
 Отверстие эллиптическое 190.
 Отражение волн 640, 663.
 Пара вихрей 278.
 Парадокс Даламбера 858.
 Перегородка 69, 637.
 Пластина плоская 126, 128, 858.
 — согнутая 130.
 Поверхность пограничная неподвижная 20.
 — постоянного давления 120.
 Поверхность равного потенциала 34.
 — раздела 569.
 — разрыва 20.
 — сферическая 150, 163, 306.
 — цилиндрическая 88, 107, 111.
 Пограничный слой 865.
 Полость сферическая 153.
 полюс поверхностной сферической функции 140.
 Постоянная циклическая 72.
 — цилиндрическая 88, 107, 111.
 Пограничный слой 865.
 Полость сферическая 153.
 полюс поверхностной сферической функции 140.
 Постоянная циклическая 72.
 Потенциал гравитационный 383.
 — кинетический 234.
 — приливообразующих сил 425.
 — скоростей 32, 144, 265.
 Поток вдоль линии 50.
 — через кривую 83.
 — — поверхность 56, 261.
 Преобразование Вебера 29.
 — Клебша 312.
 Препятствие произвольное 650.
 — сферическое 640, 642, 829.

- Препятствие цилиндрическое 513, 515, 663, 668.
 Призма равносторонняя 114.
 Прилив высокий 352.
 — длинного периода 453.
 — Комбинационный 355.
 — лунный 338, 339, 341.
 — лунно-солнечный 430.
 — малый 445.
 — морской внезапный 445.
 Прилив полусуточный 454.
 — с большим возвышением волны 350.
 — солнечный 337.
 — суточный 454.
 Принцип энергии 37.
 Профиль крыла Жуковского 106.
 Пузырь сферический 152.
- Распределение давлений гармониче-
 ское 499.
 — — произвольное 500.
 — температуры вертикальное 684,
 688, 691.
 Распространение волн вертикальное
 687.
 Расширение объемное в данной точке
 18.
 Решетка 669, 673.
 Рябь 575.
 Ряд асимптотический 370.
 — гипергеометрический 141.
- Сектор круговой 363.
 Симметрия винтообразная 218.
 Система прямолинейных вихрей 289.
 Скорость волны 468.
 — групповая 477, 479.
 — критическая 838.
 — массовая 605.
 Слой вихревой 267.
 — воды кольцеобразный 363.
 — — круговой 358, 402.
 — — открытый 385.
 — — переменной глубины 365.
 Слой воды прямоугольный 357.
 — — сферический 378.
 — жидкости плоский горизонталь-
 ный 398.
 — криволинейный 135.
 — пограничный 865.
 Случай двух вихревых колец 305.
 — двух вихрей 277.
 Сопротивление волновое 519, 547.
 Сосуд сферический 802, 835.
 — эллипсоидальный 184, 258.
 Сток 78.
 Столб жидкости цилиндрический 588.
- Струя внутри покоящейся жидкости
 469.
 Сфероид приливный 451.
- Тело винтообразно изотропное 218.
 — вращения Кольцеобразное 228.
 — погруженное в неравномерный по-
 ток 248.
 — с отверстиями 225.
 Теорема Грина 62, 65, 75.
 — Кельвина 66.
 — Лагранжа 32.
 — Рэлея 320.
 — Торричелли 40.
 Теория атомов вихревая 311.
 — каналовая 336.
 — свободных линий тока 135.
 — смазки 730.
 Течения, расположенные друг над
 другом, 467, 472.
 Траектория вихря 280.
 Труба цилиндрическая круглая 722
 Трубка вихревая 252.
 — Пито 42.
 — тока 36, 56.
- Удар 25.
 Упругость объемная 19, 594.
 Уравнение бесселевых функций 168,
 170.
 — длинных волн 327.
 — зональных сферических функций
 141.
 — неразрывности 18, 19, 28, 187.
 — поверхностных сферических функ-
 ций 141.
 — энергии 22.
 Уравнения гиросtatической системы
 245.
 — движения 14, 17, 28, 31.
 — — вязкой жидкости 722, 746.
 — Лагранжа 234, 316.
 — Озеена линеаризированные 766.
 — системы вихревых линий 252.
 Условие несжимаемости 236.
 — стационарного движения 307, 309.
 Устойчивость, главные коэффициен-
 ты 898.
 — вековая или практическая 391.
 — движения 221, 448.
 — динамических систем 448.
 — обыкновенная или кинетическая
 391, 449.
 — океана 447.
- Форма бифуркации 898.
 — обтекаемая 864.
 — равновесия предельная 898.

- Формула Блазиуса 119.
 Функции Бесселя 168, 171, 661.
 — сферические поверхностные ортогональные 147.
 Функция аналитическая 89.
 — гармоническая секториальная 147.
 — — тессеральная 147.
 — диссипативная 711.
 — Ламэ 184.
 — многозначная 71.
 — однозначная 46.
 — присоединенная 146.
 — сферическая зональная 142, 145, 438.
 — — нулевого порядка 152.
 — — объемная 138, 171.
 — — первого порядка 154.
 — — поверхностная 138, 140, 146, 171.
 — тока 84, 157.
 — циклическая 46, 71, 92.
 — цилиндрическая 168.
 — Эйлера 142.
 — эллипсоидальная 175.
 Хвост 769.
 Центр реакции 233.
 — системы вихрей 277.
 Цилиндр круглый 99, 101, 105, 119, 120, 230, 280, 874.
 Цилиндр круговой 294, 812.
 — с произвольной формой сечения, 116, 119, 874.
 — эллиптический 108, 112, 113.
 Циркуляция вдоль замкнутой кривой 50.
 Частота круговая 317.
 Чистое растяжение 49.
 Члены гиростатические 711.
 — трения 711.
 Шар 154, 161, 163, 166, 237, 238, 654, 775.
 Широта геоцентрическая 425.
 Экран 669, 674.
 Эллипсоид 758, 775, 884.
 — вращения удлинённый 178, 179.
 — Дирихле 907.
 — Маклорена 886, 902, 906.
 — переменной формы 910.
 — с неравными осями 184, 186, 192.
 — сжатый или планетовидный 180, 183.
 — Якоби 890, 903.
 Энергия внутренняя 24.
 — поверхностная 569.
 — системы вихрей 271.
-

Опечатки

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
21	2 св.	$= \frac{1}{R} \frac{\partial F}{\partial t}$	$= - \frac{1}{R} \frac{\partial F}{\partial t}$
55	20 сн.	$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$	$v = - \frac{\partial \varphi}{\partial y}$
84	3 сн.	$w = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$	$u = - \frac{\partial \varphi}{\partial y}$
180	5 св.	$(1 - \mu)^{1/2}$	$(1 - \mu)^{2/2}$
213	1 сн.	Ωp	$\Omega' p$
214	14 св.	$\theta + \gamma y$	$u + \gamma y$
282	строки 6 и 7 снизу следует поменять местами		
317	1 сн.	Немцами для я	Немцами для я
368	2 св.	$\int \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$	$\int \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$
464	8 св.	$\frac{g}{k} \frac{e - e'}{e - e'}$	$\frac{g}{k} \frac{e - e'}{e - e'}$
470	8 св.	$\frac{\varphi + i\psi}{c} =$	$\frac{\varphi + i\psi}{c} =$
474	3 св.	$-\frac{\partial p'}{\partial y} = g e'$	$-\frac{\partial p'}{\partial y} = g e'$
493	17 сн.	$\omega^2 = \frac{g l^2}{4b}$	$\omega^2 = \frac{g l^2}{4b}$
515	9 сн.	$e^{-k(y+l) + ikx}$	$e^{-k(y+l) + ikx}$
529	1 сн.	стр ...	стр. 328.
654	3 сн.	$= c^2 \Delta \varphi$	$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi$
868	3 сн.	$\int_0^{\eta} u \frac{\partial u}{\partial x} dx$	$\int_0^{\eta} u \frac{\partial u}{\partial x} dy$