

где φ есть однозначный потенциал скоростей, который мы получаем в измененной области, а φ' обозначает потенциал скоростей ациклического движения, которое образуется во внешнем пространстве, когда каждому элементу δS оболочки, совпадающей по положению с первоначальной границей, мы сообщим надлежащую нормальную компоненту скорости $-\frac{\partial\varphi}{\partial n}$

Другой способ представления безвихревого движения, безразлично, будет ли оно циклическим или нет, будет описан в главе о вихревом движении.

На этом мы заканчиваем изучение теории безвихревого движения. Математически образованный читатель, без сомнения, заметит отсутствие некоторых важных звеньев в цепи наших заключений. Например, не было дано независимого от физических рассуждений доказательства существования функции φ , которая удовлетворяет уравнениям § 36 внутри произвольно данной односвязной области и принимает заданные значения на границе. В данном руководстве мы не приводим строгого доказательства соответствующих „теорем существования“. Чтобы получить обозрение литературы по этой части вопроса, читатель может обратиться к цитированным ниже авторам¹⁾.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

§ 59. Если компоненты скорости u, v суть функции только от x, y , в то время как w равно нулю, то движение происходит в плоскостях, параллельных плоскости xy , и оно одинаково во всех таких плоскостях. Исследование движения жидкости при этих предположениях характеризуется определенными аналитическими особенностями, и многие очень интересные проблемы могут быть решены при этом достаточно просто.

Так как все движение будет известно, если мы знаем его в плоскости $z=0$, то мы можем ограничить наше внимание только этой плоскостью. Точки и линии в этой плоскости могут всегда рассматриваться, соответственно, как следы прямых, параллельных оси z , или как следы цилиндрических поверхностей с образующими, параллельными оси z .

Под потоком (расходом) через некоторую кривую мы будем понимать объем жидкости, протекающей в единицу времени через ту часть цилиндрической поверхности, которая заключена между плоскостями

$$z=0, \quad z=1$$

и следом которой является указанная кривая.

¹⁾ Burkhardt H. und W. F. Meyer, Potentialtheorie, и Sommerfeld A., Randwerthaufgaben in der Theorie d. part. Diff.-Gleichungen, Encycl. d. math. Wiss., 2 (1900).

Пусть A, P будут какие-то две точки в плоскости xu . Поток через две произвольные кривые, соединяющие A, P , будет иметь всегда одно и то же значение, если обе кривые могут быть переведимы друг в друга, не выходя из области, наполненной движущейся жидкостью; ибо в противном случае в области, заключенной между двумя кривыми, создавалась бы или терялась некоторая масса. Если при этом точка A будет неподвижна, а P подвижна, то поток через произвольную кривую AP будет функцией положения точки P . Обозначим эту функцию через ψ ; выражаясь точнее, ψ будет обозначать поток через AP *справа налево* для наблюдателя, находящегося на кривой, который смотрит в направлении от A к P . Выражаясь математически, если l, m означают направляющие косинусы (направленной влево) нормали произвольного элемента δs кривой, то

$$\psi = \int_A^P (lu + mv) ds. \quad (1)$$

Если область, наполненная жидкостью, аперифрактична (см. § 39), то ψ должна быть непременно однозначной функцией; но в перифрактических областях значение ψ может зависеть от выбора пути AP . Однако для двумерного пространства понятия „перифрактичности“ и „многозначности“ означают одно и то же, так что свойства функции ψ для случая, когда она в пространстве, занятом движущейся жидкостью, многозначна, могут быть заимствованы из § 50, где мы обсуждали тот же самый вопрос в отношении функции ϕ . Когда области перифрактичны, тогда циклические постоянные функции ψ суть значения потока через те замкнутые кривые, которые образуют различные части внутренней границы.

Если переместить точку, от которой отсчитываем ψ , например, от A к B , то это скажется только в прибавлении постоянной к значению ψ , а именно значения потока через линию BA ; следовательно, ψ определяется только с точностью до аддитивной постоянной.

Если точка P движется таким образом, что значение ψ остается неизменным, то она описывает такую кривую, которая нигде не пересекается жидкостью, т. е. линию тока. Поэтому кривые $\psi = \text{const}$ суть линии тока, и ψ называется *функцией тока*.

Если переместить P параллельно оси y на бесконечно малый отрезок $PQ = \delta y$, то приращение ψ будет представлять поток справа налево через PQ , т. е.

$$\delta\psi = -u PQ,$$

или

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}. \quad (2)$$

Также, если переместить P параллельно оси x , получим

$$v = \frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (3)$$

Существование такой функции ψ , которая связана с u , v соотношениями (2) и (3), следует также из особой формы уравнения непрерывности в нашем случае, именно — из

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (4)$$

последнее есть аналитическое условие того, что $u dy - v dx$ есть полный дифференциал ¹⁾.

Вышеизложенные рассуждения имеют место как при вихревом, так и при безвихревом движении. Данные в § 30 формулы для компонент вихря имеют в этом случае вид

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}; \quad (5)$$

следовательно, в случае безвихревого движения будем иметь

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (6)$$

§ 60. В дальнейшем мы ограничимся случаем безвихревого движения, которое, как мы видели, характеризуется тем, что существует потенциал скоростей φ , связанный с u , v соотношениями

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad (1)$$

так как мы рассматриваем только движение несжимаемой жидкости, то φ должно удовлетворять уравнению неразрывности в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (2)$$

Теория функции φ , а также связь между ее свойствами и свойствами двумерной области, в которой имеет место безвихревое движение, может быть просто заимствована из соответствующих теорем прошлой главы для трехмерного пространства. Необходимые при этом изменения формулировок теорем или их доказательств будут большей частью иметь чисто формальный характер.

Например, и здесь мы будем иметь теорему, что среднее значение φ вдоль окружности круга будет равно ее значению в центре при условии, что круг может быть стянут в точку, оставаясь все время внутри области, занятой жидкостью.

Кроме того, если эта область простирается до бесконечности, будучи ограниченной изнутри одной или несколькими замкнутыми кривыми, и если скорость стремится к нулю в бесконечности, то значение φ будет стремиться там к некоторому постоянному при условии, что полный расход через внутренние границы равен нулю. Последняя оговорка здесь является существенной.

¹⁾ Функция ψ введена таким способом. *La g r a n g e*, *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1781 (*Oeuvres*, IV, 720). Кинематическое истолкование дано *Rankine*, *On Plane Water-Lines in Two Dimensions*, *Phil. Trans.*, 1864 (*Miscellaneous Scientific Papers*, London, 1881, p. 495).

Уравнение (2) имеет фундаментальное решение в виде $\varphi = C \ln r$, где r обозначает расстояние от некоторой фиксированной точки. Это решение представляет источник на плоскости, ибо, если мы возьмем

$$\varphi = -\frac{m}{2\pi} \ln r, \quad (3)$$

то поток наружу через окружность, охватывающую данную точку, будет

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r} 2\pi r = m. \quad (4)$$

Постоянное m , таким образом, представляет мощность, или напряжение источника. Мы в основном придем к тому же результату, если представим, что точечные источники, о которых была речь в § 56, распределены равномерно с линейной плотностью m вдоль оси z . Скорость в этом случае будет направлена по r и равна $\frac{m}{2\pi r}$, что согласуется с (3). Мы будем иметь здесь так называемый линейный источник (в трехмерном пространстве).

Для двойного источника или, как его иногда называют, дублета мы будем иметь

$$\varphi = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{\partial}{\partial s} (\ln r), \quad (5)$$

где символ $\frac{\partial}{\partial s}$ означает пространственное дифференцирование в направлении оси дублета. Если ϑ будет представлять угол между направлением возрастания r и этой осью, то имеем $\delta r = -\delta s \cos \vartheta$ и, следовательно,

$$\varphi = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos \vartheta}{r}. \quad (6)$$

Кроме того, мы можем установить ряд формул, аналогичных формулам § 58. В частности, соответственно формуле (12) § 58 мы будем иметь

$$\varphi_P = -\frac{1}{2\pi} \int (\varphi - \varphi') \frac{\partial}{\partial n} (\ln r) ds, \quad (7)$$

которая дает значение φ в какой-то области, выраженное через распределение дублетов вдоль границы. Эту формулу можно будет применять и к случаю, когда жидкость с внешней стороны неограничена при условии, что скорость стремится к нулю в бесконечности и что полный поток наружу равен нулю. Как и в § 58, функция φ' относится к области внутри внутренней границы и подчинена тому условию, что $\frac{\partial \varphi'}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ на этой границе. Следствия из этой формулы будут вскоре указаны (§ 72a).

§ 60a. Рассмотренные выше кинематические соотношения имеют свою полную аналогию и в теории электропроводности. В случае

равномерного плоского проводящего слоя мы имеем

$$\sigma f = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \sigma g = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad (1)$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

где (f , g) есть плотность тока, V — электрический потенциал, а σ есть удельное сопротивление материала. Если мы теперь положим

$$u = \sigma f, \quad v = \sigma g, \quad \varphi = V, \quad (3)$$

то написанные выше соотношения будут совпадать с соответствующими соотношениями гидродинамики. Это обстоятельство подсказывает практический метод решения плоских гидрокинетических задач. Проводящий слой может быть взят в виде тонкого слоя слабо проводящей жидкости (H_2SO_4), содержащейся в прямоугольном лотке, две противоположные стороны которого являются металлическими и сохраняют постоянную разность потенциалов, другие же стороны (и дно) представляют изоляторы. Эквипотенциальные линии, к которым ортогональны линии тока, электрически легко могут быть обнаружены. Этим способом могут быть получены практические решения задач об обтекании потоком какого-либо препятствия (представляемого в электрическом эксперименте в виде непроводящего диска), которые нелегко могут быть изучены аналитически ¹⁾.

Помимо этого, мы можем вместо (3) положить

$$u = -\sigma g, \quad v = \sigma f, \quad \psi = -V. \quad (4)$$

При этом гидродинамические соотношения будут выполняться, но линии тока теперь будут соответствовать линиям равного электрического потенциала и, следовательно, могут быть найдены непосредственно. Обтекаемый контур в этом случае должен представляться в виде диска, проводимость которого настолько значительно превышает проводимость окружающего слоя, что может считаться практически абсолютной. Эта аналогия допускает и дальнейшее приспособление, с помощью которого можно также представить циркуляцию. В самом деле, если (l , m) будут направляющие косинусы направленной наружу нормали к контуру препятствия, то циркуляция будет равна

$$\int (lv - mu) ds = \sigma \int (lf + mg) ds \quad (5)$$

и, следовательно, пропорциональна в электрической аналогии полному потоку электричества наружу. С этой целью диск соединяется

¹⁾ За подробностями эксперимента можно отослать к статье E. F. Relf, Phil. Mag. (6), XLVIII (1924). В качестве критерия пригодности метода может служить то, что фиг. 18 воспроизведена с исключительной точностью. Таким способом была определена циркуляция вокруг пластинки и сравнена с теорией.

с одной клеммой соответствующей батарее, а вторая клемма должна быть соединена с одной из проводящих стенок лотка.

§ 61. Пусть часть жидкости ограничена цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси z , и двумя перпендикулярными к оси z плоскостями, расстояние между которыми равно единице. Кинетическая энергия T этой части жидкости тогда напишется

$$2T = e \iint \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy = - e \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds, \quad (1)$$

где поверхностный интеграл распространяется по той части плоскости xy , которая вырезана цилиндрической поверхностью, а криволинейный интеграл распространяется по контуру этой части. Так как

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = - \frac{\partial \psi}{\partial s},$$

то формула (1) может быть написана следующим образом:

$$2T = e \int \varphi d\psi, \quad (2)$$

где интегрирование ведется по контуру.

Если мы подобным же образом как в § 46, подсчитаем энергию для области, простирающейся в бесконечность, то мы найдем, что ее значение будет бесконечно, за исключением случая, когда полный поток M во внешнее пространство равен нулю. В самом деле, если провести окружность большого радиуса r в качестве внешней границы рассматриваемой части плоскости xy , то увидим, что соответствующая часть интеграла на правой стороне формулы (1) растет безгранично вместе с r . Единственное исключение образует случай $M=0$, и здесь мы можем считать, что линейный интеграл в формуле (1) распространен только по внутреннему контуру.

Если цилиндрическая часть ограничивающей поверхности состоит из двух или многих отдельных частей, из которых одна заключает все остальные, то область будет многосвязной, и уравнение (1) потребует тогда исправления, которое может быть проведено в точности, как в § 55.

Конформные преобразования.

§ 62. Функции φ и ψ связаны соотношениями

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1)$$

Эти условия будут выполняться, если положить

$$\varphi + i\psi,$$

где i обозначает, как обычно, $\sqrt{-1}$, равным некоторой аналитической функции от $x + iy$:

$$\varphi + i\psi = f(x + iy). \quad (2)$$

В самом деле, тогда имеем

$$\frac{\partial}{\partial y} (\varphi + i\psi) = if'(x + iy) = i \frac{\partial}{\partial x} (\varphi + i\psi). \quad (3)$$

Если мы теперь приравняем здесь в отдельности действительные и мнимые части, то увидим, что уравнения (1) удовлетворяются.

Таким образом при произвольном предположении относительно вида функции (2) мы будем иметь возможный случай безвихревого движения. Кривые $\varphi = \text{const}$ суть эквипотенциальные кривые, а кривые $\psi = \text{const}$ представляют линии тока. Так как согласно (1) мы имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0,$$

то кривые этих обеих систем пересекаются под прямыми углами, что уже было ранее доказано. Так как уравнения (1) остаются неизменными, если мы напишем $-\psi$ вместо φ и φ вместо ψ , то мы можем, если пожелаем, кривые $\psi = \text{const}$ рассматривать как эквипотенциальные кривые, а кривые $\varphi = \text{const}$ как линии тока; следовательно, всякое предположение относительно вида функции (2) дает два возможных случая безвихревого движения.

Ради краткости мы будем в этой главе пользоваться обозначениями, употребляемыми в теории функций, и будем писать

$$z = x + iy, \quad (4)$$

$$w = \varphi + i\psi. \quad (5)$$

С современной точки зрения, основное свойство аналитической функции комплексного переменного состоит в том, что она обладает определенной производной по этой переменной ¹⁾. Если φ , ψ суть две любые функции от x и y , то каждому значению $x + iy$ должно соответствовать одно или несколько определенных значений $\varphi + i\psi$; отношение дифференциала этой функции к дифференциалу от $x + iy$

$$\frac{\delta \varphi + i \delta \psi}{\delta x + i \delta y} \quad \text{или} \quad \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \delta x + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \delta y}{\delta x + i \delta y}$$

зависит вообще от отношения $\delta x : \delta y$. Условие того, что первое отношение для всех значений последнего будет одно и то же, представится в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} = i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \quad (6)$$

что эквивалентно с формулами (1). Это свойство принималось Риманом в качестве определения аналитической функции комплексного переменного; это значит, что такая функция должна иметь для каждого данного значения переменного не только одно или несколько определенных значений, но также для каждого из этих значений и определенную производную. Преимущество этого определения состоит в том, что оно совершенно не зависит от существования аналитического выражения для функции.

¹⁾ См., например. Forsyth, Theory of Functions, изд. 3-е, Cambridge, 1918, гл. I, 2.

Если представлять комплексные величины z и w геометрически, следуя методу Аргана и Гаусса, то производную $\frac{dw}{dz}$ можно рассматривать как оператор, который преобразует бесконечно малый вектор δz в соответствующий вектор δw . И тогда из указанного выше свойства следует, что это отображение подобно в бесконечно малых частях.

Возьмем, например, две системы прямых линий в плоскости w :

$$\varphi = \text{const}, \quad \psi = \text{const};$$

пусть при этом каждая из постоянных пробегает значения некоторой арифметической прогрессии, причем обе прогрессии имеют одну и ту же бесконечно малую разность. Прямые этих обеих систем пересекают друг друга под прямыми углами и разбивают плоскость на бесконечно малые квадраты. Тогда в плоскости xy две соответствующие системы кривых

$$\varphi = \text{const}, \quad \psi = \text{const},$$

где постоянные имеют те же значения, что и раньше, пересекаются также под прямыми углами (что уже было доказано другим путем) и разбивают плоскость на бесконечно малые квадраты.

Обратно, если φ, ψ суть две любые функции от x, y такие, что обе системы кривых

$$\varphi = m\varepsilon, \quad \psi = n\varepsilon$$

где ε — бесконечно малая, а m, n — произвольно целые числа, разбивают плоскость на элементарные квадраты то из геометрических соображений следует

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \pm \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = \mp \frac{\partial y}{\partial \varphi}.$$

Если взять верхние знаки, то эти уравнения суть условия того, что $x + iy$ есть функция от $\varphi + i\psi$. Случай нижнего знака приводится к тому же случаю изменением знака у ψ . Уравнение (2) составляет, таким образом, полное решение задачи конформного отображения двух плоскостей друг на друга ¹⁾.

Подобие соответствующих бесконечно малых частей плоскости w и плоскости z не имеет места в точках, в которых производная $\frac{dw}{dz}$ равна нулю или бесконечности. Так как

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (7)$$

то в применении к гидродинамике соответствующие значения скорости в этом случае равны нулю или бесконечности.

Во всех физических применениях w должна быть однозначной функцией или, по крайней мере, циклической функцией z в смысле

¹⁾ Lagrange, Sur la construction des cartes géographiques, Nouv. Mém. de l'Académie de Berlin, 1779 (Oeuvres, IV, 636).

Относительно дальнейшей истории проблемы см. Forsyth, Theory of Functions, гл. XIX.

§ 50 в рассматриваемой области. Поэтому в случае многозначной функции область должна сводиться к части одного листа соответствующей римановой поверхности, внутри которой не должны встречаться точки разветвления.

§ 63. Мы можем теперь перейти к некоторым применениям вышеизложенного метода.

Сначала возьмем

$$w = Az^n,$$

где A действительно. Введя полярные координаты r, θ , получим

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= Ar^n \cos n\theta, \\ \psi &= Ar^n \sin n\theta. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Рассмотрим, в частности, следующие случаи.

1. Для $n = 1$ линии тока образуют систему прямых, параллельных оси x , а эквипотенциальные кривые представляют подобную же систему прямых, параллельных оси y . В этом случае любые две соответствующие фигуры в плоскости w и в плоскости z подобны — безразлично, будут ли фигуры бесконечно малыми или конечными.

2. Для $n = 2$ кривые $\varphi = \text{const}$ образуют систему равнобочных гипербол, для которых главными осями служат оси координат, а кривые $\psi = \text{const}$ представляют подобную же систему гипербол, для которых координатные оси являются асимптотами. Линии

$$\theta = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

суть части одной и той же линии тока $\psi = 0$; мы можем, следовательно, взять положительные части координатных осей x, y в качестве твердых границ и будем, таким образом, иметь случай, когда жидкость движется внутри угла, между двумя перпендикулярными друг другу стенками.

3. При $n = -1$ мы получаем две системы окружностей, которые касаются координатных осей в начале. Так как при этом

$$\varphi = \frac{A}{r} \cos \theta,$$

то скорость в начале обращается в бесконечность; мы должны поэтому предположить, что область, к которой мы применяем наши формулы, ограничена внутри замкнутой кривой.

4. Для $n = -2$ каждая из систем кривых состоит из двойной системы лемнискат. Оси обеих систем $\varphi = \text{const}$ совпадают с осями координат, а оси систем $\psi = \text{const}$ совпадают с биссектрисами координатных углов.

5. Выбирая соответственным образом значения n , можно получить случай безвихревого движения, при котором граница состоит из двух твердых наклонных под произвольным углом α стенок. Так как уравнение линий тока есть

$$r^n \sin n\theta = \text{const}, \quad (2)$$

то мы видим, что линии $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{n}$ суть части одной и той же линии тока. Если, следовательно, мы положим $n = \frac{\pi}{\alpha}$, то получим искомое решение

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= Ar^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos \frac{\pi\theta}{\alpha}, \\ \psi &= Ar^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin \frac{\pi\theta}{\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Компоненты скорости в направлении r и в перпендикулярном к нему направлении будут

$$\left. \begin{aligned} -A \frac{\pi}{\alpha} r^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \cos \frac{\pi\theta}{\alpha}, \\ A \frac{\pi}{\alpha} r^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \sin \frac{\pi\theta}{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

и, следовательно, будут нулями, конечными или бесконечными в начале, смотря по тому, будет ли α меньше, равно или больше, чем π .

§ 64. Рассмотрим теперь некоторые случаи циклических функций.

1. Допущение, что

$$w = -\mu \ln z, \quad (1)$$

где μ , действительно, дает

$$\varphi = -\mu \ln r, \quad \psi = -\mu\theta. \quad (2)$$

Скорость на расстоянии r от начала будет равна $\frac{\mu}{r}$; начало должно быть исключено с помощью описанной вокруг него замкнутой кривой.

Если мы возьмем лучи $\theta = \text{const}$ в качестве линий тока, то мы получим случай источника (двухмерного) мощности $2\pi\mu$ в начале координат (см. § 60).

Если взять окружности $r = \text{const}$ в качестве линий тока, то мы будем иметь случай § 27; движение будет теперь циклическим; циркуляция по всякой кривой, заключающей начало, равна $2\pi\mu$.

2. Примем теперь

$$w = -\mu \ln \frac{z-a}{z+a}. \quad (3)$$

Если мы обозначим через r_1 , r_2 длины отрезков, соединяющих некоторую точку плоскости xu с точками $(\pm a, 0)$, и через θ_1 , θ_2 углы, которые эти отрезки составляют с положительным направлением оси x , то будем иметь

$$z-a = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z+a = r_2 e^{i\theta_2};$$

отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= -\mu \ln \frac{r_1}{r_2}, \\ \psi &= -\mu (\theta_1 - \theta_2). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Кривые (фиг. 9) $\varphi = \text{const}$, $\psi = \text{const}$ образуют два пучка ортогональных друг к другу соосных окружностей¹⁾.

Кривые каждой из этих систем могут быть взяты в качестве эквипотенциальных кривых; кривые другой системы тогда будут представлять линии тока. В каждом из обоих случаев скорость в точках $(\pm a, 0)$ будет бесконечно большой. Если, следовательно, исключить эти точки с помощью замкнутых кривых вокруг них, то оставшаяся часть плоскости $xу$ образует трехсвязную область.

Если взять окружности $\theta_1 - \theta_2 = \text{const}$ в качестве линий тока, то мы будем иметь случай одного источника и одного стока равной мощности в точках $(\pm a, 0)$. Если a стремится к нулю, в то время как μa остается конечным, то этим реализуется допущение

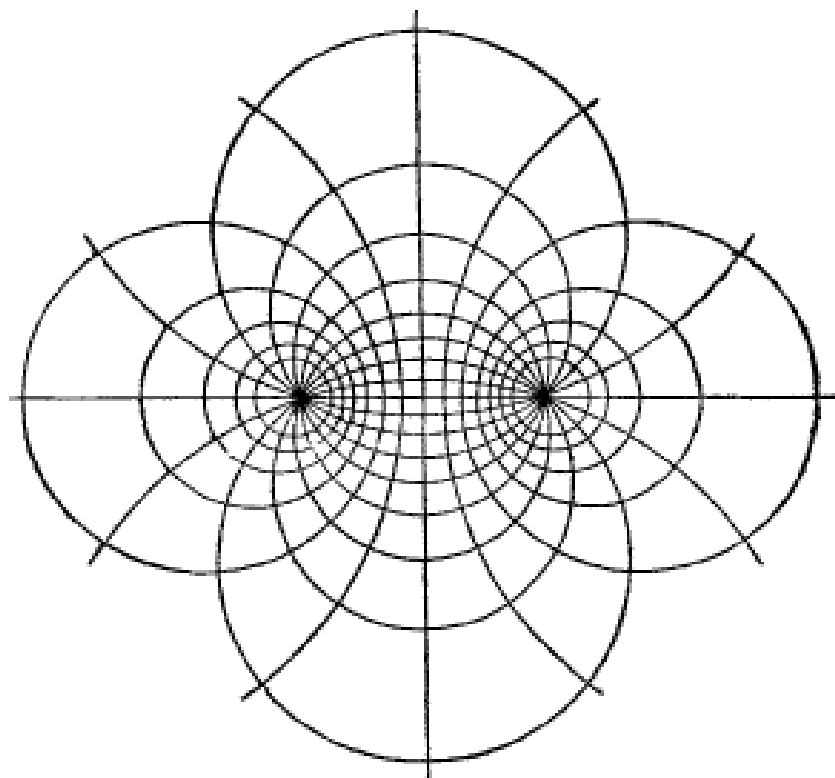
для формулы (5) § 65; последнее соответствует, следовательно, случаю линейного дублета в начале координат. Линии тока показаны (частью) на фиг. 13.

Если мы, с другой стороны, возьмем окружности

$$\frac{r_1}{r_2} = \text{const}$$

в качестве линий тока, то мы будем иметь случай циклического движения; циркуляция по замкнутой кривой, которая заключает только первую из указанных выше точек, равна $2\pi\mu$, циркуляция же по замкнутой кривой около второй точки равна $-2\pi\mu$; циркуляция же по замкнутой кривой, заключающей обе точки, равна нулю. Этот пример будет для нас представлять дополнительный интерес, когда в главе VII мы перейдем к изучению прямолинейного вихря.

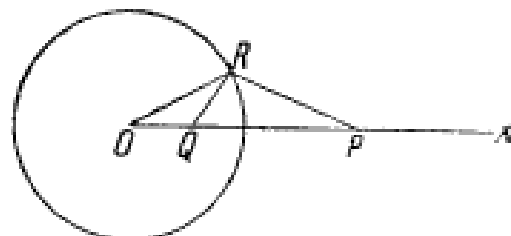
¹⁾ В смысле совпадения для одного семейства окружностей горизонтальных диаметров, а для другого — вертикальных диаметров. (Прим. ред.)



Фиг. 9.

3. С помощью простой комбинации источников мы можем представить течение около круглого цилиндра, обусловленное существованием источника в заданной внешней точке P .

Пусть Q есть инверсия точки P по отношению к окружности, и вообразим в точках P и Q одинаковые источники с мощностью μ , а в центре O сток $-\mu$. Тогда, обращаясь к примеру (2), получим для функции ψ в точке R на окружности (фиг. 10) значение



Фиг. 10.

$$\begin{aligned}\psi &= -\mu (\angle RPx + \angle RQx - \angle ROx) = \\ &= -\mu (\angle RPx + \angle ORQ) = \\ &= -\mu (\angle RPx + \angle RPQ) = -\pi\mu,\end{aligned}$$

т. е. ψ равно постоянному вдоль окружности¹⁾.

4. Потенциальная функция и функция тока, которые соответствуют ряду источников одинаковой мощности и находящихся на равном расстоянии в точках $(0, 0)$, $(0, \pm a)$, $(0, \pm 2a)$, ..., представляются следующими формулами:

$$w \sim \ln z + \ln(z - ia) + \ln(z + ia) + \ln(z - 2ia) + \ln(z + 2ia) + \dots, \quad (5)$$

или

$$w = C \ln \operatorname{sh} \frac{\pi z}{a}, \quad (6)$$

где C есть действительная величина. Это дает

$$\left. \begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{2} C \ln \frac{1}{2} \left(\operatorname{ch} \frac{2\pi x}{a} - \cos \frac{2\pi y}{a} \right), \\ \psi &= C \operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi y}{a}}{\operatorname{th} \frac{\pi x}{a}} \right],\end{aligned} \right\} \quad (7)$$

что согласуется с результатом, данным Максвеллом²⁾. Формулы эти имеют место также и для случая, когда источник находится в середине между двумя твердыми параллельными стенками, $y = \pm \frac{1}{2} a$.

Случай ряда двойных источников с осями, параллельными оси x , мы получим, если продифференцируем (6) по z . Опуская множитель, мы получим

$$w = C \operatorname{cth} \frac{\pi z}{a}, \quad (8)$$

или

$$\varphi = \frac{C \operatorname{sh} \frac{2\pi x}{a}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi x}{a} - \cos \frac{2\pi y}{a}}, \quad \psi = -\frac{C \sin \frac{2\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi x}{a} - \cos \frac{2\pi y}{a}}. \quad (9)$$

Если наложить на это равномерное движение, параллельное отрицательной оси x , то будем иметь

$$w = z + C \operatorname{cth} \frac{\pi z}{a}, \quad (10)$$

или

$$\varphi = x + \frac{C \operatorname{sh} \frac{2\pi x}{a}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi x}{a} - \cos \frac{2\pi y}{a}}, \quad \psi = y - \frac{C \sin \frac{2\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi x}{a} - \cos \frac{2\pi y}{a}}. \quad (11)$$

¹⁾ Kirchhoff, Pogg. Ann. LXIV (1845) (Ges. Abh. 1)

²⁾ Maxwell, Electricity and Magnetism, § 203.

Линия тока $\varphi=0$ состоит здесь частично из прямой $y=0$, частично же из овальной кривой, полуоси которой в направлении координатных осей даны уравнениями

$$\operatorname{sh}^2 \frac{\pi x}{a} = \frac{\pi C}{a}, \quad y \operatorname{tg} \frac{\pi y}{a} = C. \quad (12)$$

Если положить

$$C = \frac{\pi b^2}{a}, \quad (13)$$

где b мало по сравнению с a ¹⁾, то обе эти полуоси приближенно равны b . Мы получаем таким образом потенциальную функцию и функцию тока для жидкости, которая протекает через решетку, составленную из параллельных стержней с малым круглым сечением. Действительно, второе из уравнений (11) получает для малых значений x, y вид

$$\varphi = y \left(1 - \frac{b^2}{x^2 + y^2} \right). \quad (14)$$

§ 65. Если w есть функция от z , то из определения § 62 сейчас же следует, что z есть функция от w . Эта формулировка иногда бывает аналитически более удобной, чем первая.

Соотношения (1) § 62 заменяются тогда через

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \psi}. \quad (1)$$

Так как

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = -u + iv,$$

то

$$-\frac{dz}{dw} = \frac{1}{u - iv} = \frac{1}{q} \left(\frac{u}{q} + i \frac{v}{q} \right),$$

где q есть результирующая скорость в (x, y) . Если мы напишем

$$\zeta = -\frac{dz}{dw} \quad (2)$$

и будем представлять свойства функции ζ графически по способу, ранее разъясненному, то вектор, проведенный из начала координат к произвольной точке плоскости ζ , будет совпадать по направлению со скоростью в соответствующей точке плоскости z , а его абсолютная величина будет обратно пропорциональной значению этой скорости.

¹⁾ Приближенно круговая форма сохраняется, однако, для достаточно большой области значений C . Так, из (12) мы находим, если положить $C = \frac{1}{4} a$:

$$\frac{x}{a} = 0,254, \quad \frac{y}{a} = 0,250.$$

Оба диаметра приблизительно равны, хотя ширина овала равна половине интервала между линиями тока $y = \pm \frac{1}{2} a$.

Далее, так как $\frac{1}{q}$ есть абсолютное значение величины $\frac{dz}{dw}$, т. е. $\frac{\partial x}{\partial \varphi} + i \frac{\partial y}{\partial \varphi}$, то будем иметь

$$\frac{1}{q^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2. \quad (3)$$

Это можно, согласно (1), представить и в такой форме:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q^2} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 = \\ &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (4)$$

Эта последняя формула

$$\frac{1}{q^2} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \psi)} \quad (5)$$

выражает тот факт, что соответствующие элементарные площадки в плоскостях z и w относятся как квадрат абсолютной величины $\frac{dz}{dw}$ к единице.

§ 66. Важное значение имеют следующие примеры такого способа представления функций:

1) Возьмем

$$z = c \operatorname{ch} w, \quad (1)$$

или

$$\left. \begin{aligned} x &= c \operatorname{ch} \varphi \cos \psi, \\ y &= c \operatorname{sh} \varphi \sin \psi. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Кривые $\varphi = \operatorname{const}$ будут представлять эллипсы

$$\frac{x^2}{c^2 \operatorname{ch}^2 \varphi} + \frac{y^2}{c^2 \operatorname{sh}^2 \varphi} = 1, \quad (3)$$

а кривыми $\psi = \operatorname{const}$ будут гиперболы

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \psi} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \psi} = 1; \quad (4)$$

эти конические сечения имеют общие фокусы $(\pm c, 0)$. Обе системы таких кривых представлены на фиг. 11.

Так как в фокусах

$$\varphi = 0, \quad \psi = n\pi,$$

где n обозначает некоторое целое число, то мы видим согласно уравнению (2) предыдущего параграфа, что скорость там будет бесконечной. Если взять гиперболы в качестве линий тока, то часть оси x , которая лежит вне точек $(\pm c, 0)$, можно рассматривать как твердую стенку. Это соответствует течению несжимаемой жидкости

с одной стороны тонкой плоской разделяющей стенки на другую ее сторону через отверстие ширины $2c$; при этом скорость на ребрах будет бесконечно большой.

Если же взять эллипсы в качестве линий тока, то получим случай жидкости, циркулирующей вокруг эллиптического цилиндра или в пределе вокруг твердой пластинки, сечение которой есть отрезок, соединяющий фокусы $(\pm c, 0)$.

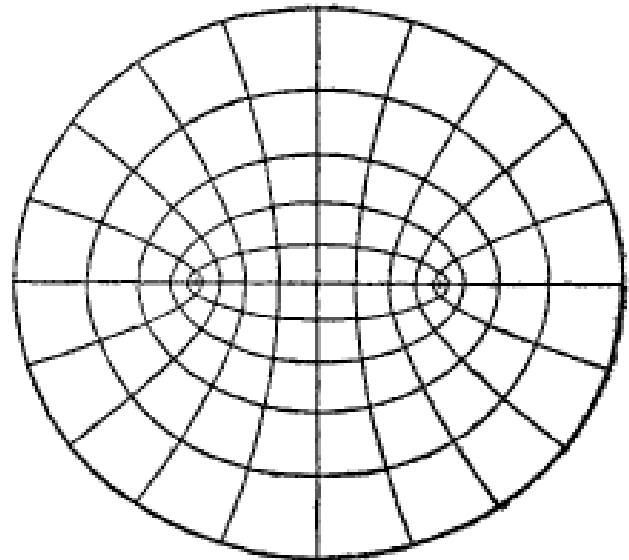
На бесконечно большом расстоянии от начала φ будет бесконечно велико, порядка $\ln r$, где r есть радиус-вектор; скорость же будет там бесконечно малой, порядка $\frac{1}{r}$.

2) Пусть

$$z = w + e^w, \quad (5)$$

или

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi + e^\varphi \cos \psi, \\ y &= \psi + e^\varphi \sin \psi. \end{aligned} \right\} (6)$$



Фиг. 11.

Линия тока $\psi = 0$ совпадает с осью x . Часть прямой $y = \pi$, лежащая между $x = \infty$ и $x = -1$, рассматриваемая как линия, вращающаяся в самое себя¹⁾, образует линию тока $\psi = \pi$, т. е. когда φ уменьшается от $+\infty$ через 0 до $-\infty$, то x растет от $-\infty$ до -1 и затем убывает опять до $-\infty$. Аналогичное имеет место и для линии тока $\psi = -\pi$.

Так как

$$\zeta = -\frac{dz}{dw} = -1 - e^\varphi \cos \psi - i e^\varphi \sin \psi,$$

то оказывается, что для больших отрицательных значений φ скорость направлена в сторону отрицательной оси x и равна единице, в то время как для больших положительных значений φ она будет равна нулю.

Вышеуказанные формулы представляют, таким образом, движение жидкости, втекающей из открытого пространства в канал, ограниченный двумя тонкими параллельными стенками. На краях стенок

$$\varphi = 0, \quad \psi = \pm \pi,$$

и, следовательно, $\zeta = 0$, т. е. скорость здесь будет бесконечно большой.

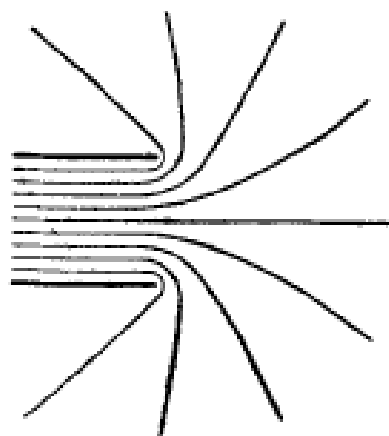
¹⁾ То-есть проходящая дважды, туда и обратно. *Прим. ред.*

Фиг. 12 показывает вид линий тока, проведенных, как во всех случаях этой главы, для равноотстоящих значений ψ ¹⁾.

Когда стенки не параллельны, а образуют угол $\pm \beta$, то соответствующая формула имеет вид

$$z = \frac{1-n}{n} (1 - e^{-nw}) + e^{(1-n)w}, \quad (7)$$

где $n = \frac{\beta}{\pi}$. Линии тока $\psi = \pm \pi$ идут по направлению стенок²⁾. Когда n обращается в нуль, то уравнение (7) совпадает с (5), в то время как для $n = \frac{1}{2}$ мы будем фактически иметь случай 1, показанный на фиг. 11.



Фиг. 12.

Если изменить знак w в (5), то направление движения станет обратным. Если мы далее наложим на это движение равномерное течение в отрицательном направлении оси x тем, что напишем $w - z$ вместо w , то мы получим³⁾

$$w = e^{z-w}, \quad \text{или} \quad z = w + \ln w. \quad (8)$$

Скорость между стенками на большом расстоянии влево будет теперь равна нулю, и мы будем иметь, следовательно, идеализированное представление трубки Пито (§ 24). Линии тока можно получить из уравнений

$$x = \varphi + \frac{1}{2} \ln (\varphi^2 + \psi^2), \quad y = \psi + \operatorname{arctg} \frac{\psi}{\varphi}. \quad (9)$$

§ 67. Как известно, всякая конечная, непрерывная и однозначная функция $f(z)$, первая производная которой конечна для всех точек области между двумя concentрическими окружностями, описанными около начала, может быть разложена в следующий ряд:

$$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \dots \quad (1)$$

Если же вышеизложенные условия выполнены для всех точек внутри круга с центром в начале, то в формуле (1) сохраняется только ряд по возрастающим степеням z ; если они выполнены для всех точек вне такого круга, то для представления функции достаточно ряда по убывающим степеням z со свободным членом, наконец, когда условия соблюдены для всех точек плоскости xu без исключения, тогда функция $f(z)$ не может быть ничем иным, кроме как постоянной A_0 .

¹⁾ Этот пример указан Helmholtz, Berl. Monatsber., 23 апреля 1868 (Phil. Mag., ноябрь 1868; Wiss. Abh., 1, 154).

²⁾ Harris R. A., On Two-Dimensional Fluid Motion through Spouts composed of two Plane Walls., Ann. of Math. (2), II (1901). Там рассмотрен случай $\beta = \frac{1}{4} \pi$.

³⁾ Rayleigh, Proc. Roy. Soc. A, XCI, 503 (1915) (Papers, VI, 329), где начерчено несколько линий тока.

Полагая

$$f(z) = \varphi + i\psi,$$

вводя полярные координаты и представляя, далее, комплексные постоянные A_n , B_n в виде $P_n + iQ_n$, $R_n + iS_n$, соответственно получим

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= P_0 + \sum_1^{\infty} r^n (P_n \cos n\theta - Q_n \sin n\theta) + \\ &\quad + \sum_1^{\infty} r^{-n} (R_n \cos n\theta + S_n \sin n\theta), \\ \psi &= Q_0 + \sum_1^{\infty} r^n (Q_n \cos n\theta + P_n \sin n\theta) + \\ &\quad + \sum_1^{\infty} r^{-n} (S_n \cos n\theta - R_n \sin n\theta). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Эти формулы удобны в тех задачах, когда значение φ или $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ задано на концентрических окружностях. Это заданное значение может быть разложено для всякого контура по теореме Фурье в ряд по синусам и косинусам кратного θ . Найденные таким образом ряды должны быть эквивалентны рядам, получающимся из формулы (2); тогда, приравнивая в отдельности коэффициенты при $\sin n\theta$ и при $\cos n\theta$, мы получим уравнения для определения P_n , Q_n , R_n , S_n .

§ 68. В качестве простого примера возьмем следующий случай: бесконечно длинный круглый цилиндр радиуса a движется со скоростью U перпендикулярно к своей оси в неограниченной жидкости, которая в бесконечности находится в покое.

Возьмем начало координат на оси цилиндра, а оси x и y в плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра, при этом пусть ось x совпадает с направлением скорости U . Так как мы мыслим движение образовавшимся из состояния покоя, то оно должно быть безвихревым и φ однозначной. Так как $\int \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds$, распространенный по контуру сечения цилиндра, равен нулю, то ψ также однозначна (§ 59), и, следовательно, формулы (2) имеют место. Более того, задача, согласно § 41, вполне определена, так как жидкость покоится в бесконечности и $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ для всякой точки внутренней границы жидкости задано с помощью формулы

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial r} = U \cos \theta \quad (3)$$

для $r = a$. Эти условия дают $P_n = 0$, $Q_n = 0$ и

$$U \cos \theta = \sum_1^{\infty} n a^{-n-1} (R_n \cos n\theta + S_n \sin n\theta).$$

Последнее уравнение может быть удовлетворено только тогда, когда $R_1 = Ua^2$, а все остальные коэффициенты равны нулю. Полное решение поэтому будет

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{Ua^2}{r} \cos \theta, \\ \psi &= -\frac{Ua^2}{r} \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Линии тока $\psi = \text{const.}$ суть окружности, показанные на фиг. 13. Сравнивая с формулой (6) § 60, мы видим, что эффект здесь тот же, что и от дублета в начале координат.

Кинетическая энергия жидкости подсчитывается по формуле (2) § 61

$$2T = \rho \int \varphi d\psi = \rho U^2 a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = M' U^2, \quad (5)$$

где $M' = \pi a^2 \rho$ есть масса жидкости, вытесняемой единицей длины цилиндра. Этот результат показывает, что весь эффект от присутствия жидкости может быть представлен прибавлением величины M' к массе цилиндра, отнесенной к единице его длины.

Следовательно, если при прямолинейном движении цилиндра на него действует внешняя сила X , отнесенная к единице длины, то уравнение энергии будет

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M U^2 + \frac{1}{2} M' U^2 \right) = X U,$$

или

$$(M + M') \frac{dU}{dt} = X, \quad (6)$$

где M обозначает собственную массу цилиндра. Если мы напишем это в виде

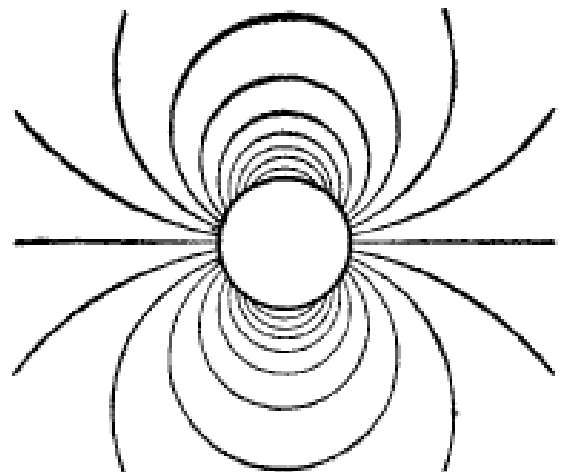
$$M \frac{dU}{dt} = X - M' \frac{dU}{dt},$$

то увидим, что давление жидкости равно силе $-M' \frac{dU}{dt}$ на единицу длины в направлении движения. Оно исчезает, когда U постоянно.

Этот результат можно проверить непосредственно вычислением. Согласно (6) § 20 давление определяется по формуле

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} q^2 + F(t), \quad (7)$$

где q есть скорость жидкости относительно оси движущегося цилиндра. При этом внешние силы, действующие на цилиндр, не принимаются во внимание.



Фиг. 13.

Действие их может быть подсчитано по законам гидростатики. Для $r = a$ имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a \frac{dU}{dt} \cos \theta, \quad q^2 = 4U^2 \sin^2 \theta; \quad (8)$$

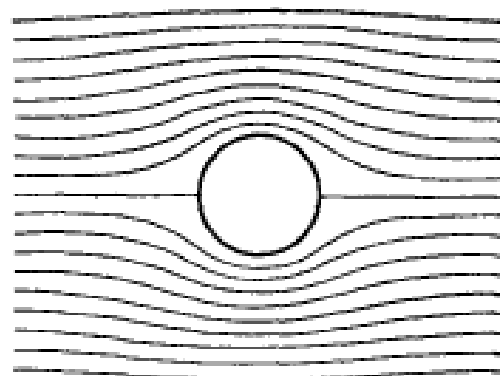
отсюда следует

$$p = \rho \left[a \frac{dU}{dt} \cos \theta - 2U^2 \sin^2 \theta + F(t) \right]. \quad (9)$$

Ясно, что направление результирующей силы параллельно начальному направлению $\theta = 0$; чтобы найти ее абсолютное значение для единицы длины цилиндра, умножим уравнение (9) на $-a d\theta \cos \theta$ и проинтегрируем по θ между пределами 0 и 2π ; результат будет равен $-M' \frac{dU}{dt}$, как и выше.

Если в рассмотренном выше примере сообщить жидкости и цилиндру скорость $-U$, то мы будем иметь случай обтекания потоком со скоростью U на бесконечности неподвижного цилиндра. Прибавляя $Ur \cos \theta$ к φ и соответственно $Ur \sin \theta$ к ψ , получим

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= U \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta, \\ \psi &= U \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$



Фиг. 14.

Линии тока показаны на фиг. 14. Если никакие внешние силы не действуют и скорость U постоянна, то результирующая сила, действующая на цилиндр, будет равна нулю, ср. § 92.

§ 69. Чтобы ряд (1) § 67 мог представлять любой случай непрерывного безвихревого движения между двумя concentрическими окружностями, к нему необходимо прибавить еще член

$$A \ln z. \quad (1)$$

Если $A = P + iQ$, то соответствующие выражения для φ и ψ будут

$$P \ln r - Q\theta \quad \text{и} \quad P\theta + Q \ln r. \quad (2)$$

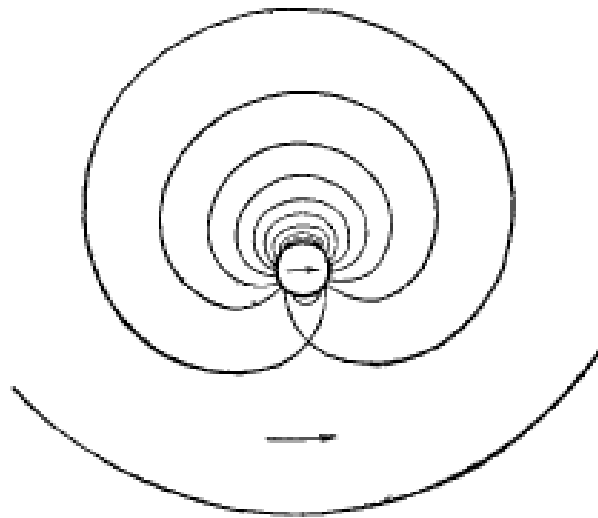
Смысл этих выражений очевиден: $2\pi P$ (циклическая константа ψ) означает поток через внутреннюю или внешнюю окружность, а $2\pi Q$ (циклическая константа φ) — циркуляцию по некоторой замкнутой кривой, заключающей начало.

Вернемся, например, к задаче прошлого параграфа и предположим, что имеет место — наряду с движением, вызванным цилиндром, — еще циркуляция вокруг цилиндра с циклической постоянной κ . Граничные условия будут удовлетворены, если предположить, что

$$\varphi = U \frac{a^2}{r} \cos \theta - \frac{\kappa}{2\pi} \theta. \quad (3)$$

Под влиянием циркуляции, наложенной на движение, вызванное цилиндром, скорость на одной стороне его увеличивается, а на другой уменьшается (возможно также наоборот). Следовательно, если цилиндр движется прямолинейно с постоянной скоростью, то на одной стороне произойдет уменьшение, а на другой увеличение давления, и для

поддержания движения необходимо приложить силу перпендикулярно к направлению движения.



Фиг. 15.

Фиг. 15 показывает линии тока. На некотором малом расстоянии от начала они приближаются по виду к concentрическим кругам, так как движение, вызванное цилиндром, здесь мало в сравнении с циклическим движением. Если, как в представленном случае,

$$U > \frac{\kappa}{2\pi a},$$

то точка, для которой скорость равна нулю, находится в жидкости. Система линий тока имеет во всех случаях одну и ту же конфигурацию;

единственно, на что влияет изменение значения U , есть изменение масштаба чертежа по отношению к диаметру цилиндра.

Если, как в § 68, задача будет сведена к задаче установившегося движения, то вместо (3) мы будем иметь

$$\varphi = U \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta - \frac{\kappa}{2\pi} \theta, \quad (4)$$

откуда для $r = a$

$$\frac{p}{\rho} = \text{const.} - \frac{1}{2} q^2 = \text{const.} - \frac{1}{2} \left(2U \sin \theta + \frac{\kappa}{2\pi a} \right)^2. \quad (5)$$

Результирующее давление на цилиндр, поэтому, равно

$$- \int_0^{2\pi} p \sin \theta a d\theta = + \kappa \rho U, \quad (6)$$

а его направление перпендикулярно к общему направлению потока. Этот результат независим от радиуса цилиндра. В дальнейшем мы покажем, что он имеет место для сечения любой формы¹⁾.

Чтобы вычислить давление жидкости на цилиндр для случая, когда цилиндр движется произвольным образом, необходимо взять подвижную систему координат, начало которой лежит в центре цилиндра и ось x которой совпадает с направлением скорости U . Если обозначить через χ угол между этим и некоторым неподвижным направлением, то получим уравнение (7) § 20 в виде

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} q^2 - \frac{dx}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}; \quad (7)$$

¹⁾ Этой важной теоремой мы обязаны Кутта и Жуковскому; см. Kutta, Sitzb. d. k. bayr. Akad. d. Wiss. (1910). Доказательство будет дано позднее (§ 72b).

q здесь означает скорость жидкости относительно движущейся координатной системы и вычисляется при помощи относительного потенциала скоростей $\varphi + Ur \cos \theta$, где φ дано формулой (3). Для $r = a$ находим

$$\frac{p}{\rho} = a \frac{dU}{dt} \cos \theta - \frac{1}{2} \left(2U \sin \theta + \frac{\kappa}{2\pi a} \right)^2 + aU \frac{d\chi}{dt} \sin \theta + \frac{\kappa}{2\pi} \frac{d\chi}{dt}. \quad (8)$$

Компоненты результирующего давления, параллельные соответственно осям x и y , будут, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} - \int_0^{2\pi} p \cos \theta a d\theta &= - M' \frac{dU}{dt}, \\ - \int_0^{2\pi} p \sin \theta a d\theta &= \kappa \rho U - M' U \frac{d\chi}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

причем, как и раньше, $M' = \pi \rho a^2$.

Если P и Q обозначают компоненты внешней силы, действующей на цилиндр, соответственно в направлении касательной и нормали к траектории, то уравнения движения цилиндра напишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} (M + M') \frac{dU}{dt} &= P, \\ (M + M') U \frac{d\chi}{dt} &= \kappa \rho U + Q. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Если внешние силы отсутствуют, то U постоянно; полагая при этом

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{U}{R},$$

где R есть радиус кривизны траектории, мы найдем

$$R = (M + M') \frac{U}{\kappa \rho}. \quad (11)$$

Траектория есть, следовательно, окружность, описываемая в направлении циклического движения¹⁾.

Если обозначим через ξ , η декартовы координаты точки на оси цилиндра относительно неподвижной системы координат, то уравнения (10) равнозначны со следующими:

$$\left. \begin{aligned} (M + M') \ddot{\xi} &= - \kappa \rho \dot{\eta} + X, \\ (M + M') \ddot{\eta} &= \kappa \rho \dot{\xi} + Y, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где X , Y суть компоненты внешних сил. Чтобы найти действие постоянной силы, мы можем положить

$$\left. \begin{aligned} X &= (M + M') g', \\ Y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

¹⁾ Rayleigh, On the Irregular Flight of a Tennis Ball, *Mess. of Math.* VII (1878) (Papers, I, 344); Greenhill, *Mess. of Math.*, IX, 113 (1880).

Решение тогда будет

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \alpha + c \cos (nt + \varepsilon), \\ \eta &= \beta + \frac{g'}{n} t + c \sin (nt + \varepsilon), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где α , β , c , ε суть произвольные постоянные, а

$$n = \frac{\kappa g}{M + M'}. \quad (15)$$

Это показывает, что траектория есть трохонда, которая описывается со средней скоростью $\frac{g'}{n}$ перпендикулярно к оси x^1). Следует отметить, что цилиндр вообще не совершает никакого поступательного движения в направлении внешней силы. В частном случае $c=0$ траектория есть прямая линия, перпендикулярная к силе. Эта задача будет служить иллюстрацией к теории „гиростатических систем“, о которой мы будем говорить в главе VI.

§ 70. Формула (1) § 67, исправленная прибавлением члена $A \ln z$, может быть легко обобщена так, что она будет пригодной и для всякого случая безвихревого движения, когда область имеет границами окружности, из которых одна заключает все другие. В самом деле, мы имеем для всякой отдельной внутренней границы ряд вида

$$A \ln (z - c) + \frac{A_1}{z - c} + \frac{A_2}{(z - c)^2} + \dots, \quad (1)$$

где $c = a + ib$ представляет центр окружности, а коэффициенты A , A_1 , A_2, \dots , вообще говоря, суть комплексные величины. Однако возникающая трудность определения коэффициентов таким образом, чтобы они удовлетворяли наперед заданным граничным условиям, настолько велика, что применимость этого метода очень ограничена.

На деле определение безвихревого движения жидкости при данных граничных условиях представляет задачу, точное решение которой прямым путем удастся только в очень ограниченном числе случаев. Когда границы состоят из твердых прямых стенок, тогда для решения достаточно метода преобразования, данного Шварцем²⁾ и Кристоффелем³⁾, который мы изложим в § 73. Большинство случаев, решения которых теперь известны, были получены обратным методом. А именно, берем какой-нибудь известный вид функции φ или ψ и исследуем, каким граничным условиям она может удовлетворить. Некоторые

¹⁾ Greenhill см. стр. 103.

²⁾ Schwarz, Ueber einige Abbildungsaufgaben, Crelle, LXX (Gesammelte Abhandlungen, Berlin, 1890, II, 65).

³⁾ Christoffel, Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie, Ann. di Mat. (2), I, 89. См. также Kirchhoff, Zur Theorie des Kondensators, Berl. Monatsber., 1877 (Ges. Abh., 101). Многие из решений, которые могут быть получены таким образом, имеют интересные применения в электростатике, теплопроводности и т. д. См., например, Thomson J. J., Recent Researches in Electricity and Magnetism, Oxford, 1893. Проблема криволинейных границ была исследована Leathem, Phil. Trans. A, CCXV, 439 (1915).

простые примеры такого способа решения были уже разобраны в § 63 и 64.

Если мы возьмем задачу об обтекании некоторой заданной неподвижной границы, решение которой известно, например

$$w = f(z),$$

и применим к ней конформное отображение

$$z = \chi(z'),$$

то преобразованные границы в плоскости z' будут опять являться линиями тока, и мы таким путем получим решение новой задачи. Иногда бывает целесообразно разложить преобразование на два или несколько отдельных последовательных преобразований.

Задача, которая этим путем привела к интересным преобразованиям, есть задача об обтекании круглого неподвижного цилиндра. Легко видеть из § 68 и 69, что общее решение такой задачи есть

$$w = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) - iV \left(z - \frac{a^2}{z} \right) + \frac{i\kappa}{2\pi} \ln \frac{z}{a}, \quad (2)$$

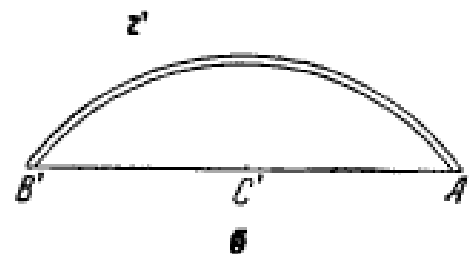
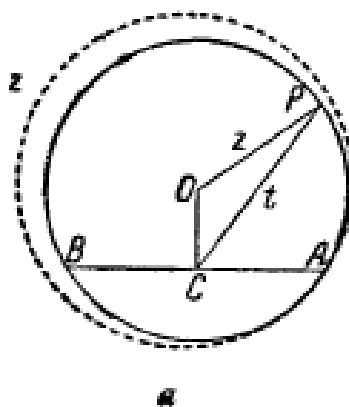
где $-U$, $-V$ суть компоненты скорости в бесконечности, а κ обозначает циркуляцию. Следуя указанному методу, положим

$$z = t + c, \quad (3)$$

где t есть новая комплексная переменная и $|c| < a$, и затем

$$z' = t + \frac{b^2}{t}. \quad (4)$$

Ясно, что бесконечно удаленные части плоскости z и плоскости z' тождественны, и поэтому общее направление течения в обоих случаях, а также величины циркуляции одинаковы. Постоянные c и b выбираются так, что точки $t = \pm b$ в плоскости t соответствуют двум произвольно выбранным точкам A и B в плоскости z .



Фиг. 16.

Пусть, например, AB есть хорда круга радиуса $r = a$, параллельная оси Ox . Пусть центральный угол, стягиваемый этой хордой в O , будет 2β . Из фиг. 16 мы найдем, что

$$c = -ia \cos \beta, \quad b = a \sin \beta. \quad (5)$$

Если P есть какая-то другая точка в плоскости z , то имеем

$$z = \overline{OP}; \quad t = \overline{CP}. \quad (6)$$

Из (4) следует, что

$$\frac{z' - 2b}{z' + 2b} = \left(\frac{t - b}{t + b} \right)^2. \quad (7)$$

Если мы теперь положим на один момент

$$t - b = r_1 e^{i\theta_1}, \quad t + b = r_2 e^{i\theta_2}, \quad z' - 2b = r'_1 e^{i\theta'_1}, \quad z' + 2b = r'_2 e^{i\theta'_2}, \quad (8)$$

то будем иметь

$$\theta'_1 - \theta'_2 = 2(\theta_1 - \theta_2). \quad (9)$$

Пусть теперь P пробегает окружность в плоскости z в положительном направлении, считая от A . Соответствующая точка P' в плоскости z' , согласно (9), будет двигаться таким образом, что угол $A'P'B'$ будет постоянен и равен 2β ; траекторией ее будет, следовательно, дуга круга. Когда P проходит через точку B , θ_2 возрастает на π ; следовательно, для того чтобы уравнение (9) имело место, θ'_2 должно возрасти на 2π . Когда таким образом P пройдет свой круг, то P' будет двигаться обратно вдоль дуги $B'A'$. Мы получаем таким образом случай, когда поток в произвольном направлении и с произвольной циркуляцией обтекает цилиндрическую пластинку, сечение которой есть дуга круга.

Так как

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\frac{dw}{dz}}{1 - \frac{b^2}{z^2}}, \quad (10)$$

то скорость в угловых точках A' , B' будет обращаться в бесконечность. Ее можно, однако, сделать конечной в одной точке, например B , выбирая соответственное значение циркуляции, а именно

$$\kappa = 4\pi a (U \cos \beta - V \sin \beta). \quad (11)$$

Течение в точке B' будет тогда даваться формулой

$$u - iv = (U \sin \beta + V \cos \beta) \sin \beta e^{2i\beta} \quad (12)$$

и будет направлено по касательной к дуге.

Если общая скорость потока равна W и составляет с направлением $B'A'$ угол α , то будем иметь

$$U = -W \cos \alpha, \quad V = -W \sin \alpha. \quad (13)$$

Тогда, если R есть радиус дуги,

$$a \sin \beta = R \sin 2\beta. \quad (14)$$

Подъемная сила, следовательно, будучи направленной под прямым углом к направлению потока, как будет показано в § 72b, равна

$$4\pi \rho W^2 R \frac{\sin 2\beta}{\sin \beta} \cos(\alpha + \beta). \quad (15)$$

Вместо круга с радиусом $r = a$ мы можем взять теперь окружность, касающуюся первой в точке A и охватывающую точку B (как показано на фиг. 16), и ее отображать. Таким путем мы получим профиль крыла Жуковского, для которого дуга круга будет служить скелетом¹⁾. Он будет иметь

¹⁾ О дальнейшем развитии и видоизменении метода можно отослать к книге Глауэрт Г., Основы теории крыльев и винта (перев. с англ.), ГНТИ, 1931.

заострение в точке, соответствующей точке A , и, следовательно, давать бесконечную скорость только в этой точке. Этой особенности мы можем избежать, выбирая соответственное значение для κ .

В следующих параграфах мы дадим простой метод получения решения в двух важных случаях плоского движения.

§ 71. Случай 1. Граница жидкости состоит из твердой цилиндрической поверхности, движущейся со скоростью U перпендикулярно к направлению ее длины.

Возьмем ось x в направлении скорости U ; обозначим через δs элемент кривой сечения поверхности плоскостью xu . Тогда для всех точек этой кривой сечения скорость жидкости в направлении нормали, которую мы обозначим через $\frac{\partial \psi}{\partial s}$, должна быть равна проекции скорости контура на эту нормаль, т. е. $-U \frac{dy}{ds}$. Интегрируя вдоль сечения, мы получим

$$\psi = -Uy + \text{const.} \quad (1)$$

Если мы сделаем какое-либо предположение относительно вида ψ , то это уравнение будет определять систему кривых, из которых каждая при ее движении, параллельном оси x , дает допустимую форму линии тока $\psi = \text{const.}$ ¹⁾. Дадим несколько примеров.

1. Если возьмем ψ в форме $-Uy$, то условие (1) будет выполняться для всякого вида контура. Поэтому жидкость, заключенная в цилиндр произвольного вида, имеющий только поступательное движение, движется, как твердое тело. Если, кроме того, цилиндрическая область, занятая жидкостью, будет односвязной, то это движение будет представлять единственный возможный вид безвихревого движения в этом случае. Это следует также из § 40; ибо движение жидкости и твердого тела, как одной массы, удовлетворяет, очевидно, всем условиям и представляет, следовательно, единственное решение, которое допускает задача.

2. Пусть $\psi = \frac{A \sin \theta}{r}$; тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{A}{r} \sin \theta = -Ur \sin \theta + \text{const.} \quad (2)$$

В этой системе кривых содержится также и окружность радиуса a при условии, что $\frac{A}{a} = -Ua$.

Следовательно,

$$\psi = -\frac{Ua^2}{r} \sin \theta \quad (3)$$

изображает течение, которое образуется от движения круглого цилиндра в безграничной жидкости со скоростью U перпендикулярно к своей оси; это совпадает с § 68.

¹⁾ Ср. Rankine, см. сноску на стр. 85, там применяется метод получения кривых, подобных поперечному сечению кораблей.

3. Введем эллиптические координаты ξ, η , которые связаны с x, y соотношением

$$x + iy = c \operatorname{ch}(\xi_0 + i\eta), \quad (4)$$

или

$$x = c \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = c \operatorname{sh} \xi \sin \eta, \quad (5)$$

(ср. § 66), причем предполагается, что ξ изменяется от 0 до ∞ , а η — от 0 до 2π . Если мы теперь положим

$$\varphi + i\psi = Ce^{-(\xi+i\eta)}, \quad (6)$$

где C есть некоторая действительная постоянная, то будем иметь

$$\psi = -Ce^{-\xi} \sin \eta, \quad (7)$$

и уравнение (1) примет вид

$$Ce^{-\xi} \sin \eta = Uc \operatorname{sh} \xi \sin \eta + \operatorname{const.}$$

В этой системе кривых содержится эллипс, параметр которого ξ_0 определяется из уравнения

$$Ce^{-\xi_0} = Uc \operatorname{sh} \xi_0.$$

Если a, b суть полуоси эллипса, то

$$a = c \operatorname{ch} \xi_0, \quad b = c \operatorname{sh} \xi_0$$

и

$$C = \frac{Ubc}{a-b} = Ub \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, формула

$$\psi = -Ub \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\xi} \sin \eta \quad (8)$$

дает течение, которое образуется в безграничной жидкости, когда эллиптический цилиндр с полуосями a, b движется в ней параллельно своей большой оси со скоростью U .

Что действительно написанные выше формулы дают в бесконечности для скорости значение нуль, можно вывести из следующего рассуждения: для больших значений ξ величины δx и δy будут того же порядка, как $e^{\xi} \delta \xi$ или $e^{\xi} \delta \eta$, так что $\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}$ — того же порядка, как $e^{-2\xi}$, или, наконец, как $\frac{1}{r^2}$, где r обозначает расстояние какой-либо точки от оси цилиндра. В бесконечности ψ стремится к нулю как выражение $\frac{A \sin \theta}{r}$, так же, как и в случае дублета.

Если движение эллиптического цилиндра параллельно малой оси, то будем иметь следующую формулу:

$$\psi = Va \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\xi} \cos \eta. \quad (9)$$

Линии тока в каждом из этих случаев будут одинаковыми для всех софокусных эллиптических форм цилиндра, так что формулы будут иметь место и тогда, когда сечение сводится к отрезку, соединяющему оба фокуса. В этом случае формула (9) примет вид

$$\psi = Vc e^{-\xi} \cos \eta. \quad (10)$$

Это дает течение, которое вызывает бесконечно длинная пластинка ширины $2c$ в безграничной жидкости, при движении в ней в направлении, перпендикулярном к ее плоскости. Так как на острых краях пластинки скорость становится бесконечно большой, то это решение подлежит практически ограничению, указанному ранее в нескольких примерах ¹⁾.

Кинетическую энергию жидкости получим из формулы

$$2T = \rho \int \varphi d\psi = \rho C^2 e^{-2\xi_0} \int_0^{2\pi} \cos^2 \eta d\eta = \pi \rho b^2 U^2, \quad (11)$$

где b есть половина ширины цилиндра, измеренной перпендикулярно к направлению движения.

Если вокруг цилиндра имеет место циркуляция κ , то мы должны к указанным выше значениям ψ прибавить еще член $\frac{\kappa \xi}{2\pi}$. В случае пластинки можно так подобрать значение κ , что скорость на одном ребре — но не на обоих — будет конечной.

Если подобрать соответственно единицы длины и времени, то мы можем вместо (4) и (6) написать

$$x + iy = \operatorname{ch}(\xi + i\eta), \quad \varphi + i\psi = e^{-(\xi + i\eta)},$$

отсюда следует

$$x = \varphi \left(1 + \frac{1}{\varphi^2 + \psi^2} \right), \quad y = \psi \left(1 - \frac{1}{\varphi^2 + \psi^2} \right).$$

Эти формулы удобно применить для вычерчивания кривых $\varphi = \operatorname{const.}$, $\psi = \operatorname{const.}$, которые представлены на фиг. 17.

Соединяя вместе результаты формул (8) и (9), мы получим случай эллиптического цилиндра, имеющего поступательную скорость с компонентами U и V ,

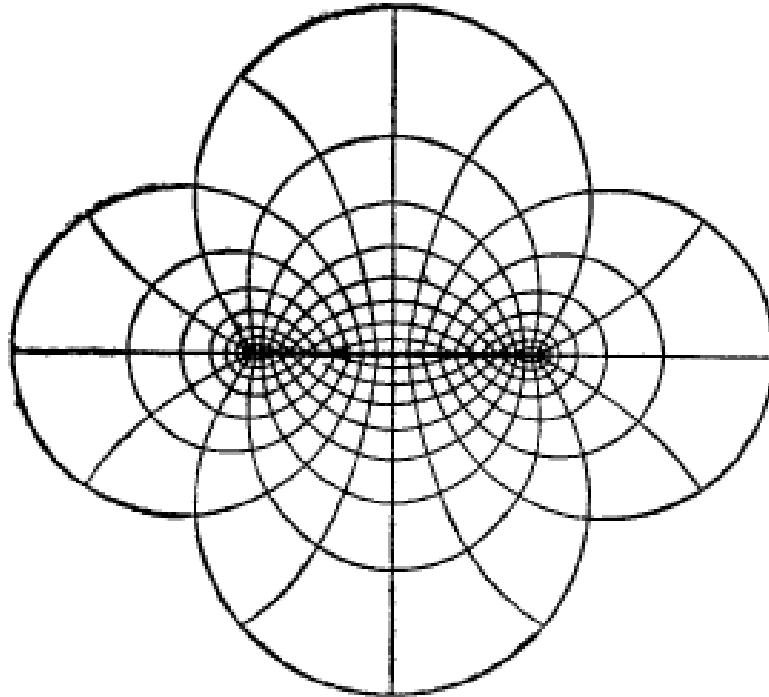
$$\psi = - \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\xi} (Ub \sin \eta - Va \cos \eta). \quad (12)$$

¹⁾ Это исследование дано Lamb, *Quart. Journ. of Math.*, XIV (1875). Результаты, эквивалентные (8) и (9), были получены другим путем Beltrami, *Sui principii fondamentali dell'idrodinamica razionale*, *Mem. dell'Accad. delle Scienze di Bologna*, 1873, стр. 394 (*Opere matematiche*, Milano, 1904, II, 202).

Чтобы найти движение относительно этого цилиндра, мы должны к этому выражению для ψ прибавить еще

$$Uy - Vx = C (U \operatorname{sh} \xi \sin \eta - V \operatorname{ch} \xi \cos \eta). \quad (13)$$

Например, функция тока при обтекании плоской пластинки, поставленной



Фиг. 17.

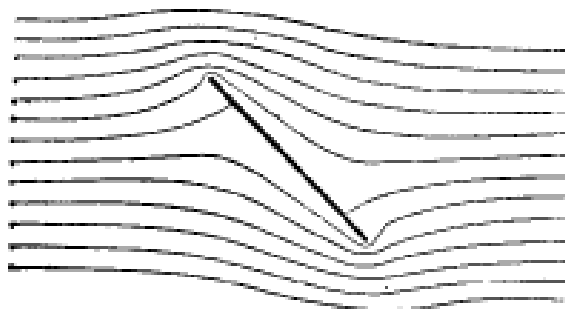
под углом в 45° к потоку, ребра которой лежат на $x = \pm c$, будет иметь вид

$$\psi = -\frac{1}{\sqrt{2}} q_0 c \operatorname{sh} \xi (\cos \eta - \sin \eta), \quad (14)$$

где q_0 обозначает скорость в бесконечности. Это можно непосредственно проверить, так как оно дает $\psi = 0$ для $\xi = 0$ и

$$\psi = -\frac{q_0}{\sqrt{2}} (x - y)$$

для $\xi = \infty$. Линии тока для этого случая показаны на фиг. 18 (для удобства повернутой на 45°). Они нам будут полезны для иллюстрации результатов главы VI.



Фиг. 18.

Если следовать по линии тока $\psi = 0$ от $\varphi = +\infty$ до $\varphi = -\infty$, то мы увидим, что она состоит в начале из гиперболической дуги $\eta = \frac{1}{4}\pi$, которая упирается в пластинку под прямым углом, затем она разделяется на две ветви, которые идут по поверхности пластинки и, наконец, соединяясь, они

образуют при продолжении дугу гиперболы $\eta = \frac{5}{4}\pi$. В точках, в которых дуги гиперболы упираются в пластинку, скорость равна нулю, и давление

образуют при продолжении дугу гиперболы $\eta = \frac{5}{4}\pi$. В точках, в которых дуги гиперболы упираются в пластинку, скорость равна нулю, и давление

следовательно, достигает максимума¹⁾. Ясно, что давление жидкости на пластинку сводится к паре сил, которая стремится поставить пластинку широкой стороной перпендикулярно к направлению потока; легко найти, что момент этой пары сил, отнесенной к единице длины, равен $\frac{1}{2} \pi \rho g_0^2 c^2$ ²⁾; ср. § 124.

§ 72. Случай II. Граница жидкости состоит из твердой цилиндрической поверхности, которая вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, параллельной образующей цилиндра.

Если мы возьмем начало на оси вращения, а оси x и y в плоскости, перпендикулярной к ней, то при тех же обозначениях, что и раньше, $\frac{\partial \psi}{\partial s}$ будет равно нормальной компоненте скорости границы, или

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = \omega r \frac{dr}{ds},$$

где r обозначает расстояние от начала. Интегрируя, мы находим для всех точек границы

$$\psi = \frac{1}{2} \omega r^2 + \text{const.} \quad (1)$$

Если мы возьмем для ψ какое-нибудь возможное выражение, то формула (1) даст нам уравнение ряда кривых, из которых каждая при вращении около начала создаст систему линий тока, определяемых через ψ .

Мы рассмотрим следующие примеры:

1. Возьмем

$$\psi = Ar^2 \cos 2\theta = A(x^2 - y^2), \quad (2)$$

тогда уравнение (1) принимает вид

$$\left(\frac{1}{2} \omega - A\right)x^2 + \left(\frac{1}{2} \omega + A\right)y^2 = C;$$

это дает для всякого данного значения A систему подобных конических сечений. Чтобы эта система содержала эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

необходимо

$$\left(\frac{1}{2} \omega - A\right)a^2 = \left(\frac{1}{2} \omega + A\right)b^2,$$

или

$$A = \frac{1}{2} \omega \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

¹⁾ Проф. H e l e S h a w сделал несколько прекрасных экспериментальных проверок форм линий тока для некоторых случаев стационарного безвихревого плоского движения, включая и те, которые представлены на фиг. 11 и 15. См. Trans. Inst. Nav. Arch. XL (1898). Теория его метода найдет место в гл. XI.

²⁾ Если общее направление потока составляет с пластинкой угол α , то момент пары будет равен $\frac{1}{2} \pi \rho g_0^2 c^2 \sin 2\alpha$. Cisotti, Ann. di Mat. (3), XIX,

Следовательно, формула

$$\psi = \frac{1}{2} \omega \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} (x^2 - y^2) \quad (3)$$

дает течение жидкости в полом цилиндре, сечение которого есть эллипс с полуосями a , b , в случае, когда цилиндр вращается с угловой скоростью ω вокруг своей продольной оси. Расположение линий тока $\psi = \text{const.}$ показывает фиг. 19.

Соответствующая формула для φ будет

$$\varphi = -\omega \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy. \quad (4)$$

Кинетическая энергия жидкости, отнесенная к единице длины цилиндра, дается формулой

$$2T = \rho \iint \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy = \frac{1}{4} \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2} \omega^2 \pi \rho a b. \quad (5)$$

Это значение меньше, чем то, которое получится, если вращать жидкость вместе с ограничивающей ее поверхностью, как твердую массу; при этом первое значение относится ко второму как

$$\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)^2$$

к единице. Мы имеем здесь пример к доказанной в § 45 теореме о минимуме Кельвина.

2. Вводя эллиптические координаты так же, как в § 71, (3) мы положим

$$\varphi + i\psi = C i e^{-2(\xi + i\eta)}. \quad (6)$$

Так как при этом будет иметь место равенство

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2} c^2 (\text{ch } 2\xi + \cos 2\eta),$$

то уравнение (1) принимает вид

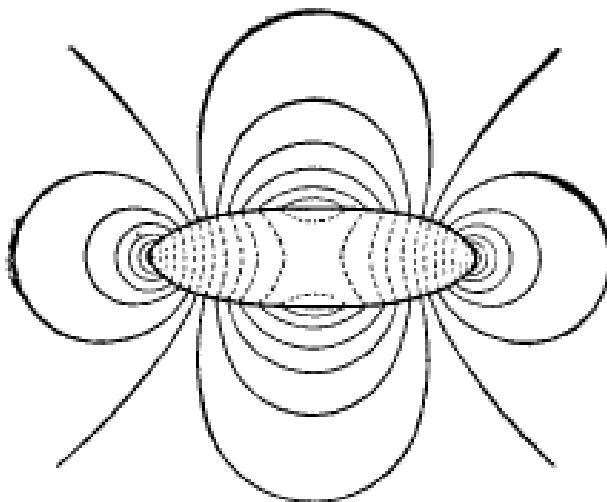
$$C e^{-2\xi} \cos 2\eta - \frac{1}{4} \omega c^2 (\text{ch } 2\xi + \cos 2\eta) = \text{const.}$$

Эта система кривых содержит эллипс с параметром ξ_0 , когда

$$C e^{-2\xi_0} - \frac{1}{4} \omega c^2 = 0,$$

или, если ввести данные ранее значения a , b , когда

$$C = \frac{1}{4} \omega (a + b)^2,$$



Фиг. 19.

так что

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \frac{1}{4} \omega (a+b)^2 e^{-2\xi} \cos 2\eta, \\ \varphi &= \frac{1}{4} \omega (a+b)^2 e^{-2\xi} \sin 2\eta. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

На большом расстоянии от начала скорость здесь будет величиной порядка $\frac{1}{r^2}$.

Вышенаписанные формулы дают, таким образом, течение безграничной жидкости, которая, будучи первоначально в покое, приведена в движение вращением эллиптического цилиндра вокруг его оси с угловой скоростью ω ¹⁾. Фиг. 16 показывает линии тока как внутри, так и вне твердого цилиндрического сосуда, вращающегося около своей оси.

Кинетическая энергия внешней части жидкости равна

$$2T = \frac{1}{8} \pi \rho c^4 \omega^2. \quad (8)$$

Замечательно, что для всех цилиндров, сечения которых представляют софокусные эллипсы, она одинакова.

Комбинируя эти результаты с результатами § 60 и 71, найдем следующее: если, во-первых, эллиптический цилиндр движется поступательно, причем его компоненты скорости, параллельные главным осям его сечения, будут U и V , если, во-вторых, он вращается с угловой скоростью ω и если, далее, жидкость, свободная от вихрей, циркулирует вокруг цилиндра, при этом циклическая постоянная есть κ , то функция тока относительно названных осей будет выражаться в виде

$$\psi = -\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} e^{-\xi} (Ub \sin \eta - Va \cos \eta) + \frac{1}{4} \omega (a+b)^2 e^{-2\xi} \cos 2\eta + \frac{\kappa}{2\pi} \xi. \quad (9)$$

Траектории, описываемые частицами жидкости, которые, конечно, имеют вид, отличный от линий тока, для нескольких разобранных случаев были изучены Мортон²⁾, и они очень интересны. Частный случай круглого цилиндра исследован Максвеллом (§ 68)³⁾.

3. Предположим, что

$$\psi = Ar^2 \cos 3\theta = A(x^2 - 3xy^2).$$

Уравнение (1) для точек контура границы тогда будет

$$A(x^2 - 3xy^2) - \frac{1}{2} \omega (x^2 + y^2) = C. \quad (10)$$

¹⁾ Lamb, Quart. Journ. Math., XIV (1875); см. также Beltrami, см. сноску на стр. 109.

²⁾ Morton W. B., Proc. Roy. Soc., A, LXXXIX, 106 (1913).

³⁾ Maxwell, Proc. Lond. Math. Soc., III (1870) (Papers, II, 208).

Мы можем выбрать постоянные таким образом, что прямая $x=a$ составит часть контура. Условия для этого таковы:

$$Aa^3 - \frac{1}{2} \omega a^2 = C, \quad 3Aa + \frac{1}{2} \omega = 0.$$

Подставляя в (10) найденные отсюда значения A , C , мы получим

$$x^3 - a^3 - 3xy^2 + 3a(x^2 - a^2 + y^2) = 0.$$

Разделив это уравнение на $x-a$, будем иметь

$$x^2 + 4ax + 4a^2 = 3y^2,$$

или

$$x + 2a = \pm \sqrt{3} y.$$

Остальная часть контура состоит, таким образом, из двух прямых линий, которые проходят через точку $(-2a, 0)$ и составляют с осью x угол в 30° .

Уравнение (10) представляет, следовательно, течение жидкости, содержащейся в сосуде в форме равносторонней призмы, которая вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, параллельной ее образующей и проходящей через центр ее сечения; мы будем иметь здесь

$$\psi = -\frac{1}{6} \frac{\omega}{a} r^2 \cos 3\theta, \quad \varphi = \frac{1}{6} \frac{\omega}{a} r^2 \sin 3\theta, \quad (11)$$

где $2\sqrt{3}a$ есть длина одного ребра основания призмы¹⁾.

4. Для случая, когда жидкость заключена во вращающийся цилиндр, сечение которого есть сектор круга радиуса a с углом $2a$, а ось вращения проходит через центр круга, мы можем принять

$$\psi = \frac{1}{2} \omega r^2 \frac{\cos 2\theta}{\cos 2a} + \sum A_{2n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^{(2n+1) \frac{\pi}{2a}} \cos (2n+1) \frac{\pi\theta}{2a}, \quad (12)$$

причем отсчет угла производится от биссектрисы угла сектора. В самом деле, это выражение нам дает

$$\psi = \frac{1}{2} \omega r^2$$

для $\theta = \pm a$, а постоянные A_{2n+1} могут быть определены по методу Фурье, так что для $r=a$ будет

$$\psi = \frac{1}{2} \omega a^2.$$

Мы найдем этим способом

$$A_{2n+1} = (-1)^{n+1} \omega a^2 \left\{ \frac{1}{(2n+1)\pi - 4a} - \frac{2}{(2n+1)\pi} + \frac{1}{(2n+1)\pi + 4a} \right\}. \quad (13)$$

¹⁾ Задача движения жидкости во вращающемся цилиндрическом сосуде до известной степени математически тождественна с задачей о кручении призмы постоянного сечения. Примеры 1 и 3 суть только применение двух решений этой задачи, предложенных Сен-Венаном; см. *Thompson and Tait* § 704 и далее.

Соответствующее выражение для φ будет

$$\varphi = -\frac{1}{2} \omega r^2 \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\alpha} - \sum A_{2n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^{(2n+1) \frac{\pi}{2\alpha}} \sin (2n+1) \frac{\pi\theta}{2\alpha}. \quad (14)$$

Кинетическая энергия подсчитывается по формуле

$$2T = -\rho \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = -2\rho\omega \int_0^a \varphi_a r dr, \quad (15)$$

где φ_a есть значение φ для $\theta = \alpha$; значение $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ на круглой части контура равно нулю¹⁾.

Случай полукруга $\alpha = \frac{1}{2} \pi$ будет иметь значение для нас впоследствии. Для этого случая будем иметь

$$A_{2n+1} = (-1)^{n+1} \frac{\omega a^2}{\pi} \left\{ \frac{1}{2n-1} - \frac{2}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} \right\} \quad (16)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^a \varphi_a r dr &= \frac{\omega a^4}{\pi} \sum \frac{1}{2n+3} \left\{ \frac{1}{2n-1} - \frac{2}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} \right\} = \\ &= -\frac{\omega a^4}{\pi} \left(2 - \frac{\pi^2}{8} \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует²⁾

$$2T = \frac{1}{2} \rho \omega^2 a^4 \left(\frac{8}{\pi^2} - \frac{1}{2} \right) = 0,3106 a^2 \cdot \frac{1}{2} \rho \omega^2 a^2. \quad (17)$$

Эта величина меньше, чем соответствующая величина живой силы для случая, если бы жидкость затвердела; она относится к последней, как 0,6212 к единице; ср. § 45.

§ 72a. Мы видели в нескольких случаях, что когда цилиндр имеет поступательное движение в безграничной жидкости, то он на большом расстоянии создает тот же эффект, что и дублет. Общая формула, выражающая это обстоятельство, может быть выражена через некоторые постоянные, которые входят в выражение кинетической энергии жидкости³⁾.

Положим

$$\varphi = U\varphi_1 + V\varphi_2, \quad (1)$$

где (U, V) есть скорость цилиндра, функции φ_1 и φ_2 определяются из тех условий, что всюду во внешней части области они удовлетворяют уравне-

¹⁾ Эта задача решена впервые Stokes, On the Critical Values of the Sums of Periodic Series, Cambr. Trans., VIII (1874) (Papers, I, 305); см. также Hick, Mess. of Math., VIII, 42 (1878); Greenhill, *ibid.*, VIII, 89; X, 83.

²⁾ Greenhill, см. сноску¹⁾.

³⁾ См. Proc. Roy. Soc. A, CXI, 14 (1926) и ниже § 300.

ниям $\nabla^2 \varphi_1 = 0$, $\nabla^2 \varphi_2 = 0$, в бесконечности их частные производные обращаются в нуль, а на контуре цилиндра они удовлетворяют условиям

$$-\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = l, \quad -\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = m, \quad (2)$$

где (l, m) суть направляющие косинусы внешней нормали. В таком случае энергия жидкости будет подсчитываться в виде

$$\frac{2T}{\rho} = - \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = AU^2 + 2HUV + BV^2, \quad (3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= - \int \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} ds = \int l \varphi_1 ds, \\ B &= - \int \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} ds = \int m \varphi_2 ds, \\ H &= - \int \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} ds = - \int \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} ds = \int m \varphi_1 ds = \int l \varphi_2 ds. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Два выражения H равны между собой в силу теоремы Грина для плоскости. Сравнить с § 121, где будет рассматриваться общий случай в трехмерном пространстве.

Обращаясь к формуле (7) § 60, допустим, что цилиндр с произвольной формой сечения движется с единичной скоростью параллельно оси x . Беря начало внутри контура и записывая

$$r^2 = (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 = r_0^2 - 2(xx_0 + yy_0) + \dots, \quad (5)$$

где (x_0, y_0) представляет удаленную точку, в которой требуется определить φ , а (x, y) — точку контура, тогда мы будем иметь

$$\ln r = \ln r_0 - \frac{xx_0 + yy_0}{r_0^2} + \dots \quad (6)$$

и приближенно

$$\frac{\partial}{\partial n} (\ln r) = - \frac{l x_0 + m y_0}{r_0^2}.$$

Полагая в указанной формуле (7) § 60

$$\varphi = \varphi_1, \quad \varphi' = -x, \quad (7)$$

мы получим

$$2\pi \varphi_P = \frac{(A + Q)x_0 + Hy_0}{r_0^2}, \quad (8)$$

где A и H определяются формулами (4), а

$$Q = \int lx ds, \quad (9)$$

т. е. Q обозначает площадь сечения цилиндра.

Течение на большом расстоянии, следовательно, есть такое, которое создается дублетом, но только ось дублета, вообще говоря, не совпадает с направлением движения цилиндра.

Вполне очевидно и обобщение формулы (8). Если цилиндр имеет скорость (U, V) , то получим

$$2\pi r_0^2 \varphi_P = \{ (A + Q)U + HV \} x_0 + \{ HU + (B + Q)V \} y_0. \quad (10)$$

Через комплексные переменные w и z мы можем представить это в виде

$$w = \frac{\alpha + i\beta}{z_0}, \quad (11)$$

при условии, что

$$2\pi\alpha = (A + Q)U + HV, \quad 2\pi\beta = HU + (B + Q)V. \quad (12)$$

Например, для эллиптического сечения, сравнивая формулу (3) с (11) § 71, мы имеем $A = \pi b^2$, $B = \pi a^2$, $Q = \pi ab$. Следовательно, будем иметь

$$\varphi_P = \frac{(a+b)(bUx_0 + aVy_0)}{2r_0^2}. \quad (13)$$

§ 72b. Гидродинамические силы на неподвижный цилиндр, вызываемые стационарным безвихревым движением окружающей жидкости, были ранее вычислены в одном или двух случаях. Общий метод, пригодный всякий раз, когда известен вид функции $w = \varphi + i\psi$ для движения жидкости, был указан Блазиусом ¹⁾.

Давления на контур вообще могут быть приведены к силе (X, Y) , приложенной в начале, и паре с моментом N . Если θ есть угол, который образует скорость q с осью x , то мы имеем

$$Y + iX = -\frac{1}{2} \rho \int q^2 (\cos \theta - i \sin \theta) ds, \quad (1)$$

где интеграл распространяется по контуру цилиндра. Эта формула может быть представлена в виде

$$Y + iX = -\frac{1}{2} \rho \int (qe^{-i\theta})^2 e^{i\theta} ds = -\frac{1}{2} \rho \int \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz, \quad (2)$$

откуда можно определить X и Y .

Кроме того, если ϑ будет представлять угол, который образует элемент ds контура с радиусом-вектором, то будем иметь

$$N = \int pr \cos \vartheta ds = \int pr dr = -\frac{1}{2} \rho \int (u^2 + v^2)(x dx + y dy). \quad (3)$$

Но вдоль линии тока мы имеем $v dx = u dy$, следовательно,

$$(u - iv)^2 (dx + i dy) = (u^2 + v^2)(dx - i dy),$$

и

$$(u - iv)^2 (x + iy)(dx + i dy) = (u^2 + v^2) \{ x dx + y dy + i(y dx - x dy) \}.$$

Таким образом N может быть представлено в виде действительной части от интеграла

$$-\frac{\rho}{2} \int \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 z dz. \quad (4)$$

¹⁾ Blasius, Funktiontheoretische Methoden in der Hydrodynamik, Zeitschr. f. Math. u. Phys., LVIII (1907).

Независимо от Блазиуса этот общий метод был указан Чаплыгиным С. А. в том же году в Матем. сб., т. XXVIII. Прим. ред.

В случае какого-нибудь цилиндра, погруженного в равномерный поток с циркуляцией, значение функции w на большом расстоянии стремится к виду

$$w = A + Bz + C \ln z. \quad (5)$$

Так как в области, занятой жидкостью, подинтегральное выражение в формуле (2) особенностей не имеет, то сам интеграл может быть заменен через интеграл по бесконечно большому контуру, по отношению к которому бесконечно удаленная точка будет внутренней точкой. В таком случае будем иметь

$$\int \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz = \int \left(B^2 + \frac{2BC}{z} + \frac{C^2}{z^2} \right) dz = 2BC \int \frac{dz}{z} = 4\pi i BC. \quad (6)$$

Если поток в бесконечности имеет скорость (U, V) , и κ означает циркуляцию, то получим

$$B = -(U - iV), \quad C = -\frac{i\kappa}{2\pi}. \quad (7)$$

А тогда имеем формулы

$$X = \kappa \rho V, \quad Y = -\kappa \rho U, \quad (8)$$

которые обобщают результат, полученный в § 69 для частного случая кругового сечения.

Для вычисления момента N выражение (5) должно быть продолжено еще на одну степень. Представляя w в виде

$$w = A + Bz + C \ln z + \frac{D}{z}, \quad (9)$$

мы будем иметь

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)^2 = B^2 + \frac{2BC}{z} + \frac{C^2 - 2BD}{z^2} + \dots \quad (10)$$

Опуская все члены, которые будут обращаться в нуль в случае бесконечно большого контура, получим

$$\int \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 z dz = 2\pi i (C^2 - 2BD). \quad (11)$$

Подставляя значения B и C из (7), полагая $D = \alpha + i\beta$ и беря только действительную часть, мы найдем, что

$$N = 2\pi \rho (\beta U - \alpha V). \quad (12)$$

Если наложением на поток общей скорости $(-U, -V)$ мы приведем жидкость в бесконечности к покою, то слагаемое $\frac{D}{z}$ в формуле (9) как раз обусловлено перемещением цилиндра с этой скоростью. В таком случае значения α и β уже нами вычислены в § 72, только знак будет обратным. Следовательно, формула (12) даст

$$N = \rho \{ (A - B) UV - H (U^2 - V^2) \}. \quad (13)$$

Так, для эллиптического сечения, отнесенного к его главным осям,

$$N = -\pi\rho (a^2 - b^2) VU. \quad (14)$$

В качестве дальнейшего применения формулы Блазиуса мы можем подсчитать силу на неподвижный цилиндр, вызываемую внешним источником. Положим

$$w = -\mu \ln(z - c) + f(z), \quad (15)$$

где первое слагаемое представляет источник в точке $z = c$, а $f(z)$ — его зеркальное изображение в цилиндре, причем $f(z)$ прибавлена из-за необходимости обратить в нуль нормальную скорость на контуре, обусловленную источником. Тогда имеем

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{\mu}{z - c} + f'(z). \quad (16)$$

Контурный интеграл в формуле (2) будет теперь равен интегралу по бесконечно большому контуру минус интеграл (в положительном направлении) вокруг особой точки $z = c$. Интеграл по бесконечному контуру дает в результате нуль. Вблизи же особой точки должна быть принята во внимание только та часть $\left(\frac{dw}{dz}\right)^2$, которая содержит первую степень $z - c$ в знаменателе, т. е.

$$-\frac{2\mu f'(c)}{z - c}.$$

Тогда

$$Y + iX = -2\pi i \mu \rho f'(c). \quad (17)$$

Вид функции $f(z)$ для случая круглого цилиндра уже известен из п. 3, § 64. Предполагая, что источник находится на оси x , так что c будет действительной, мы будем иметь

$$f(z) = -\mu \ln\left(z - \frac{a^2}{c}\right) + \mu \ln z, \quad (18)$$

$$f'(c) = -\frac{\mu a^2}{c(c^2 - a^2)}, \quad (19)$$

$$X = \frac{2\pi\mu^2 a^2}{c(c^2 - a^2)}, \quad Y = 0^*). \quad (20)$$

В общем случае мы можем прибегнуть приближенно к асимптотической форме, которую принимает $f(z)$, когда расстояние источника велико в сравнении с размерами поперечного сечения. Тогда мы допускаем, что эта функция $f(z)$ представляет эффект, производимый поступательным движением цилиндра со скоростью, равной, но противоположной по знаку той скорости, которую вызвал бы источник вблизи, если бы цилиндр отсутствовал. В таком случае, предполагая все еще источник находящимся на оси x , мы из § 72a будем иметь

$$f(z) = \frac{(A + Q + iH)U}{2\pi z}, \quad (21)$$

где $U = \frac{\mu}{c}$. Отсюда

$$f'(c) = -\frac{(A + Q + iH)\mu}{2\pi c^2}, \quad (22)$$

и, следовательно, будем иметь

$$X = \frac{(A + Q)\mu^2 \rho}{c^2}, \quad Y = -\frac{H\mu^2 \rho}{c^2}. \quad (23)$$

*) Результат принадлежит профессору Тэйлору.

Если f (равное $\frac{\mu^2}{c^2}$) будет представлять ускорение в положении начала в невозмущенном потоке, то указанные результаты можно представить в виде

$$X = \rho (A + Q) f, \quad Y = -\rho H f. \quad (24)$$

Для круглого сечения $A = \pi a^2$, $H = 0$, $Q = \pi a^2$; формула (20) будет иметь место, если только пренебречь членами порядка $\frac{a^2}{c^2}$.

Некоторые изящные применения метода Блазиуса, относящиеся к взаимному действию круглых цилиндров при наличии циркуляции, были даны Чизотти ¹⁾. Один из его результатов можно здесь указать. Цилиндр, радиуса b , помещен эксцентрично внутри второго цилиндра, радиуса a , промежуточное пространство заполнено жидкостью, имеющей циркуляцию κ . Тогда результирующая сила на цилиндр будет направлена к ближайшей точке стенок внешнего цилиндра и имеет значение

$$\frac{\kappa^2 d^2}{2\pi \sqrt{(a+b+d)(a+b-d)(a-b+d)(a-b-d)}},$$

где d есть расстояние между осями.

Свободные линии тока.

§ 73. Первое решение задачи плоского движения, при котором жидкость ограничена частью твердыми плоскими стенками, а частью поверхностями постоянного давления, было дано Гельмгольцем ²⁾. Кирхгоф ³⁾ и другие разработали затем общие методы для решения этих вопросов. Если рассматривать поверхность постоянного давления как свободную поверхность, то мы будем иметь перед собой теорию жидких струй, которая дает некоторые интересные результаты в дополнение к § 24. Далее, так как пространство по ту сторону свободной поверхности может быть заполнено покоящейся жидкостью, что не меняет условий задачи, то мы получаем таким образом несколько случаев разрывного движения, которые для идеальной жидкости математически допустимы, но не всегда имеют практическое значение. К этому вопросу мы вернемся впоследствии (гл. XI); поверхности постоянного давления мы будем обозначать, как „свободные“ поверхности. Так как мы пренебрегаем внешними силами, как, например, силой тяжести, то скорость вдоль такой поверхности согласно (2) § 21 должна быть постоянна.

Рассматриваемый метод основывается на свойствах введенной в § 65 функции ζ . Мы предполагаем, что движущаяся жидкость ограничена линиями тока $\psi = \text{const.}$, которые состоят частично из прямых стенок и частично из линий, вдоль которых скорость (q) по величине постоянна. Ради простоты мы выберем единицу длины и единицу времени таким образом, чтобы постоянная скорость равнялась еди-

¹⁾ Cisotti, Rend. d. r. Accad. d. Lincei (6), I (1925—1926).

²⁾ Helmholtz, см. сноску на стр. 98.

³⁾ Kirchhoff, Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen, Crelle, LXX (1869) (Ges. Abh., стр. 416); см. также его Mechanik, гл. XXI, XXII.

нице. Тогда в плоскости функции ζ линии, вдоль которых $q=1$, будут представлены дугами окружности с радиусом, равным единице, и с центром в начале координат, а прямолинейные стенки (так как направление течения вдоль каждой из них постоянно) — через радиальные прямые, идущие от окружности во внешнюю часть плоскости. Точки, в которых эти прямые пересекают окружность, соответствуют точкам, где граничные линии тока из одного вида переходят в другой.

Рассмотрим сначала функцию $\ln \zeta$. В плоскости этой функции дуги окружности $q=1$ отображаются на части мнимой оси, а радиальные прямые отображаются на прямые, параллельные действительной оси, так как

$$\ln \zeta = \ln \frac{1}{q} + i\theta, \quad (1)$$

если $\zeta = q^{-1} e^{i\theta}$. Остается определить соотношение вида ¹⁾

$$\ln \zeta = f(w), \quad (2)$$

где, как обычно, $w = \varphi + i\psi$, и именно таким образом, чтобы прямолинейные границы в плоскости $\ln \zeta$ соответствовали прямым $\psi = \text{const}$ в плоскости w . При этом, чтобы сделать задачу определенной, достаточно потребовать, чтобы двум точкам одной области, из которых одна лежит внутри, а другая на границе, соответствовали в другой области две подобные же точки.

Когда установлено соответствие плоскостей ζ и w , тогда соотношение между z и w находится интегрированием уравнения

$$\frac{dz}{dw} = -\zeta. \quad (3)$$

Произвольная постоянная, входящая в результат, определяется заданием произвольного положения нулевой точки в плоскости z .

Задача таким образом сводится к конформному отображению двух областей, ограниченных прямыми линиями ²⁾. Задача этого отображения решается с помощью ранее изложенного ³⁾ метода Шварца и Кристоффеля, при котором обе области отображаются одна после другой на одну и ту же полуплоскость. Пусть $Z (= X + iY)$ и t — две комплексные величины, связанные соотношением

$$\frac{dZ}{dt} = A (a-t)^{-\frac{\alpha}{\pi}} (b-t)^{-\frac{\beta}{\pi}} (c-t)^{-\frac{\gamma}{\pi}} \dots, \quad (4)$$

где a, b, c, \dots суть действительные величины, из которых каждая больше предыдущей, в то время как $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ — углы (не обязательно положительные), удовлетворяющие соотношению

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots = 2\pi. \quad (5)$$

¹⁾ Применение $\ln \zeta$ вместо ζ исходит от Planch, Wied. Ann., XXI (1884).

²⁾ См. Forsyth, Theory of Functions, гл. XX.

³⁾ См. прим. 2 и 3 на стр. 104.

Рассмотрим теперь линию, которая состоит из частей действительной оси t и малых полукруглых вырезов (на верхней стороне) вокруг точек a, b, c, \dots . Если точка пробегает эту линию от $t = -\infty$ до $t = +\infty$, то только одна абсолютная величина выражения (4) будет изменяться, когда точка проходит прямолинейный отрезок, тогда как обход малых полуокружностей в направлении часовой стрелки скажется в появлении множителей $e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, \dots$ один за другим. Рассматривая $\frac{dZ}{dt}$ как оператор, который переводит δt в δZ , мы видим, что верхняя половина плоскости t отображается конформно на площадь замкнутого многоугольника с внешними углами $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ с помощью формулы

$$Z = A \int (a-t)^{-\frac{\alpha}{\pi}} (b-t)^{-\frac{\beta}{\pi}} (c-t)^{-\frac{\gamma}{\pi}} \dots dt + B, \quad (6)$$

при условии, что путь интегрирования в плоскости t лежит полностью внутри ограниченной, как указано выше, области. Если $a, b, c, \dots, \alpha, \beta, \gamma, \dots$ даны, то многоугольник вполне определен по своей форме; комплексные постоянные A и B влияют только на его масштаб и его ориентировку и соответственно на его положение.

Как уже сказано, нас особенно должно интересовать конформное отображение *прямоугольных* площадей. Если $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{\pi}{2}$, то формула (6) примет вид

$$Z = A \int \frac{dt}{\sqrt{(a-t)(b-t)(c-t)(d-t)}} + B. \quad (7)$$

Легко видеть, что прямоугольник будет конечен во всех своих измерениях, если по крайней мере две из точек a, b, c, d не лежат в бесконечности. Этот исключительный случай для нас как раз особенно важен; мы можем при этом точки, лежащие в конечной части плоскости, принять для простоты находящимися в $t = \pm 1$, так что

$$Z = A \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} + B = A \operatorname{arc} \operatorname{ch} t + B. \quad (8)$$

В частности, функция

$$t = \operatorname{ch} \frac{Z}{k}, \quad (9)$$

где k действительно, преобразует пространство, ограниченное положительными полупрямыми

$$Y = 0, \quad Y = k\pi$$

и расположенным между ними отрезком оси Y , в верхнюю половину плоскости t ; ср. § 66, 1.

Далее, если обе конечные точки совпадают, например, в нулевой точке, то мы будем иметь

$$Z = A \int \frac{dt}{t} + B = A \ln t + B, \quad (10)$$

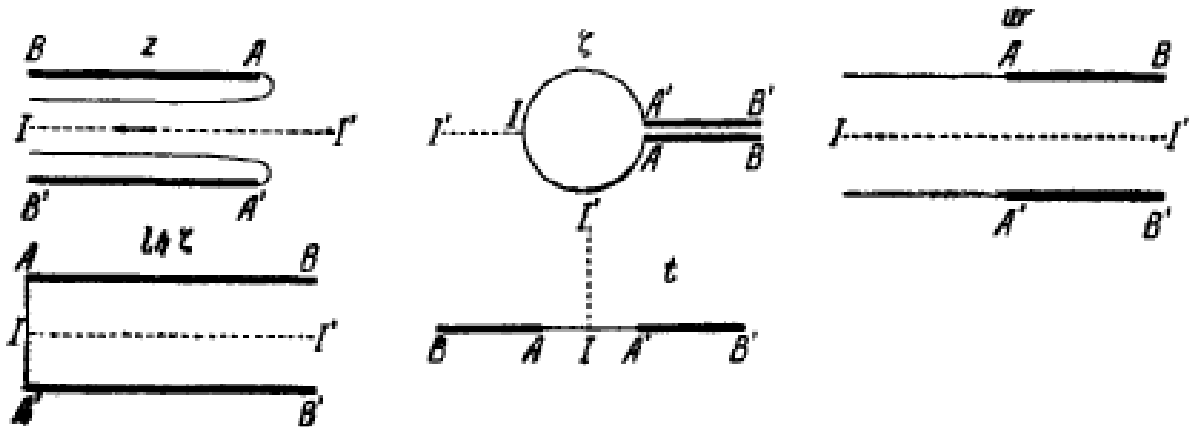
Эта функция преобразует верхнюю половину плоскости t в полосу, ограниченную двумя параллельными прямыми в плоскости Z . Если, например,

$$t = e^{\frac{z}{k}}, \tag{11}$$

где k действительно, то этими прямыми будут линии

$$Y = 0, \quad Y = k\pi.$$

§ 74. В качестве первого примера применения нашего метода рассмотрим случай истечения жидкости из большого сосуда через прямолинейный канал, который вдавливается внутрь сосуда ¹⁾. Это будет представлять плоскую форму насадки Борда, о которой говорилось в § 24.



Фиг. 20.

Границы соответствующих площадей в плоскостях ζ , $\ln \zeta$ и w легко нарисовать; они представлены на фиг. 20 ²⁾. Мы должны теперь площади в плоскостях $\ln \zeta$ и w связать с верхней полуплоскостью переменного t . Из уравнений (8) и (10) предыдущего параграфа следует, что это может быть сделано с помощью подстановок

$$\left. \begin{aligned} \ln \zeta &= A \operatorname{arcsch} t + B, \\ w &= C \ln t + D. \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

Вершины углов A и A' в плоскости $\ln \zeta$ мы сопоставим точкам $t = \pm 1$; далее предположим, что $t = 0$ соответствует точке $w = -\infty$, как это явствует из фигуры. Чтобы иметь дело с определенным значением циклических функций $\operatorname{arcsch} t$ и $\ln t$, предположим, что обе они обращаются в нуль для $t = 1$ и что их значения для других точек положительной полуплоскости определяются соображениями непрерывности. Отсюда получается, что для $t = -1$ значение каждой

¹⁾ Эта задача была сначала решена Гельмгольцем, см. прим. на стр. 96.

²⁾ Жирно нарисованные линии соответствуют твердым границам, а тонко начерченные линии — свободным поверхностям. Соответствующие точки в различных фигурах обозначены одинаковыми буквами.

из обеих функций равно $i\pi$. В точках A' , A плоскости $\ln \zeta$ проще всего положить соответственно

$$\ln \zeta = 0 \quad \text{и} \quad \ln \zeta = 2i\pi;$$

тогда, обращаясь для определения постоянных к уравнению (1), мы получим

$$0 = B, \quad 2i\pi = i\pi A + B,$$

следовательно,

$$\ln \zeta = 2 \operatorname{arc} \operatorname{ch} t. \quad (2)$$

Далее, возьмем в плоскости w прямую JJ' за линию $\psi = 0$. Если ширина выходящей струи достаточно далеко от выхода будет равна $2b$, то граничные линии тока будут $\psi = \pm b$. Затем мы можем принять, что $\varphi = 0$ есть эквипотенциальная кривая, проходящая через A , A' . Тогда из уравнения (1) следует

$$ib = i\pi C + D, \quad -ib = D,$$

и поэтому

$$w = \frac{2b}{\pi} \ln t - ib. \quad (3)$$

Легко исключить t из уравнений (2) и (3) и затем установить с помощью интегрирования соотношения между z и w , но формулы в данном здесь виде, пожалуй, более удобны.

Теперь легко проследить ход каждой свободной линии тока, например $A'J$ от ее начальной точки A' . Для точек этой линии t действительно и изменяется от 1 до 0; кроме того, уравнение (2) дает

$$i\theta = 2 \operatorname{arc} \operatorname{ch} t, \quad \text{или} \quad t = \cos \frac{1}{2} \theta.$$

Поэтому согласно уравнению (3) получим

$$\varphi = \frac{2b}{\pi} \ln \cos \frac{1}{2} \theta. \quad (4)$$

Так как вдоль этой линии

$$\frac{d\varphi}{ds} = -q = -1,$$

то мы можем положить

$$\varphi = -s,$$

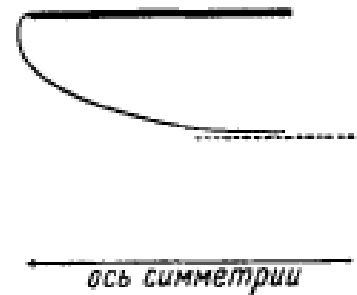
где s есть дуга, отмеряемая от A' . Естественное уравнение кривой, таким образом, будет

$$s = \frac{2b}{\pi} \ln \sec \frac{1}{2} \theta. \quad (5)$$

Если начальная точка находится в A' , то можно отсюда вывести обычным путем формулы

$$\begin{aligned} x &= \frac{2b}{\pi} \left(\sin^2 \frac{1}{2} \theta - \ln \sec \frac{1}{2} \theta \right), \\ y &= \frac{b}{\pi} (\theta - \sin \theta). \end{aligned} \quad (6)$$

Давая θ ряд значений от 0 до π , можно легко начертить эту кривую (фиг. 21). Так как верхней границей y будет b , то оказывается, что расстояние между твердыми стенками должно быть $4b$. Коэффициент сжатия, таким образом, равен $1/2$, в согласии с теорией Борда.



Фиг. 21.

§ 75. Для случая, когда жидкость вытекает из большого сосуда через отверстие в плоской стенке, решение аналитически получается совершенно таким же образом. Главное различие состоит в том, что значения $\ln \zeta$ в точках A, A' на фиг. 22 должны быть взяты теперь соответственно равными нулю и $-i\pi$; это дает для определения постоянных A, B из формулы (1) следующие уравнения:

$$0 = i\pi A + B, \quad -i\pi = B,$$

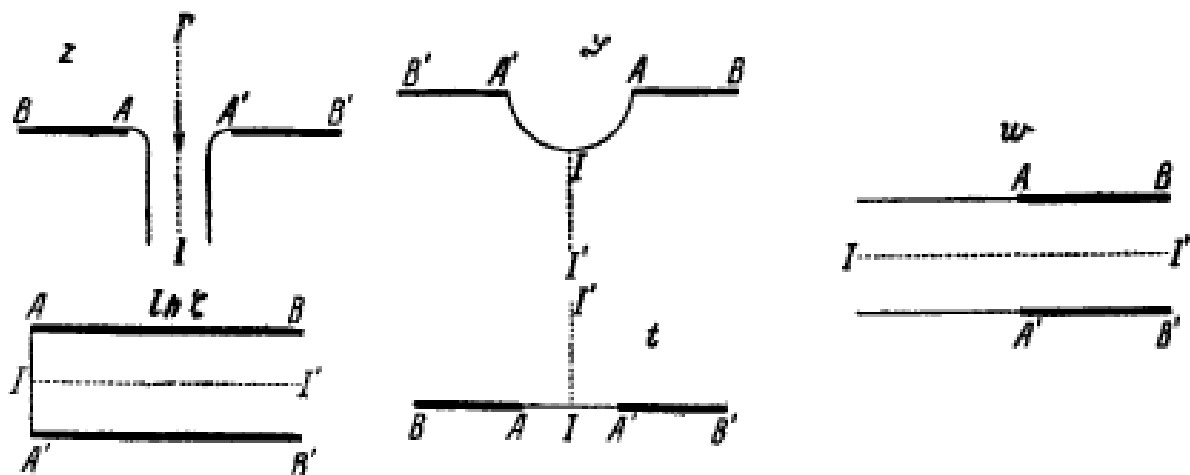
так что будет

$$\ln \zeta = \operatorname{arc} \operatorname{ch} t - i\pi. \tag{7}$$

Соотношение между w и t будет совершенно таким же, как выше:

$$w = \frac{2b}{\pi} \ln t - ib, \tag{8}$$

причем $2b$ есть окончательная ширина потока между свободными границами.



Фиг. 22.

Для линии тока AI t будет действительно и изменяется оно от -1 до 0 . Так как

$$i\theta = \operatorname{arc} \operatorname{ch} t - i\pi,$$

то мы можем положить

$$t = \cos(\theta + \pi),$$

где θ изменяется от 0 до $-\frac{1}{2}\pi$. Таким образом из формулы (8) и из $\varphi = -s$ получается естественное уравнение линии тока в виде

$$s = \frac{2b}{\pi} \ln(-\sec \theta). \tag{9}$$

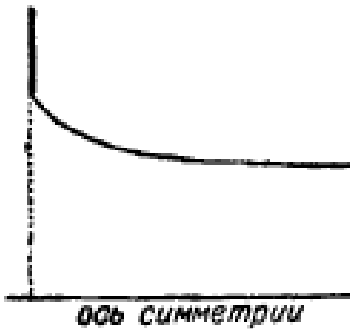
Отсюда, если точка A на первой из фиг. 22 берется в качестве начала¹⁾, находим

$$x = \frac{4b}{\pi} \sin^2 \frac{1}{2} \theta, \quad y = \frac{2b}{\pi} \left\{ \ln \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \theta \right) - \sin \theta \right\}. \quad (10)$$

Кривая (в измененном положении) изображена на фиг. 23.

Асимптотическое значение x , соответствующее значению $\theta = -\frac{\pi}{2}$, равно $\frac{2b}{\pi}$; половина ширины отверстия поэтому будет $(\pi + 2) \frac{b}{\pi}$, и коэффициент сжатия тогда равен

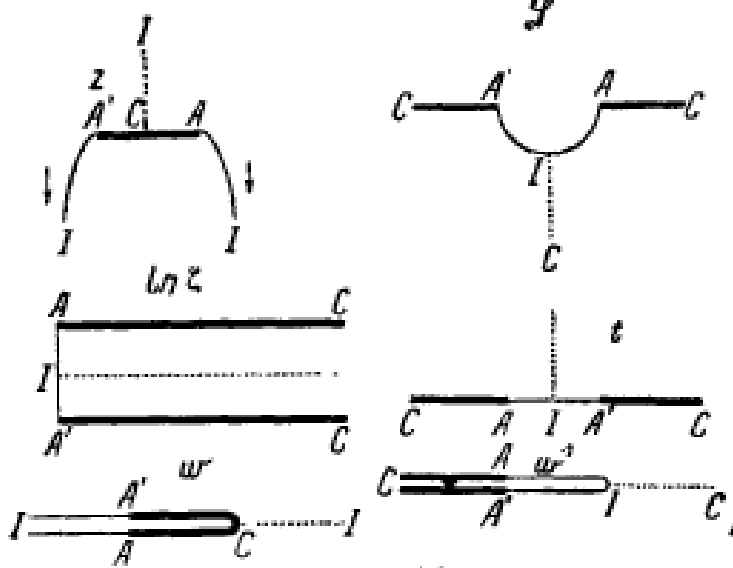
$$\frac{\pi}{(\pi + 2)} = 0,611.$$



Фиг. 23.

§ 76. В следующем примере мы предположим, что поток неограниченной ширины натекает на плоскую пластинку и после этого разделяется на две части, ограниченные с внутренней стороны свободными поверхностями.

Средняя линия тока после встречи с пластинкой под прямым углом разделяется на две ветви, которые следуют вдоль пластинки до ее ребер и затем образуют свободные поверхности. Пусть эта линия тока будет $\psi = 0$ и пусть в точке разветвления $\varphi = 0$. Вид границ в различных плоскостях показан на фиг. 24. Область, наполненная жидкостью, соответствует теперь *всей* плоскости w , которую, однако, мы теперь должны мыслить



Фиг. 24.

ограниченной изнутри двумя сторонами прямой $\psi = 0$, $\varphi < 0$.

При тех же обозначениях, как в начале § 75, мы будем иметь

$$\ln \zeta = \operatorname{arcs} \operatorname{ch} t - i\pi, \quad (1)$$

или

$$t = -\operatorname{ch} (\ln \zeta) = -\frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right). \quad (2)$$

Соответствие между плоскостями w и t лучше всего установить, если мы сначала рассмотрим границы в плоскости w^{-1} . Применим

¹⁾ Этот пример дан Кирхгофом, см. примечание на стр. 120 и подробнее исследован Rayleigh, Notes on Hydrodynamics, Phil. Mag., Dec. 1876 (Papers, I, 297.)

здесь метод Шварца и Кристофеля. Если мы в формуле (4) § 73 положим

$$\alpha = -\pi, \quad \beta = \gamma = \dots = 0,$$

то получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw^{-1}}{dt} &= At, \\ w^{-1} &= \frac{1}{2} At^2 + B. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

В точке I имеем $t = 0$, $w^{-1} = 0$, так что $B = 0$, или

$$w = -\frac{C}{t^2}. \quad (4)$$

Чтобы связать C (которое, очевидно, действительно) с шириной l пластинки, заметим, что вдоль CA $\zeta = q^{-1}$ и, следовательно, согласно уравнению (2),

$$t = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{q} + q \right), \quad q = -t - \sqrt{t^2 - 1}, \quad (5)$$

причем знак корня взят так, чтобы иметь $q = 0$ при $t = -\infty$. Далее, имеем

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\frac{1}{q}.$$

Если мы проинтегрируем это вдоль CA на первом рисунке фиг. 24, то получим

$$l = 2 \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} dt = -4C \int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{qt^2} = -4C \int_{-\infty}^{-1} \{-t + \sqrt{t^2 - 1}\} \frac{dt}{t^2}; \quad (6)$$

отсюда будем иметь

$$C = \frac{l}{\pi + 4}. \quad (7)$$

Вдоль свободной границы AI мы имеем $\ln \zeta = it$ и, следовательно, согласно формулам (2) и (4),

$$t = -\cos \theta, \quad \varphi = -C \sec^2 \theta. \quad (8)$$

Естественное уравнение кривой, следовательно, таково:

$$s = \frac{l}{\pi + 4} \sec^2 \theta, \quad (9)$$

причем θ меняется от 0 до $-\frac{1}{2}\pi$. Отсюда получаем

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2l}{\pi+4} \left(\sec \theta + \frac{1}{4} \pi \right), \\ y &= \frac{l}{\pi+4} \left\{ \sec \theta \operatorname{tg} \theta - \ln \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \theta \right) \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

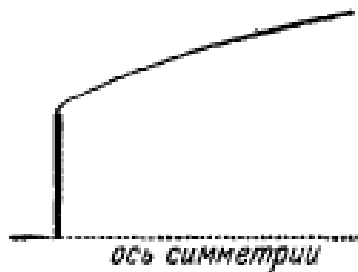
причем нулевая точка лежит в центре пластинки фиг. 25.

Избыток давления на передней стороне пластинки согласно формуле (8) § 23 равен $\frac{1}{2} \rho (1-q^2)$. Следовательно, результирующая сила на пластинку будет равна

$$\begin{aligned} & \rho \int_{-\infty}^{-1} (1-q) \frac{dx}{dt} dt = \\ & = -2\rho C \int_{-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{q} - q \right) \frac{dt}{t^3} = -4\rho C \int_{-\infty}^{-1} \sqrt{t^2-1} \frac{dt}{t^3} = \pi \rho C. \end{aligned} \quad (11)$$

Из уравнения (8) § 23 и вследствие очевидного геометрического сходства движения во всех рассмотренных случаях ясно, что результирующее давление P_0 будет пропорционально квадрату общей скорости потока. Мы найдем таким образом для произвольной скорости q_0 ¹⁾

$$P_0 = \frac{\pi}{\pi+4} \rho q_0^2 l = 0,440 \rho q_0^2 l. \quad (12)$$



Фиг. 25.

§ 77. Если поток встречает пластинку под углом, образуя с ее плоскостью угол α , то задача изменяется так, как показано на фиг. 23.

Уравнения (1) и (2) предыдущего параграфа продолжают иметь место, но в точке I мы будем иметь теперь $\xi = e^{-i(\pi-\alpha)}$, и поэтому $t = \cos \alpha$. Следовательно, вместо уравнения (4) ²⁾ будем иметь

$$w = \frac{-C}{(t - \cos \alpha)^2}. \quad (13)$$

Так как $q^{-1} = |\xi|$, то в точках передней грани пластинки имеем

$$\frac{1}{q} = \pm t + \sqrt{t^2-1}, \quad q = \pm t - \sqrt{t^2-1}, \quad (14)$$

¹⁾ Kirchhoff, см. примечание на стр. 120. Rayleigh, On the Resistance of Fluids, Phil. Mag., Dec. 1876 (Papers, I, 287.)

²⁾ Решение до этого места дано Кирхгофом (Crelle, см. прим. на стр. 120); данное в тексте исследование с небольшими изменениями вычислительного характера заимствовано из работы Рэлея.

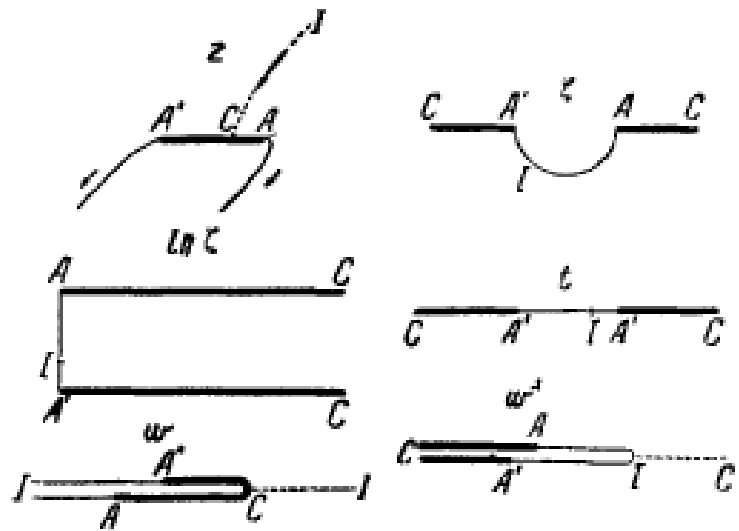
причем необходимо взять верхний или нижний знак, смотря по тому, $t \geq 0$, т. е. смотря по тому, лежит ли рассматриваемая точка налево или направо от C на первом рисунке фиг. 26.

Таким образом будем иметь

$$\frac{dx}{dt} = \pm \frac{1}{q} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2C}{(t - \cos \alpha)^2} (t \pm \sqrt{t^2 - 1}). \quad (15)$$

t между A' и C изменяется от 1 до ∞ , в то время как между A и C оно пробегает интервал от $-\infty$ до -1 . Если положить

$$t = \frac{1 - \cos \alpha \cos \omega}{\cos \alpha - \cos \omega}$$



Фиг. 26.

то соответствующие значения

ω пробегает интервал соответственно от π до α и от α до 0; мы найдем, следовательно,

$$\frac{dt}{(t - \cos \alpha)^2} = - \frac{\cos \alpha - \cos \omega}{\sin^4 \alpha} \sin \omega d\omega, \\ \pm \sqrt{t^2 - 1} = \frac{\sin \alpha \sin \omega}{\cos \alpha - \cos \omega}.$$

Отсюда получается

$$\frac{dx}{d\omega} = - \frac{2C}{\sin^4 \alpha} (1 - \cos \alpha \cos \omega + \sin \alpha \sin \omega) \sin \omega \quad (16)$$

и, следовательно,

$$x = \frac{C}{\sin^4 \alpha} \left\{ 2 \cos \omega + \cos \alpha \sin^2 \omega + \right. \\ \left. + \sin \alpha \sin \omega \cos \omega + \left(\frac{1}{2} \pi - \omega \right) \sin \alpha \right\}. \quad (17)$$

причем центр пластинки выбирается за начало, так что x будет иметь соответственно одинаковые по абсолютной величине и противоположные по знаку значения для $\omega = 0$ и $\omega = \pi$. Таким образом вся ширина, выраженная через C , будет равна

$$l = \frac{4 + \pi \sin \alpha}{\sin^4 \alpha} C. \quad (18)$$

Расстояние точки разветвления ($\omega = \alpha$) от центра равно

$$x = \frac{2 \cos \alpha (1 + \sin^2 \alpha) + \left(\frac{1}{2} \pi - \alpha \right) \sin \alpha}{4 + \pi \sin \alpha} l. \quad (19)$$

Интегрируя выражение

$$\frac{1}{2} e (1 - q^2) dx = \pm \frac{1}{2} e \left(\frac{1}{q} - q \right) \frac{d\varphi}{dt} dt = \\ = \pm 2qC \sqrt{t^2 - 1} \frac{dt}{(t - \cos \alpha)^2} = - \frac{2qC}{\sin^2 \alpha} \sin^2 \omega d\omega \quad (20)$$

в пределах от π до 0, получим полное давление на переднюю грань:

$$\pi \rho \frac{C}{\sin^2 \alpha}.$$

Введя l и произвольную скорость потока q_0 , мы найдем

$$P_0 = \frac{\pi \sin \alpha}{4 + \pi \sin \alpha} \cdot \rho q_0^2 \cdot l. \quad (1)$$

Чтобы найти центр давления, составим момент сил относительно центра пластинки. Мы получим тогда

$$\frac{1}{2} \rho \int (1 - q^2) x dx = - \frac{2\rho C}{\sin^2 \alpha} \int_{\pi}^0 x \sin^2 \omega d\omega = \frac{\pi \rho C}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{3}{4} \frac{C \cos \alpha}{\sin^4 \alpha}, \quad (22)$$

где значение x взято из уравнения (17). Первый множитель представляет полное давление; абсцисса x центра давления будет дана тогда вторым множителем или, если мы выразим ее через ширину, то получим

$$\bar{x} = \frac{3}{4} \frac{\cos \alpha}{4 + \pi \sin \alpha} l. \quad (23)$$

α	I	II	III
90°	1,000	0,000	0,0 0
70°	0,965	0,037	0,232
50°	0,854	0,075	0,402
30°	0,641	0,117	0,483
20°	0,481	0,139	0,496
10°	0,273	0,163	0,500

В приведенной рядом таблице, заимствованной из работы Рэлея, столбец I дает излишек давления на передней грани, отнесенный к его значению, для $\alpha = 90^\circ$, в то время как столбцы II и III дают расстояния центра давления и

точки разветвления струн от центра пластинки, выраженные в долях общей ширины ¹⁾.

§ 78. Интересное видоизменение задачи § 76 было дано Бобылевым ²⁾. Предположим, что струя набегаёт симметрично на согнутую пластинку, сечение которой состоит из двух отрезков одинаковой величины, образующих между собой некоторый угол.

Если обозначить через 2α величину угла, обращенного в сторону течения, то границы плоскости ζ могут быть преобразованы так, что они будут иметь тот же самый вид, как и в § 76. Это будет достигнуто, если положить

$$\zeta = A \zeta'^n,$$

где A и n должны быть определены таким образом, что

$$\zeta' = 1 \text{ при } \zeta = e^{-i\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right)} \text{ и } \zeta' = e^{-i\pi} \text{ при } \zeta = e^{-i\left(\frac{1}{2}\pi + \alpha\right)}.$$

¹⁾ Для сравнения с экспериментальными результатами см. Rayleigh, примечание на стр. 128 и Nature, XLV (1891) (Papers, III, 491).

²⁾ Журнал Русского физико-химического о-ва, XIII (1881) (Beiblätter zu Wiedemanns Annalen, VI, 163). Кажется, однако, что эта задача еще раньше трактовалась подобным же образом М. Рётху (Klausenburger Berichte (1879)). Она была обобщена Вгуап и Jones, Proc. Roy. Soc. A, XCI.

Отсюда получим

$$A = e^{-i\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right)}, \quad n = \frac{2\alpha}{\pi}.$$

На правой половине пластинки l , так же как и раньше, будет отрицательным n , так как $q^{-1} = |\zeta|$, то будем иметь

$$\frac{1}{q} = (-t + \sqrt{t^2 - 1})^n, \quad q = (-t - \sqrt{t^2 - 1})^n. \quad (24)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{q} \frac{d\varphi}{dt} dt &= 2C \int_{-\infty}^{-1} (-t + \sqrt{t^2 - 1})^n \frac{dt}{t^3} = \\ &= -C - nC \int_{-\infty}^{-1} (-t + \sqrt{t^2 - 1})^n \frac{dt}{t^2 \sqrt{t^2 - 1}}, \\ \int_{-\infty}^{-1} q \frac{d\varphi}{dt} dt &= 2C \int_{-\infty}^{-1} (-t - \sqrt{t^2 - 1})^n \frac{dt}{t^3} = \\ &= -C + nC \int_{-\infty}^{-1} (-t - \sqrt{t^2 - 1})^n \frac{dt}{t^2 \sqrt{t^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Эти выражения посредством подстановки

$$t = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\omega}} + \sqrt{\omega} \right),$$

где ω изменяется от 0 до 1, могут быть сведены к известному виду. Таким образом мы найдем

$$\frac{1}{C} \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{q} \frac{d\varphi}{dt} dt = -1 - 2n \int_0^1 \frac{\omega^{-\frac{1}{2}n}}{(1+\omega)^2} d\omega = -1 - n - n^2 \int_0^1 \frac{\omega^{-\frac{1}{2}n}}{1+\omega} d\omega, \quad (25)$$

$$\frac{1}{C} \int_{-\infty}^{-1} q \frac{d\varphi}{dt} dt = -1 + 2n \int_0^1 \frac{\omega^{\frac{1}{2}n}}{(1+\omega)^2} d\omega = -1 - n + n^2 \int_0^1 \frac{\omega^{\frac{1}{2}n-1}}{1+\omega} d\omega. \quad (26)$$

Мы при этом использовали следующие формулы:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\omega^{-k}}{(1+\omega)^2} d\omega &= \frac{1}{2} + k \int_0^1 \frac{\omega^{-k}}{1+\omega} d\omega, \\ \int_0^1 \frac{\omega^k}{(1+\omega)^2} d\omega &= -\frac{1}{2} + k \int_0^1 \frac{\omega^{k-1}}{1+\omega} d\omega, \end{aligned}$$

где $1 > k > 0$.

Так как вдоль линии тока

$$\frac{ds}{d\varphi} = -\frac{1}{q},$$

то согласно (25) будем иметь, если b обозначает половину ширины пластинки

$$b = C \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{\pi} + \frac{4\alpha^2}{\pi^2} \int_0^1 \frac{\omega^{-\frac{\alpha}{\pi}}}{1+\omega} d\omega \right\}. \quad (27)$$

Определенный интеграл, который встречается в этом выражении, может быть вычислен с помощью формулы

$$\int_0^1 \frac{\omega^{-k}}{1+\omega} d\omega = \frac{1}{(1-k)(2-k)} + \frac{1}{2} \Psi\left(1 - \frac{1}{2}k\right) - \frac{1}{2} \Psi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k\right), \quad (28)$$

где $\Psi(m) = \frac{d}{dm} \ln \Pi(m)$; эта функция была введена и табулирована Гауссом ¹⁾.

Нормальную компоненту давления на каждую из половинок можно найти методом § 76; она будет равна

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \rho \int_{-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{q} - q\right) \frac{d\varphi}{dt} dt &= \frac{1}{2} n^2 C \rho \int_0^{\infty} \frac{\omega^{-\frac{1}{2}n}}{1+\omega} d\omega = \\ &= \frac{1}{2} n^2 C \rho \frac{\pi}{\sin \frac{n\pi}{2}} = \rho C \frac{2\alpha^2}{\pi \sin \alpha}. \end{aligned} \quad (29)$$

Результирующее давление в направлении потока, следовательно, равно

$$\frac{4\alpha^2}{\pi} \rho C. \quad (30)$$

А тогда для произвольной скорости потока q_0 результирующее давление будет выражаться в виде

$$P = \frac{4\alpha^2}{\pi L} \rho q_0^2 b, \quad (31)$$

где L есть числовой множитель, заключенный в скобках в (27).

Для $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ мы получаем $L = 2 + \frac{1}{2}\pi$, что приводит к результату (12) § 76.

¹⁾ Gauss, Disquisitiones generales circa seriem infinitam..., Werke, Göttingen, 1870, III, 161.

В следующей таблице, которая (с незначительным изменением) заимствована из работы Бобылева, второй столбец дает отношение $\frac{P}{P_0}$, т. е. отношение

результатирующего давления к тому, которое испытывает плоская пластинка с той же самой площадью. Это отношение будет максимальным для α , равного приблизительно 100° ; клин будет обращен тогда к потоку вогнутой стороной. Третий столбец дает отношение P к произведению расстояния ($2b \sin \alpha$) между ребрами клина на $\frac{1}{2} \rho q_0^2$. Для значений α , которые лежат вблизи 180° , это отношение приближается к единице, как и следовало ожидать, так как жидкость внутри острого угла будет находиться тогда почти в покое, и избыток давления поэтому практически будет равен $\frac{1}{2} \rho q_0^2$. Последний столбец дает отношение результатирующего давления к тому, которое испытывает пластинка шириной $2b \sin \alpha$, вычисленное на основании формулы (12).

α	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{P}{\rho q_0^2 b \sin \alpha}$	$\frac{P}{P_0 \sin \alpha}$
10°	0,039	0,199	0,227
20°	0,140	0,359	0,409
30°	0,278	0,489	0,555
40°	0,433	0,593	0,674
45°	0,512	0,637	0,724
50°	0,589	0,677	0,769
60°	0,733	0,745	0,846
70°	0,854	0,800	0,909
80°	0,945	0,844	0,959
90°	1,000	0,879	1,000
100°	1,016	0,907	1,031
110°	0,995	0,931	1,059
120°	0,935	0,950	1,079
130°	0,840	0,964	1,096
135°	0,780	0,970	1,103
140°	0,713	0,975	1,109
150°	0,559	0,984	1,119
160°	0,385	0,990	1,126
170°	0,197	0,996	1,132

Разрывные движения.

§ 79. Достаточно было дать несколько важнейших примеров установившегося движения со свободной поверхностью, изученных, быть может, более систематическим методом. Значительные дополнения по этому вопросу были внесены Митчеллем ¹⁾, Ляв ²⁾ и другими авторами ³⁾. Остается только сказать еще несколько слов относительно

¹⁾ Mitchell, On the Theory of Free Stream-lines, Phil. Trans. A, CLXXXI (1890).

²⁾ Love, On the Theory of Discontinuous Fluid Motions in two Dimensions, Proc. Camb. Phil. Soc., VII (1891).

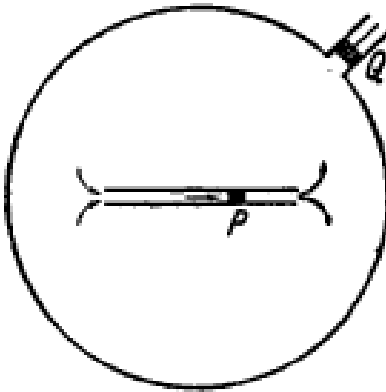
³⁾ Литературные указания см. у Love, Encycl. d. Math. Wiss., IV (3), 97. Очень обстоятельное изложение наиболее важных известных решений с новыми добавлениями и расширениями даны Greenhill, Report on the Theory of a Stream-line past a Plane Barrier, опубликовано Advisory Committee for Aeronautics, 1910. Распространение на случай искривленных твердых границ дано в общем виде в различных работах Levi-Civita и Cisotti. Они помещены в Rend. d. Circolo Mat. di Palermo; XXIII, XXV, XXVI, XXVIII и Rend. d. r. Accad. d. Lincei, XX и XXI; изучение частных случаев представляет естественно большие трудности. Позднее данным вопросом занимался Leathem, Phil. Trans. A, CCXX, 439 (1915) и H. Levy, Proc. Roy. Soc. A, XCII, 107 (1915). Теория соударяющихся струй была подробно исследована Cisotti, Vene confluenti, Ann. di mat. (3), XXIII, 285 (1914). Из работ русских авторов следует назвать в первую очередь работу Н. Е. Жуковского (1890 г.) „Видоизменение метода Кирхгоффа“. Полное собрание соч. т., III, изд. ОНТИ, 1936 г.

физических соображений, которые первоначально привели к исследованию такого рода задач.

На предыдущих страницах мы имели дело с несколькими примерами течения несжимаемой жидкости около острого выдающегося вперед ребра, и в каждом случае получалось, что скорость на ребре равнялась бесконечности. На самом деле это является необходимым следствием предположения, что движение является безвихревым, причем безразлично, сжимаема или несжимаема жидкость, как это можно установить, рассматривая непосредственно близкие эквипотенциальные поверхности (которые упираются в границу под прямым углом).

Появления бесконечно большой скорости можно избежать, делая ребро немного закругленным, однако и тогда скорость вблизи ребра значительно превзойдет то значение, которое она принимает на некотором расстоянии от него, большом сравнительно с радиусом кривизны.

Чтобы движение жидкости находилось в согласии с этими условиями, необходимо, чтобы давление на некотором расстоянии от ребра значительно превышало давление на ребре. Этот излишек давления обуславливается инерцией жидкости; жидкость может обтекать острое ребро преодолевая центробежную силу, только при таком распределении давления, когда оно очень быстро возрастает с удалением от ребра.



Фиг. 27.

Таким образом, если давление на расстоянии не очень велико, то возможность рассматриваемого движения требует отрицательного давления вблизи ребра, которое, однако, жидкость при обычных условиях выдержать не может.

Для большей определенности вопроса представим себе следующий случай. Прямая трубка (фиг. 27), длина которой велика по сравнению с ее диаметром, помещена в середине большого замкнутого сосуда, который наполнен несжимаемой жидкостью, лишенной трения. Внутри этой трубки на некотором расстоянии от концов помещается скользящий поршень P , который произвольным образом может двигаться под действием внешних сил. Толщина стенок трубки предполагается малой по сравнению с диаметром, а края ее обоих концов закругленными, так что острые углы отсутствуют. Кроме того, мы предполагаем, что к стенке сосуда в некотором месте приделана боковая трубка с поршнем Q , посредством которого можно по желанию регулировать давление внутри сосуда.

Пусть вначале вся система находится в покое. Сообщим поршню P постепенно возрастающую скорость, однако таким образом, чтобы (для простоты) движение в каждый момент времени можно было рассматривать приближенно, как установившееся. Вначале, предполагая, что на Q действует достаточно большая сила, образуется непрерывное движение вроде изображенного на фиг. 12, так как, действительно, только один этот вид движения совместим с усло-

виями задачи. По мере того как ускорение поршня возрастает, давление на Q может даже при очень умеренных скоростях P сделаться необычайно большим, и если Q может переместиться, то образуется кольцевая пустота на каждом конце трубки.

С теоретической точки зрения нелегко изучить дальнейший ход движения в подобном случае, даже тогда, когда мы имеем дело с идеальной жидкостью. В действительных же жидкостях задача видоизменяется благодаря вязкости, которая препятствует всякому скольжению жидкости в непосредственном соприкосновении с трубкой и также оказывает значительное влияние на резкие разности скоростей, которые здесь будут иметь место.

Наблюдение показывает, что движение жидкостей при тех условиях, которые предполагаются в отдельных случаях, часто совершенно отличается от типов, представленных на фиг. 11, 12, 17, 18. В случае, который мы только что описывали, жидкость, вытекающая из отверстия трубки, не будет тотчас же распространяться по всем направлениям; она образует по крайней мере до некоторого расстояния более или менее компактный поток, ограниченный со всех сторон покоящейся вблизи жидкостью. Известным примером является поток газа, смешанного с дымом, выходящий из дымовой трубы. Однако, во всех случаях подобного рода замечено, что движение непосредственно вблизи границ потока является далеко не упорядоченным ¹⁾.

Стремление построить примеры установившихся плоских движений жидкостей без трения, приближающихся к наблюдаемым случаям, и привело Гельмгольца ²⁾ и Кирхгофа ³⁾ к исследованию теории свободных линий тока. Ясно, что мы можем мыслить, если пожелаем, пространство по ту сторону свободной границы наполненным покоящейся жидкостью постоянной плотности, так как при этом не изменится условие постоянства давления вдоль линии тока. В таком случае задачи § 76 и 77 будут давать теорию давления, оказываемого на пластинку потоком, ее обтекающим, или (что сводится к тому же) теорию сопротивления, которое испытывает пластинка, движущаяся с постоянной скоростью внутри жидкости, находящейся, наоборот, в покое.

К вопросу практического применения этой теории мы вернемся впоследствии в связи с некоторыми родственными задачами (гл. XI).

Течение в криволинейном слое.

§ 80. Теорию, развитую в § 59, 60, можно легко распространить на двумерное движение *криволинейного* слоя жидкости, толщина которого мала по сравнению с радиусом кривизны. Эта задача была

¹⁾ Некоторые опыты показывают, что образование струй может произойти до того, как будет достигнута гельмгольцева „предельная скорость“, и что внутреннее трение при этом процессе играет существенную роль. Smoluchowski, Sur la formation des veines d'efflux dans les liquides, Bull. de l'Acad. de Cracovie, 1904.

²⁾ См. сноску ¹⁾ на стр. 98 и сноску ³⁾ на стр. 120.

исследована с точки зрения электропроводности Больцманом ¹⁾, Кирхгофом ²⁾, Тёплером ³⁾ и др.

Как и в § 59, возьмем неподвижную точку A и переменную точку P на поверхности, которой определяется форма слоя, и обозначим через ψ поток через какую-нибудь кривую AP на этой поверхности. Тогда ψ есть функция положения точки P и, если P переместить в произвольном направлении на малый отрезок δs , то найдем, что поток через элемент δs будет равен $\frac{\partial \psi}{\partial s} \delta s$.

Компонента скорости перпендикулярная к δs , будет тогда равна $\frac{\delta \psi}{h \delta s}$, где h обозначает толщину слоя, при этом мы еще не предполагаем, что эта толщина всюду одинакова.

Если движение безвихревое, то существует потенциал скоростей φ ; эквипотенциальные кривые $\varphi = \text{const.}$ пересекают линию тока $\psi = \text{const.}$ под прямыми углами.

В случае постоянной толщины, к которому мы теперь переходим, удобнее написать ψ вместо $\frac{\psi}{h}$, так что компонента скорости, перпендикулярная к δs , будет выражаться одинаковым образом через $\frac{\partial \psi}{\partial s}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$, где δn обозначает элемент, который проведен перпендикулярно к δs в надлежащую сторону.

Дальнейшие соотношения будут совершенно такими же, как и в плоской задаче; в частности, кривые

$$\varphi = \text{const.}, \quad \psi = \text{const.}$$

разбивают поверхность на элементарные квадраты, если каждая „const.“ пробегает значения всех членов арифметической прогрессии с бесконечно малой разностью, являющейся в обоих случаях одинаковой. В самом деле, в силу свойства ортогональности наши элементарные площадки суть прямоугольники; если сторонами этих прямоугольников будут $\delta s_1, \delta s_2$, то они же соответственно будут означать элементы линий тока и эквипотенциальных линий, и так как

$$\frac{\partial \psi}{\partial s_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial s_1},$$

то отсюда следует, что $\delta s_1 = \delta s_2$, ибо согласно построению $\delta \psi = \delta \varphi$.

Таким образом, всякая задача безвихревого движения в криволинейном слое (постоянной толщины) преобразуется с помощью конформного отображения в соответствующую плоскую задачу. Для сферической поверхности мы можем, например, наряду с бесчисленным множеством других методов, применить метод стереографической проекции. В качестве простого примера возьмем, например, случай, когда слой постоянной толщины покрывает всю поверхность шара за исключением двух круговых островов (величина и взаимное положение которых могут быть произвольные). Очевидно, единственное (плоское) безвихревое движение, которое возможно в наполненном жидкостью двусвязном пространстве, это такое, при котором жидкость циркулирует вокруг обоих островов в противоположных направлениях, причем циклические постоянные для обеих циркуляций должны быть одинаковыми. Так как окружности при проектировании переходят в окружности, то соответствующая плоская задача есть та самая, которая решена в § 64, п. 2,

¹⁾ Boltzmann, Wiener Sitzungsberichte, LII, 214 (1865). (Wissenschaft. Abh. Leipzig, 1909, I.)

²⁾ Kirchhoff, Berl. Monatsber., 19 Juli, 1875 (Gesam. Abhand., I (56)).

³⁾ Töpler, Pogg. Ann., CLX, 375 (1877).

т. е. линии тока будут образовывать семейство соосных окружностей с действительными пограничными точками (скажем A, B), а эквипотенциальные кривые будут составлять ортогональную систему кривых, проходящих через точки A, B . Если мы вернемся обратно к шару, то из хорошо известных теорем стереографической проекции будет следовать, что линии тока, включая контуры обоих островов, суть те окружности, плоскости которых проходят через неподвижную прямую, именно через линию пересечения касательных плоскостей в точках, соответствующих A и B ; эквипотенциальные кривые будут окружности, плоскости которых проходят через эти точки ¹⁾.

При всяком виде преобразования с помощью конформного отображения, безразлично, будет ли движение безвихревым или нет, скорость $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ преобразуется в обратном отношении к линейному элементу, и поэтому кинетические энергии тех частей жидкости, которые заполняют соответствующие поверхности, равны между собой (предполагая, конечно, что плотность и толщина в обоих случаях одинаковы). Теми же рассуждениями найдем, что циркуляция

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$$

по замкнутой кривой не меняется при проектировании.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

БЕЗВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ. ТРЕХМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ.

§ 81. Среди методов решения уравнения

$$\Delta \varphi = 0 \tag{1}$$

для трехмерного случая метод сферических функций является наиболее важным. Он особенно целесообразен в том случае, когда граничные условия отнесены к сферическим или близким к сферическим поверхностям.

За исчерпывающими исследованиями по этому методу мы должны отослать к специальным руководствам ²⁾. Эта теория очень обширна

¹⁾ Этот пример дан Кирхгофом в электрической интерпретации; там задача состоит в распределении потока на равномерно проводящем сферическом слое, когда электроды помещены в каких-либо двух точках A и B поверхности.

²⁾ Todhunter, *Functions of Laplace, Lamé and Bessel*. Cambridge, 1875 г. Ferrers, *Spherical Harmonics*, Cambridge, 1877. Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen*, 2-е изд., Berlin, 1878. Thomson and Tait, *Natural Philosophy*, 2-е изд., Cambridge, 1879, I, 171—218. Byerly, *Fourier's Series and Spherical, Cylindrical and Ellipsoidal Harmonics*, Boston, U. S. A., 1893. Уиттекер и Ватсон, *Курс современного анализа*, ч. II. ГТТИ, 1934.

Историю этой теории можно найти у Todhunter, *Hystory of the Theories of Attraction etc.*, Cambridge, 1873, II. Также см. Wangerin, *Theories der Kugelfunctionen*, U. S. W. Encycl. der Math. Wiss., II (1), 1904

и рассматривается с разнообразных точек зрения, но мы здесь дадим лишь краткий очерк тех ее частей, которые наиболее важны для наших целей, не приводя формальных доказательств или ограничиваясь только их наметкой.

Легко видеть, что вследствие однородности оператора Δ относительно x , y , z каждое слагаемое функции φ , которое представляет однородный алгебраический многочлен, должно в отдельности удовлетворять уравнению (1). Каждое такое однородное решение уравнения (1) называется *объемной сферической* функцией соответствующей степени. Если φ_n есть объемная сферическая функция степени n и если положить

$$\varphi_n = r^n S_n, \quad (2)$$

то S_n будет функцией только направления, на котором точка (x, y, z) расположена по отношению к началу; другими словами, она будет функцией положения той точки, в которой радиус-вектор пересекает сферическую поверхность радиуса единица, описанную около начала координат. Эту функцию называют *поверхностной сферической* функцией степени n ¹⁾.

Всякой объемной сферической функции φ_n степени n соответствует другая функция степени $-n-1$, получаемая делением первой на r^{2n+1} , т. е. $\varphi = r^{-2n-1}\varphi_n$ есть также решение уравнения (1). Таким образом каждой поверхностной сферической функции S_n соответствуют две объемные сферические функции $r^n S_n$ и $r^{-n-1} S_n$.

§ 82. Важнейший случай — это тот, когда n есть целое число и когда, кроме того, поверхностная сферическая функция конечна на всей сфере радиуса единица. В той форме, в которой представлена теория (для этого случая) Томсоном и Тэтом, а также и Максвеллом²⁾, наиболее простое решение уравнения (1) имеет вид

$$\varphi_{-1} = \frac{A}{r}. \quad (3)$$

Оно представляет, как мы видели в § 56, потенциал скоростей для точечного источника в начале координат.

Так как уравнение (1) удовлетворяется и тогда, когда φ дифференцируется по x , y или z , то мы тем самым получаем новое решение

$$\varphi_{-2} = A \left(l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y} + n \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \frac{1}{r}. \quad (4)$$

Это есть потенциал скоростей для диполя в начале координат, ось которого имеет направление (l, m, n) ; см. (3) § 56. Этот процесс

¹⁾ Симметрическое представление пространственных сферических функций с помощью декартовых координат было введено в одной очень мало оцененной работе Clebsch, Crelle, LXXI, 195 (1863). Независимо от него этот способ был принят Томсоном и Тэтом в качестве основания для своих исследований.

²⁾ Maxwell, Electricity and Magnetism, гл. IX.

может быть продолжен; общий вид объемной сферической функции полученной этим путем, будет

$$\varphi_{-n-1} = A \frac{\partial^n}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_n} \frac{1}{r}, \quad (5)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial h_s} = l_s \frac{\partial}{\partial x} + m_s \frac{\partial}{\partial y} + n_s \frac{\partial}{\partial z},$$

а l_s, m_s, n_s суть произвольные направляющие косинусы.

Функцию φ_{-n-1} можно рассматривать как потенциал скоростей определенной конфигурации простых источников, расположенных вокруг начала, причем размеры этой системы малы сравнительно с r . Чтобы построить эту систему, допустим, что из всякой данной системы источников можно вывести систему высшего порядка, переместив данную систему сначала на отрезок $\frac{1}{2} h_s$ в направлении (l_s, m_s, n_s) и затем накладывая на нее ей *обратную* систему, смещенную из своего первоначального положения на $\frac{1}{2} h_s$ в противоположном направлении. Таким образом, если исходить из того, что в начале координат имеется простой источник O , то первое применение описанного процесса дает нам два источника O_+, O_- на равном расстоянии, но в противоположных направлениях от начала. Тот же прием, примененный к системе O_+, O_- , дает нам уже четыре источника $O_{++}, O_{-+}, O_{+-}, O_{--}$ в вершинах параллелограмма. Следующий шаг дает нам восемь источников в вершинах параллелепипеда и т. д. Если m' есть мощность первоначального источника O , то потенциал скоростей, соответствующий конфигурации 2^n источников, полученных таким образом, на большом расстоянии от этой системы, будет даваться уравнением (5), если

$$4\pi A = m' h_1 h_2 \dots h_n.$$

Эта формула становится верной для всех расстояний r , если h_1, h_2, \dots, h_n неограниченно убывают, а m' неограниченно возрастает, но так, что A остается конечным.

Поверхностная сферическая функция, соответствующая объемной сферической функции (5), выражается формулой

$$S_n = A r^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_n} \frac{1}{r}, \quad (6)$$

а дополнительная объемная сферическая функция будет тогда иметь вид

$$\varphi_n = r^n S_n = r^{2n+1} \varphi_{-n-1}. \quad (7)$$

Если применить метод инверсии¹⁾ к указанной выше конфигурации источников, то можно показать, что объемная сферическая функция

¹⁾ Изложенный Thomson and Tait, Natural Philosophy, § 515.

вида (7) положительной степени n может быть рассматриваема как потенциал скоростей для соответственной конфигурации 2^n простых источников, находящихся в бесконечности.

Прямые, проведенные из начала по различным направлениям (l, m, n) , называются *осями* объемных сферических функций (5) или (7), а точки, в которых эти прямые пересекают сферу радиуса единица, называются *полюсами* поверхностной сферической функции S_n . Формула (5) содержит $2n+1$ произвольных постоянных, именно: полярные координаты n полюсов (две для каждого) и множитель A . Можно показать, что это выражение представляет самую общую поверхностную сферическую функцию, которая имеет порядком целое число n и остается конечной на сфере радиуса единица¹⁾.

§ 83. В оригинальной работе Лапласа²⁾ уравнение

$$\Delta\varphi = 0$$

выражается сначала через сферические координаты r, θ, ω , причем

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \cos \omega, \\ z &= r \sin \theta \sin \omega. \end{aligned}$$

Простейший путь для выполнения этого преобразования состоит в применении теоремы (2) § 36 к поверхности элемента объема $r \delta\theta r \sin \theta \delta\omega \delta r$. В этом случае разность потоков через обе перпендикулярные к r площадки будет

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} r \delta\theta r \sin \theta \delta\omega \right) \delta r.$$

Аналогичным способом мы найдем для обеих перпендикулярных к меридиану ($\omega = \text{const.}$) граней

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial\varphi}{r \partial \theta} r \sin \theta \delta\omega \delta r \right) \delta \theta$$

и для обеих граней, перпендикулярных к кругу широты ($\theta = \text{const.}$):

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\partial\varphi}{r \sin \theta \partial \omega} r \delta\theta \delta r \right) \delta \omega.$$

Складывая, получим

$$\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial\varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2\varphi}{\partial \omega^2} = 0. \quad (1)$$

Этот результат мог быть, конечно, получен из уравнения (1) § 81 обыкновенным способом замены независимых переменных.

¹⁾ Sylvester, Phil. Mag. (5), II, 291 (1876) (Mathematical Papers, Cambridge, 1904, III, 37)

²⁾ Laplace, Théorie de l'attraction des sphéroïdes et de la figure des planètes, Mém. de l'Acad. Roy. des Sciences, 1782 (Oeuvres complètes, Paris, 1878, X, 341); Mécanique Céleste, 2, pl. II.

Если мы теперь предположим, что φ представляет однородную функцию степени n и положим

$$\varphi = r^n S_n,$$

то получим из (1)

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial S_n}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 S_n}{\partial \omega^2} + n(n+1) S_n = 0. \quad (2)$$

Это есть общее дифференциальное уравнение поверхностных сферических функций. Так как произведение $n(n+1)$ не изменяется, если заменить n через $-n-1$, то и

$$\varphi = r^{-n-1} S_n$$

также есть решение уравнения (1), что было уже установлено в § 81.

§ 84. В случае, когда имеет место симметрия относительно оси x , выражение $\frac{\partial^2 S_n}{\partial \omega^2}$ обращается в нуль. Положив $\cos \theta = \mu$, мы получим тогда

$$\frac{d}{d\mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{dS_n}{d\mu} \right\} + n(n+1) S_n = 0; \quad (1)$$

это есть дифференциальное уравнение *зональных* сферических функций ¹⁾. Так как это уравнение содержит члены только двух различных степеней μ , то его удобно интегрировать с помощью рядов. Мы получим

$$S_n = A \left\{ 1 - \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \mu^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \mu^4 - \dots \right\} + \\ + B \left\{ \mu - \frac{(n-1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \mu^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \mu^5 - \dots \right\}. \quad (2)$$

Встречающиеся здесь ряды принадлежат к *гипергеометрическим* рядам; если мы вместе с Гауссом ²⁾ напишем

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma \cdot (\gamma+1)} x^2 + \\ + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \dots, \quad (3)$$

то мы будем иметь

$$S_n = AF \left(-\frac{1}{2} n, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} n, \frac{1}{2}, \mu^2 \right) + \\ + B\mu F \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} n, 1 + \frac{1}{2} n, \frac{3}{2}, \mu^2 \right). \quad (4)$$

Ряд (3) сходится, очевидно, абсолютно, когда x лежит между 0 и 1; когда же $x=1$, ряд будет сходиться тогда и только тогда, когда

$$\gamma - \alpha - \beta > 0.$$

¹⁾ Это название было введено Томсоном и Тэтом, так как узловые линии ($S_n=0$) разбивают сферу радиуса единица на параллельные зоны.

²⁾ См. примечание на стр. 132.

В этом случае мы имеем

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)}, \quad (5)$$

где $\Pi(m)$ есть функция Эйлера $\Gamma(m+1)$ в обозначении Гаусса.

Поведение функции, представленной рядом (3), в том случае, когда

$$\gamma - \alpha - \beta < 0$$

и когда x приближается к значению 1, может быть выяснено с помощью формулы ¹⁾

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x). \quad (6)$$

Так как ряд в правой части последнего соотношения сходится, когда $x=1$, то мы видим, что $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ обращается в бесконечность вместе с выражением $(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}$ или, выражаясь точнее: для значений x , бесконечно близких к единице, будем иметь в конце концов

$$F'(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\alpha+\beta-\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}. \quad (7)$$

Для промежуточного случая

$$\gamma - \alpha - \beta = 0$$

мы можем воспользоваться формулой

$$\frac{d}{dx} F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x). \quad (8)$$

Эта формула вместе с уравнением (6) в нашем случае дает

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F(\alpha, \beta, \gamma, x) &= \frac{\alpha\beta}{\gamma} (1-x)^{-1} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+1, x) = \\ &= \frac{\alpha\beta}{\gamma} (1-x)^{-1} F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1, x). \end{aligned} \quad (9)$$

Ряд, представляемый последним множителем, сходится при $x=1$, так что $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ обращается в бесконечность как $\ln(1-x)$. Выражаясь точнее, мы будем иметь для значений x , близких к этому пределу (т. е. близких к единице)

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta, x) = \frac{\Pi(\alpha+\beta-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)} \ln \frac{1}{1-x}. \quad (10)$$

§ 85. Что касается обоих рядов, которые входят в общее выражение (2) § 84 для зональной сферической функции, то оказывается, что первый ряд обрывается, когда n четное, а второй ряд — когда n нечетное целое число. Для других значений n оба ряда сходятся абсолютно, когда μ заключено между -1 и $+1$, на границах же при $\mu = \pm 1$ они расходятся, так как в каждом случае имеет место равенство $\gamma - \alpha - \beta = 0$, и обращаются в бесконечность как $\ln(1-\mu^2)$.

Отсюда следует, что конечные ряды, соответствующие целым значениям n , суть единственные зональные сферические функции, которые остаются конечными на сфере радиуса единица. Если мы напишем члены ряда в обратном порядке, то найдем, что оба случая:

¹⁾ Forsyth, Differential Equations, 3-е изд., London, 1903, гл. VI.

для n четного и n нечетного, могут быть выражены одной и той же формулой ¹⁾

$$P_n(\mu) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left\{ \mu^n - \frac{n \cdot (n-1)}{2(2n-1)} \mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} \mu^{n-4} - \dots \right\}, \quad (1)$$

причем постоянный множитель так подобран, чтобы при $\mu = 1$ иметь $P_n(\mu) = 1$ ^{*}). Эту формулу можно представить также в виде:

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n. \quad (2)$$

Ряд (1) может быть получен другим путем из формулы (6) § 82, которая в случае зональной сферической функции должна иметь вид

$$S_n = A r^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{1}{r}. \quad (3)$$

В качестве частных случаев из формулы (2) мы будем иметь

$$\begin{aligned} P_0(\mu) &= 1, & P_1(\mu) &= \mu, \\ P_2(\mu) &= \frac{1}{2} (3\mu^2 - 1), & P_3(\mu) &= \frac{1}{2} (5\mu^3 - 3\mu). \end{aligned}$$

Различные авторы выражали P_n через другие функции, в которых за независимое переменное принималось не μ , а θ . Например, имеем

$$\begin{aligned} P_n(\cos \theta) &= 1 - \frac{n(n+1)}{1^2} \sin^2 \frac{1}{2} \theta + \\ &+ \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1^2 \cdot 2^2} \sin^4 \frac{1}{2} \theta - \dots \quad (4) \end{aligned}$$

Это выражение может быть выведено из формулы (2) ²⁾ или же

¹⁾ Для четного n это соответствует случаю

$$A = (-1)^{\frac{1}{2}n} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1)}{2 \cdot 4 \dots n}, \quad B = 0,$$

в то время как для нечетного n мы имеем

$$A = 0, \quad B = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{3 \cdot 5 \dots n}{2 \cdot 4 \dots (n-1)}.$$

См. прим. на стр. 137, Heine, I, 12, 147.

^{*}) Функции P_1, P_2, \dots, P_7 табулированы Glaisher для значений μ с интервалами 0,01, Brit. Ass. Report. 1879, и таблицы напечатаны в работе Dale, Five-Figure Tables..., London, 1903. Одна таблица этих функций для каждого градуса квадранта вычислена под руководством проф. Редгу и опубликована в Phil. Mag., Dec., 1891 г.

Обе таблицы перепечатаны в книге Вьерлюс, также в Jahnke und Emde, Functionentafeln, Leipzig, 1909. Значения первых 20 зональных сферических функций с интервалами в 5° вычислены проф. А. Лодже, Phil. Trans. A, CIII (1904).

²⁾ Murphy, Elementary Principles of the Theories of Electricity..., Cambridge, 1833, стр. 7 (Thomson and Tait, § 782).

его можно получить независимо от последней, если в уравнении (1) § 84 положить $\mu = 1 - 2z$ и интегрировать его при помощи рядов.

Функция $P_n(\mu)$ была впервые введена в анализ Лежандром ¹⁾ как коэффициент при h^n в разложении выражения

$$(1 - 2\mu h + h^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Связь такого представления с нашей теперешней точкой зрения заключается в следующем: если φ есть потенциал скоростей источника на оси x на расстоянии c от начала, то мы будем иметь, согласно определению Лежандра, для значений r , меньших чем c ,

$$4\pi\varphi = (c^2 - 2\mu cr + r^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{c} + P_1 \frac{r}{c^2} + P_2 \frac{r^2}{c^3} + \dots \quad (5)$$

Каждый член этого разложения должен в отдельности удовлетворять уравнению $\Delta\varphi = 0$, и поэтому коэффициент P_n должен быть решением уравнения (1) § 84. Так как P_n определенное таким образом, очевидно, для каждого значения μ конечно и для $\mu = 1$ равно единице, то оно должно совпадать с выражением (1).

Для значений r , больших c , соответствующее разложение будет

$$4\pi\varphi = \frac{1}{r} + P_1 \frac{c}{r^2} + P_2 \frac{c^2}{r^3} + \dots \quad (6)$$

Мы можем отсюда вывести выражения, которые впоследствии (§ 98) будут нам полезны, именно, выражения для потенциала скоростей, соответствующего диполю с напряжением единица, который лежит на оси x на расстоянии c от начала и ось которого совпадает с этой осью. Этот потенциал скоростей, очевидно, равен $\frac{\partial\varphi}{\partial c}$, где φ имеет одно из двух указанных выше выражений; таким образом искомый потенциал для $r < c$ равен

$$-\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{c^2} + 2P_1 \frac{r}{c^3} + 3P_2 \frac{r^2}{c^4} + \dots \right), \quad (7)$$

а для $r > c$

$$\frac{1}{4\pi} \left(P_1 \frac{1}{r^2} + 2P_2 \frac{c}{r^3} + \dots \right). \quad (8)$$

Второе независимое решение уравнения (1) § 84, когда n есть целое число, может быть выражено в наиболее компактной форме ²⁾

$$Q_n(\mu) = \frac{1}{2} P_n(\mu) \ln \frac{1+\mu}{1-\mu} - Z_n, \quad (9)$$

¹⁾ Legendre, Sur l'attraction des sphéroïdes homogènes, Mémoires des Savans Étrangers, X (1785).

²⁾ Это эквивалентно формуле (4) § 84 для четного n , если

$$A = 0, \quad B = (-1)^{\frac{1}{2}n} \frac{2 \cdot 4 \dots n}{1 \cdot 4 \dots (n-1)};$$

для нечетного n , если

$$A = (-1)^{\frac{1}{2}(n+1)} \frac{2 \cdot 4 \dots n-1}{3 \cdot 5 \dots n}, \quad B = 0.$$

где

$$Z_n = \frac{2n-1}{1 \cdot n} P_{n-1} + \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3} + \dots \quad (10)$$

Эта функция $Q_n(\mu)$ иногда называется зональной сферической функцией *второго рода*.

Таким образом имеем

$$Q_0(\mu) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\mu}{1-\mu},$$

$$Q_1(\mu) = \frac{1}{2} \mu \ln \frac{1+\mu}{1-\mu} - 1,$$

$$Q_2(\mu) = \frac{1}{4} (3\mu^2 - 1) \ln \frac{1+\mu}{1-\mu} - \frac{3}{2} \mu,$$

$$Q_3(\mu) = \frac{1}{4} (5\mu^2 - 3\mu) \ln \frac{1+\mu}{1-\mu} - \frac{5}{2} \mu^2 + \frac{2}{3}.$$

§ 86. Если отбросить ограничение, что относительно оси x имеет место симметрия, то можно функцию S_n , если только она есть конечная и однозначная функция от ω , разложить в ряд членов, соответственно содержащих $\cos s\omega$ и $\sin s\omega$. Если это разложение имеет место для всей сферы (т. е. от $\omega=0$ до $\omega=2\pi$), то мы можем (согласно теореме Фурье) допустить, что значения s суть целые числа. Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет каждый такой член, есть

$$\frac{d}{d\mu} \left\{ (1-\mu^2) \frac{dS_n}{d\mu} \right\} + \left\{ n(n+1) - \frac{s^2}{1-\mu^2} \right\} S_n = 0. \quad (1)$$

Если положить

$$S_n = (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s} v,$$

то уравнение (1) примет вид

$$(1-\mu^2) \frac{d^2v}{d\mu^2} - 2(s+1)\mu \frac{dv}{d\mu} + (n-s)(n+s+1)v = 0,$$

который более удобен для интегрирования рядами. Мы получим

$$\begin{aligned} S_n = & A (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s} \left\{ 1 - \frac{(n-s)(n+s+1)}{1 \cdot 2} \mu^2 + \right. \\ & \left. + \frac{(n-s-2)(n-s)(n+s+1)(n+s+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \mu^4 - \dots \right\} + \\ & + B (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s} \left\{ \mu - \frac{(n-s-1)(n+s+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \mu^3 + \right. \\ & \left. + \frac{(n-s-3)(n-s-1)(n+s+2)(n+s+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \mu^5 - \dots \right\}, \quad (2) \end{aligned}$$

причем множитель $\cos s\omega$ или $\sin s\omega$ временно опущен. Пользуясь

символом гипергеометрической функции, выражение (2) можно записать так:

$$S_n = (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}s} \left\{ AF \left(\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}n, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}n, \frac{1}{2}, \mu^2 \right) + \right. \\ \left. + B\mu F \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}n, 1 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}n, \frac{3}{2}, \mu^2 \right) \right\}. \quad (3)$$

Эти выражения сходятся при $\mu^2 < 1$, но так как в каждом случае имеем

$$\gamma - \alpha - \beta = -s,$$

то ряды на границах $\mu = \pm 1$ становятся бесконечными как $(1 - \mu^2)^{-s}$, если только они не обрываются¹⁾. Первый ряд будет конечным, когда $n - s$ есть целое четное число, а второй ряд — когда $n - s$ — нечетное целое число. Перестановкой членов этих рядов мы можем оба эти конечные решения выразить общей формулой²⁾

$$P_n^s(\mu) = \frac{(2n)!}{2^n (n-s)! n!} (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}s} \left\{ \mu^{n-s} - \frac{(n-s)(n-s-1)}{2 \cdot (2n-1)} \mu^{n-s-2} + \right. \\ \left. + \frac{(n-s)(n-s-1)(n-s-2)(n-s-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \mu^{n-s-4} - \dots \right\}. \quad (4)$$

Сравнивая с (1) § 85, мы находим, что

$$P_n^s(\mu) = (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}s} \frac{d^s P_n(\mu)}{d\mu^s}. \quad (5)$$

Что это есть решение уравнения (1), легко может быть проверено непосредственно.

Выражая через степени от $\sin \frac{1}{2} \theta$, мы будем иметь

$$P_n^s(\cos \theta) = \frac{(n+s)!}{2^s (n-s)! s!} \sin^s \theta \left\{ 1 - \frac{(n-s)(n+s+1)}{1 \cdot (s+1)} \sin^2 \frac{1}{2} \theta + \right. \\ \left. + \frac{(n-s-1)(n-s)(n+s+1)(n+s+2)}{1 \cdot 2 \cdot (s+1)(s+2)} \sin^4 \frac{1}{2} \theta - \dots \right\}. \quad (6)$$

Это выражение соответствует формуле (4) § 85 и легко может быть выведено из нее.

Если мы произведем сводку наших результатов, то увидим, что сферическая поверхностная функция, конечная на всей сфере радиуса единица, необходимо должна быть порядка целого числа n , кроме

¹⁾ Rayleigh, Theory of Sound, London, 1877, § 338.

²⁾ Существует большое разнообразие в способах обозначения этих „присоединенных функций“, как их называют. Обозначение, принятое в тексте, предложено F. Neumann и принято Уиттекером и Ватсоном, стр. 119.

того, она, если обозначить через n ее порядок, может быть представлена в следующей форме:

$$S_n = A_0 P_n(\mu) + \sum_{s=1}^n (A_s \cos s\omega + B_s \sin s\omega) P_n^s(\mu), \quad (7)$$

куда входят $2n + 1$ произвольных постоянных. Члены формулы (7), содержащие ω , называются *тессеральными гармоническими функциями*, за исключением двух последних, которые даются формулой

$$(1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}n} (A_n \cos n\omega + B_n \sin n\omega)$$

и называются *секториальными гармоническими функциями* ¹⁾. Названия происходят от вида тех частей, на которые разделяется сфера радиуса единица узловыми линиями $S_n = 0$.

Формулу для тессеральной функции ранга s можно также вывести иным путем из общего выражения (6) § 82, заставляя совпасть из n полюсов сферической функции $n - s$ полюсов в точке сферы $\theta = 0$ и распределяя остальные s полюсов равномерно по экватору $\theta = \frac{1}{2} \pi$.

Второе независимое решение уравнения (1), когда n есть целое число, может быть приведено к виду

$$S_n = (A_s \cos s\omega + B_s \sin s\omega) Q_n^s(\mu), \quad (8)$$

где ²⁾

$$Q_n^s(\mu) = (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}s} \frac{d^s Q_n(\mu)}{d\mu^s}. \quad (9)$$

Эту функцию называют часто *тессеральной функцией второго рода*.

§ 87. Две поверхностные сферические функции S и S' называются сопряженными или ортогональными, если

$$\iint SS' d\omega = 0, \quad (1)$$

где $d\omega$ есть элемент поверхности сферы радиуса единица, а интегрирование распространяется по всей сфере.

Можно показать, что две произвольные поверхностные сферические функции различного порядка, которые являются конечными на единичной сфере, ортогональны друг к другу, а также и то, что $2n + 1$ гармонических функций произвольного порядка n зонального, тессерального и секториального типа, определенные в § 85, 86, все взаимно ортогональны. В дальнейшем мы увидим, что свойство

¹⁾ Прилагательное „сферическая“ подразумевается; его часто опускают ради краткости.

²⁾ Таблицы функции $Q_n(\mu)$, $Q_n^s(\mu)$ для различных значений n и s даны В г у а п, Proc. Camb. Phil. Soc., VI, 297.

ортогональности имеет большое значение для практического применения этой теории.

Так как

$$\delta\tilde{\omega} = \sin\theta \delta\theta \delta\omega = -\delta\mu \delta\omega,$$

то мы получаем, как частный случай вышеуказанной теоремы:

$$\int_{-1}^{+1} P_m(\mu) d\mu = 0, \quad (2)$$

$$\int_{-1}^{+1} P_m(\mu) P_n(\mu) d\mu = 0, \quad (3)$$

$$\int_{-1}^{+1} P_m^s(\mu) P_n^s(\mu) d\mu = 0 \quad (4)$$

при условии, что m и n не равны.

Для $m = n$ можно показать ¹⁾, что

$$\int_{-1}^{+1} (P_n(\mu))^2 d\mu = \frac{2}{2n+1}, \quad (5)$$

$$\int_{-1}^{+1} (P_n^s(\mu))^2 d\mu = \frac{(n+s)!}{(n-s)!} \frac{2}{2n+1}. \quad (6)$$

§ 88. Мы можем теперь сослаться на теорему, что всякая произвольная функция $f(\mu, \omega)$ положения точки на единичной сфере может быть разложена в ряд сферических поверхностных функций, получаемых из (7) § 86, если n будет принимать все целые значения от 0 до ∞ . При вычислении коэффициентов этого разложения применяются формулы (5) и (6).

Если имеет место симметрия относительно оси, то это разложение принимает следующий вид:

$$f(\mu) = C_0 + C_1 P_1(\mu) + C_2 P_2(\mu) + \dots + C_n P_n(\mu) + \dots \quad (7)$$

Умножая обе части этого уравнения на $P_n^s(\mu) d\mu$ и интегрируя в пределах между -1 и $+1$, мы найдем

$$C_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(\mu) d\mu \quad (8)$$

и, вообще,

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(\mu) P_n(\mu) d\mu. \quad (9)$$

¹⁾ Ferrers, стр. 86; Уиттекер и Ватсон, стр. 94, 120.

Математическое доказательство сформулированной выше теоремы можно найти в специальных учебниках ¹⁾; физические основания для допущения возможности такого рода и других подобных разложений будут указываться попутно в связи с различными задачами.

§ 89. Решение уравнения $\Delta\varphi = Q$ можно получить также помощью обычных методов решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами ²⁾. Таким способом мы можем убедиться, что уравнению удовлетворяет функция

$$\varphi = e^{ax + \beta y + \gamma z},$$

или в более общей форме

$$\varphi = f(ax + \beta y + \gamma z), \quad (1)$$

при условии, что

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0. \quad (2)$$

Например, мы можем положить

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 1, \\ \beta &= i \cos \tau, \\ \gamma &= i \sin \tau, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

или также

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 1, \\ \beta &= i \operatorname{ch} u, \\ \gamma &= \operatorname{sh} u. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Можно показать ³⁾, что самое общее решение может быть получено сложением решений вида (1).

Используя предположение (3) и вводя цилиндрические координаты x, ω, ω , причем

$$y = \tilde{\omega} \cos \omega, \quad z = \tilde{\omega} \sin \omega, \quad (5)$$

мы можем составить решение, симметричное относительно оси x , если положим

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + i\tilde{\omega} \cos(\vartheta - \omega)) d\vartheta.$$

Где помещается начало отсчета угла ϑ — безразлично, так как интегрирование распространяется на всю окружность; поэтому формула может быть написана следующим образом ⁴⁾:

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + i\tilde{\omega} \cos \vartheta) d\vartheta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x + i\tilde{\omega} \cos \vartheta) d\vartheta. \quad (6)$$

¹⁾ Относительно новых исследований по этому вопросу см. Wangerin, примечание на стр. 137.

²⁾ Forsyth, Differential Equations, стр. 444.

³⁾ Whittaker, Month. Not. R. Ast. Soc., LXII (1902).

⁴⁾ Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, гл. 18.

Этот результат замечателен тем, что он выражает значения φ в симметричных точках относительно оси x через значения $f(x)$, которые φ принимает в точках на самой оси. С помощью теоремы § 38 можно показать, что вид φ в подобном случае вполне определяется значениями φ на некотором произвольном конечном отрезке оси x ¹⁾.

Как частные случаи выражения (б) получаем функции

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x + i\tilde{\omega} \cos \vartheta)^n d\vartheta, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x + i\tilde{\omega} \cos \vartheta)^{-n-1} d\vartheta,$$

где n есть целое число. Так как эти выражения суть объемные сферические функции, которые остаются конечными на шаре радиуса единица, и так как они для $\tilde{\omega} = 0$ сводятся к r^n и r^{-n-1} , то они должны быть тождественны с $P_n(\mu) r^n$ и соответственно с $P_n(\mu) r^{-n-1}$. Мы получаем таким образом формулы

$$P_n(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\mu + i\sqrt{1-\mu^2} \cos \vartheta)^n d\vartheta, \quad (7)$$

$$P_n(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\vartheta}{(\mu + i\sqrt{1-\mu^2} \cos \vartheta)^{n+1}}, \quad (8)$$

которые первоначально получены были Лапласом²⁾ и Якоби³⁾.

§ 90. Для первого применения изложенной выше теории предположим, что на поверхность шаровидной первоначально покоящейся жидкой массы действуют произвольно распределенные импульсивные давления. Это эквивалентно заданию произвольных значений φ на поверхности. Значение φ внутри тем самым вполне будет определено согласно § 40. Чтобы его найти, предположим, что данные на поверхности значения представлены согласно теореме, изложенной в § 88 в виде ряда по сферическим функциям

$$\varphi = S_0 + S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots, \quad (1)$$

где порядок n есть целое число.

Искомое значение будет тогда иметь вид

$$\varphi = S_0 + \frac{r}{a} S_1 + \frac{r^2}{a^2} S_2 + \dots + \frac{r^n}{a^n} S_n + \dots, \quad (2)$$

ибо это выражение удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi = 0$ и принимает заданный вид (1), когда $r = a$, где a есть радиус шара.

¹⁾ Thomson and Tait, § 498.

²⁾ Laplace, Mécanique céleste, кн. II, гл. II.

³⁾ Jacobi, Crelle, XXVI (1843) (Gesammelte Werke, Berlin, 1881, VI, 148).

Соответствующее решение для случая, когда значения φ заданы на поверхности сферической полости, находящейся в безграничной первоначально покоящейся жидкости, очевидно, будет

$$\varphi = \frac{a}{r} S_0 + \frac{a^2}{r^2} S_1 + \frac{a^3}{r^3} S_2 + \dots + \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} S_n + \dots \quad (3)$$

Комбинируя оба эти результата, получим случай безграничной жидкой массы, связность которой нарушена бесконечно тонким двойным слоем сферической формы, внутри которого действует произвольное импульсивное давление. Значения (2) и (3) для функции φ на этом слое, очевидно, непрерывны. Но значения нормальных компонент скорости будут здесь разрывны; именно для внутренней жидкости мы будем иметь

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \sum n \frac{S_n}{a},$$

а для внешней

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = - \sum (n+1) \frac{S_n}{a}.$$

Движение как внутри, так и вне сферического слоя может таким образом рассматриваться как образованное распределением по сфере простых источников с поверхностной плотностью

$$\sum (2n+1) \frac{S_n}{a}; \quad (4)$$

см. § 58.

§ 91. Предположим, что вместо импульсивных давлений на поверхности шара заданы нормальные компоненты скорости; мы имеем, следовательно,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots, \quad (1)$$

где обязательно отсутствует член нулевого порядка, так как вследствие постоянства объема заключенной массы имеет место равенство

$$\iint \frac{\partial \varphi}{\partial r} d\tilde{\omega} = 0. \quad (2)$$

Функция φ для внутренней задачи будет иметь вид

$$\varphi = A_1 r S_1 + A_2 r^2 S_2 + \dots + A_n r^n S_n + \dots, \quad (3)$$

ибо это выражение конечно и непрерывно, удовлетворяет уравнению $\Delta \varphi = 0$, и постоянные могут быть определены таким образом, что $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ принимает заданные на поверхности значения (1), а именно, мы будем иметь

$$n A_n a^{n-1} = 1.$$

Искомое решение таким образом будет

$$\varphi = a \sum \frac{1}{n} \frac{r^n}{a^n} S_n. \quad (4)$$

Соответствующее решение для внешней задачи находится тем же самым путем, и оно будет иметь вид

$$\varphi = -a \sum \frac{1}{n+1} \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} S_n. \quad (5)$$

Оба решения, взятые вместе, дают движение, которое образуется в безграничной массе жидкости, разделенной на две части тонкой сферической оболочкой, если каждой точке оболочки сообщить заданную нормальную компоненту скорости, удовлетворяющую условию (2).

При переходе через оболочку значение φ делает скачок от $a \sum \frac{S_n}{n}$ к $-a \sum \frac{S_n}{n+1}$, так что *тангенциальная* компонента скорости здесь будет разрывной. Движение как внутреннее, так и внешнее обусловлено двойным слоем (слоем дублетов) с плотностью

$$-a \sum \frac{2n+1}{n(n+1)} S_n; \quad (6)$$

см. § 58.

Кинетическая энергия жидкости, находящейся внутри шара, подсчитанная по формуле (4) § 44, будет выражаться в виде

$$2T = \rho \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS = \rho a^3 \sum \frac{1}{n} \iint S_n^2 d\tilde{\omega}, \quad (7)$$

ибо интегралы, содержащие произведения сферических поверхностных функций различных порядков, вследствие ортогональности (§ 87) выпадают. Для жидкости вне шара будем иметь

$$2T = -\rho \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS = \rho a^3 \sum \frac{1}{n+1} \iint S_n^2 d\tilde{\omega}. \quad (8)$$

§ 91a. Сферические функции нулевого порядка прямо приводят к рассмотрению следующих двух задач, математически тесно связанных между собой: задачи сжатия сферического пузыря в воде и задачи расширения сферической полости, вызываемого давлением заключенного внутри нее газа, как это имеет место в случае подводных мин.

В первой задаче ¹⁾ имеем, если R_0 — первоначальный радиус пузыря а R — радиус в момент t , то

$$\varphi = \frac{R^3 \dot{R}}{r}, \quad (1)$$

¹⁾ Besant, Hydrostatics and Hydrodynamics, Cambridge, 1859; Rayleigh, Phil. Mag., XXXIV, 94 (1917) (Papers, VI, 504).

так как это дает $-\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \dot{R}$ для $r=R$. Если мы положим $\Omega=0$ в уравнении (5) § 22, то получим

$$\frac{p-p_0}{\rho} = \frac{R^2 \ddot{R} + 2R \dot{R}^2}{r} - \frac{R^4 \dot{R}^2}{2r^4}, \quad (2)$$

где p_0 обозначает давление для $r=\infty$. Отсюда, полагая $r=R$ и пренебрегая внутренним давлением, мы получим уравнение

$$R \ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 = -\frac{p_0}{\rho}, \quad (3)$$

интеграл которого есть

$$R^3 \dot{R}^2 = \frac{2}{3} \frac{p_0}{\rho} (R_0^3 - R^3). \quad (4)$$

Это уравнение нельзя дальше легко интегрировать, однако, можно найти момент (t) полного исчезновения пузыря. Именно, если мы положим $R = R_0 x^{\frac{1}{3}}$, то получим

$$\begin{aligned} t_1 &= R_0 \sqrt{\frac{\rho}{6p_0}} \int_0^1 x^{-\frac{1}{6}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = R_0 \sqrt{\frac{\rho}{6p_0}} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} = \\ &= 0,915 R_0 \sqrt{\frac{\rho}{p_0}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Если $\rho=1$, $R_0=1$ см и $p_0=10^6$ CGS (1 атмосфера), то будем иметь $t_1=0,000915$ секунды.

Кинетическая энергия в любой момент времени будет равна

$$2\pi \rho R^3 \dot{R}^2 = \frac{4}{3} \pi p_0 (R_0^3 - R^3), \quad (6)$$

что в действительности легко определить, рассматривая работу, совершаемую достаточно большой частью жидкости против окружающей ее внешней части. При полном сжатии потерянная энергия или, лучше, энергия, превращенная в другие формы, будет равна $\frac{4}{3} \pi p_0 R_0^3$. Для $R_0=1$ и $p_0=10^6$ это составляет $4,18 \cdot 10^6$ эргов или приблизительно 0,0426 кгм.

Уравнения (1) и (2) применимы также и в задаче расширения полости, но при этом давлением p_0 на большом расстоянии можно пренебречь. Если p_1 обозначает начальное давление в полости, когда $R=R_0$, а также $R=0$, то, если принимать адиабатический закон расширения, внутреннее давление в момент t будет даваться формулой

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}. \quad (7)$$

Отсюда следует

$$R \ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 = c_0^2 \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}, \quad (8)$$

где

$$c_0 = \sqrt{\frac{p_1}{\rho}}. \quad (9)$$

Эта величина c_0 имеет размерность скорости и определяет быстроту, с которой совершается изменение. Интегралом уравнения (8) будет

$$\frac{\dot{R}^2}{c_0^2} = \frac{2}{3(\gamma-1)} \left\{ \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 - \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} \right\}. \quad (10)$$

Из уравнения (8) видно, что начальное ускорение (\ddot{R}) в направлении радиуса равно $\frac{c_0^2}{R_0}$ и при этом безразлично, по какому закону происходит расширение.

Из (8) и (10) мы находим, что максимум \dot{R} будет иметь место при

$$\left(\frac{R}{R_0}\right)^{3\gamma-3} = \gamma \quad (11)$$

и что его значение получается из

$$\frac{\dot{R}^2}{c_0^2} = \frac{2}{3\gamma^{\gamma}(\gamma-1)}. \quad (12)$$

Решение нелегко доводится до конца, за исключением частного случая $\gamma = \frac{4}{3}$. Положив

$$\frac{R}{R_0} = 1 + z, \quad (13)$$

мы получим

$$(1+z)^3 \frac{dz}{dt} = \frac{c_0}{R} \sqrt{2z}, \quad (14)$$

откуда следует

$$\frac{c_0 t}{R_0} = \sqrt{2z} \left(1 + \frac{2}{3}z + \frac{1}{5}z^2 \right). \quad (15)$$

В качестве конкретного примера предположим, что первоначальный диаметр полости равен 1 метру и начальное давление $p_1 = 1000$ атмосферам, что дает $c_0 = 3,16 \cdot 10^4$ см/сек. Мы найдем тогда, что радиус полости удваивается в $\frac{1}{300}$ секунды и увеличивается в 5 раз приблизительно в $\frac{1}{30}$ секунды. Начальное ускорение радиуса равно $2,00 \cdot 10^7$ см/сек²; это показывает, что пренебрежение силой тяжести на первых стадиях движения вполне оправдывается. Максимум \dot{R} имеет место при

$$\frac{R}{R_0} = \frac{4}{3}, \quad t = 0,0016 \text{ сек.}$$

и равен приблизительно 145 м/сек или приблизительно $\frac{1}{10}$ скорости звука в воде. При начальных давлениях порядка 10 000 атмосфер и больше мы получим скорости, сравнимые со скоростью звука, причем влиянием сжимаемости в дальнейшем не следует пренебрегать¹⁾.

§ 92. Сферическая функция первого порядка встречается в задаче о движении твердого шара в безграничной покоящейся в бесконечности жидкости. Если мы возьмем начало координат в центре шара, а ось x по направлению движения, то нормальная компонента ско-

¹⁾ Это рассуждение заимствовано из работы L a m b, The early stages of a submarine explosion, Phil. Mag., XLV, 257 (1923).

рости на поверхности выразится так:

$$\frac{Ux}{r} = U \cos \theta,$$

где U есть скорость центра. Поэтому условия для определения φ будут следующие: 1) всюду должно быть $\Delta\varphi = 0$, 2) пространственные производные от φ должны в бесконечности обращаться в нуль, 3) на поверхности шара, т. е. для $r = a$, мы должны иметь

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial r} = U \cos \theta. \quad (1)$$

Вид уравнения (1) как раз указывает на зональную сферическую функцию первого порядка; поэтому мы принимаем

$$\varphi = A \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = -A \frac{\cos \theta}{r^2}.$$

Из условия (1) получим

$$-\frac{2A}{a^3} = U,$$

и для искомого решения будем иметь¹⁾

$$\varphi = \frac{1}{2} U \frac{a^3}{r^2} \cos \theta. \quad (2)$$

Сравнивая с формулой (4) § 56, мы видим, что движение жидкости происходит таким образом, как если бы оно образовалось от дублета напряжения $2\pi U a^3$, находящегося в центре шара. Относительно вида линий тока см. фиг. 28.

Энергию движения жидкости мы получим из выражения

$$\begin{aligned} 2T &= -\rho \iint \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial r} dS = \\ &= \frac{1}{2} \rho a U^3 \int_0^\pi \cos^2 \theta \cdot 2\pi a \sin \theta \cdot a d\theta = \\ &= \frac{2}{3} \pi \rho a^3 U^3 = M' U^3, \end{aligned} \quad (3)$$

где $M' = \frac{2}{3} \pi \rho a^3$. Мы получаем точно, как и в § 68, что эффект давлений жидкости эквивалентен только увеличению инертной массы твердого тела, причем это увеличение равно теперь *половине* массы вытесненной жидкости²⁾.

¹⁾ Stokes, On some cases of Fluid Motion, Camb. Trans., VIII (1843) (Papers, I, 17); Dirichlet, Über die Bewegung eines festen Körpers in einem incompressibeln flüssigen Medium, Berl. Monatsber., 1852 (Werke, Berlin, 1889—1897, II, 115).

²⁾ Stokes, см. сноску ¹⁾. Этот результат был другим путем получен Гринном при рассмотрении бесконечно малого движения. Green, On the Vibration of Pendulums in Fluid-Media, Edin. Trans., 1833 (Papers, стр. 315).

[Обычно это приращение инертной массы тела называют „присоединенной“ массой. Прим. ред.]

Если шар движется прямолинейно и на жидкость не действуют никакие внешние силы, то результирующее давление равно, следовательно, силе

$$-M' \frac{dU}{dt} \quad (4)$$

в направлении движения; оно исчезает, когда U постоянна. Отсюда следует: если шару сообщить движение и затем предоставить самому себе, то он будет двигаться в дальнейшем прямолинейно и с постоянной скоростью.

Поведение твердого тела, движущегося в действительной жидкости, конечно, совершенно иное; чтобы сохранить движение, необходимо непрерывно прикладывать силу, в противном случае тело постепенно пришло бы к покою. Необходимо, однако, при таком сравнении помнить, что в идеальной жидкости не имеет места рассеяние энергии и что, кроме того, когда жидкость несжимаема, твердые тела не могут терять свою кинетическую энергию через передачу ее жидкости, ибо, как мы видели в гл. III, движение жидкости определяется вполне движением твердого тела и поэтому одновременно они и прекращаются.

Если мы хотим изложенный выше результат проверить непосредственным вычислением с помощью формулы

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} q^2 + F(t), \quad (5)$$

то должны вспомнить о том, что начало координат находится в движении и поэтому значения r и θ для определенной точки пространства растут соответственно со скоростью $-U \cos \theta$, $\frac{U \sin \theta}{r}$, или же мы должны воспользоваться (6) § 20. В том и другом случае мы найдем

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} a \frac{dU}{dt} \cos \theta + \frac{9}{16} U^2 \cos 2\theta - \frac{1}{16} U^2 + F(t). \quad (6)$$

Три последних члена правой части этого уравнения будут одинаковы для элементов поверхности в положении θ и $\pi - \theta$; поэтому при постоянном U давления на различные элементы передней полусферы уравновешиваются одинаковыми давлениями на соответствующие элементы задней полусферы. Если же движение шара ускоряется, тогда образуется излишек давления на передней и уменьшение давления на задней полусфере. Обратное происходит, когда движение замедляется. Результирующее давление в направлении движения выражается, как и раньше, формулой

$$- \int_0^\pi 2\pi a \sin \theta \cdot a \, d\theta \cdot p \cos \theta = - \frac{2}{3} \pi \rho a^3 \frac{dU}{dt}.$$

§ 93. Мы можем применить этот же метод, чтобы найти движение, образующееся в жидкости, заключенной между твердым шаром и концентрической сферической оболочкой, когда шар движется с данной скоростью U .

Взяв начало координат в центре шара, мы видим, что необходимо применить сферические функции как положительной, так и отрицательной степени, так как наполненное жидкостью пространство ограничено снаружи и изнутри; действительно, необходимо удовлетворить двум граничным условиям:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r} = U \cos \theta \quad \text{для } r = a \quad (a - \text{радиус шара})$$

и

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad \text{для } r = b \quad (b - \text{радиус внешней оболочки}),$$

причем ось x совпадает, как и выше, с направлением движения.

Мы, следовательно, полагаем

$$\varphi = \left(Ar + \frac{B}{r^2} \right) \cos \theta. \quad (1)$$

Приведенные выше условия дают тогда

$$A - \frac{2B}{a^3} = -U, \quad A - \frac{2B}{b^3} = 0,$$

а отсюда

$$A = \frac{a^3}{b^3 - a^3} U, \quad B = \frac{1}{2} \frac{a^3 b^3}{b^3 - a^3} U. \quad (2)$$

Кинетическую энергию жидкости мы получим из

$$2T = -\rho \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS,$$

где интегрирование распространяется по внутренней сферической поверхности, так как на внешней $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$. Мы найдем

$$2T = \frac{2}{3} \pi \frac{b^3 + 2a^3}{b^3 - a^3} \rho a^3 U^2. \quad (3)$$

Оказывается, что эффективное приращение инертной массы равно теперь ¹⁾

$$\frac{2}{3} \pi \frac{b^3 + 2a^3}{b^3 - a^3} \rho a^3. \quad (4)$$

Если b уменьшается от ∞ до a , то это выражение непрерывно возрастает от $\frac{2}{3} \pi \rho a^3$ до ∞ в согласии с теоремой о минимуме Кельвина (§ 45). Другими словами, введение в задачу § 92 твердой сферической разделяющей стенки действует для всякой данной скорости шара как вынужденное увеличение кинетической энергии и, следовательно, по существу, как увеличение инерции системы.

§ 94. Во всех случаях, в которых движение жидкости имеет место в плоскостях, проходящих через общую прямую, и для всех плоскостей этого пучка одинаково, существует функция тока, которая в некотором отношении аналогична функции тока плоского движения, рассмотренной в прошлой главе. Если взять в некоторой плоскости пучка две точки A и P , из которых A неподвижна,

¹⁾ Stokes, см. сноску на стр. 155.

а P переменна, и затем рассматривать кольцевую поверхность, которая образуется отрезком AP при вращении его около оси симметрии, то поток через эту поверхность, очевидно, есть функция положения P . Обозначим эту функцию через $2\pi\psi$ и совместим ось x с осью симметрии, тогда мы можем сказать, что ψ есть функция от x и $\tilde{\omega}$, где x есть абсцисса точки P , а $\tilde{\omega} = (y^2 + z^2)^{1/2}$ есть ее расстояние от оси x . Кривые $\psi = \text{const.}$ будут, очевидно, линиями тока на рассматриваемой плоскости.

Если P' есть точка, бесконечно близкая к P , лежащая в той же самой меридиональной плоскости, то из вышеизложенного определения следует, что компонента скорости, перпендикулярная к PP' , будет равна

$$\frac{2\pi\delta\psi}{2\pi\tilde{\omega}\cdot PP'};$$

отсюда следует, беря PP' сначала параллельно $\tilde{\omega}$, а затем параллельно x ,

$$u = -\frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{\partial\psi}{\partial\tilde{\omega}}, \quad v = \frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad (1)$$

где u и v суть компоненты скорости жидкости соответственно в направлении x и $\tilde{\omega}$ и где знак устанавливается так же, как и в § 59.

Эти кинематические соотношения можно также получить из формы, которую принимает уравнение неразрывности при рассматриваемых условиях. Если мы выразим, что полный поток через кольцеобразную область, образованную вращением прямоугольного элемента поверхности $\delta x \delta\tilde{\omega}$ вокруг оси, равен нулю, то получим

$$\frac{\partial}{\partial x}(u \cdot 2\pi\tilde{\omega} \delta\tilde{\omega}) \delta x + \frac{\partial}{\partial\tilde{\omega}}(v \cdot 2\pi\tilde{\omega} \delta x) \delta\tilde{\omega} = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tilde{\omega}u) + \frac{\partial}{\partial\tilde{\omega}}(\tilde{\omega}v) = 0, \quad (2)$$

а это уравнение показывает, что

$$\tilde{\omega}v dx - \tilde{\omega}u d\tilde{\omega}$$

есть полный дифференциал. Обозначая его через $d\psi$, мы получим соотношения (1)¹⁾.

До сих пор мы не делали предположения, что движение свободно от вихрей; условие того, что движение невихревое, имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial\tilde{\omega}} = 0,$$

¹⁾ Функция тока в случае симметрии вокруг оси введена в этом виде Stokes, On the Steady Motion of Incompressible Fluids, Camb. Trans., VII (1842) (Papers, I, 1).

Математическая теория разработана очень обстоятельно Sampson, On Stokes' Current-Function, Phil. Trans. A, CLXXXII (1891).

а это приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} - \frac{1}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = 0. \quad (3)$$

Дифференциальное уравнение для φ мы получим, положив в уравнении (2)

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial \omega};$$

оно будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = 0. \quad (4)$$

Отсюда видно, что функции φ и ψ нельзя переставлять (как это имело место в § 62); они даже имеют различные размерности.

Кинетическая энергия жидкости внутри области, ограниченной произвольной поверхностью вращения около оси, будет вычисляться по формуле

$$2T = -\rho \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \rho \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\omega \partial s} 2\pi \omega ds = 2\pi \rho \int \varphi d\psi, \quad (5)$$

где ds есть элемент того сечения, по которому меридиональная плоскость пересекается с ограничивающей поверхностью, и интегрирование проводится в соответствующих направлениях по различным частям этого сечения; ср. § 61 (2).

§ 95. В случае наличия точечного источника в начале координат, потенциал скоростей которого есть

$$\varphi = \frac{1}{r}, \quad (1)$$

поток через произвольную замкнутую кривую численно равен телесному углу, под которым кривая видна из начала координат. Для круга с осью Ox , радиус которого виден из O под углом θ , имеем, следовательно, принимая во внимание знак,

$$2\pi\psi = -2\pi(1 - \cos \theta).$$

Если мы опустим постоянный член, то будем иметь

$$\psi = \frac{x}{r} = \frac{\partial r}{\partial x}. \quad (2)$$

Решения, соответствующие любому числу простых источников, помещенных в различных точках оси x , могут быть, очевидно, налагаемы друг на друга для двойного источника (дублета), когда

$$\varphi = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = \frac{\cos \theta}{r^2}; \quad (3)$$

будем иметь, следовательно,

$$\psi = -\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = -\frac{\tilde{\omega}^2}{r^3} = -\frac{\sin^2 \theta}{r}. \quad (4)$$

И вообще: простой объемной сферической функции степени $-n-1$, т. е. функции

$$\varphi = A \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{1}{r}, \quad (5)$$

соответствует функция ¹⁾

$$\psi = A \frac{\partial^{n+1} r}{\partial x^{n+1}}. \quad (6)$$

Более общая формула, применимая к сферическим функциям произвольной степени, безразлично целой или нет, получается следующим образом. Применяя полярные координаты r и θ и совмещая линейный элемент PP' § 94 сначала с $r \delta\theta$, а затем с δr , находим компоненты скорости в меридиональной плоскости вдоль r и перпендикулярно к r

$$-\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (7)$$

Таким образом, в случае безвихревого движения мы будем иметь

$$\frac{\partial \psi}{\sin \theta \partial \theta} = r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}. \quad (8)$$

Если

$$\varphi = r^n S_n, \quad (9)$$

где S_n есть зональная сферическая функция n -го порядка, то, положив $\mu = \cos \theta$, мы получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = -nr^{n+1} S_n, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = r^n (1 - \mu^2) \frac{dS_n}{d\mu}.$$

Из последнего уравнения получим функцию тока

$$\psi = \frac{1}{n+1} r^{n+1} (1 - \mu^2) \frac{dS_n}{d\mu}, \quad (10)$$

которая необходимо должна удовлетворять и первому соотношению; это легко можно проверить с помощью (1) § 84.

Таким образом в случае зональной сферической функции P_n мы будем иметь соответствующие выражения:

$$\varphi = r^n P_n(\mu), \quad \psi = \frac{1}{n+1} r^{n+1} (1 - \mu^2) \frac{dP_n}{d\mu} \quad (11)$$

и

$$\varphi = r^{-n-1} P_n(\mu), \quad \psi = -\frac{1}{n} r^{-n} (1 - \mu^2) \frac{dP_n}{d\mu}, \quad (12)$$

причем выражения (12) должны быть эквивалентны (5) и (6).

¹⁾ Stefan. Über die Kraftlinien eines um eine Axe symmetrischen Feldes, Wied. Ann., XVII (1882).

Те же самые соотношения, конечно, имеют место и для зональных сферических функций второго рода Q_n .

§ 96. В § 92 мы видели, что движение, вызываемое твердым шаром в неограниченной жидкости, можно рассматривать как образованное наличием дублета в центре шара. Сравнивая данные там формулы с (4) § 95, мы видим, что функция тока, соответствующая движению шара, будет равна

$$\psi = -\frac{1}{2} U \frac{a^3}{r} \sin^2 \theta. \quad (1)$$

Вид линий тока, проведенных для нескольких равноотстоящих значений ψ , изображен на фиг. 28. Линии же тока по отношению к шару¹⁾ представлены в конце главы VII.

Функция тока, соответствующая двум дублетам, ось которых направлены вдоль оси x в противоположные стороны, имеет вид

$$\psi = \frac{A\tilde{\omega}^3}{r_1^3} - \frac{B\tilde{\omega}^3}{r_2^3}, \quad (2)$$

где r_1 и r_2 означают расстояния произвольной точки от положений P_1 , P_2 обоих дублетов. На поверхности тока $\psi = 0$ имеем

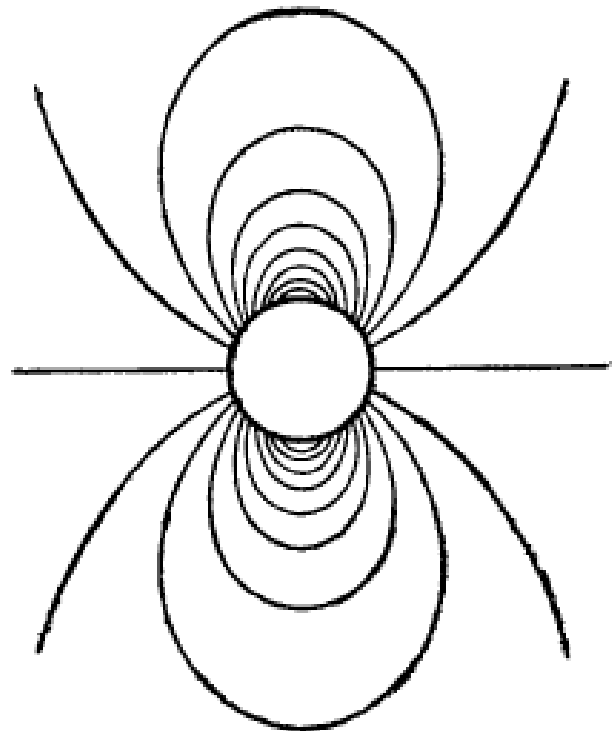
$$\frac{r_1}{r_2} = \left(\frac{A}{B}\right)^{1/3},$$

т. е. эта поверхность есть сфера, для которой P_1 и P_2 суть обратные (инверсионные) точки. Если O есть центр этой сферы и a ее радиус, то находим

$$\frac{A}{B} = \frac{(OP_1)^3}{a^3} = \frac{a^3}{(OP_2)^3}. \quad (3)$$

Эта сфера может быть принята за неподвижную границу жидкости с обеих сторон, и мы получаем таким образом движение, образованное дублетом (или движением бесконечно малой сферы вдоль Ox) при наличии твердой сферической границы. Возмущающее влияние этой сферы на линии тока таково, как если бы оно происходило от дублета противоположного знака, помещенного в точке инверсии положения первого дублета, причем отношение мощностей обоих дублетов дано формулой (3)²⁾. Этот воображаемый дублет можно назвать *зеркальным* изображением первоначального.

Существует также простой способ построения зеркального изображения точечного источника относительно неподвижной сферы. Изображение источника мощности m в точке P будет состояться из источника мощности $m \frac{OQ}{a}$, помещенного в точке инверсии Q , и стоков, непрерывно распределен-



Фиг. 28.

¹⁾ То-есть линии тока относительного движения жидкости. *Прим. ред.*

²⁾ Этот результат получен Stokes, On the Resistance of a Fluid to two Oscillating Spheres, Brit. Ass. Report, 1847 (Papers, I, 230).

ных с постоянной линейной плотностью $-\frac{m}{a}$ вдоль отрезка, соединяющего P с центром O ¹⁾.

Это можно получить с помощью интеграции из предшествующего результата, но будет проще проверить это непосредственно. Из формулы (2) § 95 как раз получается, что функция тока, соответствующая линии источников с плотностью m , будет равна

$$\psi = m(r - r'), \quad (4)$$

где r, r' суть расстояния двух концов линии от рассматриваемой точки. А тогда указанное выше расположение источников в какой-либо точке R на самой сфере будет давать

$$\psi = -m \cos RPO - m \frac{OQ}{a} \cos OQR - \frac{m}{a} (OR - QR). \quad (5)$$

Так как

$$QR = OR \cos ORQ + OQ \cos OQR \text{ и } RPO = ORQ,$$

то это равенство приводится к $\psi = -m$, т. е. ψ будет постоянной на сфере.

Для вычисления силы, действующей на сферу, обратимся к зональным сферическим функциям. Если возьмем за начало центр O , то потенциал скоростей первоначального источника вблизи самой сферы представится в виде

$$\frac{\varphi}{m} = \frac{1}{c} + \frac{r \cos \theta}{c^2} + \frac{r^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2c^3} + \dots \quad (6)$$

Движение, обусловленное присутствием сферы, будет тогда даваться потенциалом скоростей вида

$$\frac{\varphi'}{m} = \frac{a^3 \cos \theta}{2c^3 r^2} + \frac{a^5 (3 \cos^2 \theta - 1)}{3c^5 r^3} + \dots \quad (7)$$

так как это дает $\frac{\partial}{\partial r} (\varphi + \varphi') = 0$ для $r = a$. В таком случае скорость на поверхности будет

$$q = -\frac{\partial}{a \partial \theta} (\varphi + \varphi') = \frac{3m}{2c^3} \sin \theta + \frac{5ma}{3c^5} \sin \theta \cos \theta + \dots \quad (8)$$

Для получения приближенного результата мы можем в разложении (8) ограничиться выписанными членами. Тогда результирующая сила, направленная к P , будет равна

$$X = -\int_0^\pi p \cos \theta 2\pi a^2 \sin \theta d\theta = \pi q a^2 \int_0^\pi q^2 \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{4\pi q a^3 m^2}{c^5}; \quad (9)$$

Если f будет ускорением в O в случае, когда сфера удалена, то так как $f = \frac{2m^2}{c^5}$, будем иметь

$$X = 2\pi q a^3 f. \quad (10)^*$$

§ 97. Ранкин²⁾ применяет метод, подобный методу § 71, для того, чтобы определить формы тел вращения, которые при движе-

¹⁾ Hicks, см. ниже сноску на стр. 168; см. фигуру 10 на стр. 94.

²⁾ Проф. G. I. Taylor, Aeronautical Research Committee, R. M., 1166 (1928);

³⁾ Rankine, On the Mathematical Theory of Stream Lines, especially those with Four Foci and upwards, Phil. Trans., 1871, стр. 267 (эта работа не содержится в собрании, указанном на стр. 85).

нии в направлении своей оси порождают в окружающей жидкости заданный вид симметричного относительно оси безвихревого движения.

Если обозначить через U скорость твердого тела, а через δs элемент его меридиана, то нормальная компонента скорости для произвольной точки поверхности будет равна $U \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial s}$, а та же компонента скорости соприкасающейся частицы жидкости равна $\frac{\partial \psi}{\omega \partial s}$. Приравнивая эти значения и интегрируя вдоль меридиана, получим

$$\psi = -\frac{1}{2} U \tilde{\omega}^2 + \text{const.} \quad (1)$$

Вставляя в это уравнение значение ψ , соответствующее какому-нибудь распределению источников вдоль оси симметрии, мы получим уравнение семейства линий тока. Если сумма мощностей источников равна нулю, то одна из этих линий тока будет определять профиль конечного твердого тела вращения, обтекание которого и будет иметь место.

Этим путем мы легко можем проверить решение, полученное для шара; именно, полагая

$$\psi = \frac{A \tilde{\omega}^2}{r^3}, \quad (2)$$

мы найдем, что выражение (1) для $r = a$ будет удовлетворяться при предположении, что

$$A = -\frac{1}{2} U a^3, \quad (3)$$

что согласуется с выражением (1) § 96.

Оказывается, что с помощью непрерывного распределения источников и стоков вдоль оси можно получить такие формы, которые эмпирически признаны выгодными в качестве профилей дирижаблей. В таких случаях можно вычислить давление жидкости и результаты сравнить с опытом.

§ 98. Движение жидкости, ограниченной двумя сферическими поверхностями, в некоторых случаях можно найти с помощью метода последовательных приближений. Для случая двух шаров, движущихся в направлении их линий центров, решение задачи существенно облегчается благодаря результатам, приведенным в конце § 96 относительно „изображения“ дублета в сфере.

Пусть a, b суть радиусы, а c — расстояние между центрами A, B (фиг. 29) обоих шаров. Обозначим через U скорость A в направлении к B , а через U' скорость B в направлении к A . Далее, пусть для некоторой произвольной точки P

$$AP = r, \quad BP = r', \quad PAB = \theta, \quad PBA = \theta'.$$

Потенциал скоростей будет иметь следующий вид:

$$U\varphi + U'\varphi', \quad (1)$$

где функции φ и φ' определяются следующими условиями:

$$1) \quad \Delta\varphi = 0, \quad \Delta\varphi' = 0 \quad (2)$$

во всей жидкости;

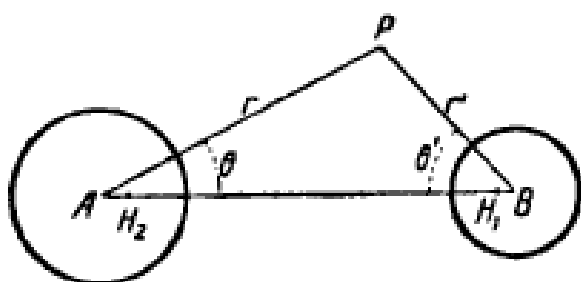
2) их производные по координатам обращаются в нуль в бесконечности;

$$3) \quad \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\cos\theta, \quad \frac{\partial\varphi'}{\partial r} = 0 \quad (3)$$

на поверхности шара A , в то время как

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial\varphi'}{\partial r} = -\cos\theta \quad (4)$$

на поверхности шара B . Легко усмотреть, что φ есть значение потенциала скоростей для случая, когда A движется со скоростью, равной единице, по направлению к B , в то время как B находится в покое; такой же смысл имеет и φ' .



Фиг. 29.

Чтобы найти φ , заметим, что при отсутствии B движение жидкости происходило бы таким образом, как если бы оно было обусловлено дублетом, помещенным в A , и ось которого имеет направление AB . Теорема § 96 показывает, что мы можем удовлетворить условию обращения в нуль скорости по нормали на поверхности шара B , если введем второй дублет, а именно „изображение“ дублета в A относительно шара B . Это изображение

лежит в H_1 , точке, являющейся инверсией A по отношению к шару B ; его ось имеет направление AB и мощность равна $-\mu_0 \frac{b^2}{c^2}$, где μ_0 есть мощность первоначального источника в A , именно

$$\mu_0 = 2\pi a^2.$$

Движение, происходящее от действия обоих дублетов A и H_1 , будет, однако, нарушать условие, которое должно удовлетворяться на поверхности шара A ; чтобы уничтожить на сфере B нормальные компоненты скорости, обусловленные дублетом H_1 , мы должны взять в H_2 еще дублет, являющийся изображением H_1 относительно шара A . Благодаря этому на поверхности B получается нормальная компонента скорости, которая опять будет уничтожаться прибавлением изображения H_2 относительно B и т. д. Если обозначим через $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ мощности последовательных изображений дублетов, а через f_1, f_2, f_3, \dots их расстояния от A , то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} f_1 = c - \frac{b^2}{c}, \quad f_2 = \frac{a^2}{f_1}, \quad \frac{\mu_1}{\mu_0} = -\frac{b^2}{c^2}, \quad \frac{\mu_2}{\mu_1} = -\frac{a^2}{f_1^2}, \\ f_2 = c - \frac{b^2}{c - f_2}, \quad f_3 = \frac{a^2}{f_2}, \quad \frac{\mu_3}{\mu_2} = -\frac{b^2}{(c - f_2)^2}, \quad \frac{\mu_4}{\mu_3} = -\frac{a^2}{f_2^2}, \\ f_3 = c - \frac{b^2}{c - f_3}, \quad f_4 = \frac{a^2}{f_3}, \quad \frac{\mu_5}{\mu_4} = -\frac{b^2}{(c - f_3)^2}, \quad \frac{\mu_6}{\mu_5} = -\frac{a^2}{f_3^2}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

и т. д.; закон образования изображений очевиден. Интенсивность изображений дублетов все время уменьшается и притом очень быстро, если радиус каждого шара мал по сравнению с кратчайшим расстоянием между обеими поверхностями.

Формула для кинетической энергии будет теперь иметь вид

$$2T = -e \iint (U\varphi + U'\varphi') \left(U \frac{\partial\varphi}{\partial n} + U' \frac{\partial\varphi'}{\partial n} \right) dS = LU^2 + 2MUU' + NU'^2, \quad (6)$$

где

$$L = -e \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS_A, \quad M = -e \iint \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n} dS_B = -e \iint \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS_A, \\ N = -e \iint \varphi' \frac{\partial \varphi'}{\partial n} dS_B, \quad (7)$$

а индексы указывают, по поверхности какого шара распространяется интегрирование. Равенство обоих выражений для M следует из теоремы Грина (§ 44).

Значение φ вблизи поверхности A можно получить из результатов (7) и (8) § 85; а именно, мы получим

$$4\pi\varphi = (\mu_0 + \mu_2 + \mu_4 + \dots) \frac{\cos \theta}{r^2} - 2 \left(\frac{\mu_1}{f_1} + \frac{\mu^2}{f_2} + \dots \right) r \cos \theta + \dots, \quad (8)$$

причем мы опускаем остальные члены, содержащие зональные сферические функции высшего порядка, так как они при последующем интегрировании по поверхности обращаются в нуль вследствие свойства ортогональности (§ 87). Положив

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\cos \theta,$$

мы найдем с помощью уравнений (5)

$$L = \frac{1}{3} e (\mu_0 + 3\mu_2 + 3\mu_4 + \dots) = \\ = \frac{2}{3} \pi e a^3 \left(1 + 3 \frac{a^2 b^2}{c^2 f_1^2} + 3 \frac{a^2 b^4}{c^2 f_1^2 (c - f_2)^2 f_2^2} + \dots \right). \quad (9)$$

Получается, что во всех случаях присоединенная масса шара A возрастает от присутствия неподвижного шара B ; ср. § 93.

Выражение для N может быть сразу написано из соображений симметрии; оно имеет следующий вид:

$$N = \frac{2}{3} \pi e b^3 \left(1 + 3 \frac{a^2 b^2}{c^2 f_1^2} + 3 \frac{a^2 b^4}{c^2 f_1^2 (c - f_2)^2 f_2^2} + \dots \right), \quad (10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= c - \frac{a^2}{c}, & f_2 &= \frac{b^2}{f_1}, \\ f_2' &= c - \frac{a^2}{c - f_2}, & f_4 &= \frac{b^2}{f_2}, \\ f_4 &= c - \frac{a^2}{c - f_4}, & f_6 &= \frac{b^2}{f_4} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

и т. д.

Чтобы определить M , необходимо знать значение φ' вблизи поверхности A ; этот потенциал обусловлен дублетами $\mu_0', \mu_2', \mu_4', \mu_6', \dots$, удаленными от A на расстояниях $c, c - f_2, c - f_4, c - f_6, \dots$, причем $\mu_0' = -2\pi b^3$, и

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mu_2'}{\mu_0'} &= -\frac{a^2}{c^2}, & \frac{\mu_4'}{\mu_2'} &= -\frac{b^2}{f_1^2}, \\ \frac{\mu_6'}{\mu_4'} &= -\frac{a^2}{(c - f_2)^2}, & \frac{\mu_8'}{\mu_6'} &= -\frac{b^2}{f_2^2}, \\ \frac{\mu_{10}'}{\mu_8'} &= -\frac{a^2}{(c - f_4)^2}, & \frac{\mu_{12}'}{\mu_{10}'} &= -\frac{b^2}{f_4^2} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

и т. д. Это дает для точек вблизи поверхности A

$$4\pi\varphi' = (\mu'_1 + \mu'_2 + \mu'_3 + \dots) \frac{\cos\theta}{r^2} - \\ - 2\left(\frac{\mu'_0}{c^2} + \frac{\mu'_2}{(c-f'_2)^2} + \frac{\mu'_4}{(c-f'_4)^2} + \dots\right) r \cos\theta + \text{и т. д.} \quad (13)$$

Отсюда следует

$$M = -e \iint \varphi' \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS_A = e(\mu'_1 + \mu'_2 + \mu'_3 + \dots) = \\ = 2\pi e \frac{a^2 b^2}{c^2} \left\{ 1 + \frac{a^2 b^2}{f_1^2 (c-f'_2)^2} + \frac{a^2 b^2}{f_1^2 f_2^2 (c-f'_2)^2 (c-f'_4)^2} + \dots \right\}. \quad (14)$$

Если отношения $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$ оба малы, то будем иметь приближенно¹⁾

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{2}{3} \pi e a^3 \left(1 + 3 \frac{a^2 b^2}{c^2} \right), & M &= 2\pi e \frac{a^2 b^2}{c^2}, \\ N &= \frac{2}{3} \pi e b^3 \left(1 + 3 \frac{a^2 b^2}{c^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Если в приведенных выше результатах положить $b = a$, $U' = U$, то плоскость, перпендикулярная к AB и делящая пополам отрезок AB , есть плоскость симметрии и поэтому может рассматриваться как твердая граница жидкости, находящейся по обеим ее сторонам. Если положить $c = 2h$, то мы найдем тогда для кинетической энергии жидкости, в которой движется шар на расстоянии h от твердой плоской границы перпендикулярно к ней, следующее выражение:

$$2T = \frac{2}{3} \pi e a^3 \left(1 + \frac{3}{8} \frac{a^2}{h^2} + \dots \right) U^2. \quad (16)$$

Этот результат принадлежит Стоксу.

§ 99. Если шары движутся перпендикулярно к направлению линии их центров, то задача значительно усложняется; поэтому мы довольствуемся первыми приближениями и за более обстоятельным исследованием отошлем к сочинениям, приведенным на стр. 168.

Пусть шары движутся со скоростями V и V' параллельно друг другу и перпендикулярно к AB ; обозначим через r, θ, ω и r', θ', ω' две системы полярных координат, полюсы которых лежат в A и B , а полярные оси имеют направление скоростей V, V' . Потенциал скоростей будет иметь тогда вид

$$V\varphi + V'\varphi',$$

при соблюдении следующих условий на границах:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\cos\theta, \quad \frac{\partial\varphi'}{\partial r} = 0 \quad \text{для } r = a \quad (1)$$

и

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r'} = 0, \quad \frac{\partial\varphi'}{\partial r'} = -\cos\theta' \quad \text{для } r' = b. \quad (2)$$

¹⁾ Вплоть до этой степени приближения результаты могут быть найдены более простым способом, не вводя „изображений“, а именно с помощью приема, подобного изложенному в следующем параграфе.

При отсутствии шара B потенциал скоростей, соответствующий движению шара A со скоростью, равной единице, равен

$$\frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} \cos \theta.$$

Так как $r \cos \theta = r' \cos \theta'$, то вблизи B значение этого потенциала приближенно равно

$$\frac{1}{2} \frac{a^3}{c^3} r' \cos \theta'.$$

Этот потенциал скоростей на поверхности B создает нормальные компоненты скорости, которые могут быть погашены прибавлением к потенциалу выражения

$$\frac{1}{4} \frac{a^3 b^3}{c^3} \frac{\cos \theta'}{r'^3},$$

которое вблизи A приближенно равно

$$\frac{1}{4} \frac{a^3 b^3}{c^3} r \cos \theta.$$

Чтобы погасить появившиеся теперь нормальные компоненты скорости на поверхности A , мы должны еще прибавить член

$$\frac{1}{8} \frac{a^3 b^3 \cos \theta}{c^3 r^3}.$$

Если мы прервем здесь наш процесс и соберем наши результаты, то для поверхности шара A получим

$$\varphi = \frac{1}{2} a \left(1 + \frac{3}{4} \frac{a^3 b^3}{c^3} \right) \cos \theta, \quad (3)$$

а для поверхности B

$$\varphi = \frac{3}{4} b \frac{a^3}{c^3} \cos \theta'. \quad (4)$$

Обозначая через P , Q , R коэффициенты в выражении для кинетической энергии

$$2T = PV^2 + 2QVV' + RV'^2, \quad (5)$$

мы будем тогда иметь

$$\left. \begin{aligned} P &= -e \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS_A = \frac{2}{3} \pi e a^3 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{a^3 b^3}{c^3} \right), \\ Q &= -e \iint \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n} dS_B = \pi e \frac{a^3 b^3}{c^3}, \\ R &= -e \iint \varphi' \frac{\partial \varphi'}{\partial n} dS_B = \frac{2}{3} \pi e b^3 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{a^3 b^3}{c^3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Случай шара, который движется на расстоянии h параллельно неподвижной граничной плоскости, мы получим, если положим $b = a$, $V = V'$

$c=2h$ и полученное значение T разделим пополам; тогда будем иметь

$$2T = \frac{2}{3} \pi \rho a^3 \left(1 + \frac{3}{16} \frac{a^2}{h^2}\right) V^2. \quad (7)$$

Этот результат, тоже данный Стоксом, можно сравнить с результатом (16) § 98¹⁾.

Цилиндрические функции

§ 100. Если мы введем цилиндрические координаты $x, \tilde{\omega}, \omega$, то уравнение $\Delta\varphi = 0$ принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tilde{\omega}^2} + \frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{\omega}} + \frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} = 0. \quad (1)$$

Это уравнение можно получить непосредственным преобразованием координат или, еще проще, выражая по способу § 83, что полный поток через поверхность, ограничивающую элемент $\delta x \delta \tilde{\omega} \tilde{\omega} \delta \omega$, равен нулю.

В случае симметрии относительно оси x уравнение приводится к виду (4) § 94. Частное решение его тогда будет

$$\varphi = e^{\pm kx} \chi(\tilde{\omega}),$$

где $\chi(\tilde{\omega})$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\chi''(\tilde{\omega}) + \frac{1}{\tilde{\omega}} \chi'(\tilde{\omega}) + k^2 \chi(\tilde{\omega}) = 0. \quad (2)$$

Это есть дифференциальное уравнение бесселевых функций нулевого порядка.

Общее решение этого дифференциального уравнения состоит, конечно, из суммы двух определенных функций от $\tilde{\omega}$, из которых каждая умножается на произвольную постоянную. Решение, конечное для $\tilde{\omega} = 0$, легко находится в виде степенного ряда с положительными показателями; оно обыкновенно обозначается через $CJ_0(k\tilde{\omega})$, где

$$J_0(\zeta) = 1 - \frac{\zeta^2}{2^2} + \frac{\zeta^4}{2^4 \cdot 4^2} - \dots \quad (3)$$

¹⁾ Для более полного рассмотрения математической задачи движения двух шаров укажем на следующие работы: W. M. Hicks, On the Motion of two Spheres in a Fluid, Phil. Trans., 1880, стр. 455; R. A. Herman, On the Motion of two Spheres in Fluid, Quart. Journ. Math., XXII (1887); Basset, On the Motion of two Spheres in a Liquid, etc. Proc. Lond. Math. Soc., XVIII, 369 (1887); см. также Carl Neumann, Hydrodynamische Untersuchungen, Leipzig, 1883; Basset, Hydrodynamics, Cambridge, 1888. Взаимодействие „пульсирующих“ шаров, т. е. шаров, которые периодически меняют свой объем, исследовано С. А. Бьеркнесом, и им дано механическое толкование с помощью электрических и других сил. Полное изложение этих исследований дано его сыном В. Бьеркнесом (V. Bjerknes, Vorlesungen über Hydrodynamische Fernkräfte, Leipzig 1900—1902). Задача была исследована также Hicks, Camb. Proc. III, 276 (1879); IV, 29 (1880) и Voigt, Göttinger Nachrichten, 1891, стр. 37.

Решение уравнения $\Delta\varphi = 0$ имеет таким образом вид¹⁾

$$\varphi = e^{\pm kx} J_0(k\tilde{\omega}). \quad (4)$$

Из § 94 легко видеть, что соответствующее значение функции тока равно

$$\psi = \mp \tilde{\omega} e^{\pm kx} J'_0(k\tilde{\omega}). \quad (5)$$

Формулу (4) можно рассматривать как частный случай формулы (6) § 89; она эквивалентна формуле

$$\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{\pm k(x+i\tilde{\omega} \cos \theta)} d\theta, \quad (6)$$

так как

$$J_0(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\zeta \cos \theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{i\zeta \cos \theta} d\theta, \quad (7)$$

что легко проверить, если косинус разложить в ряд и почленно проинтегрировать.

Кроме того, выражение (4) можно рассматривать как предельную форму, к которой стремится объемная зональная сферическая функция, когда порядок (n) и одновременно расстояние начала от рассматриваемой точки делается бесконечно большим, причем обе стремящиеся к бесконечности величины должны удовлетворять определенному соотношению²⁾.

Итак, мы можем написать

$$\varphi = \frac{r^n}{a^n} P_n(\mu) = \left(1 + \frac{x}{a}\right)^n \chi_n(\tilde{\omega}), \quad (8)$$

где мы временно заменили значения x и $\tilde{\omega}$, полагая

$$r = a + x, \quad \tilde{\omega} = 2a \sin \frac{1}{2} \theta,$$

в то время как

$$\chi_n(\tilde{\omega}) = 1 - \frac{n(n+1)}{2^2} \frac{\tilde{\omega}^2}{a^2} + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2^2 \cdot 4^2} \frac{\tilde{\omega}^4}{a^4} - \dots \quad (9)$$

[см. уравнение (4) § 85]. Если мы положим теперь $k = \frac{n}{a}$ и предположим, что a и n делаются бесконечно большими, в то время как k остается конечным, то символы x и $\tilde{\omega}$ принимают опять их прежние значения, и мы опять получаем формулу (4) с верхним знаком в показателе; нижний знак получится, если исходить от выражения

$$\varphi = \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} P_n(\mu).$$

¹⁾ С другими обозначениями эти решения можно найти у Пуассона, см. примечание на стр. 34.

²⁾ Этот прием был указан, не ограничиваясь случаем симметрии, Thompson and Tait, § 783 (1867).

Этот же прием позволяет выразить произвольную функцию от $\tilde{\omega}$ через бесселевы функции нулевого порядка¹⁾. Согласно § 88 произвольную функцию угла широты на сферической поверхности можно разложить по зональным сферическим функциям в виде

$$F(\mu) = \sum \left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(\mu) \int_{-1}^{+1} F(\mu') P_n(\mu') d\mu'. \quad (10)$$

Обозначив через $\tilde{\omega}$ длину хорды, проведенной от полюса ($\theta = 0$) сферы к переменной точке, получим

$$\tilde{\omega} = 2a \sin \frac{1}{2} \theta, \quad \tilde{\omega} \delta \tilde{\omega} = -a^2 \delta \mu,$$

где a есть радиус; формулу (10) можно теперь написать так:

$$f(\tilde{\omega}) = \frac{1}{a^2} \sum \left(n + \frac{1}{2}\right) H_n(\tilde{\omega}) \int_0^{2a} f(\tilde{\omega}') H_n(\tilde{\omega}') \tilde{\omega}' d\tilde{\omega}'. \quad (11)$$

Если мы теперь положим

$$k = \frac{n}{a}, \quad \delta k = \frac{1}{a}$$

и затем заставим a стремиться к бесконечности, то получим важную теорему²⁾

$$f(\tilde{\omega}) = \int_0^{\infty} J_0(k\tilde{\omega}) k dk \int_0^{\infty} f(\tilde{\omega}') J_0(k\tilde{\omega}') \tilde{\omega}' d\tilde{\omega}'. \quad (12)$$

§ 101. Если предположить в (1) функцию φ разложенной в тригонометрический ряд, расположенный по $\cos s\omega$ и $\sin s\omega$, то коэффициент такого члена будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tilde{\omega}^2} + \frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{\omega}} - \frac{s^2}{\tilde{\omega}^2} \varphi = 0. \quad (13)$$

Это уравнение удовлетворяется функцией

$$\varphi = e^{\pm kx} \chi(\tilde{\omega}),$$

причем $\chi(\tilde{\omega})$ удовлетворяет уравнению

$$\chi''(\tilde{\omega}) + \frac{1}{\tilde{\omega}} \chi'(\tilde{\omega}) + \left(k^2 - \frac{s^2}{\tilde{\omega}^2}\right) \chi(\tilde{\omega}) = 0. \quad (14)$$

Это уравнение есть дифференциальное уравнение бесселевых функций порядка s ³⁾. Решение, конечное для $\tilde{\omega} = 0$, может быть написано

¹⁾ Этот прием принадлежит, повидимому, в существенных чертах К. Нейману (1862).

²⁾ Более строгое доказательство и историю вопроса см. Ватсон.

³⁾ Forsyth, § 100; Уиттекер и Ватсон, гл. XVII.

в форме

$$\chi(\tilde{\omega}) = C J_s(k\tilde{\omega}),$$

где

$$J_s(\zeta) = \frac{\zeta^s}{2^s \Gamma(s)} \left\{ 1 - \frac{\zeta^2}{2(2s+2)} + \frac{\zeta^4}{2 \cdot 4(2s+2)(2s+4)} - \dots \right\}. \quad (15)$$

Общее решение уравнения (14) дополнительно содержит бесселеву функцию „второго рода“, которой мы займемся в одном из следующих отделов нашего исследования¹⁾.

Итак, мы получили решения уравнения $\Delta\varphi = 0$ следующего вида:

$$\varphi = \begin{cases} e^{\pm kx} J_s(k\tilde{\omega}) \cos s\omega \\ e^{\pm kx} J_s(k\tilde{\omega}) \sin s\omega. \end{cases} \quad (16)$$

Можно было бы также получить их, как предельные формы объемных сферических функций

$$\frac{r^n}{a^n} P_n^s(\mu) \begin{cases} \cos s\omega \\ \sin s\omega \end{cases}, \quad \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} P_n^s(\mu) \begin{cases} \cos s\omega \\ \sin s\omega \end{cases},$$

если применить разложение (6) § 86²⁾.

§ 102. Формула (12) § 100 позволяет нам, что иногда бывает целесообразно, выразить значение φ по одну сторону безграничной плоскости ($x=0$) через значения φ или $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ в точках этой плоскости,

¹⁾ Относительно дальнейшей теории бесселевых функций обоих родов мы укажем на Gray and Mathews, *Treatise on Bessel-Functions*, изд. 2-е, London (1922) и на G. N. Watson, *Theory of Bessel-Functions*, Cambridge, (1923), где находятся также дальнейшие подробные литературные указания. обстоятельное исследование по этому вопросу с физической точки зрения можно найти у Rayleigh, *Theory of Sound*, гл. IX, XVIII, где указаны также многие важные применения.

Числовые таблицы функции $J_s(\zeta)$ составлены Бесселем и Гансенем, а позднее Meissel (*Berl. Abh.* 1888). Эти последние перепечатаны у Грейя и Матеуса, а также с ценными дополнениями — в учебнике Ватсона. Сокращенные таблицы находятся в цитированных на стр. 114 сборниках Дале, Янке и Эмде.

²⁾ Связь между поверхностными сферическими функциями и бесселевыми функциями была указана Mehler, *Über die Vertheilung der statischen Elektrizität in einem von zwei Kugelkalotten begrenzten Körper*, *Crelle*, LXVIII (1868). Независимо это соотношение было исследовано Rayleigh, *On the Relation between the Functions of Laplace and Bessel*, *Proc. Lond. Math. Soc.* IX, 61 [*Papers*, 338]; см. также *Theory of Sound*, § 336—338. Существуют также методы представления бесселевых функций „второго рода“ как предельные формы объемных сферических функций

$$Q_n(\mu), \quad Q_n^s(\mu) \begin{cases} \cos s\omega \\ \sin s\omega \end{cases},$$

при условии, что имеет место симметрия относительно перпендикулярной к плоскости оси $(ox)^*$. Итак, если имеем

$$\varphi = F(\tilde{\omega}) \quad \text{для } x = 0, \quad (1)$$

то по ту сторону, для которой $x > 0$, будем иметь

$$\varphi = \int_0^{\infty} e^{-kx} J_0(k\tilde{\omega}) k dk \int_0^{\infty} F(\tilde{\omega}') J_0(k\tilde{\omega}') \tilde{\omega}' d\tilde{\omega}'. \quad (2)$$

Далее, если имеем

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f(\tilde{\omega}) \quad \text{для } x = 0, \quad (3)$$

то будем иметь

$$\varphi = \int_0^{\infty} e^{-kx} J_0(k\tilde{\omega}) dk \int_0^{\infty} f(\tilde{\omega}') J_0(k\tilde{\omega}') \tilde{\omega}' d\omega'. \quad (4)$$

Показательные функции выбраны таким образом, чтобы они обращались в нуль для $x = \infty$.

Другое решение этой задачи дано уже в § 58; из уравнений (12) и (11) этого параграфа мы заключаем, что

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \iint \varphi \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) dS, \quad (5)$$

и соответственно

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \iint \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dS}{r}, \quad (6)$$

где r обозначает расстояние точки, для которой вычисляется φ , от элемента dS плоскости.

Переходим теперь к некоторым применениям общих формул (2) и (4).

1) Если мы примем в уравнении (4), что функция $f(\tilde{\omega})$ обращается в нуль для всех значений $\tilde{\omega}$ за исключением бесконечно малых значений, для которых она становится бесконечно большой и именно таким образом, что

$$\int_0^{\infty} f(\tilde{\omega}) 2\pi\tilde{\omega} d\tilde{\omega} = \frac{1}{2},$$

то получим

$$4\pi\varphi = \int_0^{\infty} e^{-kx} J_0(k\tilde{\omega}) dk; \quad (7)$$

*) Метод можно распространить таким образом, что он будет свободен от этого ограничения.

отсюда, так как $J_0' = -J_1$, следует, согласно (5) § 100,

$$4\pi r = -\tilde{\omega} \int_0^{\infty} e^{-kx} J_1(k\tilde{\omega}) dk. \quad (8)$$

Сравнивая эти формулы с соответствующими элементарными выражениями для точечного источника в начале (§ 95), мы видим, что

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-kx} J_0(k\tilde{\omega}) dk &= \frac{1}{r}, \\ \int_0^{\infty} e^{-kx} J_1(k\tilde{\omega}) dk &= \frac{\tilde{\omega}}{r(r+x)}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где $r = \sqrt{x^2 + \omega^2}$; эти формулы представляют на самом деле известные результаты ¹⁾.

2) Далее, предположим, что источники распределены с равномерной плотностью по части плоскости, заключенной внутри круга $\tilde{\omega} = a$, $x = 0$. Если мы воспользуемся рядами для J_0 и J_1 или будем действовать как-нибудь иначе, то найдем

$$\int_0^a J_0(k\tilde{\omega}) \tilde{\omega} d\tilde{\omega} = \frac{a}{k} J_1(ka); \quad (10)$$

отсюда следует ²⁾

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{\infty} e^{-kx} J_0(k\tilde{\omega}) J_1(ka) \frac{dk}{k}, \\ \psi &= -\frac{\tilde{\omega}}{\pi a} \int_0^{\infty} e^{-kx} J_1(k\tilde{\omega}) J_1(ka) \frac{dk}{k}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

причем постоянный множитель выбран таким образом, что полный поток через круг равен единице.

3) Далее, если плотность источников внутри того же самого круга меняется как $\frac{1}{\sqrt{a^2 - \omega^2}}$, то приходим к интегралу ³⁾

$$\int_0^a J_0(k\tilde{\omega}) \frac{\tilde{\omega} d\tilde{\omega}}{\sqrt{a^2 - \omega^2}} = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0(ka \sin \theta) \sin \theta d\theta = \frac{\sin ka}{k}. \quad (12)$$

¹⁾ Первый результат принадлежит Lipschitz, Crelle, LVI, 189 (1859); см. Watson, стр. 384. Последний результат получается дифференцированием по $\tilde{\omega}$ и интегрированием по x .

²⁾ Ср. H. Weber, Crelle, LXXV, 88; Heine, II, 180.

³⁾ Формула (12) дана различными авторами; см. Rayleigh, Papers III, 98; Hobson, Proc. Lond. Math. Soc., XXV, 71 (1893).

Для вычисления последнего интеграла заменяют J_0 его разложением, в ряд и с каждым членом оперируют отдельно. Отсюда мы получаем

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2\pi a} \int_0^{\infty} e^{-kx} J_0(k\tilde{\omega}) \sin ka \frac{dk}{k}, \\ \psi &= -\frac{\tilde{\omega}}{2\pi a} \int_0^{\infty} e^{-kx} J_1(k\tilde{\omega}) \sin ka \frac{dk}{k}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где постоянный множитель определяется тем же условием, как выше¹⁾.

Существует известная теорема электростатки, что при распределении плотности заряда, согласно вышепринятому закону, потенциал φ для площади круга постояен. Независимо от этого можно показать, что

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} J_0(k\tilde{\omega}) \sin ka \frac{dk}{k} &= \frac{1}{2} \pi, \quad \text{или} \quad \arcsin \frac{a}{\tilde{\omega}}, \\ \int_0^{\infty} J_1(k\tilde{\omega}) \sin ka \frac{dk}{k} &= \frac{a - \sqrt{a^2 - \tilde{\omega}^2}}{\tilde{\omega}}, \quad \text{или} \quad \frac{a}{\tilde{\omega}}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

смотря по тому, будет ли $\tilde{\omega} \leq a$. Формулы (13) дают таким образом течение жидкости через круглое отверстие в тонкой плоской неподвижной стенке. Другое решение мы получим в § 108. Соответствующая двумерная задача была решена в § 66, п. 1.

4) Предположим, что для $x=0$

$$\varphi = C \sqrt{a^2 - \tilde{\omega}^2}, \quad \text{когда} \quad \tilde{\omega} < a,$$

и

$$\varphi = 0, \quad \text{когда} \quad \tilde{\omega} > a.$$

Тогда найдем

$$\int_0^a J_0(k\tilde{\omega}) \sqrt{a^2 - \tilde{\omega}^2} \tilde{\omega} d\tilde{\omega} = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0(ka \sin \theta) \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = a^2 \psi_1(ka), \quad (15)$$

где

$$\psi_1(\zeta) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\zeta^2}{2 \cdot 5} + \frac{\zeta^4}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7} - \dots \right) = -\frac{d}{\zeta} \frac{\sin \zeta}{\zeta}. \quad (16)$$

Поэтому, согласно выражению (2), имеем

$$\varphi = -C \int_0^{\infty} e^{-kx} J_0(k\tilde{\omega}) \frac{d}{dk} \left(\frac{\sin ka}{k} \right) dk. \quad (17)$$

¹⁾ Weber H., Crelle, LXXV (1873); Heine, II, 192.

²⁾ Weber H., Crelle, LXXV; Watson, стр. 405; см. также Proc. Lond. Math. Soc., XXXIV, 282.

Отсюда получаем для $x=0$ после интегрирования по частям

$$-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0 = C \int_0^{\infty} J_0(k\tilde{\omega}_1) \sin ka \frac{dk}{k} + C\tilde{\omega} \int_0^{\infty} J_0(k\tilde{\omega}) \sin ka dk. \quad (18)$$

Значение первого интеграла дано в формулах (14), а что касается второго интеграла, то его значение может быть получено отсюда дифференцированием по $\tilde{\omega}$. Мы получим

$$-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0 = \frac{1}{2} \pi C, \text{ или } C \left(\arcsin \frac{a}{\tilde{\omega}} - \frac{a}{\sqrt{\tilde{\omega}^2 - a^2}} \right), \quad (19)$$

смотря по тому, будет ли $\tilde{\omega} \leq a$. Если $C = \frac{2}{\pi} U$, то формула (17) представляет случай, когда тонкий круглый диск движется в неограниченной жидкости со скоростью U перпендикулярно к своей плоскости. Выражение для кинетической энергии имеет тогда вид

$$2T = -e \iint \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS = \pi e C^2 \int_0^a \sqrt{a^2 - \tilde{\omega}^2} 2\pi\tilde{\omega} d\tilde{\omega} = \frac{2}{3} \pi^2 e a^3 C^2,$$

или

$$2T = \frac{8}{3} e a^3 U^2. \quad (20)$$

Кажущееся увеличение инертной массы диска равно, следовательно, произведению $\frac{2}{\pi}$ ($=0,6366$) на массу сферической части жидкости радиуса, равного радиусу диска. Другое исследование этой задачи будет изложено в § 108.

Эллипсоидальные функции

§ 103. Метод сферических функций применим также для решения уравнения

$$\Delta\varphi = 0 \quad (1)$$

при граничных условиях, относящихся к эллипсоидам вращения¹⁾.

Начнем со случая удлиненного эллипсоида вращения и положим

$$\left. \begin{aligned} x &= k \cos \theta \operatorname{ch} \eta = k\mu\zeta, \\ y &= \tilde{\omega} \cos \omega, \\ z &= \tilde{\omega} \sin \omega, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где

$$\tilde{\omega} = k \sin \theta \operatorname{sh} \eta = k (1 - \mu^2)^{1/2} (\zeta^2 - 1)^{1/2}.$$

¹⁾ Heine, Über einige Aufgaben, welche auf partielle Differentialgleichungen führen, Crelle, XXVI, 185 (1843) и Kugelfunktionen, II, § 38. См. также Ferrers, гл. VI.

Поверхности $\zeta = \text{const.}$, $\mu = \text{const.}$ представляют соответственно софокусные эллипсоиды и двухполостные гиперболоиды, общие фокусы которых лежат в точках $(\pm k, 0, 0)$. Значение ζ изменяется от 1 до ∞ , в то время как μ лежит между -1 и $+1$. Координаты μ , ζ , ω образуют ортогональную систему, и линейные элементы δs_μ , δs_ζ , δs_ω , которые описывает точка (x, y, z) при изменении одной только из величин μ , ζ , ω , имеют следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} \delta s_\mu &= k \left(\frac{\zeta^2 - \mu^2}{1 - \mu^2} \right)^{1/2} \delta \mu, & \delta s_\zeta &= k \left(\frac{\zeta^2 - \mu^2}{\zeta^2 - 1} \right)^{1/2} \delta \zeta, \\ \delta s_\omega &= k (1 - \mu^2)^{1/2} (\zeta^2 - 1)^{1/2} \delta \omega. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Чтобы выразить уравнение (1) через наши новые переменные, мы должны полный поток через поверхность элемента объема $\delta s_\mu \delta s_\zeta \delta s_\omega$ положить равным нулю; мы получаем тогда

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s_\mu} \delta s_\zeta \delta s_\omega \right) \delta \mu + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s_\zeta} \delta s_\mu \delta s_\omega \right) \delta \zeta + \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s_\omega} \delta s_\mu \delta s_\zeta \right) \delta \omega = 0,$$

или, если подставить значения из (3),

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right\} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ (\zeta^2 - 1) \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right\} + \frac{\zeta^2 - \mu^2}{(1 - \mu^2)(\zeta^2 - 1)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} = 0.$$

Это может быть написано также в виде

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right\} + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ (1 - \zeta^2) \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right\} + \frac{1}{1 - \zeta^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2}. \quad (4)$$

§ 104. Если φ есть конечная функция от μ и ω для значений от $\mu = -1$ до $\mu = +1$ и от $\omega = 0$ до $\omega = 2\pi$, то она может быть разложена в ряд поверхностных сферических функций целого порядка, которые имеют вид (7) § 86, причем коэффициенты суть функции ζ .

После подстановки в уравнение (4) мы увидим, что каждый член ряда в отдельности должен удовлетворять этому уравнению. Возьмем сначала случай зональной сферической функции и положим

$$\varphi = P_n(\mu) Z. \quad (5)$$

После подстановки находим, пользуясь уравнением (1) § 84,

$$\frac{d}{d\zeta} \left\{ (1 - \zeta^2) \frac{dZ}{d\zeta} \right\} + n(n+1)Z = 0, \quad (6)$$

а это уравнение имеет тот же самый вид, как и только что упомянутое.

Мы получаем, таким образом, решения в виде

$$\varphi = P_n(\mu) P_n(\zeta) \quad (7)$$

и

$$\varphi = P_n(\mu) Q_n(\zeta), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}
 Q_n(\zeta) &= P_n(\zeta) \int_{\zeta}^{\infty} \frac{d\zeta}{\{P_n(\zeta)\}^2 (\zeta^2 - 1)} = \\
 &= \frac{1}{2} P_n(\zeta) \ln \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} - \frac{2n-1}{1 \cdot n} P_{n-1}(\zeta) - \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3}(\zeta) - \dots = \\
 &= \frac{n!}{1 \cdot 3 \dots (2n+1)} \left\{ \zeta^{-n-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} \zeta^{-n-3} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 4(2n+3)(2n+5)} \zeta^{-n-5} + \dots \right\}. \quad (9)^1
 \end{aligned}$$

Решение (7) конечно, когда $\zeta = 1$, и поэтому оно годится для пространства *внутри* эллипсоида вращения; выражение (8), наоборот, бесконечно для $\zeta = 1$, но обращается в нуль для $\zeta = \infty$ и годится поэтому для внешней области. Отметим частные случаи формулы (9)

$$\begin{aligned}
 Q_0(\zeta) &= \frac{1}{2} \ln \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}, \\
 Q_1(\zeta) &= \frac{1}{2} \zeta \ln \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} - 1, \\
 Q_2(\zeta) &= \frac{1}{4} (3\zeta^2 - 1) \ln \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} - \frac{3}{2} \zeta.
 \end{aligned}$$

Из интегрального представления Q_n мы получаем

$$P_n(\zeta) \frac{dQ_n(\zeta)}{d\zeta} - \frac{dP_n(\zeta)}{d\zeta} Q_n(\zeta) = -\frac{1}{\zeta^2 - 1}. \quad (10)$$

Легко найти выражения для функций тока, соответствующих потенциалам скоростей (7) и (8); именно, согласно определению § 94, имеем

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi}{\partial s_\zeta} &= -\frac{1}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial s_\mu}, \\
 \frac{\partial \varphi}{\partial s_\mu} &= \frac{1}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial s_\zeta};
 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

отсюда следует

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} &= -k(\zeta^2 - 1) \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}, \\
 \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} &= k(1 - \mu^2) \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}.
 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Таким образом в случае решения (7) получаем

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} &= -k(\zeta^2 - 1) \frac{dP_n(\zeta)}{d\zeta} P_n(\mu) = \\
 &= \frac{k}{n(n+1)} (\zeta^2 - 1) \frac{dP_n(\zeta)}{d\zeta} \frac{d}{d\mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{dP_n(\mu)}{d\mu} \right\}
 \end{aligned}$$

¹⁾ Ferrers, глава V; Todhunter, гл. VI; Forsyth, § 96—99.

и отсюда

$$\psi = \frac{k}{n(n+1)} (1 - \mu^2) \frac{dP_n(\mu)}{d\mu} (\zeta^2 - 1) \frac{dP_n(\zeta)}{d\zeta}. \quad (13)$$

Тот же самый результат можно получить, конечно, также из второго уравнения (12).

Таким же образом для функции тока, соответствующей решению (8), находим

$$\psi = \frac{k}{n(n+1)} (1 - \mu^2) \frac{dP_n(\mu)}{d\mu} (\zeta^2 - 1) \frac{dQ_n(\zeta)}{d\zeta}. \quad (14)$$

§ 105. Вышеизложенное мы можем применить к случаю, когда удлиненный эллипсоид вращения движется параллельно своей оси в безграничной массе жидкости. Эллиптические координаты должны быть выбраны таким образом, чтобы этот эллипсоид принадлежал софокусному семейству; пусть он соответствует, например, значению $\zeta = \zeta_0$. Если произвести сравнение с уравнениями (2) § 103, то мы видим, что если a , c суть полярная и экваториальная полуоси, а e — эксцентриситет меридионального сечения, то мы должны иметь

$$k = ae, \quad \zeta_0 = \frac{1}{e}, \quad k(\zeta_0^2 - 1)^{1/2} = c.$$

Условие на поверхности дано уравнением (1) § 97; именно, должно быть

$$\psi = -\frac{1}{2} Uk^2 (1 - \mu^2) (\zeta^2 - 1) + \text{const.} \quad (1)$$

для $\zeta = \zeta_0$. Отсюда, если мы положим $n = 1$ в формуле (14) § 104 и введем произвольный множитель A , будем иметь

$$\psi = \frac{1}{2} Ak (1 - \mu^2) (\zeta^2 - 1) \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} - \frac{\zeta}{\zeta^2 - 1} \right\} \quad (2)$$

с условием

$$A = \frac{Uk}{\frac{\zeta_0^2}{\zeta_0^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln \frac{\zeta_0 + 1}{\zeta_0 - 1}} = \frac{Ua}{\frac{1}{1 - e^2} - \frac{1}{2e} \ln \frac{1 + e}{1 - e}}. \quad (3)$$

Соответствующая формула для потенциала скоростей будет

$$\varphi = A\mu \left\{ \frac{1}{2} \zeta \ln \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} - 1 \right\}. \quad (4)$$

Кинетическая энергия, а также и коэффициент инерции¹⁾, обусловленный жидкостью, легко могут быть вычислены из формулы (5) § 94.

§ 106. Если мы отбросим случай симметрии, то решения $\Delta\varphi = 0$, когда φ есть тессеральная или секториальная сферическая функция

¹⁾ Присоединенная масса. *Прим. ред*

от μ и ω , могут быть определены подобным же способом; они имеют следующий вид

$$\varphi = P_n^s(\mu) P_n^s(\zeta) \left. \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right\} s\omega, \quad (1)$$

$$\varphi = P_n^s(\mu) Q_n^s(\zeta) \left. \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right\} s\omega, \quad (2)$$

где, как и в § 86,

$$P_n^s(\mu) = (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}s} \frac{d^s P_n(\mu)}{d\mu^s}, \quad (3)$$

и во избежание мнимых величин полагаем

$$P_n^s(\zeta) = (\zeta^2 - 1)^{\frac{1}{2}s} \frac{d^s P_n(\zeta)}{d\zeta^s}, \quad (4)$$

и

$$Q_n^s(\zeta) = (\zeta^2 - 1)^{\frac{1}{2}s} \frac{d^s Q_n(\zeta)}{d\zeta^s}. \quad (5)$$

Можно показать, что

$$Q_n^s(\zeta) = (-1)^s \frac{(n+s)!}{(n-s)!} P_n^s(\zeta) \int_{\zeta}^{\infty} \frac{d\zeta}{\{P_n^s(\zeta)\}^2 (\zeta^2 - 1)}. \quad (6)$$

Отсюда имеем

$$P_n^s(\zeta) \frac{dQ_n^s(\zeta)}{d\zeta} - \frac{dP_n^s(\zeta)}{d\zeta} Q_n^s(\zeta) = (-1)^{s+1} \frac{(n+s)!}{(n-s)!} \frac{1}{\zeta^2 - 1}. \quad (7)$$

В качестве примеров мы рассмотрим удлиненный эллипсоид вращения, который движется параллельно одной из осей экватора, например, параллельно оси y , или вращается около этой оси.

1. В первом случае условие на поверхности будет

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = -V \frac{\partial y}{\partial \zeta}$$

для $\zeta = \zeta_0$, причем V есть скорость поступательного движения, или

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = -V \frac{k\zeta_0}{(\zeta_0^2 - 1)^{1/2}} (1 - \mu^2)^{1/2} \cos \omega. \quad (8)$$

Это уравнение удовлетворяется, если в выражении (2) положить $n = 1$, $s = 1$; мы получим тогда

$$\varphi = A (1 - \mu^2)^{1/2} (\zeta^2 - 1)^{1/2} \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} - \frac{\zeta}{\zeta^2 - 1} \right\} \cos \omega, \quad (9)$$

причем постоянная A дана уравнением

$$A \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{\zeta_0 + 1}{\zeta_0 - 1} - \frac{\zeta_0^2 - 2}{\zeta_0 (\zeta_0^2 - 1)} \right\} = -kV. \quad (10)$$

2. В случае вращения около Oy мы имеем, если обозначить через Ω_y угловую скорость,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\Omega_y \left(z \frac{\partial x}{\partial z} - x \frac{\partial z}{\partial z} \right)$$

для $\zeta = \zeta_0$, или

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = k^2 \Omega_y \frac{1}{(\zeta_0^2 - 1)^{1/2}} \mu (1 - \mu^2)^{1/2} \sin \omega. \quad (11)$$

Если мы теперь положим в выражении (2) $n=2$, $s=1$, то получим

$$\varphi = A \mu (1 - \mu^2)^{1/2} (\zeta^2 - 1)^{1/2} \left\{ \frac{3}{2} \zeta \ln \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} - 3 - \frac{1}{\zeta^2 - 1} \right\} \sin \omega; \quad (12)$$

при этом постоянная A определяется из условия (11).

§ 107. Если эллипсоид сжатый или „планетовидный“, то соответствующие координаты вводим таким образом:

$$\left. \begin{aligned} x &= k \cos \theta \operatorname{sh} \eta = k \mu \zeta, & y &= \tilde{\omega} \cos \omega, & z &= \tilde{\omega} \sin \omega, \\ \text{где} & & & & & \\ \tilde{\omega} &= k \sin \theta \operatorname{ch} \eta = k (1 - \mu^2)^{1/2} (\zeta^2 + 1)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

При этом ζ изменяется от 0 до ∞ (или в некоторых приложениях от $-\infty$ через 0 до $+\infty$), в то время как μ лежит между -1 и $+1$. Поверхности второго порядка

$$\zeta = \text{const.}, \quad \mu = \text{const.}$$

будут соответственно представлять сжатые эллипсоиды вращения и однополостные гиперболоиды вращения, которые имеют общую фокальную окружность $x=0$, $\tilde{\omega}=k$.

В качестве предельных форм получаем: 1) эллипсоид $\zeta=0$, который совпадает с той частью плоскости $x=0$, для которой $\tilde{\omega} < k$, 2) гиперболоид $\mu=0$, который совпадает с остальной частью этой плоскости.

Применяя те же обозначения, как и выше, мы находим

$$\left. \begin{aligned} \delta s_\mu &= k \left(\frac{\zeta^2 + \mu^2}{1 - \mu^2} \right)^{1/2} \delta \mu, \\ \delta s_\zeta &= k \left(\frac{\zeta^2 + \mu^2}{\zeta^2 + 1} \right)^{1/2} \delta \zeta, \\ \delta s_\omega &= k (1 - \mu^2)^{1/2} (\zeta^2 + 1)^{1/2} \delta \omega; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

а уравнение неразрывности запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right\} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ (\zeta^2 + 1) \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right\} + \frac{\zeta^2 + \mu^2}{(1 - \mu^2)(\zeta^2 + 1)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right\} + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} = - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ (\zeta^2 + 1) \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right\} + \frac{1}{\zeta^2 + 1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2}. \quad (3)$$

Это уравнение имеет тот же самый вид, как и (4) § 103, только ζ заменено через $i\zeta$; подобное соответствие будет иметь место и в последующих формулах.

В случае симметрии относительно оси мы будем иметь следующие решения:

$$\varphi = P_n(\mu) \cdot p_n(\zeta) \quad (4)$$

и

$$\varphi = P_n(\mu) \cdot q_n(\zeta), \quad (5)$$

где

$$p_n(\zeta) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{n!} \left\{ \zeta^n + \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \zeta^{n-2} + \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} \zeta^{n-4} + \dots \right\} \quad (6)$$

и

$$q_n(\zeta) = p_n(\zeta) \int_{\zeta}^{\infty} \frac{d\zeta}{\{p_n(\zeta)\}^2 (\zeta^2 + 1)} = \\ = (-1)^n \left\{ p_n(\zeta) \operatorname{arccctg} \zeta - \frac{2n-1}{1 \cdot n} p_{n-1}(\zeta) + \frac{2n-5}{3(n-1)} p_{n-3}(\zeta) - \dots \right\} = \\ = \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)} \left\{ \zeta^{-n-1} - \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} \zeta^{-n-3} + \right. \\ \left. + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 4(2n+3)(2n+5)} \zeta^{-n-5} - \dots \right\}, \quad (7)$$

причем, однако, последнее разложение только тогда сходится, когда $\zeta > 1$ ¹⁾. Как и выше, решение (4) годится для пространства, лежащего внутри некоторого эллипсоида семейства $\zeta = \text{const}$, а решение (5) — для внешнего пространства.

Заметим, что

$$p_n(\zeta) \frac{dq_n(\zeta)}{d\zeta} - \frac{dp_n(\zeta)}{d\zeta} q_n(\zeta) = -\frac{1}{\zeta^2 + 1}. \quad (8)$$

Как частный случай формулы (7) имеем

$$q_0(\zeta) = \operatorname{arccctg} \zeta, \quad q_1(\zeta) = 1 - \zeta \operatorname{arccctg} \zeta, \\ q_2(\zeta) = \frac{1}{2} (3\zeta^2 + 1) \operatorname{arccctg} \zeta - \frac{3}{2} \zeta.$$

Формулы для функции тока, соответствующие выражениям (4) и (5), представляются в виде

$$\varphi = \frac{k}{n(n+1)} (1 - \mu^2) \frac{dP_n(\mu)}{d\mu} (\zeta^2 + 1) \frac{dp_n(\zeta)}{d\zeta} \quad (9)$$

и

$$\varphi = \frac{k}{n(n+1)} (1 - \mu^2) \frac{dP_n(\mu)}{d\mu} (\zeta^2 + 1) \frac{dq_n(\zeta)}{d\zeta}. \quad (10)$$

¹⁾ Доказательства, приведенные в литературе § 104, читатель легко может применить к настоящему случаю.

§ 108. 1. Простейший случай (5) § 107 получим, если положим $n=0$; тогда будем иметь

$$\varphi = A \operatorname{arcsctg} \zeta, \quad (1)$$

причем ζ может принимать все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Формула (10) предыдущего параграфа становится неопределенной, но, применяя метод § 104, мы найдем

$$\psi = Ak\mu, \quad (2)$$

где μ изменяется от 0 до 1. Это решение представляет течение жидкости через круглое отверстие в неограниченной плоской стене; отверстие есть как раз та часть плоскости yz , для которой $\tilde{\omega} < k$. Скорость в произвольной точке отверстия ($\zeta=0$) равна

$$u = -\frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{\omega}} = \frac{A}{(k^2 - \tilde{\omega}^2)^{1/2}},$$

так как $k\mu = \sqrt{k^2 - \tilde{\omega}^2}$ для $x=0$. Скорость на краях отверстия, следовательно, становится бесконечно большой, ср. § 102, 3.

2. Движение безграничной жидкости, обусловленное движением сжатого эллипсоида ($\zeta = \zeta_0$) со скоростью U параллельно своей оси, представляется формулами

$$\begin{aligned} \varphi &= A\mu(1 - \zeta \operatorname{arcsctg} \zeta), \\ \psi &= \frac{1}{2} Ak(1 - \mu^2)(\zeta^2 + 1) \left\{ \frac{\zeta}{\zeta^2 + 1} - \operatorname{arcsctg} \zeta \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

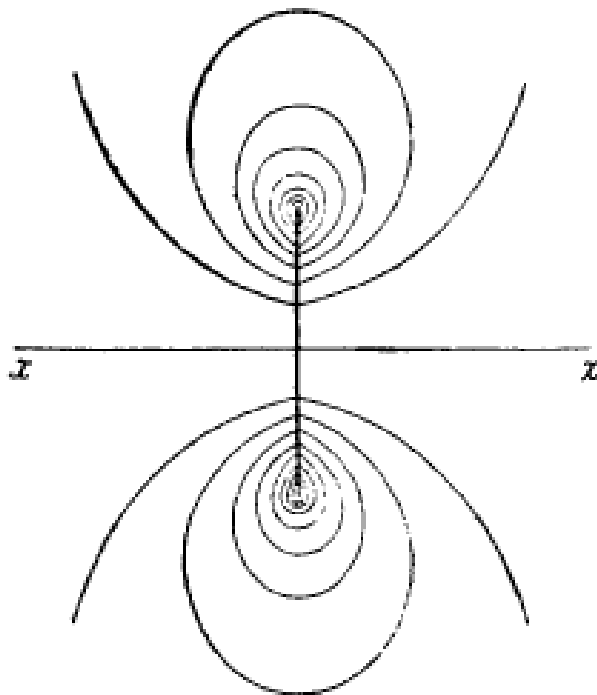
$$A = \frac{-kU}{\frac{\zeta_0}{\zeta_0^2 + 1} - \operatorname{arcsctg} \zeta_0}.$$

Если обозначим радиусы, направленные к полюсу и к экватору, через a и c , а эксцентриситет меридионального сечения — через e , то получим

$$\begin{aligned} a &= k\zeta_0^2, \\ c &= k(\zeta_0^2 + 1)^{1/2}, \\ e &= (\zeta_0^2 + 1)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Если мы выразим A через эти величины, то получим

$$A = \frac{-Uc}{(1 - e^2)^{1/2} - \frac{1}{e} \arcsin e}. \quad (4)$$



Фиг. 30.

Форма линий тока для равноотстоящих значений φ показана на фиг. 30; ср. § 71, п. 3.

Наиболее интересен случай круглого диска, для которого $e = 1$ и, следовательно, $A = \frac{2Uc}{\pi}$. Значение φ , данное уравнением (3), будет равно $\pm A\mu$ или $\pm A\left(1 - \frac{\tilde{\omega}^2}{c^2}\right)^{1/2}$ для обеих сторон диска, а нормальная компонента скорости равна $\pm U$. Формула (4) § 44 дает поэтому

$$2T = \frac{8}{3} \rho c^3 U^2, \quad (5)$$

как и в выражении (20) § 102.

§ 109. Решения уравнения (3) § 107 в тессеральных функциях напишутся

$$\varphi = P_n^s(\mu) p_n^s(\zeta) \left. \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right\} s\omega \quad (1)$$

и

$$\varphi = P_n^s(\mu) q_n^s(\zeta) \left. \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right\} s\omega, \quad (2)$$

где

$$p_n^s(\zeta) = (\zeta^2 + 1)^{\frac{s}{2}} \frac{d^s p_n(\zeta)}{d\zeta^s}, \quad (3)$$

и

$$q_n^s(\zeta) = (\zeta^2 + 1)^{\frac{s}{2}} \frac{d^s q_n(\zeta)}{d\zeta^s} = (-1)^s \frac{(n+s)!}{(n-s)!} p_n^s(\zeta) \int_{\zeta}^{\infty} \frac{d\zeta}{\{p_n^s(\zeta)\}^2 (\zeta^2 + 1)}. \quad (4)$$

Эти функции обладают свойством

$$p_n^s(\zeta) \frac{dq_n^s(\zeta)}{d\zeta} - \frac{dp_n^s(\zeta)}{d\zeta} q_n^s(\zeta) = (-1)^{s+1} \frac{(n+s)!}{(n-s)!} \frac{1}{\zeta^2 + 1}. \quad (5)$$

Мы можем применить эти результаты таким же образом, как и в § 108.

1. Для движения сжатого эллипсоида ($\zeta = \zeta_0$) параллельно оси y полагаем $n = 1$, $s = 1$ и, следовательно,

$$\varphi = A (1 - \mu^2)^{1/2} (\zeta^2 + 1)^{1/2} \left\{ \frac{\zeta}{\zeta^2 + 1} - \operatorname{arccctg} \zeta \right\} \cos \omega \quad (6)$$

с условием

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = -V \frac{\partial y}{\partial \zeta}$$

для $\zeta = \zeta_0$, где V обозначает скорость твердого тела. Отсюда получаем

$$A \left\{ \frac{\zeta_0^2 + 2}{\zeta_0 (\zeta_0^2 + 1)} - \operatorname{arccctg} \zeta_0 \right\} = -kV. \quad (7)$$

В случае диска ($\zeta_0 = 0$) имеем $A = 0$, как и следовало ожидать.

2. Для сжатого эллипсоида, который вращается с угловой скоростью Ω_y около оси y , полагаем $n=2$, $s=1$, и тогда получаем

$$\varphi = A\mu(1-\mu^2)^{1/2}(\zeta^2+1)^{1/2} \left\{ 3\zeta \operatorname{arccotg} \zeta - 3 + \frac{1}{\zeta^2+1} \right\} \sin \omega \quad (8)$$

с условием на поверхности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = -\Omega_y \left(z \frac{\partial x}{\partial \zeta} - x \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) = -\frac{k^2 \Omega_y}{(\zeta^2+1)^{1/2}} \mu(1-\mu^2)^{1/2} \sin \omega. \quad (9)$$

Для круглого диска ($\zeta_0=0$) из последнего получим

$$\frac{3}{2} \pi A = -k^2 \Omega_y. \quad (10)$$

На обеих сторонах диска будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi &= \mp 2A\mu(1-\mu^2)^{1/2} \sin \omega, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= \mp k\Omega_y(1-\mu^2)^{1/2} \sin \omega. \end{aligned}$$

Если подставить эти значения в формулу

$$2T = -\rho \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \tilde{\omega} d\tilde{\omega} d\omega,$$

то получим

$$2T = \frac{16}{45} \rho c^5 \Omega_y^2 \quad (11)$$

§ 110. В вопросах, относящихся к эллипсоидам с тремя неравными осями, мы можем применить более общий вид эллипсоидальных функций, известных под именем функций Ламэ²⁾. Не вдаваясь в формальное изложение этих функций, мы изучим, имея в виду гидродинамические применения, некоторые решения уравнения

$$\Delta \varphi = 0 \quad (1)$$

в эллиптических координатах, именно решения, которые аналогичны сферическим функциям первого и второго рода.

Желательно этому предпослать исследование о движении жидкости, находящейся в эллипсоидальном сосуде, которое впрочем может быть проведено в декартовых координатах.

¹⁾ Другие решения, представленные в этих координатах, смотреть Nicholson, Phil. Trans. A, CCXXIV, 49 (1924).

²⁾ См., например, Ferrers, Spherical Harmonics, гл. VI; W. D. Niven, Phil. Trans. A, CLXXXII, 183 (1891) и Proceedings Royal Soc. A, LXXIX, 458 (1906); Poincaré, Figures d'Equilibre d'une Masse Fluide, Paris, 1902, VI, гл. VI; Darwin, Phil. Trans. A, CXC VII, 461 (1901) [Scientific Papers, Cambridge, 1907—1911, III, 186]; Уиттекер и Ватсон, гл. 23. Очерк теории дал Wangerin, см. сноску на стр. 137.

Когда сосуд движется параллельно оси x со скоростью U , то заключенная в нем жидкость движется, как твердое тело, и потенциал скоростей просто равен

$$\varphi = -Ux.$$

Предположим теперь, что сосуд вращается вокруг одной из главных осей (например, около оси x) с угловой скоростью Ω_x . Если написать уравнение поверхности сосуда в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (2)$$

то условие на поверхности будет

$$-\frac{x}{a^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{y}{b^2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{z}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{y}{b^2} \Omega_x z + \frac{z}{c^2} \Omega_x y.$$

Следовательно, можно положить

$$\varphi = Ayz,$$

что, очевидно, будет решением уравнения (1); определяя постоянное из условия на поверхности, получим

$$\varphi = -\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \Omega_x yz.$$

Следовательно, если центр движется со скоростью, компоненты которой суть U, V, W , и если угловые скорости около главных осей будут $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$, то мы получим путем наложения ¹⁾

$$\begin{aligned} \varphi = -Ux - Vy - Wz - \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \Omega_x yz - \\ - \frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2} \Omega_y zx - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \Omega_z xy. \end{aligned} \quad (3)$$

Можно также рассмотреть случай, когда сосуд меняет к тому же и свою форму, оставаясь все время эллипсоидом. Если длины осей (только) меняются со скоростями $\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}$, то общее граничное условие (3) § 9 напишется в виде

$$\frac{x^2}{a^2} \dot{a} + \frac{y^2}{b^2} \dot{b} + \frac{z^2}{c^2} \dot{c} + \frac{x}{a^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{y}{b^2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{z}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Это условие удовлетворяется выражением ²⁾

$$\varphi = -\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a} x^2 + \frac{\dot{b}}{b} y^2 + \frac{\dot{c}}{c} z^2 \right). \quad (5)$$

¹⁾ Повидимому Бельтрами, Бьеркнес и Максвелл в 1873 г. независимо друг от друга опубликовали этот результат. См. Hicks, Report on Recent Progress in Hydrodynamics, Brit. Ass. Rep., 1882 и Kelvin's Papers IV, 197.

²⁾ C. A. B j e r k n e s, Verallgemeinerung des Problems von den Bewegungen, welche in einer ruhenden unelastischen Flüssigkeit die Bewegung eines Ellipsoïds hervorbringt, Göttinger Nachrichten, 1873, стр. 448, 829.

Уравнение (1) требует при этом, чтобы

$$\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} = 0. \quad (6)$$

А это и есть в действительности условие того, что переменный эллипсоид заключает всегда тот же самый объем жидкости $\left(\frac{4}{3} \pi abc\right)$.

§ 111. Решения соответствующих задач для безграничной жидкости, ограниченной изнутри эллипсоидом, требуют применения особой системы ортогональных криволинейных координат.

Если x, y, z означают такого рода функции трех параметров λ, μ, ν , что поверхности

$$\lambda = \text{const.}, \quad \mu = \text{const.}, \quad \nu = \text{const.} \quad (1)$$

ортогональны друг к другу вдоль их линий пересечения, и если, кроме того,

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{h_1^2} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2, \\ \frac{1}{h_2^2} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)^2, \\ \frac{1}{h_3^2} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \nu}\right)^2, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

то направляющие косинусы нормалей к трем поверхностям, проходящим через точку (x, y, z) , будут соответственно

$$\left. \begin{aligned} \left(h_1 \frac{\partial x}{\partial \lambda}, h_1 \frac{\partial y}{\partial \lambda}, h_1 \frac{\partial z}{\partial \lambda}\right), & \quad \left(h_2 \frac{\partial x}{\partial \mu}, h_2 \frac{\partial y}{\partial \mu}, h_2 \frac{\partial z}{\partial \mu}\right), \\ \left(h_3 \frac{\partial x}{\partial \nu}, h_3 \frac{\partial y}{\partial \nu}, h_3 \frac{\partial z}{\partial \nu}\right). & \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Отсюда следует, что длины линейных элементов, проведенных по направлению этих нормалей, равны соответственно

$$\frac{\delta \lambda}{h_1}, \quad \frac{\delta \mu}{h_2}, \quad \frac{\delta \nu}{h_3}.$$

Таким образом, если φ есть потенциал скоростей некоторого движения жидкости, то полный поток через прямоугольный параллелепипед, заключенный между шестью поверхностями

$$\lambda \pm \frac{1}{2} \delta \lambda, \quad \mu \pm \frac{1}{2} \delta \mu, \quad \nu \pm \frac{1}{2} \delta \nu,$$

выражается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(h_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \frac{\delta \mu}{h_2} \frac{\delta \nu}{h_3} \right) \delta \lambda + \frac{\partial}{\partial \mu} \left(h_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \frac{\delta \nu}{h_3} \frac{\delta \lambda}{h_1} \right) \delta \mu + \\ + \frac{\partial}{\partial \nu} \left(h_3 \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \frac{\delta \lambda}{h_1} \frac{\delta \mu}{h_2} \right) \delta \nu. \end{aligned}$$

Из формулы (3) § 42 следует, что тот же самый поток выражается через $\Delta\varphi$, умноженное на объем параллелепипеда, т. е. на $\frac{\delta\lambda\delta\mu\delta\nu}{h_1h_2h_3}$.

Отсюда следует¹⁾

$$\Delta\varphi = h_1h_2h_3 \left\{ \frac{\partial}{\partial\lambda} \left(\frac{h_1}{h_2h_3} \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial\mu} \left(\frac{h_2}{h_3h_1} \frac{\partial\varphi}{\partial\mu} \right) + \frac{\partial}{\partial\nu} \left(\frac{h_3}{h_1h_2} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \right) \right\}. \quad (4)$$

Полагая это выражение равным нулю, получим общее уравнение неразрывности в ортогональных криволинейных координатах, специальные случаи которого уже исследованы в § 83, 103, 107.

Теория триортогональных систем поверхностей математически очень привлекательна и богата интересными и изящными формулами. Мы заметим еще следующее: если рассматривать λ , μ , ν как функции от x , y , z , то направляющие косинусы трех выше рассмотренных линейных элементов могут быть выражены также в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial\lambda}{\partial x}, \frac{1}{h_1} \frac{\partial\lambda}{\partial y}, \frac{1}{h_1} \frac{\partial\lambda}{\partial z} \right), \\ & \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial\mu}{\partial x}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial\mu}{\partial y}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial\mu}{\partial z} \right), \\ & \left(\frac{1}{h_3} \frac{\partial\nu}{\partial x}, \frac{1}{h_3} \frac{\partial\nu}{\partial y}, \frac{1}{h_3} \frac{\partial\nu}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Отсюда и из выражений (3) могут быть получены многие интересные соотношения. Однако данные выше формулы вполне достаточны для наших целей.

§ 112. В приложениях, к которым мы теперь переходим, тройная ортогональная система поверхностей состоит из софокусных поверхностей второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2+\theta} + \frac{y^2}{b^2+\theta} + \frac{z^2}{c^2+\theta} - 1 = 0, \quad (1)$$

свойства которых излагаются в учебниках геометрии.

Через всякую произвольную данную точку (x, y, z) проходят три поверхности системы, соответственно трем корням θ уравнения (1), если рассматривать его как кубическое уравнение для θ . Если (как мы большей частью будем предполагать) $a > b > c$, то один из корней, скажем λ , будет лежать между ∞ и $-c^2$, второй μ —

¹⁾ Вышеизложенный метод был дан в работе W. Thomson, On the Equations of Motion of Heat referred to Curvilinear Coordinates, Cambridge Math. Journ., IV, 179, (1843) (Papers, I, 25). Мы укажем также Jacobi, Über eine particuläre Lösung d. partiellen Differentialgleichung..., Crelle, XXXVI, 113 (1847) [Werke, II, 198]. Преобразование $\Delta\varphi$ к общим ортогональным координатам было впервые проведено Lamé, Sur les lois de l'équilibre du fluide étheré, Journ. de l'Ecole Polyt., XIV, 191 (1834). См. также его Leçons sur les Coordonnées Curvilignes, Paris., 1859, стр. 22.

между $-c^2$ и $-b^2$ и третий ν — между $-b^2$ и $-a^2$. Поверхности λ , μ , ν , следовательно, будут представлять соответственно эллипсоиды, однополостные и двуполостные гиперболоиды.

Из этого определения λ , μ , ν непосредственно следует, что

$$\frac{x^2}{a^2 + \theta} + \frac{y^2}{b^2 + \theta} + \frac{z^2}{c^2 + \theta} - 1 = \frac{(\lambda - \theta)(\mu - \theta)(\nu - \theta)}{(a^2 + \theta)(b^2 + \theta)(c^2 + \theta)} \quad (2)$$

удовлетворяется тождественно для всех значений θ . Если (2) умножить на $a^2 + \theta$ и положить затем $\theta = -a^2$, то получим первое из следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= \frac{(a^2 + \lambda)(a^2 + \mu)(a^2 + \nu)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \\ y^2 &= \frac{(b^2 + \lambda)(b^2 + \mu)(b^2 + \nu)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)}, \\ z^2 &= \frac{(c^2 + \lambda)(c^2 + \mu)(c^2 + \nu)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Отсюда получается

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= \frac{1}{2} \frac{x}{a^2 + \lambda}, \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= \frac{1}{2} \frac{y}{b^2 + \lambda}, \\ \frac{\partial z}{\partial \lambda} &= \frac{1}{2} \frac{z}{c^2 + \lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

А из этого следует в обозначениях (2) § 111

$$\frac{1}{h_1^2} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)^2} \right\}. \quad (5)$$

Если уравнение (2) мы продифференцируем по θ и положим затем $\theta = \lambda$, то получим первое из следующих трех уравнений:

$$\left. \begin{aligned} h_1^2 &= 4 \frac{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}, \\ h_2^2 &= 4 \frac{(a^2 + \mu)(b^2 + \mu)(c^2 + \mu)}{(\mu - \nu)(\mu - \lambda)}, \\ h_3^2 &= 4 \frac{(a^2 + \nu)(b^2 + \nu)(c^2 + \nu)}{(\nu - \lambda)(\nu - \mu)}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Остальные выражения систем (3) и (6) написаны из соображений симметрии ¹⁾.

¹⁾ Отметим, что h_1 , h_2 , h_3 суть удвоенные перпендикуляры, опущенные из начала на касательные плоскости трех поверхностей λ , μ , ν .

Если вставить эти результаты в уравнение (4) § 111, то получим ¹⁾

$$\Delta\varphi = -\frac{4}{(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)} \left[(\mu-\nu) \left\{ (a^2+\lambda)^{1/2} (b^2+\lambda)^{1/2} (c^2+\lambda)^{1/2} \frac{\partial}{\partial\lambda} \right\}^2 + \right. \\ \left. + (\nu-\lambda) \left\{ (a^2+\mu)^{1/2} (b^2+\mu)^{1/2} (c^2+\mu)^{1/2} \frac{\partial}{\partial\mu} \right\}^2 + \right. \\ \left. + (\lambda-\mu) \left\{ (a^2+\nu)^{1/2} (b^2+\nu)^{1/2} (c^2+\nu)^{1/2} \frac{\partial}{\partial\nu} \right\}^2 \right] \varphi. \quad (7)$$

§ 113. Частные решения преобразованного уравнения $\Delta\varphi=0$, которые мы сначала разберем, это — те, у которых φ есть функция одного (и только одного) из переменных λ , μ , ν . Так, например, φ может быть функцией только от λ , если

$$(a^2+\lambda)^{1/2} (b^2+\lambda)^{1/2} (c^2+\lambda)^{1/2} \frac{d\varphi}{d\lambda} = \text{const.};$$

отсюда следует

$$\varphi = C \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{D}, \quad (1)$$

где

$$D = \{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)\}^{1/2}, \quad (2)$$

причем аддитивная постоянная, содержащаяся в φ , выбрана таким образом, что φ равна нулю для $\lambda=\infty$.

При этом решении, которое соответствует решению $\varphi = \frac{A}{r}$ в сферических функциях, эквипотенциальные поверхности суть софокусные эллипсоиды, и движение в пространстве вне одного из них (например того, для которого $\lambda=0$) таково, как если бы оно происходило от некоторого распределения простых источников на его поверхности. Скорость в какой-либо точке дается формулой

$$-h_1 \frac{d\varphi}{d\lambda} = C \frac{h_1}{D}. \quad (3)$$

На большом расстоянии от начала эллипсоиды λ приближаются к сфере радиуса $\lambda^{1/2}$, и скорость становится равной $\frac{2C}{r^2}$, где r означает расстояние от начала. На каждой отдельной поверхности уровня λ скорость меняется пропорционально длине перпендикуляра, опущенного из начала на касательную плоскость.

Чтобы найти на поверхности $\lambda=0$ то распределение источников, которое производило бы указанное движение во внешнем пространстве, мы подставим вместо φ значение (1) в формулу (11) § 58

¹⁾ Ср. Lamé, Sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température, Liouville, II, 147 (1837).

и вместо φ' (это относится к внутреннему пространству) — постоянное значение

$$\varphi' = C \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{D}. \quad (4)$$

Тогда эта формула дает на поверхности искомое значение распределения плотности

$$\frac{C}{abc} h_1. \quad (5)$$

Решение (1) может также рассматриваться как представляющее движение, обусловленное изменением размеров эллипсоида, при котором поверхность остается подобной себе самой, а главные оси сохраняют свое направление. Если мы положим

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{\dot{b}}{b} = \frac{\dot{c}}{c} = k,$$

то условие на поверхности (4) § 110 представится в виде

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{2} kh_1,$$

которое будет тождественно с условием (3), если положить

$$C = \frac{1}{2} kabc.$$

Частным случаем (5) является распределение источников по эллиптическому диску, для которого $\lambda = -c^2$, и, следовательно, $z^2 = 0$. Этот случай важен для электростатики, а с гидродинамической точки зрения находит интересное применение для течения через эллиптическое отверстие. Если плоскость xy , кроме области, заключенной внутри эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0,$$

состоит из тонкой твердой стенки, то мы будем иметь, полагая в вышенаписанных формулах $c = 0$,

$$\varphi = \mp A \int_0^{\lambda} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)^{1/2} (b^2 + \lambda)^{1/2} \lambda^{1/2}}, \quad (6)$$

где верхний предел есть положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{\lambda} = 1, \quad (7)$$

а отрицательный или положительный знак следует взять, смотря по тому, лежит ли точка, для которой мы ищем φ , на положительной или отрицательной стороне плоскости xy . Оба эти значения φ на

отверстия, где $\lambda = 0$, непрерывно связаны между собой. Как и раньше, скорость на большом расстоянии приближенно равна $\frac{2A}{r^2}$, и полный поток через площадь $2\pi r^2$ будет равен тогда $4\pi A$. Полное изменение φ при изменении λ от $-\infty$ до $+\infty$ равно

$$2A \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)^{1/2} (b^2 + \lambda)^{1/2} \lambda^{1/2}} = 4A \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}}.$$

Следовательно „проводимость“ отверстия (термин заимствуем из электричества) будет равна

$$\frac{\pi}{\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}}}. \quad (8)$$

Для круглого отверстия это равно $2a$.

Для точек в отверстии скорость может быть определена прямо из уравнений (6) и (7); именно, мы можем, так как λ мало, положить приближенно

$$\delta z = \pm \lambda^{1/2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2}, \quad \delta \varphi = \mp \frac{2A\lambda^{1/2}}{ab}.$$

Отсюда следует

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{2A}{ab} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

Это выражение, как и следовало ожидать, обращается на краях отверстия в бесконечность. Частный случай *круглого* отверстия был уже изучен другим путем в § 102, 108.

§ 114. Мы переходим теперь к изучению решения уравнения $\Delta \varphi = 0$, которое конечно в бесконечности и для пространства вне эллипсоида, а для внутреннего пространства соответствует решению $\varphi = x$. Следуя аналогии со сферическими функциями, мы можем положить в виде пробы

$$\varphi = x\chi, \quad (1)$$

что дает

$$\Delta \chi + \frac{2}{x} \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Поставим теперь вопрос, нельзя ли удовлетворить этому уравнению (2) функцией χ , зависящей только от λ . При этом допущении согласно § 111 мы будем иметь

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = h_1 \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} h_1 \frac{\partial x}{\partial \lambda},$$

и, следовательно, по (4), (6) § 112

$$\frac{2}{x} \frac{\partial \chi}{\partial x} = 4 \frac{(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)} \frac{d\chi}{d\lambda}.$$

Если выразить $\Delta\chi$ через λ , то уравнение (2) представится в виде

$$\left\{ (a^2 + \lambda)^{1/2} (b^2 + \lambda)^{1/2} (c^2 + \lambda)^{1/2} \frac{d}{d\lambda} \right\}^2 \chi = - (b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda) \frac{d\chi}{d\lambda},$$

а это может быть написано так:

$$\frac{d}{d\lambda} \ln \left\{ (a^2 + \lambda)^{1/2} (b^2 + \lambda)^{1/2} (c^2 + \lambda)^{1/2} \frac{d\chi}{d\lambda} \right\} = - \frac{1}{a^2 + \lambda}.$$

Отсюда следует

$$\chi = C \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)^{3/2} (b^2 + \lambda)^{1/2} (c^2 + \lambda)^{1/2}}, \quad (3)$$

причем произвольное постоянное, которое появляется при втором интегрировании, выбрано, как и раньше, так, чтобы χ обращалось в нуль в бесконечности.

Решение, содержащееся в выражениях (1) и (3), позволяет нам найти движение жидкости, покоящейся в бесконечности, вызванное движением в жидкости твердого эллипсоида параллельно одной из главных осей. Если мы употребим те же обозначения, как и выше, и предположим, что эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4)$$

движется параллельно оси x со скоростью U , то условие на поверхности напишется

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = -U \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} \quad \text{для } \lambda = 0. \quad (5)$$

Для краткости положим

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= abc \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda) D}, \\ \beta_0 &= abc \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(b^2 + \lambda) D}, \\ \gamma_0 &= abc \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(c^2 + \lambda) D}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где

$$D = \{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)\}^{1/2}. \quad (7)$$

Легко видеть, что величины α_0 , β_0 , γ_0 суть просто числа. Условием нашей задачи удовлетворяет функция

$$\varphi = Cx \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda) D}, \quad (8)$$

если положить

$$C = \frac{abc}{2 - \alpha_0} U. \quad (9)$$

Соответствующее решение для движения эллипсоида параллельно оси y или оси z может быть написано сразу из соображений симметрии. Сложение этих движений дает случай любого поступательного движения эллипсоида¹⁾.

В большом удалении от начала формула (8) будет равнозначна с

$$\varphi = \frac{2}{3} C \frac{x}{r^3}, \quad (10)$$

а это есть потенциал скоростей дублета в начале мощности $\frac{8}{3} \pi C$ или

$$\frac{8}{3} \frac{\pi}{2 - \alpha_0} abcU;$$

ср. § 92.

Кинетическая энергия жидкости выражается так:

$$2T = -\rho \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \frac{\alpha_0}{2 - \alpha_0} \rho U^2 \iint x l dS,$$

где l есть косинус угла между нормалью к поверхности и осью x . Так как второй интеграл равен объему эллипсоида, то получаем

$$2T = \frac{\alpha_0}{2 - \alpha_0} \frac{4}{3} \pi abc \rho U^2. \quad (11)$$

Коэффициент инерции равен, следовательно, дроби

$$k = \frac{\alpha_0}{2 - \alpha_0} \quad (12)$$

от массы жидкости, вытесненной твердым телом. Для случая шара ($a = b = c$) мы находим $\alpha_0 = \frac{2}{3}$, $k = \frac{1}{2}$ в согласии с § 92. Если положить $a = b$, то получим случай эллипсоида вращения.

¹⁾ Эта задача была решена впервые Green, *Researches on the Vibration of Pendulums in Fluid Media*, Trans. R. S. Edin. 1883 (Papers, стр. 315). Решение будет более коротким, если принять во внимание заранее, исходя из теории притяжения, что функция (8) есть решение $\Delta \varphi = 0$, так как оно (с точностью до некоторого постоянного множителя) в действительности представляет компоненту по оси x притяжения, которое производит однородный эллипсоид на внешнюю точку.

Для вытянутого эллипсоида вращения ($b = c$, $a > b$) получаем

$$\alpha_0 = \frac{2(1-e^2)}{e^3} \left) \frac{1}{2} \ln \frac{1+e}{1-e} - e \right), \quad (13)$$

$$\beta_0 = \gamma_0 = \frac{1}{e^2} - \frac{1-e^2}{2e^3} \ln \frac{1+e}{1-e}, \quad (14)$$

где e есть эксцентриситет меридионального сечения. Соответствующие формулы для сплюсненного эллипсоида даны в § 373. Значения k для вытянутого эллипсоида вращения, который движется вперед соответственно узкой или широкой стороной, равные

$$k_1 = \frac{\alpha_0}{2 - \alpha_0}, \quad k_2 = \frac{\beta_0}{2 - \beta_0}, \quad (15)$$

приведены в таблице на стр. 196 для ряда значений отношения $\frac{a}{b}$.

Для эллиптического диска ($a \rightarrow 0$) формула (11) становится неверной, так как $\alpha_0 \rightarrow 2$. Отдельное исследование, отправляясь от формул (1) и (3), приводит к результату

$$2T = \frac{4}{3} \pi \rho b^2 c^2 U^2 \frac{1}{\int_0^{\pi/2} \sqrt{b^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta} d\theta}. \quad (16)$$

В случае $b = c$ эта формула воспроизводит результат (20) § 102.

§ 115. Мы исследуем теперь, может ли уравнение $\Delta\varphi = 0$ удовлетвориться выражением

$$\varphi = yz\chi, \quad (1)$$

где χ есть функция только от λ . Это приводит к уравнению

$$\Delta\chi + \frac{2}{y} \frac{\partial\chi}{\partial y} + \frac{2}{z} \frac{\partial\chi}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

При этом из уравнений (4) и (6) § 112 следует

$$\begin{aligned} \frac{2}{y} \frac{\partial\chi}{\partial y} + \frac{2}{z} \frac{\partial\chi}{\partial z} &= 2h_1^2 \left(\frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial\lambda} + \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial\lambda} \right) \frac{d\chi}{d\lambda} = \\ &= 4 \frac{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)} \left(\frac{1}{b^2 + \lambda} + \frac{1}{c^2 + \lambda} \right) \frac{d\chi}{d\lambda}. \end{aligned}$$

Подставив это в уравнение (2), мы находим из уравнения (7) § 112

$$\frac{d}{d\lambda} \ln \left\{ (a^2 + \lambda)^{1/2} (b^2 + \lambda)^{1/2} (c^2 + \lambda)^{1/2} \frac{d\chi}{d\lambda} \right\} = -\frac{1}{b^2 + \lambda} - \frac{1}{c^2 + \lambda}.$$

Отсюда следует

$$\chi = C \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda) D}, \quad (3)$$

причем вторая постоянная интегрирования выбрана, как и выше.

Для твердого эллипсоида, вращающегося около оси x с угловой скоростью Ω_x , условием на поверхности будет

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = \Omega_x \left(z \frac{\partial y}{\partial \lambda} - y \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right) \quad (4)$$

при $\lambda = 0$. Если допустить, что ¹⁾

$$\varphi = C y z \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda) D}, \quad (5)$$

то мы найдем, что условие на поверхности (4) будет выполнено, когда

$$-\frac{C}{ab^2c^2} + \frac{1}{2} C \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \frac{\gamma_0 - \beta_0}{abc(b^2 - c^2)} = \frac{1}{2} \Omega_x \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right),$$

или

$$C = \frac{(b^2 - c^2)^2}{2(b^2 - c^2) + (b^2 + c^2)(\beta_0 - \gamma_0)} abc \Omega_x. \quad (6)$$

Формулы для случая вращения около оси y или оси z могут быть написаны сразу из соображений симметрии ²⁾.

Формула для кинетической энергии будет

$$\begin{aligned} 2T &= -e \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \\ &= e C \Omega_x^2 \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)^{3/2} (b^2 + \lambda)^{3/2} (c^2 + \lambda)^{3/2}} \cdot \iint (ny - mz) yz dS, \end{aligned}$$

причем (l, m, n) суть направляющие косинусы нормали эллипсоида. Последний интеграл равен

$$\iiint (y^2 - z^2) dx dy dz = \frac{1}{5} (b^2 - c^2) \frac{4}{3} \pi abc.$$

Отсюда мы находим

$$2T = \frac{1}{5} \frac{(b^2 - c^2)^2 (\gamma_0 - \beta_0)}{2(b^2 - c^2) + (b^2 + c^2)(\beta_0 - \gamma_0)} \cdot \frac{4}{3} \pi abc e \Omega_x^2. \quad (7)$$

¹⁾ Выражение (5) отличается только множителем от

$$y \frac{\partial \Phi}{\partial z} - z \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

где Φ — потенциал притяжения однородного твердого эллипсоида для внешней точки (x, y, z) . Так как $\Delta \Phi = 0$, то вышенаписанная функция, как легко показать, также удовлетворяет уравнению $\Delta \Phi = 0$.

²⁾ Решение, содержащееся в (5) и (6), принадлежит Clebsch, Über die Bewegung eines Ellipsoides in einer tropfbaren Flüssigkeit, Crelle, LII, 103; LIII, 287 (1854—1856).

В случае вытянутого эллипсоида вращения, который вращается около экваториального диаметра, для отношения коэффициента инерции ¹⁾ к моменту инерции вытесненной массы жидкости относительно того же диаметра находим выражение

$$k' = \frac{e^4 (\beta_0 - \alpha_0)}{(2 - e^2) \{2e^2 - (2 - e^2) (\beta_0 - \alpha_0)\}} \quad (8)$$

Значения k_1 , k_2 (определенные в § 114) и k' дает следующая таблица:

$\frac{a}{b}$	k_1	k_2	k'	$\frac{a}{b}$	k_1	k_2	k'
1	0,5	0,5	0	6,01	0,015	0,918	0,764
1,50	0,305	0,621	0,094	6,97	0,036	0,933	0,805
2,00	0,209	0,702	0,240	8,01	0,029	0,945	0,840
2,51	0,156	0,763	0,367	9,02	0,024	0,951	0,865
2,99	0,122	0,803	0,475	9,97	0,021	0,960	0,883
3,99	0,082	0,860	0,608	∞	0	1	1
4,99	0,059	0,895	0,701				

Два другие вида эллипсоидных функций второго порядка, конечных в начале координат, даются выражением

$$\frac{x^2}{a^2 + \theta} + \frac{y^2}{b^2 + \theta} + \frac{z^2}{c^2 + \theta} = 1, \quad (9)$$

где θ — один из трех корней уравнения

$$\frac{1}{a^2 + \theta} + \frac{1}{b^2 + \theta} + \frac{1}{c^2 + \theta} = 0, \quad (10)$$

которое и есть условие того, что (9) будет удовлетворять уравнению $\Delta\varphi = 0$.

Метод для нахождения соответствующих решений для внешнего пространства разобран в книге Ферерса. Эти решения позволяют представить движение жидкости, окружающей эллипсоид, вызванное изменением длин его осей при условии, что эллипсоид сохраняет постоянный объем:

$$\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} = 0. \quad (11)$$

В § 113 мы нашли уже решение для случая, когда эллипсоид расширяется (или стягивается) и при этом остается всегда себе подобным; таким же образом мы можем сложением получить случай внутренней границы, которая произвольно меняет свое положение и размеры и подчинена единственному ограничению — всегда оставаться эллипсоидом. Это расширение результатов, найденных Грином и Клебшем, дано было впервые Бьеркнесом ²⁾ в форме, несколько отличающейся от изложенной здесь.

§ 116. Исследования этой главы относились почти исключительно к случаю сферических или эллипсоидальных границ.

Само собой понятно, что решения уравнения $\Delta\varphi = 0$, относящиеся к другим видам границ, могут быть получены более или менее ана-

¹⁾ Здесь под коэффициентом инерции следует понимать присоединенный момент инерции. *Прим. ред.*

²⁾ См. сноску на стр. 185.

логично. Поверхность, которую с точки зрения нашего предмета следует рассматривать далее в первую очередь, есть кольцо или тор; этот случай весьма искусно трактовался различными методами Хиксом и Дайсоном ¹⁾. Мы можем еще указать на математически интересную задачу, связанную с движением оболочки, вырезанной из сферической поверхности, которая была исследована Бассе ²⁾.

ДОБАВЛЕНИЕ К ГЛАВЕ V

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, ОТНЕСЕННЫЕ К ОБЩИМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ КООРДИНАТАМ

Сохраняя обозначения § 111, будем дифференцирование x, y, z по независимым переменным λ, μ, ν соответственно обозначать индексами 1, 2, 3. Так, например, направляющие косинусы нормали к поверхности $\lambda = \text{const.}$ будут $h_1 x_1, h_1 y_1, h_1 z_1$ и т. п.

Если u, v, w будут компоненты скорости по трем нормалям, то полный поток наружу через квазипрямоугольный параллелепипед, ребра которого суть $\frac{\delta\lambda}{h_1}, \frac{\delta\mu}{h_2}, \frac{\delta\nu}{h_3}$, будет равен

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} \left(\frac{u \delta\mu \delta\nu}{h_2 h_3} \right) \delta\lambda + \frac{\partial}{\partial\mu} \left(\frac{v \delta\nu \delta\lambda}{h_3 h_1} \right) \delta\mu + \frac{\partial}{\partial\nu} \left(\frac{w \delta\lambda \delta\mu}{h_1 h_2} \right) \delta\nu;$$

отсюда получим выражение для коэффициента кубического расширения в виде

$$\Delta = h_1 h_2 h_3 \left\{ \frac{\partial}{\partial\lambda} \left(\frac{u}{h_2 h_3} \right) + \frac{\partial}{\partial\mu} \left(\frac{v}{h_3 h_1} \right) + \frac{\partial}{\partial\nu} \left(\frac{w}{h_1 h_2} \right) \right\}; \quad (1)$$

ср. (4) § 111.

Циркуляция по прямоугольному контуру на поверхности $\lambda = \text{const.}$, стороны которого суть $\frac{\delta\mu}{h_2}, \frac{\delta\nu}{h_3}$, будет выражаться в виде

$$\frac{\partial}{\partial\mu} \left(\frac{w \delta\nu}{h_3} \right) \delta\mu - \frac{\partial}{\partial\nu} \left(\frac{v \delta\mu}{h_2} \right) \delta\nu. \quad (2)$$

Разделяя полученное на площадь контура, получим первую из следующих формул для компонент вихря по трем нормалям:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= h_2 h_3 \left\{ \frac{\partial}{\partial\mu} \left(\frac{w}{h_3} \right) - \frac{\partial}{\partial\nu} \left(\frac{v}{h_2} \right) \right\}, \\ \eta &= h_3 h_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial\nu} \left(\frac{u}{h_1} \right) - \frac{\partial}{\partial\lambda} \left(\frac{w}{h_3} \right) \right\}, \\ \zeta &= h_1 h_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial\lambda} \left(\frac{v}{h_2} \right) - \frac{\partial}{\partial\mu} \left(\frac{u}{h_1} \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

¹⁾ Hicks, On Toroidal Functions, Phil. Trans., CLXXII, 609, 1881; Dyson, On the Potential of an Anchor-Ring, Phil. Trans., CLXXXIV, 43, 1892; см. также С. Нейманн, прим. на стр. 168.

²⁾ Basset, On the of an Electrified Spherical Bowl etc., Proc. Lond. Math. Soc. (1), XVI, 286 (1885); Hydrodynamics, I, 149.

Чтобы найти выражения для компонент ускорения, мы заметим, что за время δt частица изменит свои параметры от (λ, μ, ν) до $(\lambda + \delta\lambda, \mu + \delta\mu, \nu + \delta\nu)$, где

$$\frac{\delta\lambda}{h_1} = u \delta t, \quad \frac{\delta\mu}{h_2} = v \delta t, \quad \frac{\delta\nu}{h_3} = w \delta t.$$

А тогда компоненты скорости становятся равными

$$u + \left(\frac{\partial u}{\partial t} + h_1 u \frac{\partial u}{\partial \lambda} + h_2 v \frac{\partial u}{\partial \mu} + h_3 w \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \delta t \text{ и т. д.}, \quad (4)$$

но мы должны отнести их к первоначальным направлениям u, v, w . За промежуток времени δt направляющие косинусы нового направления v станут

$$h_2 x_2 + \frac{\partial}{\partial \lambda} (h_2 x_2) h_1 u \delta t + \frac{\partial}{\partial \mu} (h_2 x_2) h_2 v \delta t + \frac{\partial}{\partial \nu} (h_2 x_2) h_3 w \delta t \text{ и т. д.}$$

причем в ненаписанных двух выражениях производные x заменяются соответственно через производные y и z . Отсюда косинус угла между новым направлением v и первоначальным направлением u , т. е. $(h_1 x_1, h_1 y_1, h_1 z_1)$, будет равен

$$\begin{aligned} & \{(x_1 x_{12} + y_1 y_{12} + z_1 z_{12}) h_1 u + (x_1 x_{22} + y_1 y_{22} + z_1 z_{22}) h_2 v + \\ & \quad + (x_1 x_{32} + y_1 y_{32} + z_1 z_{32}) h_3 w\} h_1 h_2 \delta t. \end{aligned} \quad (5)$$

Некоторые члены из этого выражения опущены в силу соотношения

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0, \quad (6)$$

которое следует из условия ортогональности координат. Кроме того, дифференцируя (6) по ν и сравнивая с подобными результатами ¹⁾, мы заключаем, что

$$x_1 x_{22} + y_1 y_{22} + z_1 z_{22} = 0. \quad (7) \text{ } ^2)$$

Точно так же дифференцируя тождество

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \frac{1}{h_1^2} \quad (8)$$

по μ , получим

$$x_1 x_{12} + y_1 y_{12} + z_1 z_{12} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{1}{h_1} \right). \quad (9)$$

Далее,

$$\begin{aligned} x_1 x_{22} + y_1 y_{22} + z_1 z_{22} &= \frac{\partial}{\partial \mu} (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) - (x_2 x_{12} + y_2 y_{12} + z_2 z_{12}) = \\ &= - \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{h_2} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом выражение (5) приводится к виду

$$\left\{ u \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{1}{h_1} \right) - v \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{h_2} \right) \right\} h_1 h_2 \delta t. \quad (11)$$

Тем же способом можно показать, что косинус угла между новым направлением w и первоначальным направлением u есть

$$\left\{ u \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{h_1} \right) - w \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{h_3} \right) \right\} h_1 h_3 \delta t. \quad (12)$$

¹⁾ Которые получаются при дифференцировании по μ и λ других соотношений ортогональности. *Прим. ред.*

²⁾ For syth, *Differential Geometry*, Cambridge, 1912, стр. 412.

Следовательно, ускорение в первоначальном направлении u оказывается равным

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + h_1 u \frac{\partial u}{\partial \lambda} + h_2 v \frac{\partial u}{\partial \mu} + h_3 w \frac{\partial u}{\partial \nu} + \\ & + h_1 h_2 v \left\{ u \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{1}{h_1} \right) - v \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{h_2} \right) \right\} + \\ & + h_1 h_3 w \left\{ u \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{h_1} \right) - w \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{h_3} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (13)^1$$

или, в более симметричном виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + h_1 u \frac{\partial u}{\partial \lambda} + h_2 v \frac{\partial u}{\partial \mu} + h_3 w \frac{\partial u}{\partial \nu} + \\ & + h_1 u \left\{ h_1 u \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{h_1} \right) + h_2 v \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{1}{h_1} \right) + h_3 w \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{h_1} \right) \right\} - \\ & - h_1 \left\{ h_1 u^2 \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{h_1} \right) + h_2 v^2 \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{h_2} \right) + h_3 w^2 \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{h_3} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Выражения для ускорений в направлении v и w можно написать из соображений симметрии. Например, в цилиндрических координатах мы имеем

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z.$$

Полагая

$$\lambda = r, \quad \mu = \theta, \quad \nu = z,$$

получим

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \frac{1}{r}, \quad h_3 = 1.$$

Коэффициент кубического расширения будет равен

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (15)$$

а компоненты вихря

$$\xi = \frac{\partial w}{r \partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{\partial u}{r \partial \theta}. \quad (16)$$

Компоненты же ускорения будут выражаться в виде

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{r \partial \theta} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z}, \\ & \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z}, \\ & \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + v \frac{\partial w}{r \partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Если в этих формулах положить $w=0$, то получим результаты в полярных координатах на плоскости (§ 16а).

В сферических координатах имеем

$$x = r \sin \theta \cos \omega, \quad y = r \sin \theta \sin \omega, \quad z = r \cos \theta.$$

Полагая

$$\lambda = r, \quad \mu = \theta, \quad \nu = \omega,$$

¹⁾ G. B. Jeffery, Phil. Mag. (6), XXIX, 445 (1915).

будем иметь

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \frac{1}{r}, \quad h_3 = \frac{1}{r \sin \theta}.$$

Отсюда

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{v}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \omega}, \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\partial w}{r \partial \theta} - \frac{\partial v}{r \sin \theta \partial \omega} - \frac{w}{r} \operatorname{ctg} \theta, \\ \eta &= \frac{\partial u}{r \sin \theta \partial \omega} - \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r}, \\ \zeta &= \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{\partial u}{r \partial \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Компоненты ускорения будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{r \partial \theta} + w \frac{\partial u}{r \sin \theta \partial \omega} - \frac{v^2 + w^2}{r}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{r \partial \theta} + w \frac{\partial v}{r \sin \theta \partial \omega} + \frac{uv}{r} - \frac{w^2}{r} \operatorname{ctg} \theta, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + v \frac{\partial w}{r \partial \theta} + w \frac{\partial w}{r \sin \theta \partial \omega} + \frac{uw}{r} + \frac{vw}{r} \operatorname{ctg} \theta; \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ср. § 16а.

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ В ЖИДКОСТИ; ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ.

§ 117. В этой главе мы предполагаем изучить интересную динамическую задачу о движении одного или нескольких твердых тел в жидкости, лишенной трения. Развитие этой теории обязано главным образом Томсону и Тэту ¹⁾, а также и Кирхгофу ²⁾. Сущность методов этих авторов состоит в том, что твердые тела и жидкость рассматриваются вместе как *одна* динамическая система, благодаря чему становится излишним утомительное вычисление результирующей давления жидкости на поверхности тел.

Мы начнем со случая, когда только одно тело движется в неограниченной несжимаемой жидкости; предположим сначала, что движение жидкости обусловлено только движением твердого тела и есть, следовательно, безвихревое и ацикличное. Некоторые частные случаи этой задачи были уже попутно разобраны на предшествую-

¹⁾ Thomson and Tait, Natural Philosophy, § 320. Дальнейшие исследования Кельвина будут указаны позже.

²⁾ Kirchhoff, Über die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit, Crelle, LXXI, 237 (1869). (Ges. Abh., стр. 376); Mechanik, 19-я лекция.