

Задачи установившегося движения.

§ 330. Переходя теперь к рассмотрению частных задач, необходимо с самого начала предупредить, что хотя уравнения движения вязкой жидкости и получены надлежащим способом, все же вычисления, опирающиеся на них, приводят к довольно сильно ограниченным результатам. Причина этого лежит в том, что мы, чтобы упростить вычисления, отбрасываем в эйлеровой форме выражений для ускорения малые величины второго порядка, которые, однако, часто имеют, по меньшей мере, такую же важность, как и члены, зависящие от вязкости. Другая причина заключается в том, что даже при точном решении задачи полученные формы движения часто оказываются неустойчивыми. Мы будем в дальнейшем иметь случай обратиться внимание на это обстоятельство и исследуем его подробнее в § 365 и далее.

Первое применение уравнений движения, которое мы теперь рассмотрим, будет относиться к установившемуся движению жидкости, происходящему под действием давления между двумя неподвижными плоскостями. Пусть начало координат лежит в одной из этих плоскостей и ось z направлена перпендикулярно к этой плоскости.

Предположим прежде всего, что u есть функция только z и $v = w = 0$. Так как напряжение, параллельное оси x и действующее на произвольную, перпендикулярную к оси z плоскость, равно $\mu \frac{\partial u}{\partial z}$, то разность напряжений на две граничные поверхности слоя, с площадью основания, равной единице, и с толщиной δz будет равна $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cdot \delta z$.

Эта разность напряжений должна уравновешиваться давлением, имеющим на каждую единицу объема слоя равнодействующую $-\frac{\partial p}{\partial x}$. Отсюда следует

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (1)$$

Так как далее движения в направлении оси z нет, то производная $\frac{\partial p}{\partial z}$ должна быть равна нулю. Эти результаты следуют также непосредственно из общих уравнений § 328.

Отсюда получается, что градиент давления $\frac{\partial p}{\partial x}$ есть абсолютная постоянная.

Поэтому уравнение (1) дает

$$u = A + Bz + \frac{1}{2\mu} z^2 \frac{\partial p}{\partial x}; \quad (2)$$

если мы определим постоянные так, что будем иметь $u = 0$ при $z = 0$ и $z = h$, то найдем

$$u = -\frac{1}{2\mu} z(h-z) \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (3)$$

Отсюда получается

$$\int_{-h}^h u dz = -\frac{h^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (4)$$

Если, как это имело место в опытах проф. Хиль Шоу¹⁾, жидкость течет в двух измерениях между двумя близко друг к другу расположенными плоскими пластинками, то мы можем положить

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (5)$$

если только пренебречь значениями производных от функций u и v , взятых по x и y , по сравнению с производными по z . Если далее предположить, что всюду $w=0$, то получим $\frac{\partial p}{\partial z}=0$, т. е. p есть функция только x и y .

Условие отсутствия скольжения в плоскостях $z=0$ и $z=h$ будет выполнено, если мы положим

$$u = \frac{6z(h-z)}{h^2} u', \quad v = \frac{6z(h-z)}{h^2} v'. \quad (6)$$

Величины u' и v' представляют здесь средние скорости в слое и предполагаются функциями только x и y . Если мы подставим эти выражения в уравнения (5), то найдем

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12\mu}{h^2} u', \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{12\mu}{h^2} v'. \quad (7)$$

Следовательно, величины u' и v' можно рассматривать как составляющие скорости плоского безвихревого движения жидкости с потенциалом скоростей

$$\varphi = \frac{ph^2}{12\mu}. \quad (8)$$

Если жидкость, находящаяся под давлением, вынуждена обтекать препятствие, которое расположено между плоскостями и имеет форму пластинки толщиной h , то кинематические условия большей частью оказываются такими же, как и при плоском движении идеальной жидкости, обтекающей цилиндр с поперечным сечением в форме пластинки. Это заключение справедливо только с тем небольшим ограничением, что уравнения (5) на расстоянии порядка h от препятствия перестают быть годными, так как вязкая жидкость не может скользить вдоль поверхности препятствия, как это имеет место для идеальной жидкости.

Однако, фигуры линий тока в обеих задачах могут быть сделаны как угодно мало отличающимися друг от друга, если только расстояние между плоскостями взять достаточно малым²⁾.

§ 330а. Если граничная плоскость $z=0$ имеет скорость U , параллельную оси x , то вместо формулы (3) будем иметь

$$u = \frac{h-z}{h} U - \frac{z(h-z)}{2\mu} \frac{dp}{dx}, \quad (9)$$

¹⁾ Указания литературы см. в примечании на стр. 111.

²⁾ Stokes, Mathematical Proof of the Identity of the Stream-Lines obtained by means of a Viscous Film with those of a Perfect Fluid moving in Two Dimensions, Brit. Ass. Rep., 1898, стр. 143 (Papers, V, 278).

и общий расход через плоскость, перпендикулярную к оси x , на единицу ширины будет равен

$$\int_0^h u dz = \frac{1}{2} hU - \frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (10)$$

Эти формулы приближенно верны также в том случае, когда расстояние h между обеими плоскостями есть переменная величина, если только значение градиента $\frac{dh}{dx}$ будет мало, а также и тогда, когда обе поверхности кривые, если только значение h всюду мало по сравнению с радиусом кривизны. В случае цилиндрических поверхностей за координату x можно взять длину дуги кривой поперечного сечения.

Приведенные выше результаты с указанным обобщением находят важное применение в теории смазки; эта теория основана Осборном Рейнольдсом в его классической работе ¹⁾. То обстоятельство, что две параллельные или приблизительно параллельные плоскости могут, несмотря на большое нормальное давление, с очень небольшим сопротивлением трения скользить одна по другой, если только между ними находится слой вязкой жидкости, было, конечно, давно известно. Задача заключалась только в том, чтобы объяснить, как это в практических случаях автоматически выполняется, несмотря на давление. Оказывается, что расположение двух поверхностей должно быть таким, чтобы промежуточное пространство между ними имело переменную толщину и чтобы относительное движение все время стремилось бы переносить смазывающее вещество от более толстых частей промежуточного слоя к более тонким.

Простой типичный случай представляет собой скольжение колодки по плоскости. Так как значение имеет только относительное движение, то мы будем считать, что движется плоскость ($z=0$), в то время как колодка находится в покое. Для простоты примем далее, что обе поверхности в направлении оси y не ограничены, так что движение жидкости будет плоским. Пусть нижняя поверхность колодки ограничена прямыми $x=0$ и $x=a$. Мы будем ее представлять себе плоской, но слегка наклоненной, и поэтому положим

$$h = h_1 + mx, \quad h_2 = h_1 + ma, \quad (11)$$

где m — величина малая.

Так как расход через все плоскости, перпендикулярные к оси x , должен быть одинаковым, то на основании равенства (10) имеем

$$h^3 \frac{dp}{dx} = 6\mu U (h - h_0), \quad (12)$$

причем значение h_0 соответствует максимуму величины p . Отсюда следует

$$\frac{dp}{dh} = \frac{6\mu U}{m} \left(\frac{1}{h^2} - \frac{h_0}{h^3} \right), \quad (13)$$

$$p = \frac{6\mu U}{m} \left(-\frac{1}{h} + \frac{h_0}{2h^2} + C \right). \quad (14)$$

¹⁾ См. примечание 2 на стр. 720.

Если мы определим постоянные h_0 и C таким образом, чтобы имело место равенство $p=0$ при $h=h_1$ и $h=h_2$, то найдем

$$h_0 = \frac{2h_1h_2}{h_1+h_2}, \quad (15)$$

$$p = \frac{6\mu Ua}{h_1^2 - h_2^2} \cdot \frac{(h_1 - h)(h - h_2)}{h^2}. \quad (16)$$

Прибавление постоянной к p , конечно, не меняет существенно результатов.

Тотчас же видно следующее: если значение U , как мы и будем предполагать, положительно, то положительное давление в слое возможно только в том случае, когда $h_1 > h_2$; это значит, что промежуточный слой должен суживаться в направлении скорости U , как это и было указано выше.

Для полного давления получаем выражение

$$P = \int_0^a p \, dx = \frac{1}{m} \int_{h_1}^{h_2} p \, dh = \frac{6\mu Ua^2}{(k-1)^2 h_2^2} \left(\ln k - \frac{2(k-1)}{k+1} \right), \quad (17)$$

где $k = \frac{h_1}{h_2}$. Сопротивление же от вязкости на движущейся плоскости будет иметь значение

$$\begin{aligned} F &= - \int_0^a \mu \frac{du}{dz} \, dx = \frac{\mu U}{m} \int_{h_1}^{h_2} \left(\frac{4}{h} - \frac{3h_0}{h^2} \right) dh = \\ &= \frac{\mu Ua}{(k-1)h_2} \left(4 \ln k - \frac{6(k-1)}{k+1} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Рейнольдсом было найдено, а Рэлеем подтверждено¹⁾, что результирующее давление P , рассматриваемое как функция от k , имеет максимум приблизительно при $k=2,2$. При этом получается

$$P = 0,16 \frac{\mu Ua^2}{h_2^2}, \quad F = 0,75 \frac{\mu Ua}{h_2}. \quad (19)$$

Коэффициент трения $\frac{F}{P}$ имеет порядок величины $\frac{h_2}{a}$ и может быть сделан поэтому очень малым.

Координата (\bar{x}) центра давления определяется формулой

$$\begin{aligned} P\bar{x} &= \int_0^a xp \, dx = \frac{1}{m^2} \int_{h_1}^{h_2} (h - h_1) p \, dh = \frac{kPa}{k-1} - \frac{1}{2m^2} \int_{h_1}^{h_2} h^2 \frac{dp}{dh} \, dh = \\ &= \frac{kPa}{k-1} - \frac{3\mu Ua^3}{(k-1)^2 h_2^2} \left(1 - \frac{2k}{k^2-1} \ln k \right), \end{aligned} \quad (20)$$

или

$$\frac{\bar{x}}{\frac{1}{2}a} = \frac{2k}{k-1} - \frac{k^2-1-2k \ln k}{(k^2-1) \ln k - 2(k-1)^2}. \quad (21)^2)$$

¹⁾ Rayleigh, Notes on the Theory of Lubrication, Phil. Mag. (6), XXXV, 1 (1918) (Papers, VI, 523).

²⁾ Rayleigh, см. выше. Для $k=2,2$ эта формула дает $\bar{x} = 0,580 a$.

Применение уравнения (13) к случаю вала, вращающегося (несколько эксцентрично) в неподвижных подшипниках, имеется в работах, указанных в примечании ¹⁾.

Если же течение происходит как в направлении оси x , так и в направлении оси y , то кроме равенства (10) имеем еще равенство

$$\int_0^h v dz = \frac{1}{2} hV - \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad (22)$$

уравнение непрерывности в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h v dz = 0 \quad (23)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 6\mu \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (hU) + \frac{\partial}{\partial y} (hV) \right\}. \quad (24)$$

Мичелл приложил это уравнение к случаю прямоугольной колодки конечной ширины, скользящей по плоскости ²⁾.

§ 331. Рассмотрим далее установившееся течение жидкости по круглой цилиндрической трубе.

Если направить ось z по оси трубы и принять, что скорость всюду параллельна оси z и есть функция расстояния (r) от оси, то касательное напряжение в плоскости, перпендикулярной к r , будет равно $\mu \frac{\partial w}{\partial r}$. Рассматривая цилиндрический слой жидкости с граничными радиусами r и $r + \delta r$ и длиной l , получим, что разность касательных напряжений на обеих цилиндрических поверхностях дает тормозящую силу

$$-\frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial r} \cdot 2\pi r l \right) \delta r.$$

Вследствие установившегося характера движения эта сила должна уравновешиваться разностью нормальных давлений на плоских концах слоя.

Так как $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$, то разность этих нормальных давлений должна быть равна

$$(p_1 - p_2) 2\pi r \delta r,$$

где p_1 и p_2 — значения величины p (среднего давления) на обоих концах. Отсюда следует

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) = -\frac{p_1 - p_2}{\mu l} \cdot r. \quad (1)$$

¹⁾ Reynolds, см. выше; Sommerfeld, Zeitschrift f. Math., 1, 97 (1904); Harrison, Camb. Trans., XXII, 39 (1913) и XXII, 373 (1920). См. также A. G. Michell, Mechanical Properties of Fluids, London, 1923, стр. 134; Stanton, Friction, London, 1923, стр. 93. Сборник „Гидродинамическая теория смазки“, Москва, 1934.

²⁾ Michell, Zeitschr. f. Math., LIII, 123 (1905). Извлечения из этого весьма изящного исследования находятся в обеих только что названных книгах.

Если мы затем будем искать для сил, действующих на прямоугольную площадку, результирующую составляющую в направлении радиуса, то получим $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$, что означает, что среднее давление по всему поперечному сечению оказывается для каждого сечения трубы постоянным.

Интеграл уравнения (1) есть

$$w = -\frac{p_1 - p_2}{4\mu l} r^2 + A \ln r + B. \quad (2)$$

Так как скорость на оси должна быть конечной, то мы должны иметь $A = 0$; если мы теперь определим B из условия, что на стенке трубы не должно быть скольжения, то получим

$$w = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (a^2 - r^2). \quad (3)$$

Эта формула дает для расхода через произвольное поперечное сечение значение

$$\int_0^a w \cdot 2\pi r \, dr = \frac{\pi a^4}{8\mu} \cdot \frac{p_1 - p_2}{l}. \quad (4)$$

Мы приняли для краткости, что течение происходит только под действием давления. Если к этому добавляется еще внешняя сила X , действующая параллельно длине трубки, то поток окажется равным

$$\frac{\pi a^4}{8\mu} \left(\frac{p_1 - p_2}{l} + \rho X \right). \quad (5)$$

Практически сила X представляет обычно составляющую силы тяжести в направлении длины трубы.

Формула (4) заключает в себе как раз те законы, которые экспериментально нашел Пуазейль ¹⁾ при своих исследованиях, относящихся к течению воды по капиллярным трубкам, а именно, что время истечения данной массы жидкости прямо пропорционально длине трубки, обратно пропорционально разности давлений на обоих концах и обратно пропорционально четвертой степени диаметра.

Этот последний результат в особенности важен, так как он представляет решающее доказательство того, что при этих опытах не происходило никакого заметного скольжения жидкости вдоль стенки. Если бы мы приняли коэффициент скольжения равным β , как указано в § 327, то условие на граничной поверхности имело бы вид

$$-\mu \frac{\partial w}{\partial r} = \beta w$$

или

$$w = -\lambda \frac{\partial w}{\partial r}, \quad (6)$$

¹⁾ Poiseuille, Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres. Comptes Rendus, XI, XII (1840—1841). Mém. des Sav. Étrangers, IX (1846).

если положить $\lambda = \frac{\mu}{\beta}$. Это соотношение определяет постоянную B в равенстве (2) таким образом, что

$$w = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (a^2 - r^2 + 2\lambda a). \quad (7)$$

Если отношение $\frac{\lambda}{a}$ мало, то это равенство дает практически тот же закон распределения скорости, как в случае трубы радиуса $a + \lambda$ при гипотезе прилипания. Соответствующее же значение расхода оказывается равным

$$\frac{\pi a^4}{8\mu} \cdot \frac{p_1 - p_2}{l} \left(1 + 4 \frac{\lambda}{a} \right). \quad (8)$$

Если бы в случае очень узких трубок в опытах Пуазейля ($a = 0,0015$ см) значение λ оказалось больше, чем очень малая доля радиуса a , то необходимо должно было бы обнаружиться отклонение от закона четвертой степени диаметра, между тем как в действительности закон выполняется очень точно. Этого достаточно, чтобы исключить возможность таких значений λ , как $0,235$ см, а такие значения были получены Гельмгольцем и Пиотровским на основании описанных в названных уже работах опытов их над крутильными колебаниями металлического шара, наполненного водой ¹⁾.

Так как гипотезу прилипания можно считать в настоящее время вполне установленной, то сравнение формулы (4) с опытами дает прямой способ определять значение коэффициента μ для различных жидкостей ²⁾.

Из равенств (3) и (4) следует, что скорость деформации сдвига вблизи от стенки равна $4 \frac{w_0}{a}$, где w_0 обозначает среднюю скорость в поперечном сечении.

В качестве числового примера приведем рассмотренный Пуазейлем случай, когда в трубе диаметром $0,01134$ см была получена средняя скорость, равная $126,6$ см/сек. Это дает соотношение $\frac{4w_0}{a} = 89\,300$, если за единицу времени взять секунду.

Для значений w_0 , которые превосходят некоторую границу, зависящую от отношения между диаметром трубы и коэффициентом вязкости, рассмотренная здесь прямолинейная форма течения становится неустойчивой для всех возмущений, превосходящих некоторое значение (см. § 365). Результаты §§ 330, 331, а также многие последующие вычисления подвержены тем же ограничениям.

§ 332. Приведем теперь некоторые теоретические результаты для некруговых поперечных сечений.

1. Решение для канала с поперечным сечением в форме кольца можно легко получить из выражения (2) предыдущего параграфа, если удерживать

¹⁾ Более полное изложение этого вопроса находится в работе Whet-
ham, On the alleged Slipping at the Boundary of a Liquid in Motion, Phil.
Trans., A, CLXXXI, 559 (1890).

²⁾ При практическом применении этого способа требуется поправка,
учитывающая отклонение от теоретического закона вблизи концов трубки; см.
Stanton, Friction, стр. 15.

коэффициент A . Таким образом, находим при граничных условиях $w=0$ при $r=a$ и $r=b$

$$w = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} \left\{ a^2 - r^2 + \frac{b^2 - a^2}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{r}{a} \right\}; \quad (1)$$

это дает для расхода значение

$$\int_a^b w \cdot 2\pi r \, dr = \frac{\pi}{8\mu} \cdot \frac{p_1 - p_2}{l} \left\{ b^4 - a^4 - \frac{(b^2 - a^2)^2}{\ln \frac{b}{a}} \right\}. \quad (2)$$

2. Гринхилл ¹⁾ указал на то, что аналитические условия рассматриваемой задачи оказываются подобными тем, которые определяют движение идеальной жидкости во вращающемся призматическом сосуде с поперечным сечением той же формы (§ 72).

Если направим ось z параллельно оси трубы и предположим, что w есть функция только x и y , то уравнения в случае установившегося движения приведутся к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \mu \Delta_1 w = \frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Обозначая через P постоянный градиент давления $\left(-\frac{\partial p}{\partial z}\right)$, будем иметь

$$\Delta_1 w = -\frac{P}{\mu} \quad (4)$$

при условии, что на границе $w=0$.

Подставляя теперь выражение $\psi - \frac{1}{2} \omega (x^2 + y^2)$ вместо w и 2ω вместо $\frac{P}{\mu}$, мы воспроизведем условия названного выше параграфа. Этим и доказывается отмеченная выше аналогия.

В случае эллиптического сечения с полуосями a , b положим

$$w = C \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right), \quad (5)$$

что удовлетворяет уравнению (4), если

$$C = \frac{P}{2\mu} \cdot \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}. \quad (6)$$

Отсюда секундный расход жидкости будет равен

$$\iint w \, dx \, dy = \frac{P}{4\mu} \cdot \frac{\pi a^2 b^2}{a^2 + b^2}. \quad (7)^2$$

¹⁾ Greenhill, On the Flow of a Viscous Liquid in a Pipe or Channel, Proc. Lond. Math. Soc. (1), XIII, 43 (1881).

²⁾ Этот результат и соответствующие результаты для других форм поперечного сечения, повидному, получил в 1868 г. Буссинеск; см. Hicks, Brit. Ass. Rep., 1882, стр. 63.

Эта величина относится к расходу жидкости в круглой трубе с такой же площадью поперечного сечения, как $2ab:(a^2+b^2)$. Для небольших значений эксцентриситета e эта дробь отличается от *единиц* на величину порядка e^4 . Поэтому поперечные сечения могут иметь довольно разнообразную форму без того, чтобы расход менялся значительно, если только площадь поперечного сечения остается неизменной. Даже если $a:b=8:7$, то и тогда расход уменьшается меньше, чем на 1%.

§ 333. Рассмотрим теперь несколько простых случаев установившегося вращательного движения.

Обратимся сначала к случаю вращения вокруг оси Z , когда угловая скорость есть функция расстояния (r) от оси. Полагая

$$u = -\omega y, \quad v = \omega x, \quad (1)$$

находим, что скорости растяжения в направлении радиуса-вектора и в перпендикулярном к радиусу направлении равны нулю, в то время как скорость сдвига в плоскости xu равна $r \frac{d\omega}{dr}$. Тогда момент касательных сил, действующих на цилиндрическую поверхность радиуса r , относительно его оси Z на единицу длины последней будет равен $\mu r \frac{d\omega}{dr} \cdot 2\pi r \cdot r$. Так как движение установившееся, то жидкость, заключенная между двумя соосными цилиндрами, не может ничего ни потерять, ни выиграть в отношении момента количеств движения, а это значит, что приведенное здесь выражение не должно зависеть от r .

Это дает зависимость

$$\omega = \frac{A}{r^2} + B. \quad (2)$$

Если жидкость простирается в бесконечность, а внутренняя граница образована поверхностью твердого цилиндра радиуса a , вращающегося с угловой скоростью ω_0 , то будем иметь

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{a^2}{r^2}. \quad (3)$$

Момент сил трения поэтому будет равен

$$-4\pi\mu a^2\omega_0. \quad (4)$$

Если бы жидкость снаружи была ограничена поверхностью неподвижного цилиндра радиуса b , соосного с первым, то мы нашли бы

$$\omega = \frac{a^2}{r^2} \cdot \frac{b^2 - r^2}{b^2 - a^2} \cdot \omega_0; \quad (5)$$

этот результат дает для момента сил трения

$$-4\pi\mu \cdot \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \cdot \omega_0. \quad (6)^1$$

¹⁾ Эта задача в первый раз, но не вполне точно, была решена Ньютоном, *Principia*, 2-я книга, предложение 51. Приведенные здесь результаты в существенном принадлежат Стоксу, см. выше, стр. 723, 726.

Эти формулы можно применить также к тому случаю, когда внешний цилиндр вращается, а внутренний находится в покое, если только изменить смысл величин a и b . Опыты в этом направлении провели Маллок ¹⁾, Кутт ²⁾ и другие, причем момент сил трения на внутреннем цилиндре измерялся кручением подвешенной проволоки или другими аналогичными способами.

О результатах этих опытов мы скажем позднее (§ 366а) ³⁾.

§ 334. Решение, подобное изложенному в предыдущем параграфе, однако, с тем ограничением, что оно должно относиться к бесконечно малым движениям, может быть получено и для случая установившегося движения жидкости, окружающей шар, который равномерно вращается около одного из своих диаметров. Возьмем начало в центре шара, направим ось z по оси вращения и положим

$$u = -\omega y, \quad v = \omega x, \quad w = 0, \quad (1)$$

где угловая скорость ω — функция только радиуса-вектора r . Если мы положим

$$P = \int \omega r dr, \quad (2)$$

то выражения (1) могут быть написаны в виде

$$u = -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad w = 0; \quad (3)$$

после подстановки этих выражений в уравнения (4) § 328 оказывается, что этим уравнениям можно удовлетворить, полагая

$$p = \text{const.}, \quad \Delta P = \text{const.}, \quad (4)$$

если только пренебречь членами второго порядка по отношению к скоростям. Второе из уравнений (4) может быть написано в виде

$$\frac{d^2 P}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dP}{dr} = \text{const.} \quad \text{или} \quad r \frac{d\omega}{dr} + 3\omega = \text{const.} \quad (5)$$

Отсюда следует

$$\omega = \frac{A}{r^2} + B. \quad (6)$$

Если жидкость простирается в бесконечность и в бесконечности находится в покое и если ω_0 обозначает угловую скорость вращающегося шара ($r = a$), то имеем

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{a^3}{r^3}. \quad (7)$$

¹⁾ Mallock, Determination of the Viscosity of Water, Proc. Roy. Soc., XLV, 126 (1888); Experiments on Fluid Viscosity, Phil. Trans., A, CLXXXVII, 41.

²⁾ Couette, Études sur le frottement des liquides. Ann. de chimie et phys., XXI, 433 (1890).

³⁾ Некоторые случаи видоизмененной задачи, связанной с вращением круглого цилиндра, рассматривались Jeffery, Proc. Roy. Soc., A, cl. 169 (1922) и Frazer, Phil. Trans., CCXXV, 93 (1925).

Если же внешняя граница представляет собой неподвижный шар радиуса b , concentрический с первым, то решение принимает вид

$$\omega = \frac{a^3}{r^3} \cdot \frac{b^3 - r^3}{b^3 - a^3} \cdot \omega_0. \quad (8)$$

Тормозящий момент, действующий на шар, можно прямо вычислить при помощи формул § 326 или, пожалуй, еще проще посредством функции рассеяния § 329. Для рассеяния энергии в единицу времени без труда получаем выражение

$$\begin{aligned} \mu \iiint (x^2 + y^2) \left(\frac{d\omega}{dr} \right)^2 dx dy dz &= \frac{8}{3} \pi \mu \int_a^b r^4 \left(\frac{d\omega}{dr} \right)^2 dr = \\ &= 8\pi\mu \frac{a^3 b^3}{b^3 - a^3} \omega_0^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Если обозначить через N вращающий момент, который должен быть приложен к шару, чтобы поддерживать его вращение, то выражение (9) должно быть эквивалентно $N\omega_0$; отсюда следует

$$N = 8\pi\mu \frac{a^3 b^3}{b^3 - a^3} \omega_0 \quad (10)$$

или для случая, соответствующего выражению (7), когда $b = \infty$,

$$N = 8\pi\mu a^3 \omega_0. \quad (11)^1$$

Отбрасывание членов второго порядка в этой задаче уменьшает ее практическое значение в большей степени, чем это можно было ожидать. Нетрудно показать, что предположение, которое лежит в основе этого приближения, сводится к тому, что отношение $\frac{\omega_0 a^2}{\nu}$ должно быть мало. Полагая $\nu = 0,018$ (вода) и $a = 10$, находим, что скорость на экваторе должна быть мала по сравнению с значением $0,0018$ (см/сек)²).

Если принять во внимание члены второго порядка, то установившееся движение рассматриваемого рода становится невозможным. Шар действует при этом как центробежный вентилятор, т. е. движение на некотором расстоянии от шара представляет собой течение наружу от экватора и внутрь по направлению к полюсам, накладываемое на вращательное движение³).

В том случае, к которому относятся формулы (8) и (10), условие применимости приближенного метода заключается в том, что выражение

$$\frac{\omega_0 a^2}{\nu} \left(1 - \frac{b^3}{a^3} \right) \quad (12)$$

¹) Kirchhoff, *Mechanik*, лекция 26.

²) Ср. Rayleigh, *On the Flow of Viscous Liquids, especially in two Dimensions*, *Phil. Mag.* (4), XXXVI, 354 (1893) (*Papers*, IV, 78).

³) Stokes, см. выше, стр. 723.

должно быть малым, причем предполагается, что значения a и b не отличаются сильно друг от друга ¹⁾.

§ 334а. Некоторые простые задачи неустановившегося движения можно решить при помощи аналогии с теорией теплопроводности (см. § 328) ²⁾.

1. Рассмотрим, например, случай „ламинарного“ движения, когда течение происходит в параллельных плоскостях, скорость во всех точках каждой такой плоскости имеет одно и то же значение и во всем объеме жидкости она имеет одно и то же направление. При подходящем выборе осей мы будем иметь $v = 0$, $w = 0$, в то время как u — функция только координаты z . Уравнения (4) § 328 удовлетворяются тогда при $p = \text{const.}$ и

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (1)$$

Уравнение (1) по форме тождественно с уравнением движения тепла в прямолинейном проводнике, так что известные результаты этой задачи могут быть тотчас же перенесены на наш случай.

Предположим, например, что жидкость в направлении оси z в обе стороны простирается в бесконечность и что в начальный момент имеем $u = \pm U$, причем нужно брать верхний или нижний знак, смотря по тому, будет ли координата z положительной или отрицательной. Это соответствует случаю двух сред, прилегающих друг к другу, когда они в начальный момент имеют различные температуры. Если мы воспользуемся известным решением этой задачи, то получим

$$u = \frac{2U}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\theta} e^{-\theta^2} d\theta, \quad (2)$$

где верхний предел есть

$$\theta = \frac{z}{\sqrt{4\nu t}}. \quad (3)$$

Легко проверить, что решение (2) действительно удовлетворяет уравнению (1) и $u \rightarrow \pm U$ при $t \rightarrow 0$.

¹⁾ Опыты по определению вязкости воздуха были произведены в этом направлении Zentrlein [Ann. d. Phys. (4), XXIX, 869 (1909) и XXXVIII, 71 (1912)] с тем только различием, что вращался *внешний* шар; момент N вращающей пары измерялся кручением проволоки, на которой был подвешен внутренний шар. Цемплен находит, что формула, аналогичная формуле (10), дает пригодные результаты для большой области значений $\frac{\omega_0 a^2}{\nu}$, и замечает при этом, что такого рода критерии могут быть использованы только для указания порядка величин, но не для указания точных соотношений. С этим следует согласиться; однако, нужно заметить, что для рассматриваемого случая критерий уместно будет взять скорее в форме (12).

²⁾ Этой аналогией воспользовался Rayleigh, Proc. Lond. Math. Soc. (1), XI, 57 (1880) (Papers, I, 474) и многие более поздние авторы, как, например, G. I. Taylor, Aeronautical Research Committee, R. & M. 598 (1918) и K. Terazawa, Japanese Journ. of Phys., 1, 7 (1922).

отсюда следует $m = 1$, $s = -n$, $r = 2 - n$, так что должно быть

$$p_{rz} \text{ пропорционально } \rho w_0^2 \left(\frac{v}{w_0 a} \right)^n. \quad (4)$$

Обобщая этот результат, получаем формулу

$$p_{rz} = \rho w_0^2 \cdot f \left(\frac{w_0 a}{v} \right), \quad (5) \quad 1)$$

Подставляя $n = 1$ в соотношение (4), получим закон Пуазейля для прямолинейного течения. Если же подставить $n = 0$, то получим формулу, которую обычно применяют в гидравлике в случае турбулентного течения в трубе, диаметр которой превосходит известную границу, именно

$$p_{rz} = k \rho w_0^2, \quad (6)$$

где k — числовая постоянная, зависящая от свойства поверхности.

В качестве грубого среднего значения для случая воды, движущейся по гладкой железной трубе, мы можем взять $k = 0,0025$ ²⁾.

Более полную эмпирическую формулу для p_{rz} , учитывающую также влияние диаметра, дал Дарси на основании очень большого числа наблюдений над течением воды в водопроводных трубах ³⁾.

Нужно заметить следующее: если бы сопротивление было точно пропорционально квадрату скорости, то оно не должно было бы зависеть от вязкости и от диаметра трубы. Это непосредственно следует из формулы (5) ⁴⁾.

Рейнольдс и некоторые другие наблюдатели нашли, что более хорошее совпадение с опытами получится, если в формуле (4) дать n значение, отличное от нуля. Было предложено значение $n = \frac{1}{4}$, в то время как Рейнольдс принимал значение $n = 0,277$. Наиболее подходящее значение для показателя зависит, повидимому, от степени гладкости поверхности трубы, и по всей вероятности любая формула вида (4) имеет лишь ограниченную возможность применения.

¹⁾ Rayleigh, On the Question of the Stability of the Flow of Fluids, Phil. Mag. (5), XXXIV, 59 (1892) (Papers, III, 575).

Формула (5) экспериментально была проверена для очень различных условий и для таких различных жидкостей, как вода и воздух. При этом оказалось, что сопротивление пропорционально $\rho_0 w_0^2$, если значение $\frac{v}{w_0 a}$ остается тем же самым. См. Stanton and Pannell, Similarity of Motion in Relation to the Surface Friction of Fluids, Phil. Trans. A, CCXIV, 199 (1913); Blasius, Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen, Zeitschr. d. Ver. deutscher Ingenieure, (1912), стр. 639.

²⁾ Rankine, Applied Mechanics, § 638; Unwin, Encyc. Britann. 11-е изд. „Hydraulics“.

³⁾ Darcy, Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux, Paris (1855). Формула Дарси приводится в работах Ранкина и Уивина.

⁴⁾ Rayleigh, см. выше.

но он все же решался ¹⁾ для случая постоянной силы, такой, как сила тяжести, причем пластинка предполагалась вертикальной. Оказывается, что в этом случае не существует „конечной предельной скорости“, ее асимптотическое значение будет

$$\frac{g\sigma}{\rho} \sqrt{\frac{t}{\pi\nu}}, \quad (8)$$

где σ — масса единицы площади пластинки. Случай пластинки конечной ширины в направлении движения был бы совершенно отличным от рассматриваемого случая.

3. Предположим, что частицы жидкости движутся по окружностям вокруг общей оси, причем скорость есть функция расстояния r от этой оси.

Если эту ось взять за ось z , то, очевидно, будем иметь

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}$$

и вместе с тем на основании уравнений (8) § 328

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \nu \Delta_1 \zeta, \quad (9)$$

где

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Интегрируя по площади круга радиуса r , получаем

$$\frac{d}{dt} \int_0^r \zeta \cdot 2\pi r dr = \nu \iint \Delta_1 \zeta dx dy = \nu \frac{\partial\zeta}{\partial r} \cdot 2\pi r. \quad (10)$$

Отсюда, дифференцируя по r , будем иметь

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\zeta}{\partial r} \right),$$

а это уравнение тождественно с уравнением радиального распространения тепла в двух измерениях ²⁾.

Предположим, например, что вначале мы имели изолированный вихрь с напряжением κ , совпадающий с осью z . Термическая аналогия представляет в данном случае распространение тепла в неограниченной среде ³⁾ от мгновенного линейного источника; решение в этом случае имеет вид

$$\zeta = \frac{\kappa}{4\pi\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}. \quad (12)$$

¹⁾ Boggio, Rend. dell. Accad. d. Lincei, XVI 1907); Rayleigh, Phil. Mag. (6), XXI, 697 (1911) (Papers, VI, 29).

²⁾ Carslaw, Conduction of Heat, Cambridge, 1921, стр. 113.

³⁾ Carslaw, стр. 152.

Удостовериться в том, что это решение удовлетворяет уравнению (11), можно путем дифференцирования. Это решение дает для циркуляции вдоль окружности радиуса r значение

$$\int_0^r \zeta \cdot 2\pi r dr = \kappa (1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}), \quad (13)$$

которое при $t \rightarrow 0$ стремится к предельному значению κ . Скорость же будет равна

$$q = \frac{\kappa}{2\pi r} (1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}). \quad (14)$$

Когда t возрастает от 0 до ∞ , то это значение убывает от $\frac{\kappa}{2\pi r}$ до 0. Значение вихря, наоборот, возрастает (для $r > 0$) от нуля до своего наибольшего значения и потом асимптотически приближается к нулю.

4. Предположим далее, что в момент времени $t = 0$ на поверхность покоящейся жидкости глубины h начинает действовать равномерное тангенциальное напряжение f .

Если поместить начало координат на дне слоя, то условия, которые должны удовлетворяться помимо уравнения (1), будут иметь вид

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{при } t \rightarrow 0, \\ \mu \frac{\partial u}{\partial z} &= f \quad \text{при } z = h. \end{aligned}$$

Положим

$$u = \frac{fz}{\mu} + u', \quad (15)$$

где первый член представляет асимптотическое решение ($t \rightarrow \infty$). Уравнение (1) и условия $u' = 0$ при $z = 0$ и $\frac{\partial u'}{\partial z} = 0$ при $z = h$ удовлетворяются рядом

$$u' = \sum A_m \sin mze^{-\nu m^2 t}, \quad (16)$$

если

$$mh = \frac{1}{2} (2s + 1) \pi \quad (17)$$

и $s = 0, 1, 2, 3, \dots$. Мы должны теперь определить коэффициенты A_m так, чтобы равенство

$$\frac{fz}{\mu} + \sum A_m \sin mz = 0 \quad (18)$$

удовлетворялось тождественно. Для этого можно или применить обычный способ Фурье или прямо воспользоваться известным разложением

$$\theta = \frac{4}{\pi} \left\{ \sin \theta - \frac{1}{3^2} \sin 3\theta + \frac{1}{5^2} \sin 5\theta - \dots \right\}, \quad (19)$$

которое имеет силу от $\theta = -\frac{1}{2}\pi$ до $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Окончательно для u получим выражение

$$u = \frac{hf}{\mu} \left\{ \frac{z}{h} - \sin kze^{-\nu k^2 t} + \frac{1}{3^2} \sin 3kz l^{-9\nu k^2 t} - \dots \right\}, \quad (20)$$

где $k = \frac{1}{2} \frac{\pi}{h}$.

Вычисления такого рода неоднократно производились с целью выяснить влияние ветра в образовании морских течений. Однако, если мы подставим числовые значения ν и h , то увидим, что согласно этой формуле к окончательному состоянию можно приближаться чрезвычайно медленно. Так, например, для $\nu = 0,018$, $h = 10^5$ коэффициент при $\sin kz$ в выражении (20) уменьшится в отношении $\frac{1}{e}$ лишь по истечении промежутка времени

$$t = \frac{1}{\nu k^2} = \frac{4h^2}{\pi^2 \nu} = 7140 \text{ лет!}$$

В действительности соотношения очень сильно изменятся благодаря турбулентности. Мы получим картину, лучше соответствующую действительности, если заменим μ „коэффициентом турбулентного трения“ (см. § 366b) ¹⁾.

5. В качестве видоизменения этой задачи рассмотрим установившиеся течения, которые могли бы быть вызваны, если принять во внимание вращение земли ²⁾.

Возьмем начало координат на свободной поверхности, а ось z направим по вертикали вверх. Если ω — составляющая угловой скорости Земли в направлении вертикали, то, предполагая, что условия по отношению к координатам x и y одинаковы и что движение уже сделалось установившимся, будем иметь равенства

$$-2\omega v = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad 2\omega u = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \quad (21)$$

Оба эти уравнения можно соединить в одно

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (u + iv) = \frac{2i\omega}{\nu} (u + iv). \quad (22)$$

Обозначая

$$\frac{\omega}{\nu} = \beta^2 \quad (23)$$

¹⁾ Исключительная медленность диффузии строго ламинарного движения была замечена еще Helmholtz, *Über atmosphärische Bewegungen*, Sitzb. d. Berl. Akad., 1888, стр. 649 (Wiss. Abh., III, 292).

См. также Hough, *On the influence of Viscosity on Waves and Currents*, Proc. Lond. Math. Soc. (1), XXVIII, 264 (1896).

²⁾ Ekman, *On the influence of the earth's rotation on ocean currents*, Arkiv f. matematik, II (1905). Эта работа содержит также другие интересные исследования.

и считая, что глубина практически бесконечна, получим

$$u + iv = Ae^{(1+i)\beta z}. \quad (24)$$

Условие, что при $z = 0$ должно иметь место равенство

$$\mu \frac{\partial u}{\partial z} = f,$$

дает

$$(1+i)\beta A = \frac{f}{\mu};$$

отсюда следует

$$u + iv = \frac{(1-i)f}{2\mu\beta} e^{(1+i)\beta z} \quad (25)$$

или

$$\begin{aligned} u &= \frac{f}{\sqrt{2}\mu\beta} e^{\beta z} \cos\left(\beta z - \frac{1}{4}\pi\right), \\ v &= \frac{f}{\sqrt{2}\mu\beta} e^{\beta z} \sin\left(\beta z - \frac{1}{4}\pi\right). \end{aligned} \quad (26)$$

Движение практически ограничивается слоем, глубина которого имеет порядок величины β^{-1} .

Направление течения на поверхности отклоняется на 45° вправо (в северном полушарии) от направления силы. Общее же количество движения на единицу площади поверхности будет равно

$$\int_{-\infty}^0 e(u + iv) dz = -\frac{if}{2\mu\beta^2} = -\frac{if}{2\omega\eta}, \quad (27)$$

а направление этого вектора будет перпендикулярно к направлению силы.

Здесь следует опять заметить, что эти результаты только тогда имеют практическое значение, когда величина μ заменена коэффициентом турбулентного трения. При обычном значении μ величина β^{-1} для воды была бы только порядка 20 см.

§ 335. Если не принимать во внимание члены инерции, то можно исследовать движение вязкой несжимаемой жидкости в весьма общем виде при помощи сферических функций.

Удобнее будет рассмотреть сначала общее решение следующей системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \Delta u' &= 0, \\ \Delta v' &= 0, \\ \Delta w' &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Функции u' , v' , w' можно разложить в ряды по объемным сферическим функциям. Очевидно, что в этих разложениях многочлены степени n , которые мы будем обозначать u'_n , v'_n , w'_n , каждой тройкой в отдельности должны удовлетворять уравнению (2). Уравнения (1) могут быть поэтому написаны в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v'_n}{\partial x} - \frac{\partial u'_n}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u'_n}{\partial z} - \frac{\partial w'_n}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w'_n}{\partial y} - \frac{\partial v'_n}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v'_n}{\partial x} - \frac{\partial u'_n}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u'_n}{\partial z} - \frac{\partial w'_n}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w'_n}{\partial y} - \frac{\partial v'_n}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w'_n}{\partial y} - \frac{\partial v'_n}{\partial z} &= \frac{\partial \chi_n}{\partial x}, \\ \frac{\partial u'_n}{\partial z} - \frac{\partial w'_n}{\partial x} &= \frac{\partial \chi_n}{\partial y}, \\ \frac{\partial v'_n}{\partial x} - \frac{\partial u'_n}{\partial y} &= \frac{\partial \chi_n}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где χ_n — функция от x , y , z ; из этих соотношений далее получается $\Delta \chi_n = 0$, так что χ_n — объемная сферическая функция степени n .

Из равенств (4) получаем далее

$$\begin{aligned} z \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_n}{\partial z} &= x \frac{\partial u'_n}{\partial x} + y \frac{\partial u'_n}{\partial y} + z \frac{\partial u'_n}{\partial z} + \\ &+ u'_n - \frac{\partial}{\partial x} (x u'_n + y v'_n + z w'_n) \end{aligned} \quad (5)$$

и два других аналогичных уравнения.

Из уравнений (1) и (2) будем иметь теперь

$$\Delta (x u'_n + y v'_n + z w'_n) = 0, \quad (6)$$

так что можно написать

$$x u'_n + y v'_n + z w'_n = \varphi_{n+1}, \quad (7)$$

где φ_{n+1} — объемная сферическая функция степени $n+1$. После этого уравнение (5) может быть написано в виде

$$(n+1) u'_n = \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial x} + z \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_n}{\partial z}. \quad (8)$$

Множитель $n + 1$ можно, не уменьшая общности, отбросить, и тогда мы получим решение рассматриваемой системы уравнений в виде

$$\left. \begin{aligned} u' &= \sum \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + z \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_n}{\partial z} \right), \\ v' &= \sum \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial y} + x \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z \frac{\partial \chi_n}{\partial x} \right), \\ w' &= \sum \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial z} + y \frac{\partial \chi_n}{\partial x} - x \frac{\partial \chi_n}{\partial y} \right), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где сферические функции φ_n и χ_n произвольны ¹⁾.

§ 336. Если отбросить члены инерции, то уравнения движения вязкой жидкости при отсутствии внешних сил приведутся к виду

$$\left. \begin{aligned} \mu \Delta u &= \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \mu \Delta v &= \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \mu \Delta w &= \frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

После дифференцирования получаем

$$\Delta p = 0, \quad (3)$$

так что функция p может быть разложена в ряд по объемным сферическим функциям

$$p = \sum p_n. \quad (4)$$

Отдельные члены решения, представляя из себя сферические функции в виде различных алгебраических многочленов, будут независимы друг от друга. Чтобы получить в решении уравнений (1) члены, зависящие от p_n , положим

$$\left. \begin{aligned} u &= Ar^2 \frac{\partial p_n}{\partial x} + Br^{2n+3} \frac{\partial}{\partial x} \frac{p_n}{r^{2n+1}}, \\ v &= Ar^2 \frac{\partial p_n}{\partial y} + Br^{2n+3} \frac{\partial}{\partial y} \frac{p_n}{r^{2n+1}}, \\ w &= Ar^2 \frac{\partial p_n}{\partial z} + Br^{2n+3} \frac{\partial}{\partial z} \frac{p_n}{r^{2n+1}}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Члены, умноженные на B , на основании §§ 81, 83 представляют собою объемные сферические функции степени $n + 1$.

¹⁾ Ср. Borchardt, Untersuchungen über die Elastizität fester Körper unter Berücksichtigung der Wärme, Berl. Monatsber., 9 янв. 1873 (Gesammelte Werke, Берлин, 1888, стр. 245). Исследование в тексте взято из работы автора, On the Oscillations of a Viscous Spheroid, Proc. Lond. Math. Soc., (1), XIII, 51 (1881).

Далее, имеем

$$\begin{aligned} \Delta \left(r^2 \frac{\partial p_n}{\partial x} \right) &= r^2 \Delta \frac{\partial p_n}{\partial x} + 4 \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial p_n}{\partial x} + \frac{\partial p_n}{\partial x} \Delta r^2 = \\ &= 2(2n+1) \frac{\partial p_n}{\partial x}. \end{aligned}$$

Уравнения (1) будут удовлетворяться, если положить

$$A = \frac{1}{2(2n+1)\mu}. \quad (6)$$

Теперь, подставляя (5) в уравнение (2), найдем

$$2nA - (n+1)(2n+3)B = 0,$$

откуда следует

$$B = \frac{n}{(n+1)(2n+1)(2n+3)\mu}. \quad (7)$$

В таком случае общее решение системы уравнений (1) и (2) может быть написано в виде

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{\mu} \sum \left\{ \frac{r^2}{2(2n+1)} \frac{\partial p_n}{\partial x} + \frac{nr^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{p_n}{r^{2n+1}} \right\} + u', \\ v &= \frac{1}{\mu} \sum \left\{ \frac{r^2}{2(2n+1)} \frac{\partial p_n}{\partial y} + \frac{nr^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} \frac{\partial}{\partial y} \frac{p_n}{r^{2n+1}} \right\} + v', \\ w &= \frac{1}{\mu} \sum \left\{ \frac{r^2}{2(2n+1)} \frac{\partial p_n}{\partial z} + \frac{nr^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{p_n}{r^{2n+1}} \right\} + w', \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где функции u' , v' , w' выражаются формулами (9) предыдущего параграфа ¹⁾.

Формулы (8) дают

$$xu + yv + zw = \frac{1}{\mu} \sum \frac{nr^2}{2(2n+3)} p_n + \sum n\varphi_n. \quad (9)$$

Если обозначим через ξ , η , ζ компоненты вихря, то для них найдем

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{\mu} \sum \frac{1}{(n+1)} \left(y \frac{\partial p_n}{\partial z} - z \frac{\partial p_n}{\partial y} \right) + \sum (n+1) \frac{\partial \chi_n}{\partial x}, \\ \eta &= \frac{1}{\mu} \sum \frac{1}{(n+1)} \left(z \frac{\partial p_n}{\partial x} - x \frac{\partial p_n}{\partial z} \right) + \sum (n+1) \frac{\partial \chi_n}{\partial y}, \\ \zeta &= \frac{1}{\mu} \sum \frac{1}{(n+1)} \left(x \frac{\partial p_n}{\partial y} - y \frac{\partial p_n}{\partial x} \right) + \sum (n+1) \frac{\partial \chi_n}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

¹⁾ Это исследование взято с некоторыми изменениями из различных источников. Ср. Thomson und Tait, § 736; Borchardt см. выше; Oberbeck, Über stationäre Flüssigkeitsbewegungen mit Berücksichtigung der inneren Reibung, Crelle, LXXXI, 62 (1876).

Из этих выражений получаем

$$x\xi + y\eta + z\zeta = \sum n(n+1)\chi_n. \quad (11)$$

Компоненты напряжения на поверхности шара радиуса r на основании равенств (4) § 325 будут выражаться формулами

$$p_{rx} = \frac{x}{r} p_{xx} + \frac{y}{r} p_{xy} + \frac{z}{r} p_{xz}, \dots, \dots \quad (12)$$

Подставляя значения величин p_{xx} , p_{xy} , p_{xz} из формул (5), (6) § 326, найдем

$$\left. \begin{aligned} r p_{rx} &= -xp + \mu \left(r \frac{\partial}{\partial r} - 1 \right) u + \mu \frac{\partial}{\partial x} (xu + yv + zw), \\ r p_{ry} &= -yp + \mu \left(r \frac{\partial}{\partial r} - 1 \right) u + \mu \frac{\partial}{\partial y} (xu + yv + zw), \\ r p_{rz} &= -zp + \mu \left(r \frac{\partial}{\partial r} - 1 \right) w + \mu \frac{\partial}{\partial z} (xu + yv + zw). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Эти формулы, конечно, являются общими. В рассматриваемом же здесь случае, подставляя значения u , v , w из формул (8) и пользуясь соотношением

$$x p_n = \frac{r^2}{2n+1} \left(\frac{\partial p_n}{\partial x} - r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{p_n}{r^{2n+1}} \right), \quad (14)$$

получим после несложных преобразований

$$\begin{aligned} r p_{rx} &= \sum \left\{ \frac{n-1}{2n+1} r^2 \frac{\partial p_n}{\partial x} + \frac{2n^2+4n+3}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial x} \frac{p_n}{r^{2n+1}} \right\} + \\ &+ 2\mu \sum (n-1) \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} - \mu \sum (n-1) \left(y \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z \frac{\partial \chi_n}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Соответствующие выражения для $r p_{ry}$ и $r p_{rz}$ получим в результате круговой перестановки букв.

§ 337. Результаты §§ 335, 336 можно применить к решению ряда задач, в которых граничные условия относятся к поверхности шара. Наиболее интересные задачи относятся к следующим двум случаям: в первом имеем всюду

$$xu + yv + zw = 0 \quad (1)$$

и поэтому

$$p_n = 0, \quad \varphi_n = 0:$$

во втором имеем

$$x\xi + y\eta + z\zeta = 0 \quad (2)$$

и потому

$$\chi_n = 0.$$

1. Рассмотрим установившееся течение несжимаемой жидкости вокруг неподвижного шара. Если возьмем начало координат в центре шара и ось x параллельно направлению течения, то граничные условия будут иметь вид

$$u=0, \quad v=0, \quad w=0 \quad \text{для } r=a \quad (a - \text{радиус шара})$$

и

$$u=U, \quad v=0, \quad w=0 \quad \text{для } r=\infty.$$

Вихревые линии представляют собою, очевидно, окружности с центрами на оси x , плоскости которых перпендикулярны к этой оси, так что условие (2) будет выполняться. Далее уравнение (9) § 336 в связи с условием, которое должно выполняться в бесконечности, показывает, что в отношении функций p_n и φ_n мы должны ограничиться сферическими функциями только порядков 0 и 1 и, следовательно, случаями $n=0$, $n=1$, $n=-2$. Кроме того, очевидно, мы должны иметь $p_1=0$. Полагая затем

$$\left. \begin{aligned} p_{-2} &= A \frac{x}{r^3}, \\ \varphi_1 &= Ux, \\ \varphi_{-2} &= B \frac{x}{r^3}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

мы найдем

$$\left. \begin{aligned} u &= U + \left(B - \frac{Ar^2}{6\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} + \frac{2A}{3\mu r}, \\ v &= \left(B - \frac{Ar^2}{6\mu} \right) \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{r^3}, \\ w &= \left(B - \frac{Ar^2}{6\mu} \right) \frac{\partial}{\partial z} \frac{x}{r^3}; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

эти выражения дают

$$xu + yv + zw = \left(U - \frac{2B}{r^3} + \frac{A}{\mu r} \right) x. \quad (5)$$

Далее из формул (15) § 336 или непосредственно из формул (13) § 336 получается

$$\left. \begin{aligned} p_{rx} &= -\frac{x}{r} p_0 + \left(Ar - \frac{6\mu B}{r} \right) \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} - \frac{A}{r^2}, \\ p_{ry} &= -\frac{y}{r} p_0 + \left(Ar - \frac{6\mu B}{r} \right) \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{r^3}, \\ p_{rz} &= -\frac{z}{r} p_0 + \left(Ar - \frac{6\mu B}{r} \right) \frac{\partial}{\partial z} \frac{x}{r^3}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Условие отсутствия скольжения на поверхности $r=a$ дает уравнения

$$\left. \begin{aligned} U + \frac{2A}{3\mu a} &= 0, \\ B - \frac{Aa^2}{6\mu} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

откуда получаем

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{3}{2} \mu U a, \\ B &= -\frac{1}{4} U a^2. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Составляющие напряжения на этой поверхности получают поэтому следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} p_{rx} &= -\frac{x}{a} p_0 + \frac{3}{2} \mu \frac{U}{a}, \\ p_{ry} &= -\frac{y}{a} p_0, \quad p_{rz} = -\frac{z}{a} p_0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Если обозначить через δS элемент поверхности, то получим

$$\iint p_{rx} dS = 6\pi\mu Ua, \quad \iint p_{ry} dS = 0, \quad \iint p_{rz} dS = 0. \quad (10)$$

Равнодействующая, приложенная к шару, имеет поэтому направление положительной оси x и равна $6\pi\mu aU$.

Формулы (4) принимают теперь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} u &= U \left(1 - \frac{a}{r} \right) + \frac{1}{4} Ua (r^2 - a^2) \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3}, \\ v &= \frac{1}{4} Ua (r^2 - a^2) \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{r^3}, \\ w &= \frac{1}{4} Ua (r^2 - a^2) \frac{\partial}{\partial z} \frac{x}{r^3}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Характер движения короче всего можно выразить посредством функции тока Стокса (§ 94). Так как скорость в радиальном направлении равна

$$U \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a}{r} + \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta, \quad (12)$$

то поток ($2\pi\psi$) сквозь окружность, перпендикулярную к оси x и с центром на этой оси, радиус которой стягивает угол θ с вершиной в центре шара, будет определяться из формулы

$$\psi = -\frac{1}{2} U \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a}{r} + \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} \right) r^2 \sin^2 \theta. \quad (13)$$

Если сообщить жидкости и шару скорость $-U$ в направлении оси x , то мы получим случай движения шара с постоянной скоростью в жидкости, покоящейся в бесконечности. Функция тока в этом случае будет иметь вид

$$\psi = \frac{3}{4} Uar \left(1 - \frac{1}{3} \frac{a^2}{r^2} \right) \sin^2 \theta. \quad (14)^1$$

На фиг. 81 показаны линии тока ($\psi = \text{const.}$) в этом случае для ряда равноотстоящих друг от друга значений функции ψ . Обращает на себя внимание резкое отличие картины этого случая от случая идеальной жидкости, представленного на стр. 138, но не следует забывать, что основные положения в обоих случаях совершенно различны. В прежнем случае преобладающее значение имела инерция, а внутреннее трение не принималось во внимание; в настоящем же случае все обстоит как раз наоборот.

Расположение линий тока указывает на то, что присутствие твердой внешней стенки даже на расстоянии многих диаметров шара в значитель-

¹⁾ Эта задача в первый раз была решена Стоксом при помощи функции тока; см. § 338.

ной степени изменило бы результаты. Сопротивление при этом конечно возросло бы ¹⁾.

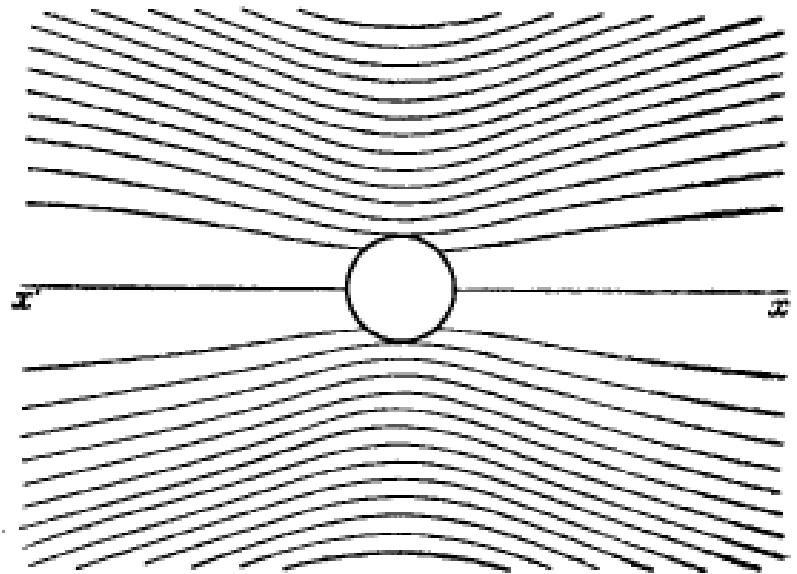
Если через P обозначить силу, которая должна действовать на шар в отрицательном направлении по оси x , чтобы уравновесить сопротивление жидкости, то будем иметь

$$P = 6\pi\eta aU. \quad (15)$$

Следует заметить, что на основании формулы (14) как количество движения, так и энергия жидкости оказываются бесконечно большими ²⁾. Рассмотренное здесь установившееся движение можно было бы поэтому полностью получить в результате действия постоянной силы, если бы эта сила действовала на шар на всем пути бесконечной длины.

Все исследование было основано на предположении, что в основных уравнениях (4) § 328 можно было пренебречь инерционными членами и $\frac{\partial u}{\partial x}$, ... по сравнению с величинами $\nu \Delta u$...

Из равенств (11) легко тогда получить, что значение Ua должно быть мало по сравнению с ν ³⁾. Это условие можно всегда выполнить, если значения U или a сделать достаточно малыми; однако, в случае легко подвижных жидкостей, таких, как вода, это условие сильно ограничивает скорости или размеры, которые практически должны быть чрезвычайно малыми. Так, в случае шара с радиусом в 1 мм, движущегося в воде ($\nu = 0,018$), скорость должна быть значительно меньше, чем 0,18 см/сек ⁴⁾.



Фиг. 81.

¹⁾ Медленное движение шара вблизи твердой плоской стенки было исследовано Лоренцом, *Abhandlungen über theoretische Physik*, Leipzig, 1907, I, 23. Вильямс в интересной работе разобрал при помощи метода, изложенного в § 338 этой книги, случай внешней границы в виде концентрической шаровой поверхности и сравнил результаты с опытом (*Phil. Mag.* (6), XXIX, 526 (1915)]. Падение шара по оси вертикальной трубки, наполненной несжимаемой жидкостью, исследовал Ладенбург, *Ann. d. Phys.*, XXIII, 447 (1907) и Факсен, *Arkiv. f. matematik*, XVII (1923). Последний из названных авторов разобрал также случай движения шара между плоскими параллельными стенками. *Ann. d. Phys.*, LXVIII, 90 (1922).

²⁾ Rayleigh, *Phil. Mag.* (5), XXI, 374 (примечания) (1886) (*Papers*, II, 480).

³⁾ Величина $\frac{Ua}{\nu}$, которая предполагается здесь малой, является безразмерной и следовательно, не зависит от выбора основных единиц. Она может быть названа „числом Рейнольдса“ рассматриваемой задачи; см. в конце § 366.

⁴⁾ Rayleigh, см. выше, стр. 738. Относительно экспериментальных исследований по этому вопросу см. Allen, *The Motion of a Sphere in a Viscous Fluid*, *Phil. Mag.* (5), L, 323, 519 (1900); Arnold, *Phil. Mag.* (6), XXII, 755 (1911); Williams, см. выше.

Мы могли бы применить формулу (15) к вычислению „предельной скорости“ вертикального падения шара в жидкости ¹⁾. Сила P в этом случае равна разности между весом шара и гидростатической подъемной силой, именно

$$P = \frac{4}{3} \pi (\rho' - \rho) a^2 g, \quad (16)$$

где ρ обозначает плотность жидкости, а ρ' — среднюю плотность шара. Это дает

$$U = \frac{2}{9} \frac{\rho' - \rho}{\mu} g a^2. \quad (17)$$

Как уже было установлено, это равенство справедливо только в том случае, когда значение $\frac{Ua}{\nu}$ мало. Для частицы песка, падающей в воде, мы можем приближенно принять

$$\rho' = 2\rho, \quad \nu = 0,018, \quad g = 981,$$

откуда следует, что значение a должно быть мало по сравнению с 0,0114 см. При этих условиях для предельной скорости падения будем иметь значение $U = 12100a^2$.

Для капли воды, падающей в воздухе, имеем $\rho' = 1$, $\rho = 0,00129$, $\mu = 0,00017$. В этом случае предельная скорость будет $U = 1280000a^2$ при условии, что значение a мало по сравнению с 0,006 см.

2. В случае жидкого шара мы должны принять во внимание как внешнее, так и внутреннее движение ²⁾. Предположим прежде всего, что на жидкость, окружающую шар, не действуют внешние силы, в то время как на жидкость, заключенную в шаре, действует сила $-K$ на единицу объема.

Формулы () § 336 будут иметь силу для области внутри шара, если положить

$$p = p' + Kx, \quad (18)$$

где p' — истинное давление. Если далее положить

$$p_1 = A'x, \quad \varphi_1 = B'x, \quad (19)$$

то формулы (8) названного параграфа дают для внутреннего движения

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{A'r^5}{30\mu'} \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} + \frac{A'r^2}{6\mu'} + B', \\ v &= \frac{A'r^5}{30\mu'} \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{r^3}, \\ w &= \frac{A'r^5}{30\mu'} \frac{\partial}{\partial z} \frac{x}{r^3}; \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Отсюда следует

$$xu + yv + zw = \left(\frac{A'r^2}{10\mu'} + B' \right) x. \quad (21)$$

¹⁾ Stokes. см. выше, стр. 76.

²⁾ Эта задача была решена Рибчинским, Bull. Acad. d. Sciences de Cracovie, 1-1, стр. 40, и, независимо от него, Адамаром, Comptes Rendus, CLII, 1735 (1911). Эти литературные указания взяты из работы Смолуховского, On the Practical Applicability of Stokes' Law of Resistance . . . , Proc. of Math. Congress, Cambridge (1912), II, 192.

Так как

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= -\frac{1}{3} r^6 \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^2} + \frac{1}{3} r^2, \\ xy &= -\frac{1}{3} r^6 \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{r^2}, \\ xz &= -\frac{1}{3} r^6 \frac{\partial}{\partial z} \frac{x}{r^2}, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

то находим далее

$$\left. \begin{aligned} p_{rx} &= -\frac{x}{r} p_0 + \left(\frac{3}{10} A' - \frac{1}{3} K \right) r^4 \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^2} + \frac{1}{3} Kr, \\ p_{ry} &= -\frac{y}{r} p_0 + \left(\frac{3}{10} A' - \frac{1}{3} K \right) r^4 \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{r^2}, \\ p_{rz} &= -\frac{z}{r} p_0 + \left(\frac{3}{10} A' - \frac{1}{3} K \right) r^4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{x}{r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Соответствующие формулы для внешнего пространства имеют такой же вид, как формулы (4) и (6).

Если мы выразим то обстоятельство, что радиальная скорость исчезает при $r=a$, то получим

$$\frac{A}{\mu a} - \frac{2B}{a^3} + U = 0, \quad \frac{A'a^2}{10\mu'} + B' = 0. \quad (24)$$

Непрерывность скорости требует, кроме того, чтобы

$$-\frac{Aa^2}{6\mu} + B = \frac{A'a^2}{3\mu'}. \quad (25)$$

Если сравнить формулы (6) и (23), то непрерывность напряжения потребует выполнения равенств

$$\left. \begin{aligned} Aa - \frac{6\mu B}{a} &= \frac{3}{10} A'a^2 - \frac{1}{3} Ka^2, \\ A &= -\frac{1}{3} Ka^2. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Мы будем иметь, таким образом, если значение K дано, пять уравнений для определения постоянных A , B , A' , B' , U . Решая эти уравнения, находим:

$$U = \frac{2}{3} \frac{Ka^2}{\mu} \cdot \frac{\mu + \mu'}{2\mu + 3\mu'}. \quad (27)$$

Полная сила, которая должна действовать на шар в отрицательном направлении по оси x , для того чтобы шар оставался неподвижным в потоке, должна быть равна

$$\frac{4}{3} \pi a^3 K = 6\pi \mu U \cdot \frac{2\mu + 3\mu'}{3\mu + 3\mu'}. \quad (28)$$

Внутреннее движение определяется формулой

$$\psi = -\frac{1}{2} B' \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) r^2 \sin^2 \theta, \quad (29)$$

где

$$B' = -\frac{Ka^2}{6\mu + 9\mu'}. \quad (30)$$

Если положим $\mu' = \infty$, то опять придем к результатам, которые мы получили для случая твердого шара.

Чтобы сделать результаты приложимыми к тому случаю, когда движение происходит под действием силы тяжести, направленной по оси x в отрицательную сторону, мы должны положить

$$K = g(\rho' - \rho), \quad (31)$$

где ρ' обозначает плотность жидкости, заполняющей шар. Предельная скорость дается тогда формулой (28). Если $\rho' < \rho$, то значение U отрицательно; это показывает, что шар должен *подниматься* в окружающей его жидкости. Для пузырька газа, поднимающегося в воде, мы можем с достаточной точностью положить $\rho' = 0$, $\mu' = 0$, откуда следует равенство

$$U = -\frac{1}{3} \frac{g\rho a^2}{\mu}. \quad (32)$$

3. Мы получим видоизменение задачи, относящейся к твердому шару, если предположим, что жидкость скользит по поверхности, следуя эмпирическому закону, указанному в § 327.

Формулы (6) дают для нормальных напряжений на поверхности сферы радиуса r выражение

$$-p_0 - 3A \frac{x}{r^3} + 12\mu B \frac{x}{r^5}; \quad (33)$$

три составляющие этой величины на основании формул (14) § 336 могут быть написаны в виде

$$\left. \begin{aligned} -p_0 \frac{x}{r} + \left(Ar - \frac{4\mu B}{r} \right) \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} - \frac{A}{r^2} + \frac{4\mu B}{r^4}, \\ -p_0 \frac{y}{r} + \left(Ar - \frac{4\mu B}{r} \right) \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{r^3}, \\ -p_0 \frac{z}{r} + \left(Ar - \frac{4\mu B}{r} \right) \frac{\partial}{\partial z} \frac{x}{r^3}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Вычитая эти величины из выражений (6), найдем для составляющих *касательного* напряжения значения

$$\left. \begin{aligned} -\frac{2\mu B}{r} \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} - \frac{4\mu B}{r^4}, \\ -\frac{2\mu B}{r} \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{r^3}, \\ -\frac{2\mu B}{r} \frac{\partial}{\partial z} \frac{x}{r^3}. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

На граничной поверхности $r = a$ скорость в направлении радиуса должна исчезать, а выражения в формулах (4) будут тогда представлять компоненты тангенциальной скорости. Мы должны поэтому иметь

$$\left. \begin{aligned} -\frac{2\mu B}{a} = \beta \left(B - \frac{Aa^2}{6\mu} \right), \\ -\frac{4\mu B}{a^4} = \beta \left(U + \frac{2A}{3\mu a} \right), \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

где β обозначает коэффициент трения скольжения. Отсюда получаем

$$A = -\frac{3}{2} \mu U a \cdot \frac{2\mu + \beta a}{3\mu + \beta a}, \quad B = -\frac{\beta U a^4}{12\mu + 4\beta a}; \quad (37)$$

если примем во внимание равенство (5), то увидим, что эти выражения удовлетворяют тому условию, что радиальная скорость равна нулю.

Результирующая сила, действующая на шар, на основании формул (6) будет равна

$$X = \iint p_{rx} dS = -4\pi A = 6\pi\mu Ua \cdot \frac{2\mu + \beta a}{3\mu + \beta a}. \quad (38)^1$$

Для $\beta = \infty$ полученная формула согласуется с (15). Если бы β была равна нулю, то результирующая сила была бы равна $4\pi\mu aU$.

4. Задача о вращении шара в неограниченной жидкости будет решена; если положим

$$\left. \begin{aligned} u &= z \frac{\partial \chi_{-2}}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_{-2}}{\partial z}, \\ v &= x \frac{\partial \chi_{-2}}{\partial z} - z \frac{\partial \chi_{-2}}{\partial x}, \\ w &= y \frac{\partial \chi_{-2}}{\partial x} - x \frac{\partial \chi_{-2}}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

где

$$\chi_{-2} = \frac{Az}{r^3} \quad (40)$$

и ось z — ось вращения. На граничной поверхности $r = a$ должны иметь место равенства

$$u = -\omega y, \quad v = \omega x, \quad w = 0,$$

если через ω обозначить угловую скорость шара. Отсюда получаем $A = \omega a^3$; ср. § 334.

§ 338. Задачи, относящиеся к тому случаю, когда течение около шара происходит в плоскостях, проходящих через ось симметрии, решались обычно, как это сделал в первый раз Стокс, при помощи функции тока ψ . Следует поэтому кратко изложить этот способ.

Положим

$$y = \tilde{\omega} \cos \vartheta, \quad z = \tilde{\omega} \sin \vartheta$$

и соответственно

$$\left. \begin{aligned} v &= \nu \cos \vartheta, \quad w = \nu \sin \vartheta, \\ \xi &= 0, \quad \eta = -\omega \sin \vartheta, \quad \zeta = \omega \cos \vartheta; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta \eta &= - \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\omega}^2} + \frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}} + \frac{\partial^2}{\tilde{\omega}^2 \partial \vartheta^2} \right] \omega \sin \vartheta = \\ &= - \sin \vartheta \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\omega}^2} + \frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}} - \frac{1}{\tilde{\omega}^2} \right] \omega = \\ &= - \frac{\sin \vartheta}{\tilde{\omega}} \left[\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\omega}^2} - \frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}} \right] \tilde{\omega} \omega \end{aligned} \quad (2)$$

аналогично

$$\Delta \zeta = \frac{\cos \vartheta}{\tilde{\omega}} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\omega}^2} - \frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}} \right] \tilde{\omega} \omega. \quad (3)$$

¹⁾ B a s s e t, Hydrodynamics, II, 271.

Для случая установившегося движения на основании уравнений (1) § 336 получим

$$\Delta \eta = 0, \quad \Delta \zeta = 0$$

и, следовательно,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\omega}^2} - \frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}} \right] \tilde{\omega} \omega = 0 \quad (4)$$

или, если подставить значение ω из формулы (2) § 161,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\omega}^2} - \frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}} \right]^2 \psi = 0. \quad (5)$$

Для тех случаев, когда граничные поверхности суть сферы, мы полагаем

$$x = r \cos \theta, \quad \tilde{\omega} = r \sin \theta. \quad (6)$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial}{r \partial \theta},$$

то получаем

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \psi = 0. \quad (7)$$

а это и есть уравнение, данное Стоксом.

Уравнение это удовлетворится функцией

$$\psi = \sin^2 \theta f(r), \quad (8)$$

если

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \right]^2 f(r) = 0; \quad (9)$$

решение последнего уравнения есть

$$f(r) = \frac{A}{r} + Br + Cr^2 + Dr^3. \quad (10)$$

В случае равномерного течения в бесконечности должно удовлетворяться равенство $\psi = -\frac{1}{2} U r^2 \sin^2 \theta$ при $r = \infty$, откуда следует

$$D = 0, \quad C = -\frac{1}{2} U. \quad (11)$$

Если обозначим составляющие скорости в направлении радиуса-вектора и в перпендикулярном к нему направлении соответственно через v_r и v_θ , то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} v_r &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = U \cos \theta - 2 \left(\frac{A}{r^2} + \frac{B}{r} \right) \cos \theta, \\ v_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -U \sin \theta - \left(\frac{A}{r^2} - \frac{B}{r} \right) \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Скорости удлинения в направлениях r и θ и в направлении, перпендикулярном к этим двум направлениям, найдем сложением скоростей удлинений, соответствующих составляющим v_r и v_θ в отдельности; в результате получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial r} &= 2 \left(\frac{3A}{r^3} + \frac{B}{r^2} \right) \cos \theta, \\ \frac{\partial v_\theta}{r \partial \theta} + \frac{v_r}{r} &= - \left(\frac{3A}{r^3} + \frac{B}{r^2} \right) \cos \theta, \\ \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta}{r \operatorname{tg} \theta} &= - \left(\frac{3A}{r^3} + \frac{B}{r^2} \right) \cos \theta; \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

скорость же сдвига в плоскости r, θ будет равна

$$\frac{\partial v_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} = \frac{6A}{r^2} \sin \theta. \quad (14)$$

Для значения вихря получаем выражение

$$\omega = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} - \frac{\partial v_r}{r \partial \theta} = -\frac{2B \sin \theta}{r^2}. \quad (15)$$

Силу, действующую на шар, можно определить или непосредственно из формул для напряжений или, что будет еще проще, из выражения для скорости рассеяния энергии. Из формул (13) и (14) следует, что функция Φ в формуле (8) § 329 принимает в данном случае вид

$$\Phi = 12\mu \left(\frac{3A}{r^4} + \frac{B}{r^2} \right)^2 \cos^2 \theta + 36\mu \frac{A^2}{r^6} \sin^2 \theta. \quad (16)$$

Чтобы найти полное значение скорости рассеяния энергии в жидкости, мы должны умножить это выражение на $2\pi r \sin \theta \cdot r \delta \theta \delta r$ и проинтегрировать от $\theta=0$ до $\theta=\pi$ и от $r=a$ до $r=\infty$.

В результате получим

$$16\pi\mu \left(\frac{3A^2}{a^5} + \frac{2AB}{a^3} + \frac{B^2}{a} \right). \quad (17)$$

Согласно гипотезе прилипания для $r=a$ получим из формул (12)

$$A = -\frac{1}{4} U a^3, \quad B = \frac{3}{4} U a; \quad (18)$$

следовательно, для ψ будем иметь выражение

$$\psi = -\frac{1}{2} U \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a}{r} + \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} \right) r^2 \sin^2 \theta \quad (19)$$

или, если предположить, что шар движется со скоростью $-U$ в жидкости, покоящейся в бесконечности, то выражение

$$\psi = \frac{3}{4} U a r \left(1 - \frac{1}{3} \frac{a^2}{r^2} \right) \sin^2 \theta, \quad (20)$$

как и в формуле (14) § 337.

Силу $-P$, которая должна быть приложена к шару, чтобы поддерживать его движение, мы найдем, если приравняем скорость рассеяния энергии значению $P U$. Подставляя в выражение (17) значения A и B из формул (18), получим для силы P , как и выше, выражение

$$P = 6\pi\mu a U. \quad (21)$$

Если имеет место скольжение и β — коэффициент трения при скольжении, то при первоначальной постановке задачи, когда шар является неподвижным, условия, которые должны выполняться при $r=a$, принимают вид

$$v_r = 0, \quad \beta v_\theta = \mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{r \partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right). \quad (22)$$

Подставляя в эти равенства соответствующие выражения из формул (12) и (14), находим

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{1}{4} U a^3 : \left(1 + \frac{3\mu}{\beta a} \right), \\ B &= \frac{3}{4} U a \left(1 + \frac{2\mu}{\beta a} \right) : \left(1 + \frac{3\mu}{\beta a} \right). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

В этом случае происходит еще дополнительное рассеяние энергии вследствие трения скольжения на поверхности шара; значение этого рассеяния, отнесенное к единице площади, равно βv_0^2 . Интегрируя по поверхности шара, получим на основании равенств (22) и (14)

$$\frac{96\pi\mu^2 A^2}{\beta a^3}. \quad (24)$$

Если сложим выражения (17) и (24) и подставим значения для A и B из формул (23), то найдем, полагая полное рассеяние равным PU ,

$$P = 6\pi\mu a U \cdot \frac{\beta a + 2\mu}{\beta a + 3\mu}. \quad (25)$$

что согласуется с результатом Бассе [(38), § 337].

§ 339. Решение задачи об установившемся движении эллипсоида в вязкой жидкости можно выразить при помощи потенциала притяжения твердых тел; при этом предполагается, что эллипсоид однородный и плотность его равна единице.

Возьмем уравнение эллипсоида в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad (1)$$

тогда потенциал притяжения для внешней точки по формуле Дирихле ¹⁾ будет равен

$$\Omega = \pi abc \int_{\lambda}^{\infty} \left(\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} - 1 \right) \frac{d\lambda}{D}, \quad (2)$$

где

$$D = \{ (a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda) \}^{1/2}, \quad (3)$$

и нижний предел есть положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1. \quad (4)$$

Эта формула дает

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial x} &= 2\pi ax, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial y} &= 2\pi by, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial z} &= 2\pi cz, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

¹⁾ Dirichlet, Crelle, XXXII, 80 (1846) (Werke, II, 11); см. также Kirchhoff, Mechanik, лекция 18, и Thomson und Tait (2 изд.), § 494 m.

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= abc \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda) D}, \\ \beta &= abc \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(b^2 + \lambda) D}, \\ \gamma &= abc \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(c^2 + \lambda) D}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Положим далее

$$\chi = abc \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{D}; \quad (7)$$

в § 114 было показано, что эта функция удовлетворяет уравнению $\Delta\chi = 0$.

Если жидкость движется относительно эллипсоида, предполагаемого неподвижным, в направлении оси x с общей скоростью U , то мы положим ¹⁾

$$\left. \begin{aligned} u &= A \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + B \left(x \frac{\partial \chi}{\partial x} - \chi \right) + U, \\ v &= A \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} + Bx \frac{\partial \chi}{\partial y}, \\ w &= A \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial z} + Bx \frac{\partial \chi}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Эти выражения удовлетворяют уравнению непрерывности вследствие соотношений

$$\Delta\Omega = 0, \quad \Delta\chi = 0$$

и в бесконечности, очевидно, дают значения $u = U$, $v = 0$, $w = 0$. Далее из них получаем

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= 2B \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \\ \Delta v &= 2B \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}, \\ \Delta w &= 2B \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

так что уравнения (1) § 336 будут удовлетворены, если положить

$$p = 2B\mu \frac{\partial \chi}{\partial x} + \text{const.} \quad (10)$$

Остается еще показать, что при подходящем выборе постоянных A и B на поверхности (1) будут иметь место равенства $u, v, w = 0$.

Условия $v = 0$, $w = 0$ требуют, чтобы

$$\left[2\pi A \frac{d\alpha}{d\lambda} + B \frac{d\chi}{d\lambda} \right]_{\lambda=0} = 0 \quad \text{или} \quad 2\pi \frac{A}{a^2} + B = 0. \quad (11)$$

¹⁾ Oberbeck, см. выше, стр. 747.

При помощи этого соотношения условие $a=0$ приводится к виду

$$2\pi A a_0 - B \chi_0 + U = 0, \quad (12)$$

где значки внизу обозначают, что нижние пределы в интегралах (6) и (7) должны быть равны нулю. Отсюда получаются равенства

$$\pi A = -\frac{1}{2} B a^2, \quad B = \frac{U}{\chi_0 + a_0 a^2}. \quad (13)$$

На большом расстоянии r от начала координат будем иметь

$$\Omega = -\frac{4}{3} \frac{\pi abc}{r}, \quad \chi = \frac{2abc}{r};$$

отсюда путем сравнения с уравнениями (4) § 337 получается, что возмущение таково, как если бы оно было вызвано шаром радиуса R , причем R определяется равенством

$$\frac{3}{4} UR = 2abc B \quad \text{или} \quad R = \frac{8}{3} \frac{abc}{\chi_0 + a_0 a^2}. \quad (14)$$

Сопротивление, испытываемое эллипсоидом, оказывается таким образом равным

$$6\pi\mu RU. \quad (15)$$

В случае кругового диска, движущегося в направлении, перпендикулярном к плоскости диска, будем иметь $a=0$, $b=c$ и, следовательно, $a_0=2$, $\chi_0=\pi ac$, так что

$$R = \frac{8c}{3\pi} = 0,85 c.$$

Если же диск движется в своей плоскости, то получим

$$R = \frac{16c}{9\pi} = 0,566 c \text{ } ^1).$$

§ 340. Как видоизменение задачи предшествующего параграфа мы можем исследовать установившееся движение жидкости в поле заданных сил, не изменяющихся с временем.

Опуская члены второго порядка, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X + \nu \Delta u &= 0, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y + \nu \Delta v &= 0, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z + \nu \Delta w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

¹⁾ Другими предельными случаями будут круговой цилиндр и бесконечно длинное плоское лезвие; каждое из этих тел может быть расположено против течения либо концом, либо боковой стороной. Эти случаи были исследованы А. Веггу и Miss. L. M. Swain, Proc. Roy. Soc., A, CII, 766 (1923). Скорость в бесконечности в этом случае не обращается в нуль, а становится логарифмически бесконечно большой. Ср. § 33.

Отсюда получаем уравнение

$$\Delta \frac{p}{e} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}, \quad (3)$$

которому можно удовлетворить, полагая

$$\frac{p}{e} = -\frac{1}{4\pi} \iiint \left(\frac{\partial X'}{\partial x'} + \frac{\partial Y'}{\partial y'} + \frac{\partial Z'}{\partial z'} \right) \frac{dx' dy' dz'}{r}, \quad (4)$$

где

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}. \quad (5)$$

Если силы ограничены определенной областью своего действия, то при интегрировании по частям получим

$$\begin{aligned} \frac{p}{e} &= \frac{1}{4\pi} \iiint \left(X' \frac{\partial}{\partial x'} + Y' \frac{\partial}{\partial y'} + Z' \frac{\partial}{\partial z'} \right) \frac{1}{r} dx' dy' dz' = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \iiint \left(X' \frac{\partial}{\partial x} + Y' \frac{\partial}{\partial y} + Z' \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{1}{r} dx' dy' dz'. \end{aligned} \quad (6)$$

В частности, в случае изолированной силы в начале координат, полагая

$$\begin{aligned} P &= e \iiint X' dx' dy' dz', \quad Q = e \iiint Y' dx' dy' dz', \\ R &= e \iiint Z' dx' dy' dz', \end{aligned} \quad (7)$$

будем иметь

$$p = -\frac{1}{4\pi} \left(P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y} + R \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{1}{r}. \quad (8)$$

К этому мы должны присоединить какое-то решение уравнения $\Delta p = 0$.

Всюду за исключением начала мы теперь будем иметь

$$\Delta u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad \Delta v = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad \Delta w = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (9)$$

Если мы подставим значение p из (8), то можем применить способ интеграции § 336, полагая $n = -2$. Тогда получим

$$\mu u = \frac{r^2}{24\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y} + R \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{1}{r} + \frac{P}{6\pi r} \quad (10)$$

и аналогичные формулы для v , w .

Если к правой части (8) присоединить слагаемое

$$Ax + By + Cz, \quad (11)$$

то соответствующее слагаемое в выражении μu , согласно § 336, при $n = 1$, будет иметь вид

$$A' + \frac{1}{6} Ar^2 - \frac{1}{30} r^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y} + C \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{1}{r}. \quad (12)$$

Полное решение тогда получится сложением выражений (10) и (12).

Так, например, если мы имеем неподвижную сферу радиуса $r = b$, то

$$A = \frac{5P}{4\pi b^3}, \quad A' = -\frac{3P}{8\pi b} \quad (13)$$

и, следовательно,

$$6\pi\mu u = \frac{P}{r} \left(1 - \frac{9r}{4b} + \frac{5r^2}{4b^2} \right) + \\ + \frac{r^2}{4} \left(1 - \frac{r^2}{b^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y} + R \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{1}{r}. \quad (14)$$

Если мы положим $b = \infty$, то получим

$$6\pi\mu u = \frac{P}{r} + \frac{r^2}{4} \frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y} + R \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{1}{r}. \quad (15)$$

Полагая $P = -6\pi\mu Ua$, $Q = 0$, $R = 0$, получим формулы, согласующиеся с результатами § 337 для больших значений r/a .

§ 341. Аналогичную задачу на плоскости удобнее будет рассмотреть с помощью функции тока.

Полагая

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (1)$$

в уравнениях

$$X - \frac{1}{e} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta_1 u = 0, \quad Y - \frac{1}{e} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta_1 v = 0 \quad (2)$$

и исключая p , будем иметь

$$\nu \Delta_1 \Delta_1 \psi = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad (3)$$

где

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (4)$$

Отсюда получим

$$\Delta_1 \psi = \frac{1}{2\pi\nu} \iint \left(\frac{\partial X'}{\partial y'} - \frac{\partial Y'}{\partial x'} \right) \ln r \, dx' \, dy' + \chi, \quad (5)$$

где

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \quad (6)$$

и χ есть решение уравнения $\Delta_1 \chi = 0$.

Если мы допустим, что силы X , Y обращаются в нуль вне некоторой области, то, интегрируя по частям, получим

$$\Delta_1 \psi = -\frac{1}{2\pi\nu} \iint \left(X' \frac{\partial}{\partial y'} - Y' \frac{\partial}{\partial x'} \right) \ln r \, dx' \, dy' + \chi = \\ = \frac{1}{2\pi\nu} \iint \left(X' \frac{\partial}{\partial y} - Y' \frac{\partial}{\partial x} \right) \ln r \, dx' \, dy' + \chi. \quad (7)$$

В частности, в случае силы, сконцентрированной на малой площадке в начале координат, полагая

$$P = e \iint X' \, dx' \, dy', \quad Q = e \iint Y' \, dx' \, dy', \quad (8)$$

будем иметь

$$\Delta_1 \psi = \frac{1}{2\pi\mu r^2} (Py - Qx) + \chi. \quad (9)$$

Например, предположим, что жидкость заключена в неподвижной границе $r=a$ и подвержена действию силы в начале. Соответствующая форма уравнения (9) в полярных координатах будет

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = \frac{P \sin \theta}{2\pi\mu r} + Ar \sin \theta. \quad (10)$$

Отсюда после интегрирования получим

$$\psi = \frac{P}{4\pi\mu} (r \ln r + A'r^3 + Br) \sin \theta. \quad (11)$$

На границе $r=a$ мы должны иметь $\psi = \text{const.}$, $\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$; следовательно,

$$\ln a + A'a^3 + B = 0, \quad 1 + \ln a + 3A'a^3 + B = 0, \quad (12)$$

или

$$A' = -\frac{1}{2a^3}, \quad B = -\ln a + \frac{1}{2}. \quad (13)$$

Таким образом, окончательно

$$\psi = \frac{Pr}{4\pi\mu} \left\{ \ln \frac{r}{a} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^3}{a^3} \right) \right\} \sin \theta. \quad (14)$$

Необходимо заметить, что полученная формула не может дать определенных результатов для $a = \infty$.

Возвращаясь к общей формуле (7) и полагая

$$F = \rho \iint X' \ln r \, dx' \, dy', \quad G = \rho \iint Y' \ln r \, dx' \, dy', \quad (15)$$

получим

$$\Delta_1 \psi = \frac{1}{2\pi\mu} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x} \right) + \chi. \quad (16)$$

Так как имеют место равенства

$$\Delta_1 F = 2\pi\rho X, \quad \Delta_1 G = 2\pi\rho Y, \quad (17)$$

то из (2) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial \chi'}{\partial x}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial \chi'}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где χ' — функция, сопряженная с χ , т. е.

$$\frac{\partial \chi'}{\partial x} = -\frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \chi'}{\partial y} = \frac{\partial \chi}{\partial x}. \quad (19)$$

Тогда получаем

$$p = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) + \chi' + \text{const.} \quad (20)$$

Имеет место замечательная аналогия между теорией плоского установившегося движения вязкой жидкости и теорией изгиба упругой пластинки¹⁾. Если w обозначает нормальное смещение в последней названной задаче, то имеем²⁾

$$A\Delta_1^2 w = Z + \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y},$$

¹⁾ Rayleigh, On the Flow of Viscous Fluids, especially in Two Dimensions, Phil. Mag. (5), XXXVI, 354 (1893) (Papers, IV, 78). В нашем тексте эта аналогия несколько расширена.

²⁾ Lamb, Proc. Lond. Math. Soc., XXI, 77.

где Z представляет нормальную силу на единицу площади, а L, M суть компоненты момента внешней пары, отнесенной к единице длины, вдоль прямых, параллельных x, y ; наконец, A есть постоянная, зависящая от упругих свойств и толщины. Если мы положим $Z=0$, то аналогия с уравнением (3) будет полной; моменты L, M соответствуют силам X, Y , а смещение w — функции тока ψ , так что линии равных смещений деформируемой пластинки будут тождественны с линиями тока. Так как в гидродинамической задаче на неподвижной границе мы имеем $\psi = \text{const.}$, $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$, то пластинка в упругой задаче должна предполагаться неподвижно заземленной по краю. Так, например, формула (14) соответствует случаю круглой пластинки, заземленной по краям и подверженной действию пары, сконцентрированной в начале, плоскость которой перпендикулярна пластинке.

Эта аналогия дает возможность составить хорошее представление об общем характере распределения скорости в тех случаях, когда действительное вычисление было бы очень трудным ¹⁾.

Мы не можем больше задерживаться на задачах того типа, который по указанным выше причинам имеет ограниченное применение, кроме случая жидкостей с большой вязкостью. Поэтому мы можем здесь лишь указать на математически очень изящные исследования, которые были выполнены для стационарного вращения эллипсоида ²⁾ и для потока в канале, ограниченном однополостным гиперболоидом вращения ³⁾.

§ 342. Формула Стокса для сопротивления, испытываемого медленно движущимся шаром, получила применение в физических исследованиях, имеющих фундаментальное значение; исследования эти имели целью определить величину маленькой водяной капли и на основании этого оценить число капелек, содержащихся в облаке заданной массы ⁴⁾. По этой причине условия применимости этой формулы были подробно разобраны как с экспериментальной ⁵⁾, так и с теоретической стороны.

Мы видели (§ 328), что точные уравнения движения могут быть написаны в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} - v\zeta + w\eta = X - \frac{\partial \chi'}{\partial x} + r\Delta u, \quad (1)$$

где

$$\chi' = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} q^2. \quad (2)$$

¹⁾ Некоторые интересные приложения были указаны Рэлеем в названной выше работе.

²⁾ Edwardes, Quart. Journ. Math., XXVI, 70, 157 (1892); Jeffery, On the Steady Rotation of a Solid of Revolution in a Viscous Fluid. Proc. Lond. Math. Soc. (2), XIV, 327 (1915).

³⁾ Sampson, см. выше, стр. 158.

⁴⁾ Townsend, Camb. Proc., IX, 244 (1897); J. J. Thomson, Phil. Mag. (5), XLVI, 528 (1898); см. также его Conduction of Electricity through Gases, Cambridge (1903), стр. 120. Взаимодействие частиц в облаке было исследовано Cunningham, Proc. Roy. Soc., A, LXXXIII, 357 (1910) и Smoluchowski, см. выше, стр. 752.

⁵⁾ См. указанные на стр. 751 работы Allen и Arnold.

Отсюда можно заключить, что распределение скоростей, удовлетворяющее определенным условиям рассматриваемой задачи в предположении, что члены второго порядка отброшены, будет так же иметь место и в случае сохранения этих членов, если только ввести добавочные фиктивные силы

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= w\eta - v\zeta, \\ Y_1 &= u\zeta - w\xi, \\ Z_1 &= v\xi - u\eta, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

и в то же время допустить, что давление уменьшено на величину $\frac{1}{2} \rho q^2$. Эти добавочные силы всюду направлены перпендикулярно к линиям тока и к вихревым линиям, а их напряжение равно

$$R_1 = q \omega \sin \vartheta, \quad (4)$$

где ϑ обозначает угол между направлением скорости q и осью вихря ω ¹⁾.

На основании сравнения величин фиктивных добавочных сил с силами вязкости

$$v\Delta u, \quad v\Delta v, \quad v\Delta w, \quad (5)$$

можно сделать некоторое заключение о законности того приближения, при котором инерционные члены отбрасываются.

В случае формул Стокса (11) § 337, для установившегося течения жидкости около неподвижного шара, мы имеем

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{3}{2} \frac{Uaz}{r^3}, \quad \zeta = -\frac{3}{2} \frac{Uay}{r^3}, \quad (6)$$

а, следовательно, для более удаленных частей жидкости, где $u = U$, $v = 0$, $w = 0$, будем иметь в конце концов

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = -\frac{3}{2} \frac{U^2 ay}{r^3}, \quad Z_1 = -\frac{3}{2} \frac{U^2 az}{r^3}. \quad (7)$$

С другой стороны, для сил вязкости (5) мы находим следующие выражения

$$\frac{3}{2} vUa \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r}, \quad \frac{3}{2} vUa \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{1}{r}, \quad \frac{3}{2} vUa \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{1}{r}. \quad (8)$$

Отношение первых сил ко вторым имеет порядок $\frac{Ur}{\nu}$ и неограниченно растет вместе с r , как бы ни было мало значение U . На этом основании формулы рассматриваемого решения не применимы для точек, которые значительно удалены от шара. Так как, однако, как добавочные фиктивные силы, так и силы вязкости в этих частях

¹⁾ Rayleigh, On the Flow of Viscous Fluids, especially in Two Dimensions, Phil. Mag. (5), XXXVI, 354 (1893) (Papers, IV, 78).

жидкости сами по себе относительно малы, то отсюда еще с необходимостью не следует, что характер движения в непосредственной близости от шара будет существенно различаться. Для точек вблизи шара фиктивные силы приближаются к нулю, в то время как силы вязкости имеют порядок $\frac{\nu U a}{r^3}$.

Это критическое исследование принадлежит проф. Озеену¹⁾ (Упсала), который ввел в исследование этого вопроса новый интересный момент, полагая $U + u$ вместо u и отбрасывая члены второго порядка относительно u, v, w . Эти последние символы обозначают теперь составляющие скорости, которые останутся, если всей системе сообщить скорость $-U$. Уравнения гидродинамики принимают тогда вид

$$\left. \begin{aligned} U \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \\ U \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v, \\ U \frac{\partial w}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (10)$$

Инерционные члены оказываются, таким образом, до некоторой степени принятыми во внимание; следует, однако, заметить, что хотя в бесконечности, где $u, v, w = 0$, приближение благодаря этому несомненно улучшилось, зато на поверхности шара, где теперь $u = -U$, оно несколько ухудшилось. Мы рассмотрим этот вопрос позднее.

Интеграцию уравнений (9) и (10) в рассматриваемом случае можно выполнить просто²⁾. Прежде всего имеем

$$\Delta p = 0; \quad (11)$$

мы получим частное решение системы (9), (10), если положим

$$p = \rho U \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (12)$$

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (13)$$

где функция φ должна удовлетворять уравнению

$$\Delta \varphi = 0. \quad (14)$$

¹⁾ O s e e n, Über die Stokes'sche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik, Arkiv för matematik, ..., кн. VI, № 29 (1910). Это же замечание независимо от Озеена сделал и Ф. Нёттер, Über den Gültigkeitsbereich der Stokes'schen Widerstandsformel, Zeitschr. f. Math. u. Phys., LXII (1911).

²⁾ Приведенный в тексте способ интеграции отличается от метода проф. Озеена; способ этот вместе с относящейся к нему интерпретацией взят из работы автора: On the Uniform Motion of a Sphere through a Viscous Fluid, Phil. Mag. (6), XXI, 112 (1911).

Решение будет полным, если положим

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + u', \\ v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + v', \\ w &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + w', \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где функции u' , v' , w' должны удовлетворять уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \left(\Delta - 2k \frac{\partial}{\partial x} \right) u' &= 0, \\ \left(\Delta - 2k \frac{\partial}{\partial y} \right) v' &= 0, \\ \left(\Delta - 2k \frac{\partial}{\partial z} \right) w' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

и уравнению

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0. \quad (17)$$

Мы положили здесь для краткости

$$k = \frac{U}{2v}. \quad (18)$$

Так как вихревые линии суть окружности, имеющие ось x в качестве общей оси, то можем положить

$$\xi = 0, \quad \eta = -\frac{\partial \chi}{\partial z}, \quad \zeta = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad (19)$$

где функция χ зависит только от переменных x и $\tilde{\omega}$ ($\tilde{\omega}$ — расстояние от оси x). Из уравнений (16) следует, что должно удовлетворяться уравнение

$$\left(\Delta - 2k \frac{\partial}{\partial x} \right) \chi = 0, \quad (20)$$

причем мы можем, очевидно, прибавить к функции χ функцию, зависящую только от x . Отсюда следуют уравнения

$$\left. \begin{aligned} 2k \frac{\partial u'}{\partial x} = \Delta u' &= \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - 2k \frac{\partial \chi}{\partial x}, \\ 2k \frac{\partial v'}{\partial x} = \Delta v' &= \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}, \\ 2k \frac{\partial w'}{\partial x} = \Delta w' &= \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Мы получим таким способом решение в виде

$$\left. \begin{aligned} u' &= \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial x} - \chi, \\ v' &= \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial y}, \\ w' &= \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

в чем легко можно убедиться.

Уравнение (20) можно написать в виде

$$(\Delta - k^2) e^{-kx} \chi = 0; \quad (23)$$

решение этого уравнения хорошо известно, простейшая форма его есть $e^{-kx} \chi = C \frac{e^{-kr}}{r}$; ср. § 289. Если мы воспользуемся этой формой, то окончательно получим

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial x} - \chi, \\ v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial y}, \\ w &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где

$$\chi = \frac{C e^{-k(r-x)}}{r}. \quad (25)$$

Так как функция φ , очевидно, должна содержать только зональные функции отрицательной степени, то полагаем

$$\varphi = \frac{A_0}{r} + A_1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} + A_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} + \dots \quad (26)$$

Для малых значений kr будем иметь

$$\chi = C \left(\frac{1}{r} - k + \frac{kx}{r} + \dots \right), \quad (27)$$

что дает

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial x} - \chi &= -\frac{C}{2k} \left(\frac{4}{3} \frac{k}{r} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} + \frac{1}{3} kr^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} + \dots \right), \\ \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial y} &= -\frac{C}{2k} \left(-\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} + \frac{1}{3} kr^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{1}{r} + \dots \right), \\ \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial z} &= -\frac{C}{2k} \left(-\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} + \frac{1}{3} kr^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{1}{r} + \dots \right). \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Соотношения

$$u = -U, \quad v = 0, \quad w = 0,$$

которые должны иметь место при $r = a$, будут приближенно удовлетворяться, если принять

$$C = \frac{3}{2} Ua, \quad A_0 = \frac{3}{2} va, \quad A_1 = -\frac{1}{4} Ua^2; \quad (29)$$

необходимо заметить, что условие применимости этого приближения заключается опять в том, что значение ka , или число Рейнольдса $\frac{Ua}{\nu}$, должно быть мало.

Чтобы найти распределение скоростей вблизи шара, мы можем воспользоваться формулами (26) и (28) со значениями постоянных, данными в формулах (29). Результат оказывается тождественным с формулами (11) § 337, если только мы примем во внимание измененный смысл компоненты u . Сопротивление, испытываемое шаром, имеет поэтому то же самое значение ($6\pi\mu aU$), как и в теории Стокса¹⁾.

Те же самые результаты получатся из рассмотрения функции тока ψ , которая имеет сравнительно простой вид. Если предположим, что шар движется, а жидкость в бесконечности находится в покое, то скорость в направлении радиуса будет равна

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{2k} \frac{\partial\chi}{\partial r} - \chi \cos\theta, \quad (30)$$

где θ обозначает угол между радиусом-вектором и осью x . Отсюда следует

$$\psi = r^2 \int_0^\theta \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{1}{2k} \frac{\partial\chi}{\partial r} + \chi \cos\theta \right) \sin\theta \, d\theta. \quad (31)$$

Если мы подставим соответствующие значения из формул (25), (26) и (29) и выполним интеграцию, то получим

$$\psi = \frac{3}{2} \nu a (1 + \cos\theta) \left\{ 1 - e^{-kr(1-\cos\theta)} \right\} - \frac{1}{4} \frac{Ua^2}{r} \sin^2\theta. \quad (32)$$

Для малых значений kr отсюда получается в согласии с формулой (14) § 337

$$\psi = \frac{3}{4} Ua \left(r - \frac{1}{3} \frac{a^2}{r} \right) \sin^2\theta. \quad (33)$$

В других отношениях движение сильно отличается от того, которое дается формулой Стокса. Во-первых, линии тока, как впервые заметил Озеен, уже не будут симметричными относительно плоскости $x=0$ и само движение перестает быть обратимым. Во-вторых, значение вихря оказывается равным

$$\omega = -\frac{\partial\chi}{\partial\omega} = \frac{3}{2} Ua (1 + kr) \frac{\tilde{\omega}}{r^2} e^{-k(r-x)} \quad (34)$$

и потому, если принять во внимание показательный множитель, перестает быть заметным всюду за исключением той области, которая ограничена более или менее отчетливо поверхностью параболоида с фокусом в точке O , где величина $k(r-x)$ имеет сравнительно небольшое постоянное значение. Эту область можно в данном случае назвать „хвостом“, хотя она включает в себе также некоторую

¹⁾ Более точные приближенные способы находятся в работе Озеена Arkiv. f. matem., IX (1913) и в работе Amer. J. Math., XXXVIII, 81 (1916).

часть области и впереди шара. Скорость (u, v, w) в удаленных частях жидкости для больших значений r и для точек, лежащих вне хвоста, имеет стремление принять чисто радиальное направление, как если бы движение получалось от источника мощности $4\pi A_0$ или $6\pi\mu a$, помещенного в начале координат. Этот источник компенсируется направленным внутрь потоком в хвосте; таким образом, для точек, лежащих вдоль оси хвоста с правой стороны, где $x=r$, имеем

$$u = -\frac{3}{2} \frac{Ua}{r} + \frac{1}{2} \frac{Ua^2}{r^2}. \quad (35)$$

Эта формула представляет скорость, направленную по движению шара (если представлять шар движущимся); значение этой скорости оказывается в конце концов обратно пропорциональным первой степени расстояния вместо того, чтобы быть обратно пропорциональным квадрату расстояния.

Остается теперь еще оценить степень точности приближения, которое дают полученные результаты в различных частях поля. Для этого нам нужно опять сравнить добавочные силы, которые были бы необходимы для того, чтобы сделать решение точным, с силами вязкости. Первые определяются формулами (3), но уже с новыми значениями для u, v, w , а изменение давления равно

$$\frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2). \quad (36)$$

Это выражение будет постоянным ($= \frac{1}{2} \rho U^2$) на поверхности шара и не оказывает поэтому влияния на результирующую силу, действующую на шар.

Для удаленных точек, лежащих вне хвоста, мы можем пренебречь членами, зависящими от x в выражениях (24), и потому окончательно будем иметь

$$u = \frac{3}{2} \nu a \frac{x}{r^2}, \quad v = \frac{3}{2} \nu a \frac{y}{r^2}, \quad w = \frac{3}{2} \nu a \frac{z}{r^2}. \quad (37)$$

Далее из формулы (34) получаем

$$\left. \begin{aligned} \xi &= 0, & \eta &= \frac{3}{2} Uka \frac{z}{r^2} e^{-k(r-x)}, \\ & & \zeta &= -\frac{3}{2} Uka \frac{y}{r^2} e^{-k(r-x)}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{9}{8} U^2 a^2 \frac{\tilde{\omega}^2}{r^2} e^{-k(r-x)}, \\ Y_1 &= -\frac{9}{8} U^2 a^2 \frac{xy}{r^2} e^{-k(r-x)}, \\ Z_1 &= -\frac{9}{8} U^2 a^2 \frac{xz}{r^2} e^{-k(r-x)}. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Результирующая этих составляющих есть

$$R_1 = \frac{9}{8} U^2 a^2 \frac{\tilde{\omega}}{r^4} e^{-k(r-x)}, \quad (40)$$

она лежит в плоскости, проходящей через ось x , и направлена перпендикулярно к радиусу-вектору. Силы же вязкости определяются из формул (24) и (25). Если мы удержим только те члены, которые имеют наибольший порядок при больших значениях r , то получим

$$\left. \begin{aligned} \nu \Delta u &= -\nu k^2 C \frac{\tilde{\omega}^2}{r^3} e^{-k(r-x)}, \\ \nu \Delta v &= -\nu k^2 C \frac{y(r-x)}{r^2} e^{-k(r-x)}, \\ \nu \Delta w &= -\nu k^2 C \frac{z(r-x)}{r^2} e^{-k(r-x)}. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Из формул (29) следует, что отношение значений (39) к значениям (41) имеет порядок величины $\frac{1}{kr} \cdot \frac{a}{r}$. Приближение в этой части потока оказывается, таким образом, вполне удовлетворительным.

Для точек, лежащих внутри хвоста, где значение $k(r-x)$ мало, из формулы (32) для больших значений отношения $\frac{r}{a}$ получается

$$u = -\frac{3}{2} \frac{Ua}{r}, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad (42)$$

а из формулы (34) будем иметь приближенно

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{3}{2} Uka \frac{z}{r^2}, \quad \zeta = -\frac{3}{2} Uka \frac{y}{r^2}. \quad (43)$$

Эти значения дают

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = \frac{9}{4} U^2 ka^2 \frac{y}{r^2}, \quad Z_1 = \frac{9}{4} U^2 ka^2 \frac{z}{r^2}. \quad (44)$$

Силы же вязкости приближенно будут выражаться в виде

$$\nu \Delta u = 2\nu k C \frac{x}{r^2}, \quad \nu \Delta v = 2\nu k C \frac{y}{r^2}, \quad \nu \Delta w = 2\nu k C \frac{z}{r^2}. \quad (45)$$

Отношение величин (44) и (45) имеет порядок величины ka .

Вблизи поверхности шара приближенно имеем $u = -U$, $v = 0$, $w = 0$, а потому, на основании равенств (3) и (19),

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = -U \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad Z_1 = -U \frac{\partial \chi}{\partial z} \quad (46)$$

или, имея в виду формулы (27) и (29),

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = \frac{3}{2} U^2 a \frac{y}{r^2}, \quad Z_1 = \frac{3}{2} U^2 a \frac{z}{r^2}. \quad (47)$$

Эти величины имеют порядок $\frac{U^2}{a}$. Силы вязкости получаются из формул (24) и (27); они будут равны

$$\left. \begin{aligned} \nu \Delta u &= \frac{3}{2} \nu U a \frac{3x^2 - r^2}{r^5}, \\ \nu \Delta v &= \frac{3}{2} \nu U a \frac{3xy}{r^5}, \\ \nu \Delta w &= \frac{3}{2} \nu U a \frac{3xz}{r^5}. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Эти составляющие имеют результирующую порядка величины $\frac{\nu U}{a^2}$. Следовательно, отношение рассматриваемых величин оказывается равным $\frac{Ua}{\nu}$, а эта величина предполагалась малой. Мы видим, таким образом, что хотя приближение здесь и менее совершенно, чем по теории Стокса, все же оно может считаться достаточным.

§ 343. Если бы мы попытались теперь определить на основании уравнений (1) § 336 установившееся движение, вызываемое движением *цилиндра* с постоянной скоростью в неограниченной жидкости, то оказалось бы невозможным удовлетворить всем условиям¹⁾. Стокс обратил внимание на это обстоятельство и дал ему следующее объяснение: „Давление, производимое цилиндром на жидкость, постоянно стремится увеличить то количество жидкости, которое цилиндр захватывает с собой, в то время как внутреннее трение жидкости на некотором расстоянии от цилиндра, наоборот, стремится уменьшить это количество жидкости. В случае шара оба эти влияния в конце концов нейтрализуют друг друга, и движение становится установившимся. В случае же цилиндра приращение количества жидкости, увлекаемой цилиндром, постоянно превышает потерю, вызванную трением окружающей жидкости, и количество увлекаемой жидкости постоянно растет по мере того, как цилиндр движется дальше“²⁾.

Если же по примеру Озеена (§ 342) учесть частично инерционные члены, то рассматриваемая задача становится возможной, и для сопротивления получится определенное значение³⁾.

Гидродинамические уравнения удовлетворяются в этом случае решениями вида

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial x} - \chi, \\ v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

¹⁾ См. замечание, следующее за уравнением (14) § 341.

²⁾ Stokes, Camb. Trans., IX (1850) (Papers, III, 65).

³⁾ Проф. Бэрстоу воспользовался обычной приближенной теорией и для того случая, когда круговой цилиндр движется в канале с параллельными стенками, получил определенную формулу для сопротивления. Proc. Roy. Soc., A, C, 394 (1922).

и

$$p = eU \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (2)$$

при условии, что функции φ и χ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta_1 \varphi = 0 \quad (3)$$

и

$$\left(\Delta_1 - 2k \frac{\partial}{\partial x} \right) \chi = 0. \quad (4)$$

Пригодное в этом случае решение уравнения (4) имеет вид

$$\chi = C e^{kx} \int_0^{\infty} e^{-kr \operatorname{ch} \omega} d\omega. \quad (5)$$

Для определенного интеграла имеем разложения¹⁾

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-kr \operatorname{ch} \omega} d\omega &= -\left(\gamma + \ln \frac{1}{2} kr \right) I_0(kr) + \frac{k^2 r^2}{2^2} + \\ &+ S_2 \frac{k^4 r^4}{2^2 \cdot 4^2} + S_3 \frac{k^6 r^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} e^{-kr} \left\{ 1 - \frac{1^2}{8kr} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{1 \cdot 2 \cdot (8kr)^2} - \dots \right\}; \quad (6) \end{aligned}$$

последняя форма разложения представляет полусходящийся ряд и применяется для больших значений kr .Для малых значений kr будем иметь

$$\chi = -C(1 + kx) \left(\gamma + \ln \frac{1}{2} kr \right), \quad (7)$$

откуда получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial x} - \chi &= -\frac{C}{2k} \left\{ k \left(\frac{1}{2} - \gamma - \ln \frac{1}{2} kr \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x} \ln r - \frac{1}{2} kr^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln r + \dots \right\}, \\ \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial y} &= -\frac{C}{2k} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \ln r - \frac{1}{2} kr^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln r + \dots \right\} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Если еще положить

$$\varphi = A_0 \ln r + A_1 \frac{\partial}{\partial x} \ln r + \dots, \quad (9)$$

¹⁾ Вывод этого разложения аналогичен соответствующему выводу § 194; ср. Watson, стр. 80, 202. Определенный интеграл есть бесселева функция „второго рода“ от мнимого аргумента. В руководстве Ватсона имеются таблицы для этой функции, и обозначена она через $K_0(kr)$.

то найдем, что условия $u = -U$, $v = 0$, $w = 0$ при $r = a$ будут удовлетворены, если положить приближенно

$$C = \frac{2U}{\frac{1}{2} - \gamma - \ln\left(\frac{1}{2}ka\right)}, \quad A_0 = -\frac{C}{2k}, \quad A_1 = \frac{1}{4}Ca^2. \quad (10)$$

Поэтому вблизи цилиндра имеют место равенства

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2}C \left\{ \gamma - \frac{1}{2} + \ln \frac{1}{2}kr + \frac{1}{2}(r^2 - a^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln r \right\}, \\ v &= \frac{1}{4}C(r^2 - a^2) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln r. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Вихрь определится тогда выражением

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = Ce^{kz} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\infty} e^{-kr \operatorname{ch} \omega} d\omega,$$

которое для больших значений kr принимает вид

$$\zeta = -kC \frac{y}{r} \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} e^{-k(r-x)}. \quad (12)$$

Общее истолкование этих формул в основных чертах совпадает с тем, что мы имели в случае шара (§ 342).

Чтобы вычислить силу, с которой жидкость действует на цилиндр, мы должны проинтегрировать выражение

$$\begin{aligned} r p_{rx} &= \left(-p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) x + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) y = \\ &= -px + \mu r \frac{\partial u}{\partial r} + \mu \left(x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

по углу θ от 0 до 2π . При этом интегралы от произведений различных тригонометрических функций будут обращаться в нуль. Первый же член в выражении (13), если положить $r = a$, будет давать

$$- \rho U A_0 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = -\pi \rho U A_0 = \pi \mu C. \quad (14)$$

Второй член после подстановки выражения для u из формулы (11) дает также значение $\pi \mu C$. Наконец, третий член при нашей степени приближения дает результат, равный нулю. Окончательное значение сопротивления на единицу длины получается, таким образом, равным

$$2\pi \mu C = \frac{4\pi \mu U}{\frac{1}{2} - \gamma - \ln\left(\frac{1}{2}ka\right)}. \quad (15)$$

Эти расчеты подчинены, как и в случае § 342, условию, что значения величины ka или $\frac{Ua}{2\nu}$ должны быть малыми¹⁾.

Следует заметить, что значение выражения (15) не очень быстро изменяется при изменении a . Так, например, при $ka = \frac{1}{10}$ значение этого выражения равно $4,31 \mu U$, а при $ka = \frac{1}{20}$ это значение равно $3,48 \mu U$.

§ 343а. Линеаризированные уравнения Озеена (9) § 342 послужили отправной точкой многих исследований. Необходимо только заметить, что, если даже и считать эти уравнения приемлемыми все же граничные условия при этом удовлетворяются только приближенно. Озеен, продолжая приближение, установил следующую формулу²⁾ для сопротивления шара

$$6\pi\mu Ua \left(1 + \frac{3}{8} R\right), \quad (16)$$

где $R = \frac{Ua}{\nu}$. Он также исследовал и случай эллипсоида³⁾, при этом нашел поправку к результату Обербека (§ 339). Последняя задача включает в себе случай эллиптического цилиндра, рассмотренный независимо Бэрстоу⁴⁾ и другими, а также Харрисоном и Файлоном⁵⁾. Формула для сопротивления на единицу длины, данная последними авторами, имеет следующий вид:

$$\frac{4\pi\mu U}{\frac{a}{a+b} - \gamma - \ln \left\{ \frac{1}{4} k(a+b) \right\}}. \quad (17)$$

При этом цилиндр предполагался помещенным симметрично и a обозначает ту полуось, которая параллельна направлению потока. Если мы положим $b = a$, то воспроизведем результат для круглого

¹⁾ Приведенное в тексте исследование взято из работы автора, указанной на стр. 766.

Формула (15) при достаточно малых значениях $\frac{Ua}{\nu}$ хорошо согласуется с опытами; см. Wieselsberger, Phys. Zeitschr. (1921), стр. 321.

²⁾ Oseen, Arkiv f. matem., IX (1913); также Burgess, Amer. J. Math., XXXVIII, 81 (1916). Приближенное решение продолжено в виде ряда по степеням числа Рейнольдса, Goldstein, Proc. Roy. Soc., A, CXXIII, 225 (1929).

³⁾ Oseen, Arkiv f. matem. u. phys. XXIV (1915). Изложение этого вопроса и многих других исследований в этой связи дано в его Гидродинамике, Leipzig (1927).

⁴⁾ L. Baird, B. M. Cave, E. O. Lenz, Phil. Trans., A, CCXXIII, 383 (1923). В этой же работе рассматривался и случай цилиндра произвольного сечения. В ней же проведено сравнение с экспериментальными результатами для случая круглого сечения в той степени, в какой это было возможно сделать.

⁵⁾ Harrison, Camb. Trans., XXIII, 71 (1924); Filon, Proc. Roy. Soc., A, CXIII, 7 (1926) и Phil. Trans., A, CCXXVII, 93 (1927).

сечения. Если же $b=0$, то будем иметь случай пластинки, расположенной параллельно потоку. Точное решение для круглого цилиндра аналитически было исследовано Факсеном¹⁾. Тот же автор исследовал²⁾ на основе уравнений Озеена движение шара как вдоль оси трубы, так и параллельно неподвижной плоскости и между параллельными стенками, а также сравнил в той мере, в которой это было возможно сделать, полученные результаты с экспериментальными результатами.

Некоторые другие более проблематичные исследования, основанные на тех же уравнениях, будут прореферированы позднее (§ 371b).

§ 344. Гельмгольц и Кортвег установили некоторые интересные общие теоремы, относящиеся к рассеянию энергии при установившемся движении жидкости под действием постоянных внешних сил. Эти теоремы выведены в предположении, что инерционные члены в уравнениях движения отброшены.

1. Рассмотрим движение в области, ограниченной произвольной замкнутой поверхностью Σ ; пусть u, v, w обозначают составляющие скорости этого движения и $u+u', v+v', w+w'$ — соответствующие компоненты другого произвольного движения, которое подчинено только тому условию, что значения u', v', w' на поверхности Σ должны обращаться в нуль. На основании выражения (3) § 329 значение рассеяния в варьированном движении оказывается равным

$$\iiint \left\{ (p_{xx} + p'_{xx})(a + a') + \dots + \dots + (p_{yz} + p'_{yz})(f + f') + \dots + \dots \right\} dx dy dz; \quad (1)$$

штрихи в обозначениях указывают на то, что нужно брать те значения, которые принимают соответствующие функции, если вместо u, v, w подставлены u', v', w' . Формулы (2) и (3) § 326 показывают, что для несжимаемой жидкости имеет место равенство

$$\begin{aligned} p_{xx}a' + p_{yy}b' + p_{zz}c' + p_{yz}f' + p_{zx}g' + p_{xy}h' = \\ = p'_{xx}a + p'_{yy}b + p'_{zz}c + p'_{yz}f + p'_{zx}g + p'_{xy}h, \end{aligned} \quad (2)$$

так как каждая часть этого равенства — симметрическая функция величин a, b, c, f, g, h и a', b', c', f', g', h' . Отсюда и из § 329 видно, что выражение (1) приводится к виду

$$\iiint \Phi dx dy dz + 2 \iiint (p_{xx}a' + p_{yy}b' + p_{zz}c' + p_{yz}f' + p_{zx}g' + p_{xy}h') dx dy dz + \iiint \Phi' dx dy dz.$$

Второй интеграл можно написать в виде

$$\iiint \left(p_{xx} \frac{\partial u'}{\partial x} + p_{xy} \frac{\partial u'}{\partial y} + p_{xz} \frac{\partial u'}{\partial z} + \dots + \dots \right) dx dy dz;$$

¹⁾ Faxén, K. Soc. d. Wiss., Upsala (1926).

²⁾ Faxén, Dissertation, Upsala, 1921; Ann. d. Physik (4), LXVIII, 89 (1922); Arkiv f. matem., XVII (1923), XVIII (1924), XIX (1925).

если обратим внимание на то, что значения u' , v' , w' обращаются в нуль на границе, то в результате интегрирования по частям получим

$$-\iiint \left\{ u' \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \right) + \dots + \dots \right\} dx dy dz$$

или

$$\iiint \left\{ u' \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \mu \Delta u \right) + \dots + \dots \right\} dx dy dz. \quad (3)$$

До сих пор на u , v , w не накладывалось никаких ограничений, кроме того, что они должны были удовлетворять уравнению непрерывности. Если же значения u , v , w удовлетворяют уравнениям движения, в которых инерционные члены отброшены, а именно уравнениям вида

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u - \rho \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

где Ω — однозначный потенциал внешних сил, то интеграл (3) на основании формулы (4) § 42 обращается, в силу уравнения непрерывности, в нуль.

При этих условиях значение рассеяния в варьированном движении будет равно

$$\iiint \Phi dx dy dz + \iiint \Phi' dx dy dz \quad (5)$$

или $2(F + F')$. А это показывает, что значение рассеяния при варьированном движении превосходит рассеяние установившегося движения на существенно положительную величину $2F'$, представляющую рассеяние в движении (u' , v' , w').

Другими словами: если инерционными членами можно пренебречь, то установившееся движение жидкости, возникающее под действием постоянных сил, имеющих однозначный потенциал, характеризуется тем свойством, что рассеяние в этом движении для каждой области оказывается меньше, чем рассеяние во всяком другом движении с теми же самыми значениями u , v , w на границе.

Отсюда следует, что при заданной на границе скорости при одних и тех же предположениях в данной области оказывается возможным только один вид установившегося движения¹⁾.

Рэлей²⁾ обратил внимание на то, что интеграл (3) обращается в нуль и соответственно этому значение рассеяния обращается в минимум также при несколько расширенных условиях.

В самом деле, интеграл (3) можно заменить интегралом

$$-\mu \iiint (u' \Delta u + v' \Delta v + w' \Delta w) dx dy dz, \quad (6)$$

а это выражение исчезает, если имеют место равенства

$$\Delta u = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \Delta v = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \Delta w = \frac{\partial H}{\partial z}, \quad (7)$$

где H — однозначная функция от x , y , z . Это условие, являющееся чисто кинематическим, имеет следствием равенства

$$\Delta \xi = 0, \quad \Delta \eta = 0, \quad \Delta \zeta = 0, \quad (8)$$

¹⁾ Helmholtz, Zur Theorie der stationären Ströme in reibenden Flüssigkeiten, Verh. d. naturhist-med. Vereins, 30, Okt. (1868) (Wiss. Abh., 1, 223).

²⁾ Rayleigh, On the Motion of a Viscous Fluid, Phil. Mag. (6), XXVI; 776 (1913) (Papers VI, 187).

и наоборот. При таких условиях сюда будет относиться случай установившегося движения между параллельными плоскостями, при котором (§ 330) имеют место формулы

$$u = A + Vz + Cz^2, \quad v = 0, \quad w = 0 \quad (9)$$

и также случай кругового движения между соосными цилиндрами (§ 333). Следует заметить, что для справедливости высказанной теоремы не является необходимым, чтобы движение, представляемое компонентами u, v, w , было медленным или чтобы это движение было вообще динамически возможно как установившееся движение; необходимо только, чтобы были выполнены соотношения (7) и уравнение непрерывности. Например, для каждого движения между концентрическими сферами рассеяние необходимо оказывается большим, чем найденное в § 334 значение, и потому необходимый для поддержания движения момент вращающей пары N должен превосходить данное там значение.

2. Если величины u, v, w относятся к произвольному движению в заданной области, то имеем

$$\begin{aligned} 2\dot{F} &= \iiint \Phi \, dx \, dy \, dz = \\ &= 2 \iiint (p_{xx}\dot{a} + p_{yy}\dot{b} + p_{zz}\dot{c} + p_{yz}\dot{j} + p_{zx}\dot{g} + p_{xy}\dot{h}) \, dx \, dy \, dz, \end{aligned} \quad (10)$$

так как формула (2) сохраняет свою силу, если штрихи будут заменены точками.

Этот интеграл можно преобразовать так же, как и в предшествующем случае.

Если мы предположим, что $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ обращаются в нуль на границе Σ , то для случая медленного движения получим

$$\begin{aligned} \dot{F} &= - \iiint \left\{ \dot{u} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \right) + \dots + \dots \right\} dx \, dy \, dz = \\ &= -e \iiint (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) \, dx \, dy \, dz + \\ &\quad + e \iiint (X\dot{u} + Y\dot{v} + Z\dot{w}) \, dx \, dy \, dz. \end{aligned} \quad (11)$$

В том случае, когда внешние силы имеют однозначный потенциал, второй интеграл в формуле (11) обращается в нуль, поэтому будем иметь

$$\dot{F} = -e \iiint (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) \, dx \, dy \, dz. \quad (12)$$

Это выражение существенно отрицательно, так что функция F постоянно убывает. Это убывание прекратится лишь тогда, когда будут иметь место равенства $\dot{u} = 0, \dot{v} = 0, \dot{w} = 0$, т. е. когда движение сделается установившимся.

Следовательно, если скорости на граничной поверхности Σ удерживаются постоянными, то движение внутри поверхности стремится сделаться установившимся. Получающееся в конце концов установившееся движение оказывается поэтому устойчивым постольку, поскольку оно единственное¹⁾.

¹⁾ Korteweg, On a General Theorem of the Stability of the Motion of a Viscous Fluid, Phil. Mag. (5), XVI, 112 (1883).

Рэлей¹⁾ показал, что это предложение может быть распространено на всякую динамическую систему, не обладающую потенциальной энергией, если её кинетическая энергия T и функция рассеяния F представляют квадратичные функции обобщенных скоростей с постоянными коэффициентами.

В том случае, когда внешние силы не имеют однозначного потенциала или когда мы на граничной поверхности задаем вместо определенных значений скоростей определенные значения напряжений, высказанные теоремы должны быть несколько видоизменены. Избыток рассеяния над удвоенной работой, производимой в единицу времени внешними силами (включая и напряжения на границе), стремится к определенному минимуму, который будет достигнут только тогда, когда движение сделается установившимся²⁾.

Периодическое движение.

§ 345. Исследуем теперь влияние вязкости в различных задачах, относящихся к малым колебаниям.

Мы начнем с рассмотрения случая „ламинарного“ движения, так как он позволит объяснить некоторые важные вопросы без сложных математических вычислений. Если мы предположим, что $v = 0$, $w = 0$ и u есть функция только координаты y , то уравнения (4) § 328 потребуют, чтобы имели место равенства

$$p = \text{const}$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (1)$$

Последнее уравнение имеет тот же вид, как и уравнение линейного распространения тепла. В случае простого гармонического колебания с множителем времени $e^{i(\sigma t + \epsilon)}$ будем иметь

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{i\sigma}{\nu} u; \quad (2)$$

решение этого уравнения есть

$$u = Ae^{(1+i)\beta y} + Be^{-(1+i)\beta y}, \quad (3)$$

где

$$\beta = \left(\frac{\sigma}{2\nu} \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Мы предположим прежде всего, что жидкость находится с положительной стороны плоскости xz и движение вызывается заданным колебанием

$$u = ae^{i(\sigma t + \epsilon)} \quad (5)$$

твердой стенки, совпадающей с плоскостью xz . Если жидкость в положительном направлении по оси y простирается в бесконечность,

¹⁾ Rayleigh, см. выше, стр. 777.

²⁾ Ср. Helmholtz, см. выше, стр. 777.

то присутствие первого члена в выражении (3) должно быть исключено, и мы получаем, определяя постоянный коэффициент B из граничного условия (5),

$$u = ae^{-(1+i)\beta y + i(\sigma t + \varepsilon)} \quad (6)$$

или, если возьмем только действительную часть,

$$u = ae^{-\beta y} \cos(\sigma t - \beta y + \varepsilon); \quad (7)$$

это соответствует заданному на границе движению ¹⁾

$$u = a \cos(\sigma t + \varepsilon). \quad (8)$$

Формула (7) представляет волну поперечных колебаний, которая распространяется от границы внутрь со скоростью $\frac{\sigma}{\beta}$ и амплитуда которой очень быстро убывает, уменьшаясь на протяжении одной длины волны в отношении $e^{-2\pi}$, т. е. $\frac{1}{535}$.

Линейная величина β^{-1} имеет большое значение во всех задачах, относящихся к колебательному движению, при котором не происходит изменения плотности, так как она показывает, как далеко в жидкость проникает действие вязкости. В случае воздуха ($\nu = 0,13$) значение этой величины равно $0,21 P^{1/2}$ см, где P — период колебания в секундах. Для воды соответствующее значение равно $0,072 P^{1/2}$. Мы будем иметь скоро другие примеры того факта, что влияние вязкости распространяется лишь на небольшое расстояние от поверхности того тела, которое совершает малые колебания с достаточно большой частотой. Подобный же результат можно высказать и относительно свободной поверхности жидкости, находящейся в волновом движении.

Замедляющая сила, действующая на единицу площади твердой стенки, будет равна

$$\begin{aligned} -\mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=0} &= \mu \beta a \{ \cos(\sigma t + \varepsilon) - \sin(\sigma t + \varepsilon) \} = \\ &= \rho \nu^{1/2} \sigma^{1/2} a \cos\left(\sigma t + \varepsilon + \frac{1}{4} \pi\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Своего наибольшего значения эта сила достигает в тот момент времени, который предшествует моменту прохождения колеблющейся плоскости через ее среднее положение на $\frac{1}{8}$ периода ²⁾.

¹⁾ Stokes, см. выше, стр. 726.

²⁾ Исследования, относящиеся к тому случаю, когда пластинка испытывает не только простые гармонические колебания, имеются в работах Stokes, см. выше Basset, Quart. Journ. Math. (1910) и Rayleigh, On the Motion of Solid Bodies through a Viscous Fluid, Phil. Mag. (6), XXI, 697 (1911) (Papers VI, 29). См. также Havelock, Phil. Mag. (6), XLII, 620 (1921);

На рассмотренное выше вынужденное колебание можно наложить любое свободное колебание, допускаемое системой. Если положить

$$u \text{ пропорционально } A \cos my + B \sin my \quad (10)$$

и подставить в уравнение (1), то получится

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nu m^2 u; \quad (11)$$

отсюда получим решение

$$u = \sum (A \cos my + B \sin my) e^{-\nu m^2 t}. \quad (12)$$

Допустимые значения m и значения отношения $A : B$ определяются, как правило, из граничных условий. Остальные же произвольные постоянные можно определить по методу Фурье через начальные данные.

В случае жидкости, простирающейся от $y = -\infty$ до $y = +\infty$, допустимыми оказываются все действительные значения m . Решение, выраженное через начальные данные, в этом случае можно сейчас же получить на основании теоремы Фурье [(4) § 238]. Таким путем будем иметь

$$u = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dm \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cos m(y - \lambda) e^{-\nu m^2 t} d\lambda, \quad (13)$$

если

$$u = f(y) \quad (14)$$

есть произвольное распределение скоростей в начальный момент.

Интегрирование по m можно выполнить на основании известной формулы

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} \cos \beta x dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^{1/2} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}. \quad (15)$$

Таким образом находим

$$u = \frac{1}{2(\pi \nu t)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-\lambda)^2}{4\nu t}} f(\lambda) d\lambda. \quad (16)$$

Отсюда можно получить решение (2) § 334а.

§ 346. Если жидкость не простирается в бесконечность, а ограничена неподвижной твердой стенкой $y = h$, то, чтобы найти движение, которое получится в результате вынужденных колебаний плоскости $y = 0$, необходимы будут оба члена в выражении (3); граничные условия дают в этом случае

$$A + B = a, \quad A e^{(1+i)\beta h} + B e^{-(1+i)\beta h} = 0, \quad (17)$$

откуда

$$u = a \frac{\operatorname{sh}(1+i)\beta(h-y)}{\operatorname{sh}(1+i)\beta h} e^{i(\sigma t + s)}, \quad (18)$$

что легко можно проверить. Отсюда для замедляющей силы, действующей на единицу поверхности колеблющейся плоскости, получаем выражение

$$-\mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=0} = \mu (1+i) \rho a \coth (1+i) \beta h \cdot e^{i(\sigma t + \varepsilon)}. \quad (19)$$

Действительную часть этого выражения можно привести к следующему виду:

$$\sqrt{2} \mu \rho a \frac{\operatorname{sh} 2\beta h \cos (\sigma t + \varepsilon + \frac{1}{4} \pi) + \sin 2\beta h \sin (\sigma t + \varepsilon + \frac{1}{4} \pi)}{\operatorname{ch} 2\beta h - \cos 2\beta h}. \quad (20)$$

Если значение βh сравнительно велико, то это выражение будет эквивалентно выражению (9), в то время как для малых значений βh оно приводится к виду

$$\frac{\mu a}{h} \cos (\sigma t + \varepsilon), \quad (21)$$

как и следовало ожидать.

Этот пример содержит как частный случай теорию видоизмененного Максвеллом ¹⁾ метода Кулона ²⁾ для исследования вязкости жидкостей при помощи вращательных колебаний кругового диска в его собственной (горизонтальной) плоскости.

Присоединение неподвижных параллельных дисков на небольшом расстоянии от первоначального диска сверху и снизу значительно увеличивает влияние трения.

Типы свободных колебаний выражаются формулой (12) при условии, что $u=0$ при $y=0$ и $y=h$. Это условие дает $A=0$ и $m h = s \pi$, где s — целое число. Соответствующие коэффициенты затухания получатся, полагая $\tau = \frac{1}{\nu m^2}$.

§ 347. В качестве следующего примера рассмотрим случай горизонтальной силы

$$X = f \cos (\sigma t + \varepsilon), \quad (1)$$

действующей всюду одинаково на неограниченную массу воды постоянной глубины h .

Уравнение (1) § 345 заменится теперь уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + X. \quad (2)$$

Если поместим начало координат в какой-либо точке на дне, то граничные условия получают вид $u=0$ при $y=0$ и $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ при $y=h$; последнее условие выражает то обстоятельство, что на свободную

¹⁾ Maxwell, см. выше, стр. 720.

²⁾ Coulomb. Mém. de l'Inst., III (1800).

поверхность не действует касательная сила. Заменяя выражение (1) выражением

$$X = fe^{i(\sigma t + \varepsilon)}, \quad (3)$$

получим

$$u = -\frac{if}{\sigma} \left\{ 1 - \frac{\operatorname{ch}(1+i)\beta(h-y)}{\operatorname{ch}(1+i)\beta h} \right\} e^{i(\sigma t + \varepsilon)}, \quad (4)$$

если, как и выше, $\beta = \left(\frac{\sigma}{2\nu}\right)^{1/2}$.

Если значение βh велико, то выражение в фигурных скобках практически приводится к одному первому члену для всех тех точек, высота которых от дна превосходит сравнительно небольшое кратное от β^{-1} . Мы будем иметь, таким образом, если возьмем действительную часть,

$$u = \frac{f}{\sigma} \sin(\sigma t + \varepsilon). \quad (5)$$

Это показывает, что вся масса жидкости, за исключением слоя у поверхности дна, колеблется в точности так же, как свободная материальная точка, причем влияние вязкости оказывается незаметным. Для точек, лежащих вблизи от поверхности дна, формула (4) принимает вид

$$u = -\frac{if}{\sigma} (1 - e^{-(1+i)\beta y}) e^{i(\sigma t + \varepsilon)} \quad (6)$$

или, если отбросим мнимую часть,

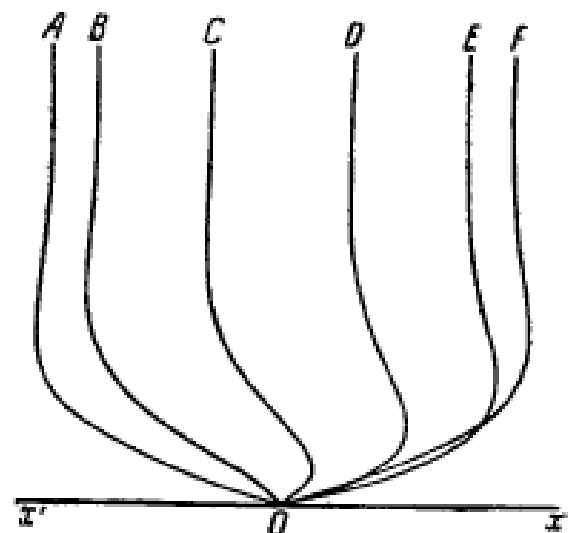
$$u = \frac{f}{\sigma} \sin(\sigma t + \varepsilon) - \frac{f}{\sigma} e^{-\beta y} \sin(\sigma t - \beta y + \varepsilon). \quad (7)$$

Это выражение можно было бы прямо найти как решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям, что $u = 0$ для $y = 0$ и

$$u = \frac{f}{\sigma} \sin(\sigma t + \varepsilon)$$

для больших значений βy .

Кривые A, B, C, D, E, F на фиг. 82 представляют последовательные формы, которые принимает одна и та же жидкая линия через промежутки в $\frac{1}{10}$ периода. Чтобы дополнить этот ряд кривых, нужно еще присоединить зеркальные изображения кривых E, D, C, B по отношению к вертикали, проходящей через точку O . Вся систему кривых можно представлять себе как последовательные проекции некоторой, подходящим образом вы-



Фиг. 82.

бранной спирали, которая равномерно вращается около вертикальной оси, проходящей через точку O . Размер фигуры по вертикали равен длине волны $\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)$ ламинарного возмущения.

В качестве числового примера отметим, что при $\nu = 0,0178$ и $\frac{2\pi}{\sigma} = 12$ часам получится $\beta^{-1} = 15,6$ см. Это еще раз показывает, насколько мало должно быть непосредственное влияние вязкости на морские приливы. И не подлежит никакому сомнению, что то рассеяние энергии вследствие „приливного трения“, какое наблюдается в действительности, следует отнести, главным образом, за счет вихревого движения, возникающего благодаря преувеличенным приливным течениям в узких каналах и в мелкой воде (ср. § 365).

Если значение βh мало, то действительная часть выражения (4) дает

$$u = \frac{1}{2\nu} y (2h - y) \cos(\sigma t + \varepsilon). \quad (8)$$

Скорость имеет таким образом одинаковую фазу с силой и обратно пропорциональна ν .

§ 348. Чтобы определить влияние вязкости на свободные волны в глубокой воде, мы можем поступить следующим образом.

Если вязкостью пренебрегать, то в качестве решения мы получим

$$\varphi = ace^{ky} \cos k(x - ct), \quad (1)$$

$$u = kace^{ky} \sin k(x - ct), \quad v = -kace^{ky} \cos k(x - ct), \quad (2)$$

$$\eta = a \sin k(x - ct), \quad (3)$$

где η — возвышение поверхности, а c — скорость волны. Этот вид движения может иметь место даже и при наличии вязкости, если только на предполагаемую свободную поверхность будут действовать силы

$$\left. \begin{aligned} p_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = -p - 2\mu k^2 ac \cos k(x - ct), \\ p_{yx} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2\mu k^2 ac \sin k(x - ct). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Работа этих сил в единицу времени будет равна

$$p_{yy}v + p_{yx}u = pkac \cos k(x - ct) + 2\mu k^3 a^2 c^2; \quad (5)$$

среднее значение этой работы равно $2\mu k^3 a^2 c^2$. Последнее выражение, очевидно, должно представлять скорость рассеяния энергии в свободном движении, выражаемом формулами (2), как в этом можно убедиться, производя вычисления по какой-либо формуле § 329. Среднее же значение кинетической энергии на единицу поверхности

равно $\frac{1}{4} \rho k c^2 a^2$. Полная энергия равна удвоенному среднему значению энергии, т. е.

$$\frac{1}{2} \rho k c^2 a^2.$$

Следовательно, при отсутствии сил на поверхности получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho k c^2 a^2 \right) = -2\mu k^3 c^2 a^2 \quad (6)$$

или

$$\frac{da}{dt} = -2\nu k^2 a, \quad (7)$$

откуда следует

$$a = a_0 e^{-2\nu k^2 t}. \quad (8)$$

Для „модуля“ затухания τ получаем отсюда выражение $\tau = \frac{1}{2\nu k^2}$, или, если введем длину волны (λ),

$$\tau = \frac{\lambda^2}{8\nu^2}. \quad (9)^1$$

Для случая воды эта формула дает

$$\tau = 0,712 \lambda^2 \text{ сек.},$$

если значение λ выражено в сантиметрах. Отсюда следует, что капиллярные волны очень быстро затухают благодаря вязкости, между тем как для волн длиной в один метр значение τ оказывается равным приблизительно двум часам.

Этот метод основывается на предположении, что значение $\sigma\tau$ достаточно велико; $\sigma (=kc)$ обозначает здесь частоту. В легкоподвижных жидкостях, как, например, вода, это условие выполняется для всех длин волн за исключением чрезвычайно малых. Если глубина жидкости меньше половины длины волны, то данный метод оказывается неприменимым по другой причине. Так как сопротивление скольжению по поверхности дна практически оказывается бесконечно большим, то рассеяние энергии нельзя больше вычислять так, как если бы движение было свободным от вихрей²⁾.

Чтобы иллюстрировать образование и поддержание волн ветром, приведенные выше вычисления могут быть видоизменены. Очень мало вероятно, чтобы действие ветра даже на просто гармонический

¹⁾ Stokes, см. выше, стр. 723 и Papers III, 74. (По недосмотру в оригинальных вычислениях значение τ оказалось вдвое меньшим).

²⁾ По той же причине метод оказывается неприменимым и к исследованию колебаний жидкостей, налегающих друг на друга (§ 231); ср. Harrison, Proc. Lond. Math. Soc. (2), VI, 396. VII, 107 (1908). „Модуль“ затухания оказывается пропорциональным $\nu^{-1/2}$ вместо того, чтобы быть пропорциональным ν^{-1} (ср. § 364).

профиль волны могло бы представляться какой-нибудь простой формулой¹⁾. Однако, пренебрегая тангенциальным действием, которое, повидимому, имеет второстепенное значение, мы можем нормальное давление представить в виде ряда Фурье по синусам и косинусам кратных от $k(x - ct)$, и тогда будет очевидно, что только та составляющая будет входить в итог всех работ за полный период, которая имеет вид

$$\Delta p = C \cos k(x - ct). \quad (10)$$

Уравнение (6) тогда заменится уравнением

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho k c^2 a^2 \right) = \frac{1}{2} k c a C - 2\mu k^3 c^2 a^2, \quad (11)$$

или

$$\frac{da}{dt} = \frac{C}{2\rho c} - 2\nu k^2 a. \quad (12)$$

Амплитуда будет, следовательно, возрастать или уменьшаться в зависимости от того, будет ли

$$C \geq 4\mu k^2 c a. \quad (13)$$

В одной работе²⁾ д-р Жефрей предполагает, что давление относительного ветра на перемещающийся профиль волны может быть грубо представлено выражением

$$\beta \rho' (U - c)^2 \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (14)$$

где U — скорость ветра, ρ' — плотность воздуха и β — числовой коэффициент, лежащий между 0 и 1 и, вероятно, меньший $1/2$. Это эквивалентно допущению

$$C = \beta \rho' (U - c)^2 k a$$

в формуле (13). Если мы пренебрежем капиллярностью, то $c^2 = \frac{g}{k}$ и критерий принимает форму

$$(U - c)^2 c \geq \frac{4\nu \rho g}{\beta \rho'}. \quad (15)$$

При данном ветре наименьшее значение левой части будет при $c = \frac{1}{3} U$; таким образом, наименьший ветер, который может поддерживать волны при нашем допущении, будет иметь скорость

$$U = 3 \left(\frac{\nu \rho g}{\beta \rho'} \right)^{1/3}. \quad (16)$$

Если мы примем $\nu = 0,0178$, $g = 981$, $\frac{\rho'}{\rho} = 0,00129$, $\beta = 0,3$, то получим $U = 107$, $\lambda = 8,1$ в сантиметрах и секундах. Некоторые наблюдения Жефрея подтверждают порядок величины наименьшей скорости ветра.

¹⁾ Я надеюсь, что будут опубликованы кратко результаты тех экспериментов, которые были начаты покойным Стантоном и которые относятся к рассматриваемому вопросу.

²⁾ Jeffrey, Proc. Roy. Soc., A. CVII, 189 (1924); CX, 241 (1925).

§ 349. Непосредственное вычисление влияния вязкости на волны в воде можно выполнить следующим способом.

Если ось y направить вертикально вверх и предположить, что движение происходит в двух измерениях x, y , то будем иметь уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g + \nu \Delta v \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Эти уравнения удовлетворяются решениями вида

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

и

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - gy, \quad (4)$$

если функции φ и ψ будут удовлетворять уравнениям

$$\Delta_1 \varphi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nu \Delta_1 \psi, \quad (5)$$

где

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Чтобы определить „нормальные колебания“, являющиеся по отношению к x периодическими с заданной длиной волны $\frac{2\pi}{k}$, возьмем множитель, зависящий от времени, в виде e^{nt} , а множитель, зависящий от длины, в виде e^{ikx} . Тогда решения уравнений (5) будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= (Ae^{ky} + Be^{-ky}) e^{ikx+nt}, \\ \psi &= (Ce^{my} + De^{-my}) e^{ikx+nt}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где

$$m^2 = k^2 + \frac{n}{\nu}. \quad (7)$$

Условия на границе дадут уравнения, достаточные для определения характера различных форм колебаний и для определения соответствующих значений n .

В случае бесконечной глубины одно из этих условий требует, чтобы движение было конечным при $y = -\infty$. Если мы сначала

исключим те случаи, когда m имеет чисто мнимые значения, то необходимо будет положить $B=0$ и $D=0$, причем под m будем теперь подразумевать тот корень уравнения (7), действительная часть которого положительна. Тогда будем иметь

$$\left. \begin{aligned} u &= -(ikAe^{ky} + mCe^{my})e^{ikx+nt}, \\ v &= -(kAe^{ky} - ikCe^{my})e^{ikx+nt}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Если через η обозначить возвышение свободной поверхности, то должно иметь место соотношение $\frac{\partial \eta}{\partial t} = v$. Из этого уравнения, предполагая, что начало отсчета y находится на невозмущенном уровне, получим выражение для η

$$\eta = -\frac{k}{n}(A - iC)e^{ikx+nt}. \quad (9)$$

Если обозначить через T_1 поверхностное натяжение, то условия для напряжений на поверхности в первом приближении, очевидно, будут иметь вид

$$p_{yy} = T_1 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \quad p_{xy} = 0, \quad (10)$$

так как наклон поверхности жидкости к горизонтальной плоскости можно считать бесконечно малым.

Имеем

$$p_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad p_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad (11)$$

отсюда и из формул (4) и (9) следует, что на свободной поверхности должны иметь место равенства

$$\begin{aligned} \frac{p_{yy}}{\rho} - T' \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} &= -\frac{\partial p}{\partial t} + (g + T'k^2)\eta + 2\nu \frac{\partial v}{\partial y} = \\ &= -\frac{1}{n} \left\{ (n^2 + 2rk^2n + gk + T'k^3)A - i(gk + T'k^3 + 2rkmn)C \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{p_{xy}}{\rho} = -\left\{ 2i\nu k^2 A + (n + 2rk^2)C \right\}, \quad (13)$$

где $T' = \frac{T_1}{\rho}$, причем следует еще подразумевать множитель e^{ikx+nt} .

Подставляя выражения для p_{yy} и p_{xy} в условия (10) и исключая отношение $A:C$, получаем

$$(n + 2rk^2)^2 + gk + T'k^3 = 4\nu^2 k^3 m. \quad (14)$$

Если исключим m при помощи формулы (7), то придем к биквадратному уравнению относительно n , но допустимыми могут быть

при этом только те корни, которые дают положительное значение для действительной части левой половины уравнения (14) и вместе с тем оставляют положительной действительную часть m .

Полагая для краткости

$$\left. \begin{aligned} gk + T'k^3 = \sigma^2, \quad \frac{\nu k^2}{\sigma} = \theta, \\ n + 2\nu k^2 = x\sigma, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

приведем названное биквадратное уравнение к виду

$$(x^2 + 1)^2 = 16\theta^2(x - \theta). \quad (16)$$

Легко показать, что это уравнение всегда имеет два корня (оба комплексные), которые не подчиняются только что установленному ограничению, и два других допустимых корня, которые будут действительными или комплексными, смотря по величине отношения θ .

Если обозначим через λ длину волны и через c ($= \frac{\sigma}{k}$) скорость волн при отсутствии трения, то получим

$$\theta = \frac{\nu k}{c} = \frac{2\pi\nu}{c\lambda}. \quad (17)$$

Обозначая через c_m минимальную скорость волн (§ 267), получим для воды $\frac{2\pi\nu}{c_m} = 0,0048$ см, так что, если исключить очень малые длины волн, θ будет представлять малую величину. Пренебрегая квадратом θ , получим $x = \pm i$ и

$$n = -2\nu k^2 \pm i\sigma. \quad (18)$$

Условие $p_{xy} = 0$ показывает, что

$$\frac{C}{A} = -\frac{2i\nu k^2}{n + 2\nu k^2} = \mp \frac{2\nu k^2}{\sigma}; \quad (19)$$

эта величина при тех же условиях оказывается очень малой. Таким образом, приближенно движение можно считать невихревым с потенциалом скоростей

$$\varphi = Ae^{-2\nu k^2 t + kx + i(kx \pm \sigma t)}. \quad (20)$$

Полагая $a = \mp \frac{kA}{\sigma}$, можем приближенно написать уравнение (9) свободной поверхности, если возьмем действительную часть в виде

$$\eta = ae^{-2\nu k^2 t} \cos(kx \pm \sigma t). \quad (21)$$

Скорость волн есть $\frac{\sigma}{k}$ или $\left(\frac{g}{k} + T'k\right)^{1/2}$, как в § 267, и закон затухания совпадает с тем, который в предыдущем параграфе был получен другим способом¹⁾.

¹⁾ Аналогичные результаты получил Basset, Hydrodynamics, II, §§ 520—522 (1888), который исследовал также случай конечной глубины. Отсылаем также к работе Hough, см. выше, стр. 743, где исследуется случай водяного слоя, ограниченного двумя концентрическими сферами.

Чтобы ближе исследовать характер движения, возникающего под влиянием вязкости, вычислим значение ω вихря для произвольной точки жидкости. Это значение определяется формулой

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \Delta_1 \psi = \frac{n}{r} \psi = \frac{n}{r} C e^{my + ikx + nt}. \quad (22)$$

На основании формул (7) и (18) приближенно будем иметь

$$m = (1 \pm i) \beta, \text{ где } \beta = \left(\frac{\sigma}{2\nu} \right)^{1/2}.$$

Пользуясь теми же обозначениями, как и выше, получим

$$\omega = \mp 2\sigma k u e^{-2\beta k^2 y + \beta y} \cos \{ kx \pm (\alpha t + \beta y) \}. \quad (23)$$

Это выражение очень быстро убывает в направлении от поверхности жидкости вниз в согласии с термической аналогией, указанной в § 328. В соответствии с колебательным характером движения знак вихря, распространяющегося от поверхности внутрь, будет то и дело меняться, так что колебания оказываются незаметными на глубине порядка $\frac{2\pi}{\beta}$, так же как колебания температуры на земной поверхности незаметны на глубине нескольких метров.

В случае очень вязкой жидкости, такой как патока или смола, θ может принимать большие значения даже и при значительной длине волны. Допустимые корни уравнения (16) при этом оба оказываются действительными. Один из них, очевидно, приближенно равен 2θ , а если мы продолжим приближение, то найдем

$$x = 2\theta - \frac{1}{2\theta} + \dots;$$

отсюда на основании формул (15) следует, если пренебречь капиллярностью,

$$n = - \frac{g}{2kr}. \quad (24)$$

Другой действительный корень приближенно равен $1,09\theta$, и в этом случае получаем выражение

$$n = - 0,91 rk^2. \quad (25)$$

Первый из этих корней оказывается более важным. Он представляет медленное возвращение жидкости к состоянию равновесия, когда поверхность жидкости горизонтальна. Быстрота этого возвращения зависит от соотношения между силой тяжести (которая пропорциональна $g\rho$) и вязкостью жидкости μ , так как влияние инерции оказывается при этом незаметным. Из соотношений (7) и (15) следует, что приближенно можно положить $m = k$, так что с некоторым приближением движение можно считать свободным от вихрей¹⁾.

¹⁾ Ср. Tait, Note on Ripples in a Viscous Liquid, Proc. R. S. Edin., XVII, 110 (1890) (Scientific Papers, Cambridge (1898–1900), II, 313).

Характер движения, отвечающего формуле (25), с другой стороны, зависит по своей продолжительности и от соотношения инерции (ρ) и вязкости (μ), влияние же тяжести будет незначительным. Оно замирает очень быстро.

Приведенное здесь исследование дает самый главный вид нормальных колебаний с заданной длиной волны, допускаемый системой. Мы знаем а priori, что должно существовать еще бесконечное число других видов колебаний. Эти колебания соответствуют чисто мнимым значениям m и имеют менее продолжительный характер. Если вместо выражений (6) возьмем решения в виде

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= A e^{ky} e^{ikx+nt}, \\ \psi &= (C \cos m'y + D \sin m'y) e^{ikx+nt} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

вместе с равенством

$$m^2 = -k^2 - \frac{n}{\nu} \quad (27)$$

и проведем исследование тем же способом, как это было сделано выше, то найдем

$$\left. \begin{aligned} (n^2 + 2\nu k^2 n + gh + T'k^2) A - i(gk + T'k^2) C - 2i\nu km'nD &= 0, \\ 2ik^2 A + (k^2 - m^2) C &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Каждое действительное значение m' оказывается в этом случае допустимым, и уравнения (28) определяют отношения $A:C:D$; соответствующее значение n есть

$$n = -\nu(k^2 + m'^2). \quad (29)$$

В каждой из этих форм движения плоскость xy оказывается разделенной в горизонтальном и вертикальном направлениях на ряды до известной степени прямоугольных ячеек; в каждой из этих ячеек жидкость совершает циркуляционное движение, постепенно приходя в состояние покоя, по мере того как первоначальное количество движения расходуется вследствие вязкости.

При помощи соответствующего наложения различных нормальных колебаний возможно представить затухание любого произвольного начального возмущения.

§ 350. Уравнения (12) и (13) предыдущего параграфа дадут нам возможность при помощи соответственно подобранных сил на поверхности более близко рассмотреть вопрос об образовании волн в воде и поддержании их против действия вязкости.

Если внешние силы p'_{yy} , p'_{xy} , будучи заданными, содержат множитель e^{ikx+nt} , где k и n имеют наперед заданные значения, то названные уравнения определяют значения A и C , а следовательно, на основании формулы (9) и значения η . Мы находим, таким образом,

$$\left. \begin{aligned} \frac{p'_{yy}}{g\eta} &= \frac{(n^2 + 2\nu k^2 n + \sigma^2) A - i(\sigma^2 + 2\nu kmn) C}{gk(A - iC)}, \\ \frac{p'_{xy}}{g\eta} &= \frac{n}{gk} \frac{2i\nu k^2 A + (n + 2\nu k^2) C}{A - iC}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где величина σ^2 , как и выше, подставлена вместо $gk + T'k^2$.

Исследуем прежде всего действие чисто тангенциальной силы. Если положить $p'_{yy} = 0$, то получим

$$\frac{p'_{xy}}{g\varrho\eta} = \frac{in}{gk} \frac{(n + 2vk^2)^2 - \sigma^2 - 4v^2k^2m}{n + 2vk^2 - 2vkm}. \quad (3)$$

По причинам, уже изложенным выше, мы будем считать значения $\frac{vk^2}{\sigma}$ и $\frac{vkm}{\sigma}$ малыми; в этом случае возвышение будет больше всего тогда, когда приближенно будем иметь $n = \pm i\sigma$. Чтобы найти силу, необходимую для поддержания ряда волн заданной амплитуды, движущихся в положительном направлении оси x , положим $n = -i\sigma$. Это предположение дает приближенное равенство

$$\frac{p'_{xy}}{g\varrho\eta} = \frac{4vk\sigma}{g} \quad \text{или} \quad p'_{xy} = 4\mu k\sigma\eta. \quad (4)$$

Сила, таким образом, на гребнях действует в направлении движения, а во впадинах в противоположном направлении, меняя свой знак в узлах. Сила, распределенная таким же образом, но с меньшей интенсивностью по отношению к высоте волны, чем это требует формула (4), только замедлила бы процесс затухания волн вследствие вязкости, но не устранила бы его полностью. Сила противоположного знака ускорила бы процесс затухания.

Случай чисто нормальной силы может быть исследован подобным же способом. Если $p'_{xy} = 0$, то будем иметь соотношение

$$\frac{p'_{yy}}{g\varrho\eta} = \frac{(n + 2vk^2)^2 + \sigma^2 - 4v^2k^2m}{gk}. \quad (5)$$

Читатель легко может убедиться сам, что при отсутствии вязкости это равенство согласуется с результатами § 242. Если положить $n = -i\sigma$, то с тем же самым приближением, как и выше, получим

$$p'_{yy} = -4i\mu k\sigma\eta. \quad (6)$$

Следовательно, система волн

$$\eta = a \sin(kx - \sigma t) \quad (7)$$

может поддерживаться без возрастания или затухания давлением, распределенным по поверхности по закону

$$p' = \text{const.} + 4\mu ka\sigma \cos(kx - \sigma t). \quad (8)$$

При этом оказывается, что давление имеет наибольшее значение на заднем склоне волны и наименьшее значение на переднем склоне¹⁾.

Если мы обратим внимание на фазы частиц жидкости, движущихся по круговым траекториям и лежащих в разных частях профиля волны,

¹⁾ Это согласуется с результатом, данным в конце § 242; впрочем, там диссипативные силы были другого рода.

то сразу же увидим, что рассмотренные выше силы, все равно, будут ли они нормальными или тангенциальными, действуют на все частицы, лежащие в данный момент на поверхности, в основном в направлении самого их движения.

Благодаря нерегулярному вихреобразующему характеру ветра, дующему над неровной поверхностью воды, трудно высказать какие-либо соображения, кроме самых общих, относительно того, каким образом ветер возбуждает и поддерживает волны. Нетрудно, однако, видеть, что ветер стремится вызвать поверхностные силы как раз рассмотренного выше рода. Если воздух движется в том же направлении, в каком движется фронт волн, но с большою скоростью, то на задних склонах волн будет наблюдаться избыток давления, а на выступающих гребнях будет преобладать тангенциальное усилие. Общее действие этих сил проявится в виде поверхностного течения, а остальная часть результирующей силы, будет ли она нормальной или тангенциальной, в основном будет иметь тот же характер, какой мы предположили выше. Таким образом, мы будем иметь некоторое стремление к увеличению амплитуды волн в такой, однако, степени, чтобы рассеяние могло полностью компенсироваться работой, произведенной поверхностными силами. Подобным же образом амплитуда волн, движущихся быстрее ветра или против ветра, будет все время уменьшаться¹⁾.

Выше (§ 267) было показано, что при совместном действии сил тяжести и капиллярных сил для волновой скорости имеется минимум, равный 23,2 см/сек, или 835 м/час. Поэтому скорость ветра должна во всяком случае превышать это значение, чтобы быть в состоянии поддерживать волны против действия вязкости²⁾.

Приведем здесь некоторые наблюдения Скотта Рёсселя³⁾.

„Допустим, что наблюдатель начинает наблюдения при полном безветрии, когда поверхность воды спокойна и отражает окружающие предметы, как зеркало. Это состояние поверхности не изменяется при легком дуновении воздуха; при скорости, меньшей, чем половина мили в час ($8\frac{1}{2}$ дюймов в секунду), гладкость отражающей поверхности не нарушается заметным образом. Можно хорошо видеть, что легкий порыв ветра, пронесшийся вдоль поверхности, на одно мгновение коробит поверхность зеркала; но после того, как этот порыв замрет, поверхность становится такою же гладкою, как и прежде. Если же воздух движется со скоростью около одной мили в час, то поверхность воды оказывается уже не в состоянии отражать вполне ясно; проводя наблюдения в этих условиях, можно заметить, что уменьшение отражательной способности зависит от наличия той мелкой ряби поверхностного слоя, которую образуют волны *третьего порядка* (капиллярные волны)... Эта первая стадия возмущения отличается тем особенностью, что явление прекращается почти одновременно с прекращением возмущающей причины; поэтому место, защищенное от непосредственного действия ветра, остается спокойным, так как волны третьего порядка не

¹⁾ Ср. Airy, Tides and Waves, §§ 265—272; Stokes, Camb. Trans. IX. 62 (Papers, III, 74); Rayleigh, см. выше, стр. 328.

²⁾ W. Thomson, см. выше стр. 574.

³⁾ Russell, см. выше стр. 528.

обладают способностью самостоятельно двигаться на значительное расстояние, если только на них непрерывно не действует первоначальная возмущающая сила. Такое состояние указывает на действующую в данный момент силу, а не на ту силу, которая уже прекратила свое действие. До тех пор пока продолжается это состояние, оно придает воде темную окраску, которую моряки привыкли рассматривать как признак присутствия ветра и часто как предвестницу усиления ветра.

„Второе состояние волнового движения наблюдается тогда, когда скорость ветра, дующего над спокойной до того поверхностью воды, возрастает до двух миль в час. В этом случае начинается образование малых волн равномерно по всей поверхности воды; эти волны суть волны второго порядка, они покрывают поверхность воды с значительной закономерностью. Капиллярные волны размываются гребнями этих волн, но они еще ютятся во впадинах и на передних склонах волн. Правильность распределения по поверхности этих волн второго порядка есть нечто замечательное; волны начинаются с амплитуды приблизительно в один дюйм и с длины волны около двух дюймов; они делаются все больше по мере возрастания скорости или продолжительности ветра; примыкающие друг к другу волны соединяются в одну волну; гребни растут, и если ветер усиливается, волны делаются остроконечными и образуются, таким образом, волны „второго порядка“ (гравитационные волны)¹⁾. Размеры этих волн все возрастают, одновременно с их размерами растет и та глубина, на которую распространяется это движение; все большая и большая часть поверхности покрывается волнами приблизительно одинаковой величины“.

Эта цитата сохранена из наших прежних изданий по той причине, что она очень ярко описывает явления, но численные оценки, относящиеся к первому появлению волн, требуют некоторого уточнения. В частности, начальная длина волны несомненно слишком велика для того, чтобы волна могла подойти под название „капиллярной“.

§ 351. Успокаивающее действие масла на волны, повидимому, происходит благодаря *изменениям* в поверхностном натяжении вследствие растяжений и сокращений загрязненной поверхности воды²⁾. Поверхностное натяжение чистой воды оказывается больше, чем сумма натяжений на поверхностях раздела между маслом и воздухом и между маслом и водой, так что брошенная на поверхность воды капля масла постепенно растягивается в тонкую пленку. Когда слой масла достаточно тонок, скажем, когда его толщина не превосходит двух миллионных долей миллиметра, тогда оказывается, что натяжение не является больше постоянным; натяжение возрастает, когда толщина благодаря растяжению уменьшается, и наоборот. Из фиг. 51 на стр. 458 можно легко усмотреть, что в случае волн колебаний произвольная часть свободной поверхности будет иметь стремление по очереди сокращаться или растягиваться, смотря по тому, находится ли эта часть поверхности выше среднего уровня или ниже его. Возникающие благодаря этому изменения в натяжении вызывают изменяющееся по направлению касательное усилие, действующее на воду, благодаря чему скорость рассеяния энергии увеличивается.

¹⁾ Волна „первого порядка“ Скотта Рёсселя была рассмотрена в § 252 под названием „Одиночной волны“.

²⁾ Reynolds, On the Effect of Oil in destroying Waves on the Surface of Water, Brit. Ass. Rep. (1880) [Papers, I, 409]; Aitken, On the Effect of Oil on a Stormy Sea, Proc. Roy. Soc. Edin., XII, 56 (1883).

Выведенные выше формулы дают возможность до некоторой степени подтвердить эти рассуждения вычислением.

Прежде всего ясно, что действие квазиупругого слоя масла оказывается тем больше, чем короче длина волны; если длина волны достаточно мала, то поверхность практически нерастяжима, и горизонтальная составляющая скорости на поверхности благодаря этому будет равна нулю. Мы будем предполагать, что это условие выполняется.

Внутреннее движение воды определяется формулами (8) § 349, но определение постоянных в этом случае производится из других условий. Условие для нормального напряжения оказывается таким же, как в названном параграфе, и дает соотношение

$$(\alpha^2 + 2rk^2\alpha + \sigma^2) A - i(\sigma^2 + 2rk^2\alpha) C = 0, \quad (1)$$

где

$$\sigma^2 = gk + T'k^2 \quad (2)$$

и T' относится уже к полному натяжению слоя масла. Вместо условия, что касательное напряжение должно обращаться в нуль, имеем теперь условие

$$u = 0 \text{ при } y = 0; \quad (3)$$

это условие дает

$$ikA + mC = 0. \quad (4)$$

Исключая отношение $A : C$, получаем

$$m(\alpha^2 + \sigma^2) - k\sigma^2 = 0 \quad (5)$$

или, если исключим m посредством уравнения

$$m^2 = k^2 + \frac{\alpha}{\nu}, \quad (6)$$

$$\left(\frac{\alpha}{\nu} + k^2\right)(\alpha^2 + \sigma^2)^2 - k^2\sigma^4 = 0. \quad (7)$$

Это уравнение имеет несущественный корень $\alpha = 0$, а другие корни оказываются также непригодными, так как, будучи подставлены в равенство (5), они дают для действительной части m отрицательные значения. Для малых значений выражения $\frac{\nu k^2}{\sigma}$ эти корни в первом приближении можно принять равными $\alpha = \pm i\sigma$, а во втором приближении равными

$$\alpha = \pm i\sigma - \frac{\nu^{1/2} k \sigma^{1/2}}{2\sqrt{2}}, \quad (8)$$

причем поправка на частоту σ колебаний отброшена. Модуль затухания оказывается при этом равным

$$\tau = \frac{2\sqrt{2}}{\nu^{1/2} k \sigma^{1/2}}. \quad (9)$$

Отношение этого значения к значению $\left(\frac{1}{2\nu k^2}\right)$, которое было получено в предположении, что поверхностное натяжение постоянно, равно $4\sqrt{2}\left(\frac{\nu k^2}{\sigma}\right)^{1/2}$, а эта величина по предположению мала¹⁾.

¹⁾ Это исследование сокращено по сравнению с тем, как оно было выполнено во втором издании этой книги.

§ 352. Задачи о периодическом движении в трех измерениях, относящиеся к *сферическим поверхностям*, можно исследовать в общем виде следующим образом.

Выразим прежде всего общее решение системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} (\Delta + h^2) u' &= 0, \\ (\Delta + h^2) v' &= 0, \\ (\Delta + h^2) w' &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

в сферических функциях. Эта задача представляет обобщение задачи, разобранный в § 335. Рассмотрим сначала только те случаи, для которых значения u' , v' , w' в начале координат конечны.

Решения естественно распадаются на два различных класса. Если обозначим через r радиус-вектор, то типичное решение первого класса представится в виде

$$\left. \begin{aligned} u' &= \psi_n(hr) \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \chi_n, \\ v' &= \psi_n(hr) \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \chi_n, \\ w' &= \psi_n(hr) \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \chi_n, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где χ_n — объемная сферическая функция положительной степени n , а ψ_n определяется как в (7) § 292. Легко показать, что выражения (3) действительно удовлетворяют уравнениям (1) и (2).

Следует отметить, что это решение дает зависимость

$$xu' + yv' + zw' = 0. \quad (4)$$

Типичное решение второго класса имеет вид

$$\left. \begin{aligned} u' &= (n+1) \psi_{n-1}(hr) \frac{\partial \psi_n}{\partial x} - n \psi_{n+1}(hr) h^2 r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\psi_n}{r^{2n+1}}, \\ v' &= (n+1) \psi_{n-1}(hr) \frac{\partial \psi_n}{\partial y} - n \psi_{n+1}(hr) h^2 r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\psi_n}{r^{2n+1}}, \\ w' &= (n+1) \psi_{n-1}(hr) \frac{\partial \psi_n}{\partial z} - n \psi_{n+1}(hr) h^2 r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\psi_n}{r^{2n+1}}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где ψ_n — объемная сферическая функция положительной степени n . Коэффициенты при $\psi_{n-1}(hr)$ и $\psi_{n+1}(hr)$ в этих выражениях — объемные сферические функции степеней $n-1$ и $n+1$ соответственно, так что уравнения (1) удовлетворяются. Чтобы проверить, что уравнение (2) также будет удовлетворяться, воспользуемся формулами приведения § 292

$$\psi'_n(\zeta) = -\zeta \psi_{n+1}(\zeta), \quad (6)$$

$$\zeta \psi'_n(\zeta) + (2n+1) \psi_n(\zeta) = \psi_{n-1}(\zeta). \quad (7)$$

Формулы (5) на основании формул приведения (6) и (7) дают соотношение

$$xu' + yv' + zw' = n(n+1)(2n+1)\psi_n(hr)\varphi_n. \quad (8)$$

Полагая

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= \frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z}, \\ \eta' &= \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x}, \\ \zeta' &= \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

находим в случае решения первого класса

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= -\frac{1}{2n+1} \left\{ (n+1)\psi_{n-1}(hr) \frac{\partial \chi_n}{\partial x} - n\psi_{n+1}(hr) h^2 r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\chi_n}{r^{2n+1}} \right\}, \\ \eta' &= -\frac{1}{2n+1} \left\{ (n+1)\psi_{n-1}(hr) \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - n\psi_{n+1}(hr) h^2 r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\chi_n}{r^{2n+1}} \right\}, \\ \zeta' &= -\frac{1}{2n+1} \left\{ (n+1)\psi_{n-1}(hr) \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - n\psi_{n+1}(hr) h^2 r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\chi_n}{r^{2n+1}} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Эти выражения дают

$$x\xi' + y\eta' + z\zeta' = -n(n+1)\psi_n(hr)\chi_n. \quad (11)$$

В случае же решений второго класса будем иметь выражения

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= -(2n+1)h^2\psi_n(hr) \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \varphi_n, \\ \eta' &= -(2n+1)h^2\psi_n(hr) \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi_n, \\ \zeta' &= -(2n+1)h^2\psi_n(hr) \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi_n \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

и, следовательно, соотношение

$$x\xi' + y\eta' + z\zeta' = 0. \quad (13)$$

При выводе этих результатов были использованы уравнения (6) и следующие формулы, имеющие силу для каждой функции χ_n :

$$\left. \begin{aligned} x\chi_n &= \frac{r^2}{2n+1} \left(\frac{\partial \chi_n}{\partial x} - r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\chi_n}{r^{2n+1}} \right), \\ y\chi_n &= \frac{r^2}{2n+1} \left(\frac{\partial \chi_n}{\partial y} - r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\chi_n}{r^{2n+1}} \right), \\ z\chi_n &= \frac{r^2}{2n+1} \left(\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\chi_n}{r^{2n+1}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Чтобы показать, что мы получим *полное* решение системы уравнений (1) и (2), если сложим решения типа (3) и (5) для всех целых значений n и для всех возможных форм сферических функций φ_n и χ_n , заметим прежде всего, что названные уравнения имеют следствиями соотношения

$$(\Delta + h^2)(xu' + yv' + zw') = 0, \quad (15)$$

$$(\Delta + h^2)(x\xi' + y\eta' + z\zeta') = 0. \quad (16)$$

Из § 292 непосредственно следует, что полное решение обоих этих уравнений, при условии, что скорости в начале координат должны быть конечными, будет содержаться в равенствах (8) и (11), если мы обобщим эти равенства тем, что будем подразумевать в обеих частях знак суммирования \sum по отношению к n . Если теперь значения выражений

$$xu' + yv' + zw'$$

и

$$x\xi' + y\eta' + z\zeta'$$

заданы внутри произвольной области, то значения u' , v' , w' вполне определяются из уравнения (2). В самом деле, если предположить, что существуют две различные системы значений u' , v' , w' и u'' , v'' , w'' , удовлетворяющие всем заданным условиям, то, полагая

$$u_1 = u' - u'', \quad v_1 = v' - v'', \quad w_1 = w' - w'',$$

получим

$$\left. \begin{aligned} xu_1 + yv_1 + zw_1 &= 0, \\ x\xi_1 + y\eta_1 + z\zeta_1 &= 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Если под u_1 , v_1 , w_1 мы будем понимать составляющие скорости частиц жидкости, то первое из уравнений (17) показывает, что линии тока образуют замкнутые кривые, лежащие на системе концентрических сферических поверхностей. А тогда „циркуляция“ (§ 31) для каждой такой линии имеет конечное отличное от нуля значение. Но, с другой стороны, второе уравнение на основании § 32 показывает, что циркуляция для каждой замкнутой кривой, лежащей на одной из названных сферических поверхностей, равна нулю. Оба эти заключения только в том случае совместимы друг с другом, когда u_1 , v_1 , w_1 равны нулю.

Таким образом, в рассматриваемой здесь задаче всякий раз, когда функции φ_n и χ_n будут определены из соотношений (8) и (11), значения u' , v' , w' будут однозначно определяться из формул (3) и (5).

Если рассматриваемая область ограничена *изнутри* сферической поверхностью, то условие конечности при $r=0$ не должно больше

иметь место, и мы имеем еще дополнительную систему решений, в которой в согласии с § 292 функции $\varphi_n(\zeta)$ заменены через $\Psi_n(\zeta)$ ¹⁾.

§ 353. Уравнения малых движений несжимаемой жидкости в случае отсутствия внешних сил имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Если мы предположим, что u , v , w все изменяются со временем по закону e^{at} , то уравнения (1) могут быть написаны в виде

$$\left. \begin{aligned} (\Delta + h^2) u &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ (\Delta + h^2) v &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ (\Delta + h^2) w &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где

$$h^2 = -\frac{a}{\nu}. \quad (4)$$

Из уравнений (2) и (3) получаем

$$\Delta p = 0. \quad (5)$$

¹⁾ Здесь было использовано усовершенствование, введенное Лявом, *The Free and Forced Vibrations of an Elastic Spherical Shell containing a given Mass of Liquid*, Proc. Lond. Math. Soc., XIX, 170 (1888).

Само исследование с некоторыми незначительными изменениями в обозначениях взято из следующих работ автора: *On the Oscillations of a Viscous Spheroid*, Proc. Lond. Math. Soc., XIII, 51 (1881); *On the Vibrations of an Elastic Sphere*, Proc. Lond. Math. Soc., XIII, 189 (1882); *On the Motion of a Viscous Fluid contained in a Spherical Vessel*, Proc. Lond. Math. Soc., XVI, 27 (1884). Рассматриваемый здесь метод с тех пор применялся автором этой книги и другими авторами к решению многих физических задач. Долго не замечали, что Клебш в своей работе, указанной на стр. 138, 641 *Über die Reflexion an einer Kugelfläche*, в основных чертах дал тот же метод. То обстоятельство, что Клебш (по собственному признанию) не достиг главной цели своего исследования, которая заключалась в том, чтобы рассмотреть одну задачу физической оптики независимо от предположений „геометрической“ теории, вероятно способствовало тому, что эта работа несправедливо была оставлена без внимания. Аналитические трудности, которые Клебш считал непреодолимыми в случае, когда длина волны мала по отношению к большому кругу сферы, тождественны с теми, которые были указаны на стр. 653.

Поэтому равенства

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{h^2\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ v &= \frac{1}{h^2\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ w &= \frac{1}{h^2\mu} \frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

представляют частное решение уравнений (3) и (2), а общее решение имеет вид

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{h^2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + u', \\ v &= \frac{1}{h^2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} + v', \\ w &= \frac{1}{h^2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + w', \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где величины u' , v' , w' определяются из условий, указанных в предыдущем параграфе.

Поэтому решения в сферических функциях, подчиненные условию быть конечными в начале координат, распадаются на два класса.

Решения первого класса имеют вид

$$\left. \begin{aligned} p &= \text{const.}, \\ u &= \psi_n(hr) \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \chi_n, \\ v &= \psi_n(hr) \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \chi_n, \\ w &= \psi_n(hr) \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \chi_n, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

причем

$$xu + yv + zw = 0. \quad (9)$$

Решения второго класса имеют вид

$$\left. \begin{aligned} p &= p_n, \\ u &= \frac{1}{h^2\mu} \frac{\partial p_n}{\partial x} + (n+1)\psi_{n-1}(hr) \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} - n\psi_{n+1}(hr) h^2 r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}, \\ v &= \frac{1}{h^2\mu} \frac{\partial p_n}{\partial y} + (n+1)\psi_{n-1}(hr) \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} - n\psi_{n+1}(hr) h^2 r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}, \\ w &= \frac{1}{h^2\mu} \frac{\partial p_n}{\partial z} + (n+1)\psi_{n-1}(hr) \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} - n\psi_{n+1}(hr) h^2 r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

причем

$$x\xi + y\eta + z\zeta = 0, \quad (11)$$

где ξ , η , ζ обозначают составляющие вихря в точке (x, y, z) . Символы χ_n , φ_n , p_n обозначают объемные сферические функции соответствующих степеней.

Составляющие напряжения на поверхности шара радиуса r определяются, как и в § 336, формулами

$$\left. \begin{aligned} r p_{rx} &= -x p + \mu \left(r \frac{\partial}{\partial r} - 1 \right) u + \mu \frac{\partial}{\partial x} (x u + y v + z w), \\ r p_{ry} &= -y p + \mu \left(r \frac{\partial}{\partial r} - 1 \right) v + \mu \frac{\partial}{\partial y} (x u + y v + z w), \\ r p_{rz} &= -z p + \mu \left(r \frac{\partial}{\partial r} - 1 \right) w + \mu \frac{\partial}{\partial z} (x u + y v + z w). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

В случае решений первого класса без труда находим

$$\left. \begin{aligned} r p_{rx} &= -x p + P_n \left(y \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z \frac{\partial \chi_n}{\partial y} \right), \\ r p_{ry} &= -y p + P_n \left(z \frac{\partial \chi_n}{\partial x} - x \frac{\partial \chi_n}{\partial z} \right), \\ r p_{rz} &= -z p + P_n \left(x \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_n}{\partial x} \right), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где

$$P_n = \mu \{ h r \psi'_n(hr) + (n-1) \psi_n(hr) \}. \quad (14)$$

Чтобы получить соответствующие формулы для решений второго класса, заметим прежде всего, что члены с p_n дают

$$\begin{aligned} -x p_n + \frac{1}{h^2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} - 1 \right) \frac{\partial p_n}{\partial x} + \frac{n}{h^2} \frac{\partial p_n}{\partial x} &= \\ = \left\{ \frac{2(n-1)}{h^2} - \frac{r^2}{2n+1} \right\} \frac{\partial p_n}{\partial x} + \frac{r^{2n+3}}{2n+1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{p_n}{r^{2n+1}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для остальных же членов получаем

$$\begin{aligned} \left(r \frac{\partial}{\partial r} - 1 \right) u' &= (n+1) \{ h r \psi'_{n-1}(hr) + (n-2) \psi_{n-1}(hr) \} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} - \\ &- n \{ h r \psi'_{n+1}(hr) + n \psi_{n+1}(hr) \} h^2 r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\varphi_n}{r^{2n+1}} \end{aligned} \quad (16)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (x u' + y v' + z w') &= n(n+1)(2n+1) \frac{\partial}{\partial x} \psi_n(hr) \varphi_n = \\ &= n(n+1) \left\{ \psi_{n-1}(hr) \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + \psi_{n+1}(hr) h^2 r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\varphi_n}{r^{2n+1}} \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

При этом были произведены различные упрощения на основании формул (6), (7), (14) § 352. Из полученных формул и из соображений симметрии следует

$$\left. \begin{aligned} r p_{rx} &= A_n \frac{\partial p_n}{\partial x} + B_n r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{p_n}{r^{2n+1}} + C_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + \\ &\quad + D_n r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}, \\ r p_{ry} &= A_n \frac{\partial p_n}{\partial y} + B_n r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{p_n}{r^{2n+1}} + C_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} + \\ &\quad + D_n r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}, \\ r p_{rz} &= A_n \frac{\partial p_n}{\partial z} + B_n r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial z} \frac{p_n}{r^{2n+1}} + C_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} + \\ &\quad + D_n r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{2(n-1)}{h^2} - \frac{r^2}{2n+1}, \\ B_n &= \frac{r^2}{2n+1}, \\ C_n &= \mu(n+1) \{ hr \psi'_{n-1}(hr) + 2(n-1) \psi_{n-1}(hr) \}, \\ D_n &= -\mu n h^2 r^2 \{ hr \psi'_{n+1}(hr) - \psi_{n+1}(hr) \}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

§ 354. После того как общие формулы нами установлены, применение их к частным задачам не представляет большого труда.

1. Рассмотрим прежде всего затухающее движение вязкой жидкости, заключающейся в неподвижном сосуде сферической формы.

Граничные условия имеют вид

$$u=0, \quad v=0, \quad w=0 \quad (1)$$

для $r=a$, если a — радиус шара. В случае колебаний первого вида, выражающихся формулами (8) § 353, эти условия будут удовлетворены, если положить

$$\psi_n(ha) = 0. \quad (2)$$

Все корни этого уравнения действительны, и соответствующие значения модуля затухания τ определяются формулой

$$\tau = -\frac{1}{a} = \frac{a^2}{\nu} (ha)^{-2}. \quad (3)$$

Тип колебаний при $n=1$ имеет характер вращательного движения. Уравнение (2) принимает в этом случае вид

$$\operatorname{tg} ha = ha; \quad (4)$$

наименьший корень этого уравнения есть $ha=4,493$. Отсюда следует

$$\tau = 0,0495 \frac{a^2}{\nu}.$$

В случае воды $\nu = 0,018 \text{ см}^2/\text{сек}$ и

$$\tau = 2,75 a^2 \text{ сек.},$$

если a выражено в сантиметрах.

Формы колебаний второго класса определяются формулами (10) § 353. Условия на поверхности в этом случае равносильны тому, что должны в отдельности обращаться в нуль при $r = a$ следующие три функции от x, y, z :

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{h^2 \mu} \frac{\partial p_n}{\partial x} + (n+1) \psi_{n-1}(ha) \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} - n \psi_{n+1}(ha) h^2 r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}, \\ v &= \frac{1}{h^2 \mu} \frac{\partial p_n}{\partial y} + (n+1) \psi_{n-1}(ha) \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} - n \psi_{n+1}(ha) h^2 r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}, \\ w &= \frac{1}{h^2 \mu} \frac{\partial p_n}{\partial z} + (n+1) \psi_{n-1}(ha) \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} - n \psi_{n+1}(ha) h^2 r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Эти функции в том виде, как они здесь написаны, представляют собой суммы объемных сферических функций и должны поэтому удовлетворять уравнениям

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0, \quad \Delta w = 0 \quad (6)$$

и, так как они конечны внутри сферы и исчезают на границе, то на основании § 40 должны исчезать всюду. А тогда, составляя уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (7)$$

получим

$$\psi_{n+1}(ha) = 0. \quad (8)$$

Так как далее

$$xu + yv + zw = 0 \quad (9)$$

для $r = a$, то будем иметь

$$\frac{1}{h^2 \mu} p_n + (n+1)(2n+1) \psi_n(ha) \varphi_n = 0, \quad (10)$$

если воспользуемся формулами (6), (7) § 352. Уравнение (10) определяет отношение $p_n : \varphi_n$ ¹⁾.

В случае $n=1$ уравнение (8) имеет вид

$$\text{tg } ha = \frac{3ha}{3 - h^2 a^2}; \quad (11)$$

наименьший корень этого уравнения есть $ha = 5,764$, откуда следует

$$\tau = 0,0301 \frac{a^2}{\nu}.$$

По поводу метода комбинирования различных решений, имеющего целью представить затухание произвольного начального движения, мы отсылаем к названной на стр. 799 работе автора.

2. Рассмотрим теперь случай полой сферической оболочки, которая заполнена жидкостью и колеблется около вертикального диаметра²⁾.

¹⁾ Другой способ применения граничных условий был дан в § 361.

²⁾ Этот случай в первый раз был исследован, но другим способом, Гельмгольцем, см. выше, стр. 721.

Вынужденные колебания жидкости будут, очевидно, колебаниями первого класса при $n=1$. Если ось z совпадает с вертикальным диаметром оболочки, то находим, подставляя $x_1 = Cz$ в выражения (8) § 353,

$$u = C\psi_1(hr) y, \quad v = -C\psi_1(hr) x, \quad w = 0. \quad (12)$$

Если через ω обозначить угловую скорость оболочки, то граничное условие дает

$$C\psi_1(ha) = -\omega. \quad (13)$$

Оказывается, что все частицы, лежащие на поверхности сферы радиуса r , concentрической с граничной сферой, в каждый момент времени вращаются как целое с угловой скоростью

$$\frac{\psi_1(hr)}{\psi_1(ha)} \omega. \quad (14)$$

Если мы примем, что

$$\omega = \alpha e^{i(\sigma t + \varepsilon)}, \quad (15)$$

и положим

$$h^2 = -\frac{i\sigma}{\nu} = (1-i)^2 \beta^2, \quad (16)$$

где, как в § 345,

$$\beta^2 = \frac{\sigma}{2\nu}, \quad (17)$$

то выражение (14) для угловой скорости при помощи формулы

$$\psi_1(\zeta) = \frac{\sin \zeta}{\zeta^2} - \frac{\cos \zeta}{\zeta^3} \quad (18)$$

может быть разложено на свои действительную и мнимую части.

Если вязкость настолько мала, что величина βa будет довольно значительна, то для точек вблизи поверхности получим, удерживая только важнейшие члены,

$$\psi_1(hr) = -\frac{1}{2h^2 r^2} e^{(1+i)\beta r}, \quad (19)$$

и потому выражение (14) для угловой скорости будет иметь вид

$$\alpha \frac{a^2}{r^2} e^{-\beta(a-r)} e^{i\{\sigma t + \beta(r-a) + \varepsilon\}}; \quad (20)$$

действительная часть этого выражения есть

$$\alpha \frac{a^2}{r^2} e^{-\beta(a-r)} \cos\{\sigma t + \beta(r-a) + \varepsilon\}. \quad (21)$$

Как и в случае ламинарного движения (§ 345), это выражение представляет систему волн, движущихся от поверхности внутрь с быстро убывающей амплитудой.

Если, наоборот, вязкость очень велика, то значение βa будет мало, и выражение (14) приближенно может быть написано в виде

$$\omega \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (22)$$

если отбросить мнимую часть. Это показывает, что жидкость в данном случае движется вместе с шаром как одно твердое тело.

Составляющие напряжения на поверхности сферы определяются формулами (13) § 353. В рассматриваемом случае формулы эти приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} p_{rx} &= -\frac{x}{a} p + \mu Ch \psi_1'(ha) y, \\ p_{ry} &= -\frac{y}{a} p - \mu Ch \psi_1'(ha) x, \\ p_{rz} &= -\frac{z}{a} p. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Если обозначить через δS элемент граничной поверхности, то эти силы на основании формулы (13) и формулы (6) § 352 дадут момент

$$\begin{aligned} N &= - \iint (x p_{ry} - y p_{rx}) dS = C \mu h \psi_1'(ha) \iint (x^2 + y^2) dS = \\ &= \frac{8}{3} \pi \mu a^3 \frac{h^2 a^2 \psi_1'(ha)}{\psi_1(ha)} \omega. \end{aligned} \quad (24)$$

В случае малой вязкости, когда значение βa велико, найдем, обращаясь к формулам (8) § 292 и полагая $ha = (1 - i) \beta a$, что приближенно будет иметь место равенство

$$2i \psi_n(ha) = \left(-\frac{d}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} \right)^n \frac{e^{i\zeta}}{\zeta}, \quad (25)$$

где $\zeta = (1 - i) \beta a$. Это дает

$$N = -\frac{8}{3} \pi \mu a^3 (1 + i) \beta a \omega. \quad (26)$$

Если мы примем во внимание в формуле (15) множитель, зависящий от времени, то выражение (26) будет равносильно следующему:

$$N = -\frac{4}{3} \pi \rho a^3 (\beta a)^{-1} \frac{d\omega}{dt} - \frac{8}{3} \pi \mu a^3 (\beta a) \omega. \quad (27)$$

Первый член эквивалентен небольшому увеличению массы шара; второй же член дает силу трения, пропорциональную скорости.

§ 355. Общие формулы §§ 352, 353 можно далее применить также для того, чтобы исследовать влияние вязкости на малые колебания жидкой массы относительно своей сферической формы. Главный результат этого исследования можно, однако, получить более просто, применяя метод § 348.

Из § 262 получается, что если пренебречь вязкостью, то потенциал скоростей можно написать в виде

$$\varphi = A \frac{r^n}{a^n} S_n \cdot \cos(\sigma t + \epsilon), \quad (1)$$

где S_n — поверхностная сферическая функция. Это дает для удвоенной кинетической энергии, заключенной внутри сферы радиуса r , выражение

$$e \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} r^2 d\tilde{\omega} = e \rho a \left(\frac{r}{a} \right)^{2n+1} \iint S_n^2 d\tilde{\omega} \cdot A^2 \cos^2(\sigma t + \epsilon), \quad (2)$$

где $d\tilde{\omega}$ обозначает элемент телесного угла; отсюда для полной энергии получаем выражение

$$T = \frac{1}{2} e \rho a \iint S_n^2 d\tilde{\omega} \cdot A^2 \cos^2(\sigma t + \epsilon). \quad (3)$$

Потенциальная энергия должна быть поэтому равна

$$V = \frac{1}{2} \rho n a \iint S_n^2 d\tilde{\omega} \cdot A^2 \sin^2(\sigma t + \varepsilon), \quad (4)$$

и полная энергия получается равной

$$T + V = \frac{1}{2} \rho n a \iint S_n^2 d\tilde{\omega} \cdot A^2. \quad (5)$$

Далее на основании формулы (12) § 329 рассеяние энергии в сфере радиуса r в предположении, что движение свободно от вихрей, оказывается равным

$$\mu \iint \frac{\partial q_i^2}{\partial r_i} r^2 d\tilde{\omega} = \mu r^2 \frac{\partial}{\partial r} \iint q^2 d\tilde{\omega}. \quad (6)$$

Заметим, что

$$r^2 \iint q^2 d\tilde{\omega} = \frac{\partial}{\partial r} \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} r^2 d\tilde{\omega}, \quad (7)$$

так как каждая часть равенства после умножения на $\rho \delta r$ представляет удвоенную кинетическую энергию жидкости, заключенной между двумя сферическими поверхностями радиусов r и $r + \delta r$. Поэтому из формулы (2) следует

$$\iint q^2 d\tilde{\omega} = \frac{n(2n+1)}{a^2} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n-2} \iint S_n^2 d\tilde{\omega} \cdot A^2 \cos^2(\sigma t + \varepsilon).$$

Подставляя это выражение в формулу (6) и полагая $r = a$, получаем выражение для полного рассеяния

$$2F = 2n(n-1)(2n+1) \frac{\mu}{a} \iint S_n^2 d\tilde{\omega} \cdot A^2 \cos^2(\sigma t + \varepsilon); \quad (8)$$

среднее значение этой величины в единицу времени равно

$$2\bar{F} = n(n-1)(2n+1) \frac{\mu}{a} \iint S_n^2 d\tilde{\omega} \cdot A^2. \quad (9)$$

Если влияние вязкости представляется постепенным изменением коэффициента A , то должно быть

$$\frac{d}{dt} (T + V) = -2\bar{F}; \quad (10)$$

отсюда получаем, подставляя из формул (5) и (9),

$$\frac{dA}{dt} = - (n-1)(2n+1) \frac{\nu}{a^2} A. \quad (11)$$

Это показывает, что A пропорционально $e^{-\frac{t}{\tau}}$, где

$$\tau = \frac{1}{(n-1)(2n+1)} \frac{a^2}{\nu}. \quad (12)^1$$

Наиболее замечательным является то свойство этого результата, что вязкость такой величины, как она обычно встречается в природе, лишь в очень

¹⁾ L a m b, Proc. Lond. Math. Soc. (1), XIII, 61, 64 (1881).

малой степени влияет на колебания шара, размеры которого не очень велики. Для шара такой величины, как Земля, и с коэффициентом кинематической вязкости таким, как у воды, получим в системе *CGS*

$$a = 6,37 \cdot 10^8, \quad \nu = 0,0178,$$

и, следовательно, значение τ для гравитационных колебаний наибольшего периода ($n=2$) окажется равным

$$\tau = 1,44 \cdot 10^{11} \text{ лет.}$$

Даже при значении $\mu = 1,3 \cdot 10^8 \text{ g}$, которое Дарвин¹⁾ нашел для вязкости смолы вблизи температуры замерзания, получим для модуля затухания самых медленных колебаний, полагая $g = 980$, значение

$$\tau = 180 \text{ часам;}$$

при этом имеется в виду, что шар имеет размеры земли, плотность воды и вязкость смолы. Так как это значение все еще достаточно велико по сравнению с найденным в § 262 периодом колебаний в $1^{\text{h}}34'$, то получается, что такого рода шар колебался бы почти в точности так же, как идеальная жидкость.

Это исследование не содержит никаких специальных предположений относительно характера сил, которые обуславливают образование сферической формы. Поэтому полученный результат имеет место также в случае колебаний жидкого шарика под действием поверхностного натяжения граничной пленки. Модуль затухания для наиболее медленного колебания водяного шарика, выраженный в секундах, равен $\tau = 11,2a^3$, если a измерено в сантиметрах.

Применяя тот же метод к пузырьку воздуха сферической формы, найдем

$$\tau = \frac{1}{(n+2)(2n+1)} \left| \frac{a^3}{\nu} \right|, \quad (13)$$

где ν — коэффициент вязкости окружающей жидкости. Если эта жидкость — вода, то имеем для $n=2$ $\tau = 2,8a^3$.

Формула (12) естественно включает в себя случай волн на плоской поверхности. Если значение n очень велико, то, полагая $\lambda = \frac{2\pi a}{n}$, находим в согласии с § 348

$$\tau = \frac{\lambda^3}{8\pi^2\nu}. \quad (14)$$

Все полученные результаты предполагают, что $2\pi\tau$ превосходит период в значительное число раз.

Прямо противоположный предельный случай, когда вязкость настолько велика, что движение становится аperiодическим, можно исследовать методами §§ 335, 336, если пренебречь влиянием инерции. Для случая очень вязкого шара, который под действием тяготения асимптотически стремится возвратиться к сферической форме, получается

$$\tau = \frac{2(n+1)^2 + 1}{n} \frac{\nu}{ga}; \quad (15)$$

¹⁾ D a r w i n, On the Bodily Tides of Viscous and Semi-Elastic Spheroids. . . ; Phil. Trans., CLXX, 1 (1878).

этот результат впервые был получен Дарвином (см. выше). В случае системы одинаковых параллельных волн на плоскости получается

$$\tau = \frac{4\pi\nu}{g\lambda}; \quad (16)$$

ср. (24) § 349.

§ 356. Задачи периодического движения жидкости в пространстве между двумя концентрическими сферами требуют для своего разбора еще дополнительных решений уравнений § 353, где ρ имеет вид ρ_{-n-1} , и функции $\psi_n(hr)$, заключающиеся в дополнительных функциях u' , v' , w' , заменены через $\Psi_n(hr)$.

Если радиус второго шара бесконечно велик, то задача упрощается благодаря условию, что жидкость в бесконечности должна находиться в покое. В § 292 было показано, что функции $\psi_n(\zeta)$, $\Psi_n(\zeta)$ обе содержатся в выражении

$$\left(\frac{d}{\zeta d\zeta}\right)^n \frac{Ae^{i\zeta} + Be^{-i\zeta}}{\zeta}. \quad (1)$$

В рассматриваемом случае мы имеем $\zeta = hr$, где h определяется формулой (4) § 353; при этом мы будем предполагать ради определенности, что для h нужно взять такое значение, которое делает положительной действительную часть ih . Условие, что в бесконечности не должно быть движения, требует, чтобы $A = 0$, и потому мы будем иметь дело только с функцией

$$f_n(\zeta) = \left(-\frac{d}{\zeta d\zeta}\right)^n \frac{e^{-i\zeta}}{\zeta}. \quad (2)$$

В названном параграфе было разъяснено, что рекуррентные формулы для $f_n(\zeta)$ остаются теми же, как и для функций $\psi_n(\zeta)$ и $\Psi_n(\zeta)$; поэтому общее решение уравнений малых периодических движений вязкой жидкости для области, лежащей вне шара, будет дано непосредственно формулами (8), (10) § 353, если написать ρ_{-n-1} вместо ρ_n и $f_n(hr)$ вместо $\psi_n(hr)$.

1. Вращательные колебания шара, окруженного неограниченной жидкой массой, содержатся в решениях первого класса при $n=1$. Полагая $\chi_1 = Cz$, как в п. 2 § 354, находим

$$u = Cf_1(hr)y, \quad v = -Cf_1(hr)x, \quad w = 0 \quad (3)$$

и условие

$$Cf_1(ha) = -\omega, \quad (4)$$

где a — радиус шара и ω — его угловая скорость, относительно которой мы предполагаем, что она задана формулой

$$\omega = \alpha e^{i(\sigma t + \epsilon)}. \quad (5)$$

Подставляя $h = (1-i)\beta$, где $\beta = \left(\frac{\sigma}{2\nu}\right)^{1/2}$, находим, что частицы, лежащие на концентрической сфере радиуса r , движутся вместе как целое с угловой скоростью

$$\frac{f_1(hr)}{f_1(ha)} \omega = \frac{\alpha a^3}{r^3} \frac{1 + ihr}{1 + iha} e^{-\beta(r-a)} \cdot e^{i\{\sigma t - \beta(r-a) + \epsilon\}}, \quad (6)$$

где значения $f_1(hr)$, $f_1(ha)$ подставлены из формул (15) § 292. Действительная часть выражения (6) есть

$$\frac{a}{1+2\beta a+2\beta^2 a^2} \frac{a^3}{r^2} e^{-\beta(r-a)} [\{ 1 + \beta(a+r) + 2\beta^2 ar \} \cos \{ \sigma t - \beta(r-a) + \varepsilon \} - \beta(r-a) \sin \{ \sigma t - \beta(r-a) + \varepsilon \}], \quad (7)$$

что соответствует угловой скорости шара

$$\omega = a \cos(\sigma t + \varepsilon). \quad (8)$$

Момент пары, действующей на шар, находится таким же способом, как и в § 354:

$$N = -\frac{8}{3} \pi \mu a^3 \omega \frac{h^2 a^2 f_1'(ha)}{f_1(ha)} = -\frac{8}{3} \pi \mu a^3 \omega \frac{3 + 3iha - h^2 a^2}{1 + iha}. \quad (9)$$

Подставляя $ha = (1-i)\beta a$ и разделяя действительную и мнимую части, находим

$$N = -\frac{8}{3} \pi \mu a^3 \omega \frac{(3 + 6\beta a + 6\beta^2 a^2 + 2\beta^3 a^3) + 2i\beta^3 a^2 (1 + \beta a)}{1 + 2\beta a + 2\beta^2 a^2}. \quad (10)$$

Это выражение равносильно следующему:

$$N = -\frac{8}{3} \pi \mu a^3 \frac{1 + \beta a}{1 + 2\beta a + 2\beta^2 a^2} \frac{d\omega}{dt} = -\frac{8}{3} \pi \mu a^3 \frac{3 + 6\beta a + 6\beta^2 a^2 + 2\beta^3 a^3}{1 + 2\beta a + 2\beta^2 a^2} \omega. \quad (11)$$

Истолковать этот результат можно так же, как и формулу (27) § 354.¹⁾

Когда период $\frac{2\pi}{\sigma}$ имеет бесконечно большое значение, то выражение (11) в согласии с формулой (11) § 334 приводится к виду

$$N = -8\pi \mu a^3 \omega. \quad (12)$$

2. Рассмотрим теперь случай сферического маятника, совершающего колебания в безграничной жидкой массе, которую мы будем считать несжимаемой. Поместим начало координат в среднем положении центра шара и расположим ось x в направлении колебаний.

Тогда условия, которые должны выполняться на границе, примут вид

$$u = U, \quad v = 0, \quad w = 0 \quad (13)$$

при $r = a$ (радиус), если через U обозначим скорость шара. Очевидно, что мы должны будем использовать только решения второго класса. Формулы (10) § 353 при замене ψ_n через f_n дадут

$$xu + yv + zw = -\frac{n+1}{h^2 \mu} p_{-n-1} + n(n+1)(2n+1) f_n(hr) \varphi_n. \quad (14)$$

Из сравнения с формулами (13) видно, что это выражение должно содержать сферические функции только *первого порядка*. Поэтому принимаем $n = 1$ и полагаем

$$p_{-2} = \frac{Ax}{r^2}, \quad \varphi_1 = Bx. \quad (15)$$

¹⁾ Другую трактовку этой задачи дал К и р х г о ф, *Mechanik*, лекция XXVI.

Отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{A}{h^2 \mu} \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} + 2Bf_0(hr) - Bf_2(hr) h^2 r^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3}, \\ v &= \frac{A}{h^2 \mu} \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{r^3} - Bf_2(hr) h^2 r^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{r^3}, \\ w &= \frac{A}{h^2 \mu} \frac{\partial}{\partial z} \frac{x}{r^3} - Bf_2(hr) h^2 r^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{x}{r^3}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Условия (13) будут, следовательно, выполнены, если положить

$$\left. \begin{aligned} A &= \mu h^4 a^5 f_2(ha) B, \\ 2f_0(ha) B &= U. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Движение, очевидно, будет симметричным относительно оси x и лучше всего может быть представлено при помощи функции тока. Из формул (14) и (16) находим

$$\begin{aligned} xu + yv + zw &= -\frac{2A}{h^2 \mu} \frac{x}{r^3} + 6Bf_1(hr) x = \\ &= -\frac{Ux}{f_0(ha)} \left\{ \frac{h^2 a^5}{r^3} f_2(ha) - 3f_1(hr) \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

или, после подстановки из формул (15) § 292,

$$\begin{aligned} xu + yv + zw &= \\ &= \left\{ \left(1 - \frac{3i}{ha} - \frac{3}{h^2 a^2} \right) \frac{a^3}{r^3} + 3 \left(\frac{i}{hr} + \frac{1}{h^2 r^2} \right) \frac{a}{r} e^{-ih(r-a)} \right\} Ux. \end{aligned} \quad (19)$$

Полагая $x = r \cos \theta$, придем к следующему представлению функции тока § 94

$$\psi = -\frac{1}{2} U a^2 \sin^2 \theta \left\{ \left(1 - \frac{3i}{ha} - \frac{3}{h^2 a^2} \right) \frac{a}{r} + \frac{3}{ha} \left(i + \frac{1}{hr} \right) e^{-ih(r-a)} \right\}. \quad (20)$$

Если положить

$$U = a e^{i(\sigma t + \varepsilon)} \quad (21)$$

и вместе с тем $h = (1-i)\beta$, где $\beta = \left(\frac{\sigma}{2\nu} \right)^{1/2}$, то найдем, отбрасывая мнимую часть выражения (20),

$$\begin{aligned} \psi &= -\frac{1}{2} a a^2 \sin^2 \theta \left[\left\{ \left(1 + \frac{3}{2\beta a} \right) \cos(\sigma t + \varepsilon) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3}{2\beta a} \left(1 + \frac{1}{\beta a} \right) \sin(\sigma t + \varepsilon) \right\} \frac{a}{r} - \frac{3}{2\beta a} \left\{ \cos\{\sigma t - \beta(r-a) + \varepsilon\} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(1 + \frac{1}{\beta r} \right) \sin\{\sigma t - \beta(r-a) + \varepsilon\} \right\} e^{-\beta(r-a)} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

На достаточно большом расстоянии от шара преобладающей оказывается та часть возмущения, которая выражена членами первой строки этой формулы. Эта часть свободна от вихрей и отличается только амплитудой и фазой от движения, производимого шаром, совершающим колебания в идеальной жидкости (§§ 92, 93). Члены во второй строке имеют ту же форму, с которой мы уже встречались при рассмотрении ламинарного движения (§ 345).

Чтобы вычислить результирующую силу X , действующую на шар, возвратимся назад к формулам (18) § 353. Если мы сделаем подстановку в эти

формулы из формул (15) и удержим в выражениях для p_{rx} только постоянные члены, так как сферические функции порядка, отличного от нуля, при интегрировании по поверхности шара дают нуль, то получим

$$X = \iint p_{rx} dS = 4\pi \left(B_{-2} \frac{A}{a} + C_1 B a^2 \right), \quad (23)$$

где на основании формул (19) § 353

$$B_{-2} = -\frac{1}{3} a^2, \quad C_1 = 2\mu h a f'_0(ha). \quad (24)$$

Поэтому на основании формул (17) получаем

$$\begin{aligned} X &= \frac{2\pi\mu U h a^3}{f_0(ha)} \left\{ 2f'_0(ha) - \frac{1}{3} h^2 a^2 f_2(ha) \right\} = \\ &= 2\pi\mu U h^2 a^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{3i}{ha} - \frac{3}{h^2 a^2} \right) = \\ &= -2\pi\mu a^3 \sigma U \left\{ \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2\beta a} \right) i + \frac{3}{2\beta a} \left(1 + \frac{1}{\beta a} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Это выражение равносильно следующему

$$X = -\frac{4}{3} \pi \mu a^3 \left(\frac{1}{2} + \frac{9}{4\beta a} \right) \frac{dU}{dt} - 3\pi \mu a^3 \sigma \left(\frac{1}{\beta a} + \frac{1}{\beta^2 a^2} \right) U. \quad (26)$$

Первый член дает поправку на инерцию шара. Эта поправка по величине составляет

$$\frac{1}{2} + \frac{9}{4\beta a}$$

часть вытесненной шаром жидкости, вместо $\frac{1}{2}$, как это имело место в случае идеальной жидкости (§ 92). Второй член дает результирующую силу трения, пропорциональную скорости ¹⁾.

Если период $\frac{2\pi}{\sigma}$ сделается бесконечно большим, то формула (26) приведет к виду

$$X = -6\pi\mu a U, \quad (27)$$

так как $\beta^2 = \frac{\sigma}{2\nu}$; этот результат находится в согласии с формулой (15) § 337.

§ 357. Прибавим еще несколько замечаний по поводу задач в двух измерениях, аналогичных задачам §§ 354, 356.

¹⁾ Эта задача в первый раз была решена Стоксом, но несколько другим способом, см. выше, стр. 726. Другие способы решения можно найти у О. Е. Мейера, Über die pendelnde Bewegung einer Kugel unter dem Einflusse der inneren Reibung des umgebenden Mediums, Crelle, LXXIII (1871). Kirchhoff, Mechanik, XXVI.

Более общий случай, когда скорость шара есть произвольная функция времени, был исследован Basset, On the Motion of a Sphere in a Viscous Liquid, Phil. Trans., CLXXIX, 43 (1887); Hydrodynamics, гл. XXII. Вопрос этот получил упрощение в новых работах Picciati и Boggio; см. Basset, Quart. J. of Math. XLI, 369 (1910) и Rayleigh, см. выше, стр. 741. См. также Havelock, Phil Mag. (6), XLII, 628 (1921).

Если пренебречь членами второго порядка, то уравнения примут вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta_1 u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta_1 v, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Как и в § 349, эти уравнения удовлетворятся решениями вида

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

и

$$\rho = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (3)$$

если предположить, что

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 \varphi &= 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \nu \Delta_1 \psi. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

1. Таким способом можно найти, что затухающее движение жидкости, заключенной в неподвижном круговом цилиндре, при произвольных начальных условиях может быть представлено в полярных координатах комбинацией функций

$$\Psi = \left\{ \frac{J_s(kr)}{J_s(ka)} - \frac{r^s}{a^s} \right\} (A \cos s\theta + B \sin s\theta) e^{-rka^2 t}, \quad (5)$$

если Ψ — функция тока § 59. Условие, что нормальная составляющая скорости на граничной поверхности ($r=a$) равна нулю, здесь уже выполнено; касательная же составляющая скорости $\frac{\partial \Psi}{\partial r}$ будет исчезать в том случае, когда

$$ka J'_s(ka) - s J_s(ka) = 0;$$

это условие на основании формулы (5) § 303 равносильно условию

$$J_{s+1}(ka) = 0. \quad (6)$$

Последнее уравнение определяет допустимые значения для k и вместе с тем значения для модуля затухания $\tau = \frac{1}{\nu k^2}$ ¹⁾.

В случае симметрии имеем $s=0$. Наименьший корень функции $J_1(ka)$ есть $ka=3,832$; это дает

$$\tau = 0,0631 \frac{a^2}{\nu}.$$

¹⁾ Этот результат взят из работы автора, On the Motion of a Viscous Fluid contained in a Spherical Vessel, упомянутой на стр. 799. Случай $s=0$ разобрал Stearn, On some Cases of the Varying Motion of a Viscous Fluid, Quart. Journ. Math., XVII, 90 (1880).

Подставляя в случае воды значение $\nu = 0,014$ CGS, находим $\tau = 4,9a^2$ сек., где a выражено в сантиметрах.

Для $s=1$ наименьший корень есть $ka = 5,135$; отсюда следует

$$\tau = 0,0379 \frac{a^2}{\nu}$$

или, для воды, $\tau = 2,7a^2$.

2. В случае периодического движения с множителем, зависящим от времени, в виде $e^{i\sigma t}$ будем иметь на основании формул (4)

$$(\Delta_1 + h^2)\psi = 0, \quad (7)$$

если

$$h^2 = -\frac{i\sigma}{\nu} \quad \text{или} \quad h = (1-i)\beta, \quad \beta = \left(\frac{\sigma}{2\nu}\right)^{1/2}. \quad (8)$$

Решение уравнения (7) в полярных координатах содержит функции Бесселя с комплексным аргументом $(1-i)\beta r$. Выбор подходящих функций в различных случаях и приведение результатов к практически удобному виду наталкивается на некоторые трудности¹⁾. Ввиду того что необходимые для этого вычисления очень длинны, а задачи эти представляют все же меньший интерес по сравнению с теми, которые относятся к границам сферической формы, мы ограничимся здесь тем, что отошлем читателя к оригинальным работам Стокса²⁾.

Вязкость в газах.

§ 358. Если принять во внимание изменения плотности, то наиболее общее предположение относительно „среднего давления“ p , которое мы можем сделать в случае идеального газа, не впадая в противоречие с ранее сделанными гипотезами, можно выразить в виде

$$p = R\varrho\theta - \mu'(a + b + c), \quad (1)$$

где θ — абсолютная температура, R — постоянная, зависящая от природы газа, и μ' — второй коэффициент вязкости³⁾. Мы не имеем, однако, никаких опытных данных для точного определения значения μ' ; согласно кинетической теории газов должно было бы иметь место равенство $\mu' = 0$ ⁴⁾; мы для простоты и примем это предположение. Если же мы захотим удерживать в формулах μ' , то нужные для этого исправления легко будет сделать.

¹⁾ Исследования § 194 требуют некоторого пересмотра в случае, когда аргумент комплексный. Формулы (4), (5), (6) сохраняют свою силу, если только действительная часть аргумента положительна [что можно обеспечить выбором значения h в уравнении (8)], но дифференцирование расположенных по нисходящим и восходящим степеням рядов (13) и (20) представляет некоторые особенности. В частности, результаты, которые получаются от приравнивания соответственно действительных и мнимых частей, требуют проверки.

²⁾ Stokes, см. выше, стр. 726. См. также Watson, Theory of Bessel Functions, стр. 201.

³⁾ Ср. Kirchhoff, Vorlesungen über die Theorie der Wärme, Leipzig, (1894), лекция 11. Stokes (Papers, III, 136).

⁴⁾ Maxwell, см. выше, стр. 720.

В § 329 было показано, что работа, произведенная в промежутке времени δt внутренними силами, которые действуют на грани элемента $\delta x \delta y \delta z$ и изменяют как его объем, так и форму, равна

$$- p(a + b + c) \delta x \delta y \delta z \delta t + \Phi \delta x \delta y \delta z \delta t, \quad (2)$$

где

$$\Phi = -\frac{2}{3} \mu (a + b + c)^2 + \mu (2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + f^2 + g^2 + h^2). \quad (3)$$

Далее на основании уравнения (3) § 7 имеем

$$a + b + c = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \rho \frac{Dv}{Dt} \quad (4)$$

где v — объем единицы массы.

Отсюда, обозначая через E внутреннюю энергию единицы массы и через $\frac{DQ}{Dt}$ количество тепла, которое жидкая частица получает в единицу времени от соседних частиц благодаря теплопроводности или излучению, имеем следующее уравнение энергии единицы объема

$$\frac{DE}{Dt} \rho = -p \frac{Dv}{Dt} \rho + \Phi + \frac{DQ}{Dt}. \quad (5)$$

Количество тепла в единицу времени, которое в действительности должно быть получено, чтобы вызвать соответствующие изменения плотности и температуры, по законам термодинамики должно быть равно

$$\frac{DQ'}{Dt} = p \frac{Dv}{Dt} \rho + \frac{DE}{Dt} \rho. \quad (6)$$

Из сравнения формул (5) и (6) получаем

$$\frac{DQ'}{Dt} = \frac{DQ}{Dt} + \Phi. \quad (7)$$

Таким образом, кроме приращения тепла вследствие теплопроводности и пр., в частице возбуждается еще тепло в количестве Φ на единицу объема и единицу времени, конечно, за счет других форм энергии.

Если выражение (3) напишем в виде

$$\Phi = \frac{2}{3} \mu \{ (b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2 \} + \mu (f^2 + g^2 + h^2), \quad (8)$$

то увидим, что Φ существенно положительно и что, кроме того, Φ может обратиться в нуль только в том случае, когда имеем

$$a = b = c \quad \text{и} \quad f = g = h = 0,$$

т. е., когда деформация жидкости представляет одинаковое по всем направлениям расширение или сжатие. Заключение, что в этом случае не происходит никакого рассеяния энергии, основывается естественно на том предположении, что μ' в формуле (1) равно нулю.

§ 359. Сделаем теперь несколько замечаний о влиянии вязкости на звуковые волны. Чтобы быть последовательным, необходимо принять также одновременно во внимание и теплопроводность, влияние которой выражается величинами того же порядка ¹⁾; однако сначала мы по примеру Стокса ²⁾ исследуем влияние одной только вязкости.

В случае плоских волн в неограниченной в поперечном направлении среде будем иметь на основании уравнений (2), (3) § 328, предполагая, что ось x имеет направление распространения волн, и пренебрегая членами второго порядка в выражении для скорости,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3} \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Обозначая через s коэффициент уплотнения, получим, как в § 277, уравнение непрерывности

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2)$$

а уравнение физического состояния можно написать, пренебрегая влиянием теплопроводности, в виде

$$p = p_0 + c^2 \rho_0 s, \quad (3)$$

где c обозначает скорость звука при отсутствии вязкости. Исключая p и s , получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{4}{3} \nu \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}. \quad (4)$$

Чтобы применить это уравнение к случаю вынужденных волн, предположим, что в плоскости $x = 0$ поддерживается колебание

$$u = a e^{i\sigma t}. \quad (5)$$

Если решение уравнения (4) взять в виде

$$u = a e^{i\sigma t + mx}, \quad (6)$$

то найдем

$$m^2 \left(c^2 + \frac{4}{3} i \nu \sigma \right) = -\sigma^2; \quad (7)$$

отсюда следует

$$m = \pm \frac{i\sigma}{c} \left(1 - \frac{4}{3} i \frac{\nu\sigma}{c^2} \right)^{-1/2}. \quad (8)$$

Пренебрегая квадратом величины $\frac{\nu\sigma}{c^2}$ и имея в виду нижний знак, получим из последнего равенства

$$m = -\frac{i\sigma}{c} - \frac{3}{2} \frac{\nu\sigma^2}{c^3}. \quad (9)$$

¹⁾ Это было отмечено в первый раз Кирхгофом, *Über den Einfluss der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung*, Pogg. Ann., CXXXIV, 177 (1868) (Ges. Abh., I, 540).

²⁾ Stokes, см. выше, стр. 33 (Papers, I, 100).

Если мы подставим это выражение в равенство (6) и удержим только действительную часть, то получим для волн, движущихся в положительном направлении оси x ,

$$u = ae^{-\frac{x}{l}} \cos \sigma \left(t - \frac{x}{c} \right), \quad (10)$$

где

$$l = \frac{3}{2} \frac{c^2}{v\sigma^2}. \quad (11)$$

Амплитуда, таким образом, убывает по мере движения волн как показательная функция, ее убывание происходит тем быстрее, чем больше оказывается значение σ . Скорость волн, если пренебречь членами, порядок которых по отношению к $\frac{v\sigma}{c^2}$ выше первого, не подвергается влиянию вязкости.

Линейная величина l дает расстояние, на котором амплитуда убывает до $\frac{1}{l}$ своего первоначального значения. Обозначая через λ длину волны $\left(\frac{2\pi c}{\sigma}\right)$, получим

$$\frac{2}{3} \frac{v\sigma}{c^2} = \frac{\lambda}{2\pi l}; \quad (12)$$

в вычислениях, которые произведены выше, предполагается, что эта дробь — малая величина.

В случае воздушных волн мы имеем $c = 3,32 \cdot 10^4$, $v = 0,132$ CGS и потому

$$\frac{v\sigma}{c^2} = \frac{2\pi v}{\lambda c} = 2,50\lambda^{-1} \cdot 10^{-5}, \quad l = 9,56\lambda^2 \cdot 10^2,$$

где λ выражено в сантиметрах. Влияние на амплитуду оказывается совершенно незначительным, за исключением очень малых длин волн.

Чтобы определить затухание *свободных* волн с произвольной заданной наперед длиной волны $\frac{2\pi}{k}$, положим

$$u = ae^{ikx + nt}; \quad (13)$$

подставляя это выражение в уравнение (4), получим

$$n^2 + \frac{4}{3} vk^2 n = -k^2 c^2. \quad (14)$$

Если пренебречь квадратом величины $\frac{vk}{c}$, то получится

$$n = -\frac{2}{3} vk^2 \pm ikc. \quad (15)$$

Отсюда, удерживая действительную часть, будем иметь

$$u = ae^{-\frac{t}{\tau}} \cos k(x \pm ct), \quad (16)$$

где

$$\tau = \frac{3}{2\nu k^2}. \quad (17)$$

§ 360. Если принять во внимание теплопроводность, то уравнение движения (1) и уравнение непрерывности (2) останутся теми же, физические же соотношения должны быть изменены.

Количество теплоты, необходимое для того, чтобы вызвать малые изменения объема v и (абсолютной) температуры θ единицы массы газа, определяется формулой

$$\delta Q = p \delta v + C_v \delta \theta = \left\{ (\gamma - 1) \frac{\theta_0}{v_0} \delta v + \delta \theta \right\} C_v, \quad (18)$$

где C_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме. Умножая это выражение на $\rho_0 \delta x$, массу единицы площади тонкого слоя, и разделяя на δt , мы получим то количество теплоты, которое должно подводиться к слою в единицу времени. Приравнявая это количество теплоты величине $k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \delta x$, где k — коэффициент теплопроводности, получим ¹⁾

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\gamma - 1) \frac{\theta_0}{v_0} \frac{\partial v}{\partial t} = \nu' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad (19)$$

причем

$$\nu' = \frac{k}{\rho_0 C_v}, \quad (20)$$

т. е. ν' — „термометрическая“ теплопроводность ²⁾.

Соотношение между p , ρ , θ есть

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho \theta}{\rho_0 \theta_0}. \quad (21)$$

Полагая

$$\rho = \rho_0 (1 + s), \quad \theta = \theta_0 (1 + \eta) \quad (22)$$

и пренебрегая членами второго порядка относительно s и η , уравнения (19) и (21) можно привести к виду

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - (\gamma - 1) \frac{\partial s}{\partial t} = \nu' \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (23)$$

и

$$p = p_0 (1 + s + \eta). \quad (24)$$

Подставляя далее значение p в уравнение (1), получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -b^2 \frac{\partial s}{\partial x} - b^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{4}{3} \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (25)$$

¹⁾ Теплота, образующаяся благодаря вязкости (как это разъяснено в § 358), здесь не принимается во внимание, так как она выражается малыми членами второго порядка.

²⁾ Maxwell, Theory of Heat, гл. XVIII. Если бы излучение было значительным, то в уравнение (19) вошел бы еще член, пропорциональный $\theta - \theta_0$. Ср. Stokes, Phil. Mag. (5), I, 305 (1851) (Papers, III, 142); см. также Rayleigh, Theory of Sound, § 247.

где $b = \left(\frac{p_0}{\rho_0}\right)^{1/2}$ — выражение для скорости звука, данное Ньютоном (§ 278).

После исключения s посредством формулы (2) находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} + \frac{4}{3} \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial t} \quad (26)$$

и

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (\gamma - 1) \frac{\partial u}{\partial x} = \nu' \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \quad (27)$$

Мы получили, таким образом, систему двух совместных дифференциальных уравнений для определения u и η .

Предполагая теперь, что величины u и η обе пропорциональны выражению

$$e^{i\sigma t + mx},$$

получим

$$\left. \begin{aligned} (\sigma^2 + m^2 b^2 + \frac{4}{3} i \nu \sigma m^2) u - i \sigma m b^2 \eta &= 0, \\ (\gamma - 1) m u + (i \sigma - \nu' m^2) \eta &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

отсюда следует

$$\sigma^3 + \left\{ c^2 \sigma + \left(\frac{4}{3} \nu + \nu' \right) i \sigma^2 \right\} m^2 + \nu' \left(i b^2 - \frac{4}{3} \nu \sigma \right) m^4 = 0, \quad (29)$$

если подставить c^2 вместо γb^2 .

Мы убеждаемся, что $m = \pm \frac{i\sigma}{c}$ для $\nu = 0$, $\nu' = 0$. Точно так же $m = \pm \frac{i\sigma}{b}$ для $\nu = 0$, $\nu' = \infty$, так как условия в данном случае практически будут изотермическими. Далее, если значение σ очень велико, в то время как $\nu = 0$, мы снова будем иметь $m = \pm \frac{i\sigma}{c}$ независимо от значения ν' ; ср. § 278.

Согласно кинетической теории газов Максвелла имеем

$$\nu' = \frac{5}{2} \nu, \quad (30)$$

но в дальнейшем мы будем только предполагать, что ν' и ν суть величины одного и того же порядка.

Мы видели, что отношение $\frac{\nu\sigma}{c^2}$ в случае обыкновенных звуковых волн мало. Корни полученного выше квадратного уравнения относительно m^2 могут быть поэтому приближенно выражены в виде

$$m_1^2 = -\frac{\sigma^2}{c^2}, \quad m_2^2 = \frac{i\sigma c^2}{\nu' b^2} = \frac{i\gamma\sigma}{\nu'}. \quad (31)$$

Более точное значение первого из этих корней есть

$$m_1^2 = -\frac{\sigma^2}{c^2} \left[1 - \left\{ \frac{4}{3} \nu + \left(1 - \frac{b^2}{c^2} \right) \nu' \right\} \frac{i\sigma}{c^2} \right]; \quad (32)$$

отсюда следует

$$m_1 = \pm \left(\frac{i\sigma}{c} + \frac{1}{l} \right), \quad (33)$$

где

$$l = \frac{c^2}{\left\{ \frac{2}{3} \nu + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b^2}{c^2} \right) \nu' \right\} \sigma^2}. \quad (34)$$

Для полного решения находим при $x > 0$ приближенные значения

$$\left. \begin{aligned} u &= A_1 e^{i\sigma t + m_1 x} + A_2 e^{i\sigma t + m_2 x}, \\ \eta &= \frac{\gamma - 1}{c} A_1 e^{i\sigma t + m_1 x} + \frac{m_2}{i\sigma} A_2 e^{i\sigma t + m_2 x}, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

где значения m_1 и m_2 выбраны так, что их действительные части отрицательны. Произвольные постоянные A_1 и A_2 дают возможность представить заданные наперед периодические изменения u и η в плоскости $x = 0$.

Для обыкновенных частот отношение $\frac{m_2 c}{\sigma}$ велико, и потому отношение $\frac{A_2}{A_1}$, как оно определено на основании термических условий в плоскости $x = 0$, обычно оказывается малым. Второй член в выражении для u в этом случае даже вблизи от начала координат не представляется достаточно важным, а для довольно больших значений x он и в любом случае оказывается совершенно несущественным по сравнению с первым членом. Назначение этого члена заключается в том, чтобы представить чисто местное влияние периодического источника тепла, находящегося в начале координат.

Если возьмем для ν' значение (30) и положим $\frac{c^2}{b^2} = \gamma = 1,40$, то из формулы (34) будет видно, что значение l вследствие теплопроводности уменьшится в отношении 0,65.

Исследования этого параграфа в существенном были выполнены Кирхгофом ¹⁾, который рассмотрел также влияние расходящихся сферических волн и распространение звуковых волн в узкой трубке. Последняя задача стоит в связи с хорошо известными опытами Кундта.

§ 360а. Ранее уже было сделано замечание о влиянии вязкости в теории звуковых волн установившегося типа, § 284. Если принять в расчет только вязкость, а теплопроводностью пренебречь, то теория становится довольно простой, и о ней следует сказать несколько слов ради применения (только один раз в этой книге) принципов, изложенных в § 358.

¹⁾ Kirchhoff, см. выше, стр. 815. Эти исследования воспроизведены в книге Рэлея, *Theory of Sound*, 2-е изд., §§ 348—350.

Будем рассматривать установившееся движение, тогда уравнение движения принимает вид

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Полагая, как и в § 284, $\rho u = m$ или $u = mv$, где v — объем единицы массы, можно это уравнение представить в виде

$$m^2 \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3} \mu m \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Отсюда имеем

$$p + m^2 v = p_0 + m^2 v_0 + \frac{4}{3} \mu m \frac{\partial v}{\partial x} = p_1 + m^2 v_1 + \frac{4}{3} \mu m \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (3)$$

так как $\frac{\partial v}{\partial x}$ обращается в нуль на границах волны.

Следовательно, если Q — теплота, поглощаемая единицей массы для перехода к какому-либо состоянию, то будем иметь согласно (12) § 284

$$\begin{aligned} (\gamma - 1) \frac{\partial Q}{\partial x} &= v \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p \frac{\partial v}{\partial x} = \\ &= \gamma \left\{ p_0 + m^2 v_0 - m^2 v + \frac{4}{3} \mu m \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \frac{\partial v}{\partial x} + \\ &\quad + v \left\{ -m^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{4}{3} \mu m \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right\}. \quad (4) \end{aligned}$$

Теплота, образующаяся благодаря вязкости в единицу времени на единицу массы, с одной стороны, согласно § 358, будет равна $\frac{4}{3} \mu v \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$. С другой, — она должна быть равна $u \frac{\partial Q}{\partial x}$, а потому имеем

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{4}{3} \mu m \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2, \quad (5)$$

так как $u = mv$. Подставляя в (4), найдем

$$\gamma (p_0 + m^2 v_0) \frac{\partial v}{\partial x} - (\gamma + 1) m^2 v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{4}{3} \mu m \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0. \quad (6)$$

Интегрируя это в пределах, для которых $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, и разделив на $v_1 - v_0$, будем иметь

$$\gamma (p_0 + m^2 v_0) = \frac{1}{2} (\gamma + 1) m^2 (v_0 + v_1). \quad (7)$$

Следовательно, уравнение (6) можно написать в виде:

$$\frac{1}{2} (\gamma + 1) m (v_0 + v_1 - v) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{4}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0. \quad (8)$$

Первый интеграл этого уравнения, выбранный так, чтобы для $v = v_0$ иметь $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, представляется в виде

$$\frac{4}{3} \mu v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} (\gamma + 1) (v - v_1) (v_0 - v) = 0. \quad (9)$$

Отсюда с точностью до аддитивной постоянной будем иметь

$$x = \frac{8\mu}{3(\gamma + 1)m(v_0 - v_1)} (v_1 \ln(v - v_1) - v_0 \ln(v_0 - v)), \quad (10)$$

где m определяется из (7). Здесь уже нет ограничений на величину отношения $\frac{v_0}{v_1}$ (1).

Если в (10) мы положим $v = \alpha v_0 + \beta v_1$, где $\alpha + \beta = 1$, то значение x отличается только постоянной от следующего

$$\frac{8\mu}{3(\gamma + 1)m} \cdot \frac{v_1 \ln \alpha - v_0 \ln \beta}{v_0 - v_1}. \quad (11)$$

Например, если положить $\alpha = 0,9$, $\beta = 0,1$, а затем $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,9$, то разность между двумя значениями x будет

$$\frac{8\mu}{3(\gamma + 1)m} \frac{v_0 + v_1}{v_0 - v_1} \ln 9. \quad (12)$$

Так, если $v_0 = 2v_1$, то из (7) и из других числовых данных в конце § 284 найдем $m = 68,3$. Полагая $\mu = 0,00018$, будем иметь значение выражения (12) равным $1,98 \cdot 10^{-5}$ см.

§ 360b. Рэлей ²⁾ применил принципы § 360 для объяснения поглощения звука пористыми телами. Для целей общего исследования мы можем упростить вопрос, учитывая только одну вязкость.

Имея в виду формулу (5) § 347, мы заключаем, что если жидкость находится в колебательном движении вблизи плоской стенки под действием периодической силы X , то задерживающая касательная сила, действующая на жидкость и относящаяся к единице площади, будет равна

$$-\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = -(1-i) \frac{\mu \beta f}{\sigma} e^{i(\sigma t + \epsilon)} = -(1-i) \frac{\mu \beta}{\sigma} X. \quad (1)$$

Этот результат получен в предположении несжимаемости жидкости, но в качестве приближения он применим и в рассматриваемом случае, когда длина волны оказывается большой в сравнении с другими входящими в рассмотрение линейными величинами. Одна из этих линейных величин

¹⁾ Исследование заимствовано из работы Рэлей, указанной на стр. 601.

²⁾ Rayleigh, On Porous Bodies in relation to Sound, Phil. Mag. (5), XVI, 181 (1883) (Papers, II, 220); Theory of Sound, § 351. См. также Lamb, Dynamical Theory of Sound, London (1910), стр. 192.

есть $\beta^{-1} = \left(\frac{2\nu}{\sigma}\right)^{1/2}$; она представляет меру того, насколько далеко проникает в жидкость тормозящее влияние вязкости ¹⁾.

Если формулу (1) применить к тому случаю, когда волны движутся в трубе или между двумя параллельными стенками, то силу X (на единицу массы) можно заменить через $-\frac{\partial p}{\rho_0 \partial x}$. Мы рассмотрим случай трубы и предположим на мгновение, что значение β^{-1} мало по сравнению с радиусом a ; вычисляя силу, действующую на жидкость, занимающую длину ∂x стенки, получим

$$\pi \rho_0 a^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\pi a^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + (1-i) \frac{\nu \beta}{\sigma} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} 2\pi a,$$

где \bar{u} , \bar{p} обозначают средние значения скорости и давления в поперечном сечении. Так как $\sigma = 2\nu\beta^2$, то это уравнение можно написать в виде

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\left(1 - \frac{1-i}{\beta a}\right) \frac{\partial \bar{p}}{\rho_0 \partial x}. \quad (2)$$

Мы имеем также

$$\bar{p} = p_0 + c^2 \rho_0 \bar{s}, \quad \frac{\partial \bar{s}}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \quad (3)$$

где \bar{s} — коэффициент уплотнения. Отсюда получаем, исключая \bar{s} ,

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = \left(1 - \frac{1-i}{\beta a}\right) c^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}. \quad (4)$$

Мы уже предположили, что \bar{u} пропорционально $e^{i\sigma t}$. Полагая поэтому

$$\bar{u} = C e^{i\sigma t + mx}, \quad (5)$$

получим

$$m^2 = -\frac{\sigma^2}{c^2} \left(1 - \frac{1-i}{\beta a}\right)^{-1}$$

или

$$m = \pm \frac{i\sigma}{c} \left(1 + \frac{1-i}{2\beta a}\right), \quad (6)$$

так как $\frac{1}{\beta a}$ по предположению мало. Эту формулу можно написать в виде

$$m = \pm \left(\frac{i\sigma}{c'} + \frac{1}{l'}\right), \quad (7)$$

¹⁾ Полагая $\nu = 0,132$ и обозначая через $N = \frac{\sigma}{2\pi}$ частоту получим $\beta^{-1} = 0,207 N^{-1/2}$ см.

где

$$c' = c \left(1 - \frac{1}{2\beta a}\right), \quad l' = \frac{ac}{v\beta}. \quad (8)^1$$

Отсюда, если возьмем нижний знак и напишем равенство (5) в действительной форме, получим

$$\bar{u} = Ce^{-\frac{x}{l'}} \cos \sigma \left(t - \frac{x}{c'}\right). \quad (9)$$

Для $v' = 0$ формула (34) § 360 дает значение $l = \frac{3}{2} \frac{c^2}{v\sigma^2}$. Отсюда следует приближенное уравнение

$$\frac{l'}{l} = \frac{2}{3} \frac{\sigma^2 a}{\beta c^2} = \frac{2}{3} \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{\beta a}, \quad (10)$$

где λ — длина волны. Скорость затухания волн при их движении в трубе оказывается, таким образом, значительно больше, чем в открытом пространстве, если только длина волны сравнима с длиной окружности поперечного сечения или больше ее.

Если труба настолько узка, что радиус имеет тот же порядок, что и β^{-1} , то характер движения оказывается другим. Трение оказывает теперь значительно большее влияние на колеблющуюся жидкость, а инерция жидкости становится несущественной. Среднее значение \bar{u} скорости в данном случае связано с градиентом среднего давления практически формулой (4) § 331; поэтому

$$\bar{u} = -\frac{a^2}{8\mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}. \quad (11)$$

Отсюда следует, если иметь в виду формулы (3),

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{c^2 a^2}{8v} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}. \quad (12)$$

Это уравнение тождественно по форме с уравнением линейного распространения тепла.

Подставляя значение \bar{u} из формулы (5), получим

$$m = \pm(1+i)q, \quad (13)$$

если обозначить

$$q^2 = \frac{4v\sigma}{c^2 a^2} = \frac{2\sigma^2}{\beta^2 a^2 c^2}. \quad (14)$$

Отсюда для действительной части, принимая во внимание нижний знак, получим выражение

$$\bar{u} = Ce^{-qx} \cos(\sigma t - qx). \quad (15)$$

¹⁾ Гельмгольц в 1863 г. дал (без доказательства) формулы, равносильные приведенным в тексте; см. *Wiss. Abh.*, I, 484. В цитате, приведенной Кирхгофом имеется ошибка.

Фаза повторяется всякий раз, как x возрастает на $\frac{2\pi}{q}$, амплитуда же убывает на этом расстоянии в отношении $e^{-2\pi}$ или $\frac{1}{535}$. Отношение этого интервала к длине волны λ в открытом пространстве равно

$$\frac{2\pi}{q\lambda} = \frac{\beta a}{\sqrt{2}\lambda}; \quad (16)$$

эта величина при сделанных предположениях представляет малую дробь.

Когда звуковая волна падает на поверхность твердого тела, пронизанного большим числом узких каналов, то часть звуковой энергии теряется благодаря описанному здесь рассеянию в этих каналах.

Промежуточные отверстия в портьерах и коврах действуют подобным же образом, и в этом заключается причина того, почему такого рода предметы ослабляют эхо в комнате; некоторая часть энергии теряется также при каждом отражении. Следует заметить, что только благодаря действию настоящих диссипативных сил, таких, как трение и теплопроводность, оказывается возможным, чтобы звук в замкнутом помещении совершенно прекратился.

§ 361. В исследованиях, которыми мы будем теперь заниматься, мы для простоты оставим в стороне тепловые процессы. На основании предшествующих исследований мы можем заключить, что от этого *порядок величины* членов, представляющих действие рассеяния, не изменится.

Общие уравнения звуковых волн, подверженных действию вязкости, на основании уравнений (2) § 328 будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{e_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{e_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial \theta}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{1}{e_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial \theta}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (2)$$

Если обозначить через s коэффициент уплотнения, то уравнение непрерывности получит вид

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right), \quad (3)$$

а уравнение физического состояния будет

$$p = p_0 + e_0 c^2 s, \quad (4)$$

где c — скорость звука при отсутствии вязкости.

Исключая p и ϑ , получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \nu \Delta u - \left(c^2 + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial s}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \nu \Delta v - \left(c^2 + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial s}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \nu \Delta w - \left(c^2 + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial s}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Из уравнений (5) и (3) после дифференцирования получаем

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \left(c^2 + \frac{4}{3} \nu \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta s. \quad (6)$$

Если множитель, зависящий от времени, положить равным $e^{i\sigma t}$, то уравнение (6) примет вид

$$(\Delta + k^2) s = 0, \quad (7)$$

где

$$k^2 = \frac{\sigma^2}{c^2 + \frac{4}{3} i\nu\sigma}, \quad (8)$$

в то время как уравнения (5) могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} (\Delta + h^2) u &= (k^2 - h^2) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ (\Delta + h^2) v &= (k^2 - h^2) \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ (\Delta + h^2) w &= (k^2 - h^2) \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где

$$h^2 = -\frac{i\sigma}{\nu} \quad (10)$$

и

$$\varphi = -\frac{i\sigma s}{k^2}. \quad (11)$$

Эти уравнения удовлетворятся решениями вида

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (12)$$

если φ — какое-либо решение уравнения (7).

В частности, в случае волн, расходящихся по поверхности сферы радиуса $r = a$, когда на самой поверхности поддерживается заданная радиальная скорость $e^{i\sigma t}$, имеем

$$\varphi = A f_0(kr) e^{i\sigma t} \quad (13)$$

при условии

$$-kA f_0'(ka) = 1. \quad (14)$$

Отсюда следует

$$\varphi = -\frac{f_0(kr)}{kf_0'(ka)} e^{i\sigma t} \quad (15)$$

или, если написать в более полном виде,

$$\varphi = \frac{a^2}{1+ika} \frac{e^{i(\sigma t - kr + ka)}}{r}. \quad (16)$$

Мы видели в § 359, что даже в случае звуковых частот отношение $\frac{v\sigma}{c^2}$ чрезвычайно мало, так что с большим приближением можно написать

$$k = \frac{\sigma}{c} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{iv\sigma}{c^2} \right). \quad (17)$$

Истолкование формулы (16) как в отношении незначительного влияния вязкости на скорость волн, так и в отношении ослабления самих волн по мере своего распространения благодаря вязкости в этом случае то же самое, как и при движении в одном измерении, § 359. Оказывается, что на расстоянии очень большого числа длин волн ослабление волн вследствие вязкости незаметно по сравнению с тем ослаблением, которое происходит благодаря сферическому расхождению волн.

Если движение не симметрично относительно начала, то решение уравнений (7) и (9) можно дополнить исследованием, помещенным в § 352. Таким образом, для случая расходящихся волн получаем решения вида

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + (n+1) f_{n-1}(hr) \frac{\partial \chi_n}{\partial x} - \\ &\quad - n f_{n+1}(hr) h^2 r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\chi_n}{r^{2n+1}}, \\ v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + (n+1) f_{n-1}(hr) \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - \\ &\quad - n f_{n+1}(hr) h^2 r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\chi_n}{r^{2n+1}}, \\ w &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + (n+1) f_{n-1}(hr) \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - \\ &\quad - n f_{n+1}(hr) h^2 r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\chi_n}{r^{2n+1}}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где

$$\varphi = f_n(kr) \varphi_n, \quad (19)$$

а функции φ_n , χ_n суть объемные сферические функции положительной степени n ¹⁾.

¹⁾ Решения „первого класса“ с рассматриваемой здесь точки зрения представляют меньший интерес.

Эти формулы дают

$$xu + yv + zw = - \{krf'_n(kr) + nf_n(kr)\} \varphi_n + n(n+1)(2n+1) f_n(hr) \chi_n \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} yw - zw &= -f_n(kr) \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \varphi_n + \\ &\quad + (2n+1) \{hrf'_n(hr) + (n+1)f_n(hr)\} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \chi_n, \\ zu - xw &= -f_n(kr) \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi_n + \\ &\quad + (2n+1) \{hrf'_n(hr) + (n+1)f_n(hr)\} \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \chi_n, \\ xv - yu &= -f_n(kr) \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi_n + \\ &\quad + (2n+1) \{hrf'_n(hr) + (n+1)f_n(hr)\} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \chi_n, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

причем в этом случае были применены рекуррентные формулы § 292.

По причине, указанной выше, мы можем с достаточной точностью считать k действительным и равным $\frac{\sigma}{c}$. Что же касается h , то мы положим, как и в § 345,

$$h = (1 - i) \beta, \quad \text{где } \beta = \sqrt{\frac{\sigma}{2\nu}}. \quad (22)$$

Члены в выражениях (18), содержащие χ_n , будут поэтому заключать в себе множитель $e^{-\beta r}$ и, следовательно, будут очень малы на расстояниях r , больших по сравнению с линейной величиной β^{-1} , значение которой для воздуха, например, равно приблизительно $0,21 \sqrt{N}$ см, если N обозначает число колебаний в секунду (§ 345). Движение будет поэтому практически свободным от вихрей уже на расстоянии, равном сравнительно небольшому кратному величине β^{-1} , и потенциал скоростей будет определяться формулой (19). Заметим также, что отношение $\frac{ka}{\beta a}$, приблизительно равное $\sqrt{\frac{\nu\sigma}{2c^2}}$, следует считать малым.

Чтобы применить формулы к случаю шара, который совершает колебания в направлении, параллельном оси x , со скоростью

$$U = e^{i\sigma t}, \quad (23)$$

подставим в формулы (18) $n=1$ и положим

$$\varphi_1 = A_1 x, \quad \chi_1 = B_1 x. \quad (24)$$

Условия

$$u = U, \quad v = 0, \quad w = 0 \quad (25)$$

которые должны выполняться на поверхности $r = a$, дают на основании соотношений (20) и (21)

$$-(kaf'_1(ka) + f_1(ka)) A_1 + 6f_1(ha) B_1 = 1, \quad (26)$$

$$-f_1(ka) A_1 + 3(haf'_1(ha) + 2f_1(ha)) B_1 = 1; \quad (27)$$

отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= - \frac{haf'_1(ha)}{haf'_1(ha)(kaf'_1(ka) + f_1(ka)) + 2f_1(ha)kaf'_1(ka)} \\ B_1 &= \frac{\frac{1}{3}kaf'_1(ka)}{haf'_1(ha)(kaf'_1(ka) + f_1(ka)) + 2f_1(ha)kaf'_1(ka)} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Если сделаем подстановку из формул (15) § 292, то получим

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= - \frac{(3 + 3iha - h^2a^2)k^3a^3e^{ika}}{k^2a^3(1 + iha) + (2 + 2ika - k^2a^2)h^2a^2} \\ B_1 &= \frac{\frac{1}{3}(3 + 3ika - k^2a^2)h^2a^3e^{iha}}{k^2a^3(1 + iha) + (2 + 2ika - k^2a^2)h^2a^2} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

В удаленных точках движение практически свободно от вихрей и имеет потенциал скоростей

$$\varphi = A_1 f_1(kr) x e^{i\omega t}. \quad (30)$$

Для акустики наиболее интересен тот случай, когда радиус шара a велик по сравнению с величиной β^{-1} . Если мы удержим только наивысшую степень ha в формулах (29), то первая из этих формул получит вид

$$A_1 = \frac{k^3a^3e^{ika}}{2 + 2ika - k^2a^2}. \quad (31)$$

т. е. точно такой, как если бы мы пренебрегли вязкостью с самого начала (§ 295). Это показывает, что заключения Стокса, касающиеся влияния бокового движения при сообщении колебаний газу, в основном не подвергаются изменениям из-за вязкости. Следует впрочем заметить, что боковое движение воздуха, находящегося в соприкосновении с колеблющейся поверхностью, изменяет свой характер и может даже изменить направление на прямо противоположное, но это влияние вязкости распространяется лишь на слой, толщина которого имеет порядок величины β^{-1} , и если β^{-1} мало по сравнению с размерами тех частей, на которые поверхность разделяется узловыми линиями, то общие рассуждения § 294 сохраняют свою силу.

С другой стороны, в случае очень медленных колебаний или когда радиус препятствия очень мал, т. е. в тех случаях, когда значение βa не велико, значение ka необходимо должно быть мало, и потому на основании формул (29) и (22) будем иметь приближенно

$$A_1 = \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{2\beta a} \right) - \frac{3i}{4\beta a} \left(1 + \frac{1}{\beta a} \right) \right\} k^3a^3. \quad (32)$$

Это согласуется с формулой (22) § 356. На расстояниях r , малых по сравнению с длиной волны, но довольно больших по сравнению с β^{-1} , дви-

жение на самом деле практически происходит так, как если бы жидкость была несжимаема.

§ 362. Мы будем теперь исследовать отражение плоских волн от сферического препятствия. Это тот же вопрос, что был разобран в § 297, только теперь должна быть принята во внимание вязкость. Мы будем предполагать, что окружность препятствия мала по сравнению с длиной волны, так что значение ka будет малым ¹⁾.

На основании § 296 мы можем положить потенциал скоростей падающих волн равным

$$\varphi = e^{ikhx} = \psi_0(kr) + 3ikr\psi_1(kr) \cos \theta + \dots, \quad (1)$$

где θ обозначает обычную угловую координату, а множитель $e^{i\omega t}$ или e^{ikhct} подразумевается. Из § 297 следует, что члены, содержащие сферические функции порядка выше первого, могут быть отброшены. Для малых значений kr равенство (1) принимает вид

$$\varphi = 1 - \frac{1}{6} k^2 r^2 + \dots + ikx + \dots \quad (2)$$

Мы будем предполагать сначала, что шар неподвижен. Скорость на поверхности шара, соответствующая только потенциалу скоростей (2), складывается главным образом из радиальной составляющей $\frac{1}{3} k^2 a$ и из составляющей $-ik$, параллельной направлению оси x . Если мы изменим направления этих составляющих на противоположные, то потенциал отраженных волн φ' на расстояниях r , больших по сравнению с β^{-1} , получим, складывая выражения (16), (30) § 361, умноженные на подходящие коэффициенты.

Таким образом, получим

$$\varphi' = -\frac{1}{3} \frac{k^3 a^2 e^{ika}}{1 + ika} f_0(kr) + (H + iK) f_1(kr) kr \cos \theta + \dots, \quad (3)$$

где

$$H + iK = iA_1 = -\frac{(3 + 3iha - h^2 a^2) ik^3 a^2 e^{ika}}{k^2 a^2 (1 + iha) + (2 + 2ika - k^2 a^2) h^2 a^2}; \quad (4)$$

Главный интерес настоящего исследования заключается в том, чтобы определить ту скорость, с которой энергия отчасти рассеивается вследствие вязкости, отчасти отделяется от последовательности первоначальных волн благодаря присутствию препятствия. Чтобы достичь этой цели, мы должны выразить φ и φ' в действительной форме. Предполагая, что это уже сделано, напишем

$$q = \frac{\partial \varphi}{\partial r^x}, \quad q' = \frac{\partial \varphi'}{\partial r}; \quad (5)$$

где q, q' — направленные внутрь радиальные скорости, происходящие соответственно от первичных и вторичных волн, на расстояниях, значения которых велики по сравнению с β^{-1} ; p, p' пусть будут соответствующие давления, именно

$$p = \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad p' = \rho_0 \frac{\partial \varphi'}{\partial t}. \quad (6)$$

¹⁾ Эта задача и соответствующая ей задача в двух измерениях были разобраны *Se well*, *On the Extinction of Sound in a Viscous Atmosphere by Small Obstacles* . . . , *Phil. Trans.*, A CCX, 239 (1910). Я несколько изменил и сократил способ исследования.

Работа, произведенная в единицу времени на поверхности шара радиуса r давлением, действующим на заключенный внутри воздух, выражается поверхностным интегралом

$$\iint (p + p') (q + q') dS. \quad (7)$$

Так как механическая энергия в замкнутом пространстве остается постоянной, то среднее значение этого интеграла представляет энергию, рассеянную благодаря трению жидкости. К этому добавим еще работу, израсходованную на образование отраженных волн, именно

$$- \iint p'q' dS. \quad (8)$$

Далее член

$$\iint pq dS \quad (9)$$

представляет работу, израсходованную в одних первоначальных волнах, при отсутствии препятствия. Поэтому общее количество энергии первоначальных волн, теряющееся в единицу времени благодаря присутствию препятствия, оказывается равным среднему за промежуток времени значению интеграла

$$\iint (pq' + p'q) dS, \quad (10)$$

распространенного по поверхности шара очень большого радиуса.

При составлении суммы $pq' + p'q$ нам нужно будет иметь в виду только такие члены, которые содержат пространственные сферические функции одинакового порядка. Кроме того, так как k должно быть действительным, то окончательный результат в части, касающейся сферических функций мнимого порядка, должен быть таким, как и при отсутствии вязкости. Если выразить этот результат через поток энергии в первоначальных волнах, то будем иметь на основании формул (7), (11) § 297

$$\frac{4}{9} k^4 a^4 \cdot \pi a^2. \quad (11)$$

Мы можем поэтому ограничиться рассмотрением сферических функций первого порядка. Если возьмем действительные части выражений (1) и (3), умноженные на $e^{i\sigma t}$, то получим на основании формулы (14) § 292

$$\varphi = -3kr\psi_1(kr) \cos \theta \cdot \sin \sigma t, \quad (12)$$

$$\varphi' = (H \cos \sigma t - K \sin \sigma t) kr\Psi_1(kr) \cos \theta + \\ + (H \sin \sigma t + K \cos \sigma t) kr\psi_1(kr) \cos \theta. \quad (13)$$

Это дает

$$p = -3e_0\sigma k r \psi_1(kr) \cos \theta \cdot \cos \sigma t, \quad (14)$$

$$p' = -e_0\sigma (H \sin \sigma t + K \cos \sigma t) kr\Psi_1(kr) \cos \theta + \\ + e_0\sigma (H \cos \sigma t - K \sin \sigma t) kr\psi_1(kr) \cos \theta, \quad (15)$$

$$q = -3k \{kr\psi_1'(kr) + \psi_1(kr)\} \cos \theta \cdot \sin \sigma t, \quad (16)$$

$$q' = k (H \cos \sigma t - K \sin \sigma t) \{kr\Psi_1'(kr) + \Psi_1(kr)\} \cos \theta + \\ + k (H \sin \sigma t + K \cos \sigma t) \{kr\psi_1'(kr) + \psi_1(kr)\} \cos \theta. \quad (17)$$

Отсюда следует

$$pq' + p'q = \left. \begin{aligned} &= \frac{3}{2} e_0\sigma k^3 r^2 H \{ \psi_1'(kr) \Psi_1(kr) - \psi_1(kr) \Psi_1'(kr) \} \cos^2 \theta \\ &\quad + \text{члены, зависящие от } \cos 2\sigma t, \sin 2\sigma t. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Так как $\iint \cos^2 \theta \, dS = \frac{4}{3} \pi r^2$, то среднее значение той части интеграла (10), которая зависит от сферических функций первого порядка, равно

$$2\pi e_0 \sigma k^2 r^4 H \{ \psi_1'(kr) \Psi_1(kr) - \psi_1(kr) \Psi_1'(kr) \} = 2\pi e_0 c H; \quad (19)$$

причем при приведении было использовано соотношение (19) § 292.

Если значение βa велико, то мы можем ожидать, что влиянием вязкости можно пренебречь. В самом деле, на основании формулы (4) имеем

$$H + iK = \frac{ik^3 a^3 e^{ika}}{2 + 2ika - k^2 a^2}. \quad (20)$$

Оценивая это для малых значений ka , получаем

$$H = \frac{1}{12} k^2 a^4, \quad (21)$$

а результат, заключающийся в формуле (19), через поток энергии $\left(\frac{1}{2} e_0 k^2 c\right)$ первоначальных волн представится в виде

$$\frac{1}{3} k^4 a^4 \cdot \pi a^2. \quad (22)$$

Складывая выражения (11) и (22), мы воспроизведем результат (12) § 297, который там был получен значительно более простым способом.

Если, с другой стороны, значение a имеет порядок β^{-1} или меньший, чем β^{-1} , то вследствие малости ka будем иметь

$$\begin{aligned} H + iK &= \frac{1}{2} i \left(1 - \frac{3i}{ha} - \frac{3}{h^2 a^2} \right) k^3 a^3 = \\ &= \frac{3k^3 a^3}{4\beta a} \left(1 + \frac{1}{\beta a} \right) + \frac{ik^3 a^3}{2} \left(1 + \frac{3}{2\beta a} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Потеря энергии, выраженная через поток энергии в первоначальных волнах, оказывается тогда равной

$$\frac{4\pi c^2 H}{k^2} = \frac{3ka}{\beta a} \left(1 + \frac{1}{\beta a} \right) \cdot \pi a^2. \quad (24)$$

Выражением (11) в сравнении с полученным выражением можно вполне пренебречь.

Если a мало в сравнении с β^{-1} , то результат приближенно можно написать в виде

$$\frac{6\nu}{ca} \cdot \pi a^2. \quad (25)$$

Часть падающей энергии, которая теряется в этом случае, оказывается обратно пропорциональной радиусу шара. Общее же количество потерянной энергии прямо пропорционально радиусу¹⁾. Для воздуха при 0° С имеем

$$\frac{6\nu}{ca} = 2,39 \cdot 10^{-5} \cdot a^{-1},$$

если значение a выражено в сантиметрах.

¹⁾ Числовые результаты для ряда значений βa , полученные с большим приближением, имеются в работе Шелля.

§ 363. Полученные только что результаты представляют интерес в связи с распространением звука в тумане. Можно считать, что висящая в воздухе капелька воды при падении на нее воздушных волн практически, если она не очень мала, находится в покое, так как инерция ее велика по сравнению с инерцией равного объема воздуха. Если же радиус уменьшается, то инерция убывает, как a^3 , в то время как поверхность, на которую действует трение, убывает, как a^2 ; поэтому нужно ожидать, что в конце концов будет достигнуто такое состояние, при котором капелька будет просто двигаться вместе с колеблющимся воздухом туда и сюда, и потеря энергии будет поэтому очень мала или ее совсем не будет.

Чтобы ближе исследовать это обстоятельство, представим себе, что шар может двигаться совершенно свободно. Скорость на его поверхности в области отраженных волн складывается из радиальной скорости $-\frac{1}{3} k^3 a$, как и

раньше, и из скорости $ik + \frac{d\xi}{dt}$ или $i(k + \sigma\xi)$, параллельной оси x , где ξ обозначает перемещение центра шара из своего среднего положения. Мы должны поэтому вместо формул (24) § 361 написать

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= i(k + \sigma\xi) A_1 x, \\ \chi_1 &= i(k + \sigma\xi) B_1 x. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где A_1 , B_1 имеют значения, определяемые формулами (29) § 361.

Непосредственное вычисление напряжений на поверхности шара несколько утомительно, но его можно избежать, рассматривая количество движения. Оказывается, что при этом способе мы встретимся только с сферическими функциями *первого* порядка. Положим поэтому для падающих и отраженных волн на некотором удалении соответственно

$$\varphi = \dots + 3ikr\varphi_1(kr) \cos\theta + \dots, \quad (27)$$

$$\varphi' = \dots + i(k + \sigma\xi) A_1 r f_1(kr) \cos\theta + \dots \quad (28)$$

Вычислим скорость изменения количества движения жидкости, заключающейся между шаром и концентрической с ним сферой, радиус которой велик по сравнению с β^{-1} . Первичные волны дают

$$-i\sigma\varrho_0 \iiint \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx dy dz = 4\pi\varrho_0\sigma k \{r^3\varphi_1(kr) - a^3\varphi_1(ka)\}. \quad (29)$$

Что же касается вторичных волн, то первый член в выражении для u в формуле (18) § 361 дает

$$\begin{aligned} -i\sigma\varrho_0 \iiint \frac{\partial\varphi'}{\partial x} dx dy dz &= \\ &= \frac{4}{3} \pi\varrho_0\sigma (k + \sigma\xi) A_1 \{r^3 f_1(kr) - a^3 f_1(ka)\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Остальная часть содержит χ_1 и дает

$$\begin{aligned} -2\sigma\varrho_0 (k + \sigma\xi) B_1 \int_0^r f_0(hr) 4\pi r^2 dr &= \\ &= -8\pi\varrho_0\sigma (k + \sigma\xi) B_1 \{r^3 f_1(hr) - a^3 f_1(ha)\}; \end{aligned} \quad (31)$$

где первый член в фигурных скобках может быть отброшен, так как он благодаря входящему в него множителю $e^{-\beta r}$ в конце концов стремится к нулю. Скорость изменения количества движения самого шара будет равна

$$-\frac{4}{3} \pi \rho_1 a^3 \sigma^2 \xi, \quad (32)$$

где ρ_1 обозначает плотность шара.

Движение вблизи поверхности сферы большого радиуса можно в конце концов рассматривать как безвихревое движение, и результирующее давление на этой поверхности можно поэтому считать равным

$$\begin{aligned} - \iint (p + p') \cos \theta \, dS &= -i\sigma e_0 \iint (\varphi + \varphi') \cos \theta \, dS = \\ &= 4\pi e_0 \sigma k r^2 \psi_1(kr) + \frac{4}{3} \pi e_0 \sigma (k + \sigma \xi) A_1 r^2 f_1(kr). \end{aligned} \quad (33)$$

Приравнявая общую скорость изменения количества движения результирующему давлению, получим

$$\begin{aligned} e_0 k \psi_1(ka) + \frac{1}{3} e_0 (k + \sigma \xi) A_1 f_1(ka) - \\ - 2e_0 (k + \sigma \xi) B_1 f_1(ha) + \frac{1}{3} e_1 \sigma \xi = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Это равенство вследствие соотношения (26) § 361 приводится к виду

$$e_0 k \psi_1(ka) - \frac{1}{3} e_0 (k + \sigma \xi) \{1 + ka f_1'(ka) A_1\} + \frac{1}{3} e_1 \sigma \xi = 0; \quad (35)$$

отсюда следует

$$-\frac{\sigma \xi}{k} = 1 - \frac{e_1 - 3e_0 \psi_1(ka)}{e_1 - e_0 - e_0 ka f_1'(ka) A_1}. \quad (36)$$

Эта формула дает отношение перемещения шара к перемещению воздуха, который при отсутствии шара занимал бы его место.

Если бы можно было пренебречь вязкостью, то мы имели бы $ha = \infty$. Отсюда, если ka мало, находим приближенно

$$A_1 = \frac{1}{2} (ka)^3, \quad -ka f_1'(ka) = 3(ka)^{-3}. \quad (37)$$

Названное выше отношение оказывается, таким образом, равным, как в формуле (21) § 298,

$$1 - \frac{e_1 - e_0}{e_1 + \frac{1}{2} e_0}. \quad (38)$$

Если, с другой стороны, a имеет порядок β^{-1} или меньший, чем β^{-1} , то на основании формулы (4) § 362 будем иметь

$$A_1 = \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{2\beta a}\right) - \frac{3i}{4\beta a} \left(1 + \frac{1}{\beta a}\right) \right\} k^3 a^3, \quad (39)$$

причем высшие степени величины ka отброшены. Для малых значений βa это приводится приближенно к виду

$$A_1 = -\frac{3ik^3 a^3}{4\beta^2 a^2}; \quad (40)$$

формула (36) переходит теперь в следующую:

$$-\frac{\sigma \xi}{k} = 1 - \left\{ 1 - \frac{9}{4} \frac{i e_0}{(e_1 - e_0) \beta^2 a^2} \right\}^{-1}. \quad (41)$$

Если $\beta^2 a^2$, будучи само по себе малым, все же велико в сравнении с $\frac{e_0}{e_1 - e_0}$, то выражение (41) мало, и шар остается приблизительно в покое, так как инерция в этом случае все еще имеет преобладающее значение.

Но если $\beta^2 a^2$ мало по сравнению с $\frac{e_0}{e_1 - e_0}$, то отношение (41) приближается к единице, и шарик движется в этом случае вместе с воздухом.

Полагая $\frac{e_0}{e_1} = 0,00129$, $\nu = 0,132$, получаем из соответствующего условия, что радиус a должен быть мал по отношению к величине

$$1,10 \cdot 10^{-2} \cdot N^{-\frac{1}{2}} \text{ см},$$

где N обозначает частоту воздушных волн. Для частоты 256 значение a должно быть поэтому порядка 0,001 мм.

Чтобы вычислить потерю энергии, мы должны предположить, что выражение (28) аналогично выражению (3) приведено к виду

$$\varphi' = \dots + (H' + iK') f_1(kr) kr \cos \theta + \dots \quad (42)$$

Тогда результат, до тех пор пока мы ограничиваемся сферическими функциями первого порядка, примет вместо (19) вид

$$2\pi e_0 c H'.$$

Для определения H' имеем приближенное уравнение

$$\begin{aligned} H' + iK' &= i \left(1 + \frac{\sigma \xi}{k} \right) A_1 = \frac{i A_1 \{e_1 - 3e_0 \psi_1(ka)\}}{e_1 - e_0 - e_0 k a f_1'(ka) A_1} = \\ &= \frac{i A_1 (e_1 - e_0)}{e_1 - e_0 + 3e_0 \frac{A_1}{k^2 a^2}}. \end{aligned} \quad (44)$$

Если вязкостью можно пренебречь или если значение βa велико, то будем иметь приближенно

$$A_1 = \frac{1}{2} k^2 a^2 - \frac{1}{12} i k^4 a^4, \quad (45)$$

и, следовательно,

$$H' = \frac{1}{12} \left(\frac{e_1 - e_0}{e_1 + \frac{1}{2} e_0} \right)^2 \cdot k^4 a^4. \quad (46)$$

Энергия, выделенная от первичных волн, будучи выражена через энергию этих волн, будет равна

$$\left\{ \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \left(\frac{e_1 - e_0}{e_1 + \frac{1}{2} e_0} \right)^2 \right\} k^4 a^4 \cdot \pi a^2, \quad (47)$$

причем в это выражение вошла часть энергии, представляемая формулой (11), происходящая от сопротивления шара сжатию. Полагая $\frac{\rho_1}{\rho_0} = \infty$, приходим снова к результату (12) § 297.

Если же, наоборот, значение βa мало, то приближенный способ становится утомительным, но, очевидно, что если радиус настолько мал, что шарик просто увлекается воздухом в его колебательном движении, то можно пренебречь рассеянием энергии, происходящим от членов первого порядка, и потому полное рассеяние энергии практически определяется в этом случае формулой (11) § 362.

§ 364. Чтобы исследовать влияние вязкости на колебания воздуха, заключенного в сосуде сферической формы, нужно заменить функции f_n , входящие в формулы (18) § 361, через ψ_n , так как скорость в начале координат конечна.

Формулы (20) и (21) § 361 показывают в этом случае, что на границе $r = a$ должны иметь место равенства

$$- \{ka\psi'_n(ka) + n\psi_n(ka)\} \varphi_n + n(n+1)(2n+1)\psi_n(ha) \chi_n = 0 \quad (1)$$

и

$$-\psi_n(ka) \varphi_n + (2n+1)\{ha\psi'_n(ha) + (n+1)\psi_n(ha)\} \chi_n = 0. \quad (2)$$

Из этих уравнений получается

$$ka\psi'_n(ka) \varphi_n + n(2n+1)ha\psi'_n(ha) \chi_n = 0. \quad (3)$$

Отсюда следует

$$\frac{ka\psi'_n(ka) + n\psi_n(ka)}{ka\psi'_n(ka)} = - \frac{(n+1)\psi_n(ha)}{ha\psi'_n(ha)}. \quad (4)$$

Если мы положим, что значение a велико по сравнению с β^{-1} , то нам нужно будет только определить поправку, которую следует ввести в результаты § 293, 1; там было показано, что при отсутствии вязкости значение ka удовлетворяет уравнению

$$\zeta\psi'_n(\zeta) + n\psi_n(\zeta) = 0. \quad (5)$$

Положим в соответствии с этим

$$ka = \zeta + \varepsilon, \quad (6)$$

где ζ удовлетворяет уравнению (5) и ε предполагается малым. Левая часть уравнения (4) получит тогда на основании уравнения (10) § 292 следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta\psi'_n(\zeta) + (n+1)\psi'_n(\zeta)}{-n\psi_n(\zeta)} \cdot \varepsilon &= \frac{(n+1)\psi'_n(\zeta) + \zeta\psi_n(\zeta)}{n\psi_n(\zeta)} \cdot \varepsilon = \\ &= \frac{\zeta^2 - n(n+1)}{n\zeta} \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Правая часть на основании формул (8) § 292 приводится к виду

$$- \frac{n+1}{ha} \operatorname{tg} \left(ha + \frac{1}{2} n\pi \right),$$

так как согласно предположению значение ha велико. Кроме того, если положить

$$ha = (1 - i) \beta a,$$

то будет иметь место приближенное уравнение

$$\operatorname{tg} \left(ha + \frac{1}{2} n\pi \right) = -i.$$

Отсюда следует

$$\varepsilon = \frac{n(n+1)\zeta}{\zeta^2 - n(n+1)} \cdot \frac{-1+i}{2\beta a}. \quad (7)$$

Так как в наши формулы нужно еще ввести зависящий от времени множитель e^{ikct} , то действительная часть выражения (7) указывает на незначительное уменьшение частоты. Мнимая же часть показывает, что модуль затухания колебаний равен

$$\tau = \frac{\zeta^2 - n(n+1)}{n(n+1)\zeta} \cdot \frac{2\beta a^2}{c} = \frac{\zeta^2 - n(n+1)}{n(n+1)\sqrt{\zeta}} \cdot \sqrt{\frac{2a^2}{\nu c}}, \quad (8)$$

так как приближенно имеем

$$\beta = \sqrt{\frac{c\zeta}{2\nu a}}.$$

В случае $n=1$ мы имеем для самого медленного из нормальных колебаний $\zeta = 2,081$ и вместе с тем

$$\tau = 1,143 \sqrt{\frac{a^2}{\nu c}}.$$

Если положить $c = 3,32 \cdot 10^4$, $\nu = 0,132$, то из этой формулы получим $\tau = 0,0173 a^{3/2}$. Нельзя, однако, забывать, что эти числовые оценки лежат намного ниже истинных значений, так как тепловые процессы при этом оставались без внимания.

Предшествующее исследование неприменимо к случаю *радиальных* колебаний. Если $n=0$, то имеют место формулы (12) § 361 вместе с формулой

$$\varphi = C\psi_0(kr) \quad (9)$$

и граничное условие дает соотношение

$$\psi_0'(ka) = 0. \quad (10)$$

Если ka — корень этого уравнения, то на основании формулы (17) § 361 имеем приближенное равенство

$$\sigma = kc \left(1 + \frac{2}{3} \frac{i\nu k}{c} \right). \quad (11)$$

Модуль затухания в этом случае будет равен

$$\tau = \frac{3a^2}{2\nu} \cdot (ka)^{-2}. \quad (12)$$

Следует заметить, что отношение выражения (8) к выражению (12) имеет порядок $\sqrt{\frac{ac}{\nu}}$, если не обращать внимание на числовые множители.

Во всех случаях, для которых наши приближенные методы имеют силу, это отношение велико, так что благодаря только одной вязкости радиальные колебания гасятся на много медленнее, чем те колебания, для

которых значение l больше нуля. Этот результат можно легко объяснить. В самом деле, в случае колебаний последнего рода то условие, что жидкость не должна скользить вдоль стенок сосуда, дает для слоев газа, расположенных ближе к поверхности, более значительную деформацию частиц и соответственно с этим большее значение для рассеяния энергии.

Метод функции рассеяния, который мы применяли в § 348 к случаю волн в воде, можно было бы приложить к выводу формулы (12) для *радиальных* колебаний; однако, для $l > 0$ этот метод привел бы к неверному результату, так как лежащее в основе его условие, что движение лишь в незначительной степени зависит от вязкости, не выполняется вблизи от граничной поверхности.

Для самого медленного радиального колебания мы имеем $ka = 4,493$ отсюда следует

$$\tau = 0,0743 \frac{a^2}{\nu}.$$

В случае воздуха при 0°C эта формула дает $\tau = 0,56 a^2$ ¹⁾.

Турбулентное движение.

§ 365. Остается теперь обратить внимание на нерассмотренный до сих пор наиболее трудный вопрос нашего предмета.

Уже было указано, что отбрасывание членов второго порядка $\left(u \frac{du}{dx} \text{ и т. д.} \right)$ очень ограничивает приложимость многих из полученных нами выше результатов к жидкостям, обладающим обыкновенной степенью подвижности. В тех случаях, когда скорости или линейные размеры не очень малы, можно установить, насколько это позволяет наблюдение, что действительное движение значительно отклоняется от того движения, которое представляют наши формулы. Если, например, твердое тело обтекаемой формы движется в жидкости, то в слое жидкости, прилегающем к телу, возникает нерегулярное вихревое движение, и за телом образуется цепочка вихрей, тогда как на некотором расстоянии по сторонам движение оказывается сравнительно спокойным и однообразным.

Указанная здесь недостаточность математического анализа не относится к случаям *прямолинейного* течения, такого, как мы исследовали в §§ 330, 331; но даже и здесь наблюдение показывает, что теоретически возможные движения практически при известных условиях становятся неустойчивыми.

Рейнольдс ²⁾ произвел очень тщательные экспериментальные исследования течения жидкости по трубе с круговым сечением по-

¹⁾ Этот параграф с небольшими изменениями взят из указанной на стр. 799 работы автора.

²⁾ Reynolds, An Experimental Investigation of the Circumstances which determine whether the Motion of Water shall be Direct or Sinuous, and of the Law of Resistance in Parallel Channels, Phil. Trans., CLXXIV, 935 (1883) (Papers, II, 51). Исторический обзор этих исследований и относящиеся к этому соображения более ранних авторов можно найти в работе К и н б с а, Proc. Roy. Soc., N. S. W., XXXI, 314 (1897). В частности в этой работе есть ссылки на Гагена, Berl. Abh., 1854, стр. 17.