

Если мы предположим, например, что силы действуют на бесконечно малую область около начала и параллельны оси  $x$ , и обозначим

$$F = e \iiint X' dx' dy' dz', \quad (11)$$

то получим

$$\varphi = -\frac{iF}{4\pi k c \rho} \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad (12)$$

где  $r$  обозначает расстояние от начала. Сосредоточенная сила  $F e^{i k c t}$  таким образом эквивалентна диполю интенсивности  $\frac{iF}{k c \rho}$ .

Из формул (9) и (11) мы получаем, вводя опять множитель, зависящий от времени,

$$s = \frac{F}{4\pi \rho c^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{i\sigma \left(t - \frac{r}{c}\right)}}{r}, \quad (13)$$

что соответствует силе  $F e^{i\sigma t}$ . Этот результат можно так обобщить, что он окажется годным для произвольного закона силы как функции от времени. Если мы обозначим этот закон через  $F(t)$ , то получим

$$s = \frac{1}{4\pi \rho c^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{F \left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}. \quad (14)$$

### Приложения сферических функций.

§ 292. Если граничные условия относятся к сферическим поверхностям, то решение уравнения

$$(\Delta + k^2) \varphi = 0 \quad (1)$$

можно получить следующим способом.

Мы можем предположить, что значение  $\varphi$  на произвольной сферической поверхности радиуса  $r$  с центром в начале координат разлагается в ряд поверхностных сферических функций, коэффициенты которого суть функции  $r$ . Мы можем, следовательно, написать

$$\varphi = \sum R_n \varphi_n, \quad (2)$$

где  $\varphi_n$  есть объемная сферическая функция степени  $n$  и  $R_n$  есть функция только  $r$ .

Тогда будем иметь

$$\Delta(R_n \varphi_n) = \Delta R_n \varphi_n + 2 \left( \frac{\partial R_n}{\partial x} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + \frac{\partial R_n}{\partial y} \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} + \frac{\partial R_n}{\partial z} \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \right) + R_n \Delta \varphi_n$$

или

$$\Delta(R_n \varphi_n) = \Delta R_n \varphi_n + \frac{2}{r} \frac{dR_n}{dr} \left( x \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \right) + R_n \Delta \varphi_n, \quad (3)$$

но согласно определению объемной сферической функции

$$\Delta \varphi_n = 0$$

и

$$x \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = n \varphi_n.$$

Отсюда следует

$$\Delta(R_n \varphi_n) = \left( \Delta R_n + \frac{2n}{r} \frac{dR_n}{dr} \right) \varphi_n = \left( \frac{d^2 R_n}{dr^2} + \frac{2(n+1)}{r} \frac{dR_n}{dr} \right) \varphi_n. \quad (4)$$

Если подставить значение  $\varphi$  из формулы (2) в уравнение (1), то отдельные члены в выражении (2) должны для каждого  $n$  удовлетворять уравнению независимо один от другого, а это дает

$$\frac{d^2 R_n}{dr^2} + \frac{2(n+1)}{r} \frac{dR_n}{dr} + k^2 R_n = 0. \quad (5)$$

Это уравнение можно интегрировать степенными рядами. Если мы положим

$$R_n = \sum C_m (kr)^m,$$

то найдем следующую рекуррентную формулу

$$m(2n+1+m)C_m + C_{m-2} = 0.$$

Это дает два ряда, расположенных по возрастающим степеням  $r$ , из которых один начинается со значения  $m=0$ , а другой со значения  $m=-2n-1$ ; таким образом, имеем

$$R_n = A_n \left( 1 - \frac{k^2 r^2}{2(2n+3)} + \frac{k^4 r^4}{2 \cdot 4(2n+3)(2n+5)} - \dots \right) + \\ + B_n r^{-2n-1} \left( 1 - \frac{k^2 r^2}{2(1-2n)} + \frac{k^4 r^4}{2 \cdot 4(1-2n)(3-2n)} - \dots \right),$$

где  $A_n, B_n$  — произвольные постоянные. Если теперь мы положим  $\varphi_n = r^n S_n$ , так что  $S_n$  будет поверхностной сферической функцией порядка  $n$ , то общее решение уравнения (1) можем написать в виде

$$\varphi = \sum \{ A_n \psi_n(kr) + B_n \Psi_n(kr) \} r^n S_n, \quad (6)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \psi_n(\zeta) &= \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)} \left( 1 - \frac{\zeta^2}{2(2n+3)} + \frac{\zeta^4}{2 \cdot 4(2n+3)(2n+5)} - \dots \right), \\ \Psi_n(\zeta) &= \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{\zeta^{2n+1}} \left( 1 - \frac{\zeta^2}{2(1-2n)} + \frac{\zeta^4}{2 \cdot 4(1-2n)(3-2n)} - \dots \right) \end{aligned} \right\} (7)^1$$

<sup>1)</sup> Этот способ обозначения уклоняется несколько от способа, примененного в книге Heine, *Kugelfunktionen*, 1, 82. Следует заметить, что формула (6) дает непосредственное доказательство предложения (8) § 289.

Функции (7) имеют следующую связь с функциями Бесселя дробного порядка:

$$\zeta^n \psi_n(\zeta) = \sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}} J_{n+1/2}(\zeta), \\ \zeta^n \Psi_n(\zeta) = (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}} J_{-n-1/2}(\zeta).$$

Таблицы функций Бесселя порядка  $\pm \frac{1}{2}(2m+1)$ , где  $m$  есть целое число, были составлены Лоттелем с единичным интервалом  $\zeta$ ; они воспроизведены в сборнике таблиц Jahnke und Emde и в руководстве Watson'a. Таблицы с коротким интервалом (с интервалом 0,2) были даны Динником • *Archiv d. Math. u. Phys.* (3) XX (1912).

Если движение в начале координат не будет иметь бесконечной скорости, то в формуле (6) следует удержать только первый член.

Функции  $\psi_n$ ,  $\Psi_n$  можно представить также в конечном виде, именно следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \psi_n(\zeta) &= \left( -\frac{d}{\zeta d\zeta} \right)^n \frac{\sin \zeta}{\zeta}, \\ \Psi_n(\zeta) &= \left( -\frac{d}{\zeta d\zeta} \right)^n \frac{\cos \zeta}{\zeta}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Тождество этих выражений с разложениями (7) легко можно показать, если разложить  $\sin \zeta$ ,  $\cos \zeta$  в ряды и выполнить дифференцирования. В качестве частных случаев имеем

$$\left. \begin{aligned} \psi_0(\zeta) &= \frac{\sin \zeta}{\zeta}, \quad \psi_1(\zeta) = \frac{\sin \zeta}{\zeta^2} - \frac{\cos \zeta}{\zeta^2}, \\ \psi_2(\zeta) &= \left( \frac{3}{\zeta^3} - \frac{1}{\zeta^3} \right) \sin \zeta - \frac{3 \cos \zeta}{\zeta^4}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Формулы (6) и (8) показывают, что общее решение уравнения

$$\frac{d^2 R_n}{d\zeta^2} + \frac{2(n+1)}{\zeta} \frac{dR_n}{d\zeta} + R_n = 0, \quad (10)$$

г. е. уравнения, которое получится, если написать  $\zeta$  вместо  $kr$  в уравнении (5), имеет вид

$$R_n = \left( \frac{d}{\zeta d\zeta} \right)^n \frac{Ae^{i\zeta} + Be^{-i\zeta}}{\zeta}. \quad (11)$$

Этот результат можно легко проверить; если  $R_n$  есть какое-либо решение уравнения (10), то мы видим, что соответствующее уравнение для  $R_{n+1}$  удовлетворится функцией вида

$$R_{n+1} = \frac{dR_n}{\zeta d\zeta},$$

и после повторного применения этого приема окажется, что уравнению (10) удовлетворит функция

$$R_n = \left( \frac{d}{d\zeta} \right)^n R_0, \quad (12)$$

где  $R_0$  есть решение уравнения

$$\frac{d^2(\zeta R_0)}{d\zeta^2} + \zeta R_0 = 0,$$

а именно

$$R_0 = \frac{Ae^{i\zeta} + Be^{-i\zeta}}{\zeta}. \quad (13)^1$$

<sup>1)</sup> Приведенный здесь анализ, часто применяемый в математической физике, впервые был дан Лапласом, *Sur la diminution de la durée du jour par le refroidissement de la Terre*, *Conn. des Temps* за 1823, стр. 245 (1820) (*Méc. Céleste*, 1. т., IV гл.), и с тех пор в том или другом виде применялся различными авторами. Исторические данные можно найти у Glaisher'a, *On Riccati's Equation and its transformation*, *Phil. Trans.*, 1881; там эта задача рассматривается как относящаяся к теории дифференциальных уравнений.

Для каждой комбинации функций  $\psi_n(\zeta)$ ,  $\Psi_n(\zeta)$ , пригодной для представления *расходящихся* волн, удобно будет ввести особое обозначение. Мы положим

$$f_n(\zeta) = \left(-\frac{d}{\zeta d\zeta}\right)^n \frac{e^{-i\zeta}}{\zeta} = \Psi_n(\zeta) - i\psi_n(\zeta). \quad (14)$$

Как частные случаи приведем здесь

$$\left. \begin{aligned} f_0(\zeta) &= \frac{e^{-i\zeta}}{\zeta}, & f_1(\zeta) &= \left(\frac{i}{\zeta^2} + \frac{1}{\zeta^3}\right) e^{-i\zeta}, \\ f_2(\zeta) &= \left(-\frac{1}{\zeta^3} + \frac{3i}{\zeta^4} + \frac{3}{\zeta^5}\right) e^{-i\zeta}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Общая формула имеет вид

$$f_n(\zeta) = \frac{i^n e^{-i\zeta}}{\zeta^{n+1}} \left\{ 1 + \frac{n(n+1)}{2i\zeta} + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 4 (i\zeta)^2} + \dots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n (i\zeta)^n} \right\}. \quad (16)$$

Эту формулу можно получить посредством „полной индукции“ или из дифференциального уравнения, которому должна удовлетворять функция  $f_n(\zeta)$ <sup>1)</sup>.

Если мы приравняем друг другу отдельно действительную и мнимую части, то на основании формулы (14) получим для  $\psi_n(\zeta)$ ,  $\Psi_n(\zeta)$  выражения через  $\cos \zeta$  и  $\sin \zeta$ ; коэффициентами в этих выражениях будут рациональные функции от  $\zeta$ .

Все функции  $\psi_n(\zeta)$ ,  $\Psi_n(\zeta)$ ,  $f_n(\zeta)$  удовлетворяют рекуррентным формулам вида

$$\psi_n'(\zeta) = -\zeta \psi_{n+1}(\zeta), \quad (17)$$

$$\zeta \psi_n'(\zeta) + (2n+1)\psi_n(\zeta) = \psi_{n-1}(\zeta). \quad (18)$$

Формулы эти часто оказываются полезными для понижения порядка функций.

Мы имеем также соотношение

$$\{\psi_n'(\zeta)\Psi_n(\zeta) - \psi_n(\zeta)\Psi_n'(\zeta)\} \zeta^{2n+2} = 1 \quad (19)$$

или эквивалентное ему соотношение

$$\{\psi_{n-1}(\zeta)\Psi_n(\zeta) - \psi_n(\zeta)\Psi_{n-1}(\zeta)\} \zeta^{2n+1} = 1. \quad (20)$$

Из формул (17) и (18) видно, что левая часть равенства (19) не меняет своего значения, если написать  $n-1$  вместо  $n$ , и потому для доказательства будет достаточно исследовать случай  $n=0$ . Формулу (19) можно также вывести из формулы (4) § 290, если рас-

<sup>1)</sup> Ср. Stokes, см. ниже, стр. 636. Обозначения там применяются другие.

смотреть область, заключенную между двумя концентрическими шаровыми поверхностями <sup>1)</sup>. Если подставить в названную формулу

$$\varphi = \Psi_n(kr) r^n S_n, \quad \varphi' = \psi_n(kr) r^n S_n, \quad (21)$$

то оказывается, что выражение

$$\{\psi'_n(kr)\Psi_n(kr) - \psi_n(kr)\Psi'_n(kr)\} r^{2n+1} \iint S_n^2 d\tilde{\omega}, \quad (22)$$

где интегрирование распространено на все телесные элементарные углы  $d\tilde{\omega}$  с вершинами в начале координат, не зависит от  $r$ . Полагая  $r$  бесконечно малым, мы опять придем к формуле (19).

**§ 293.** Простое применение предшествующих вычислений мы встречаем при исследовании колебаний воздуха, заключенного в шаровой оболочке.

1. Рассмотрим прежде всего свободные колебания в случае твердых границ. Так как движение в начале координат коечно, то имеем

$$\varphi = A\psi_n(kr) r^n S_n e^{i\sigma t} \quad (1)$$

с граничным условием

$$ka\psi'_n(ka) + n\psi_n(ka) = 0, \quad (2)$$

где  $a$  есть радиус. Этим уравнением определяются допустимые значения  $k$  и вместе с тем также  $\sigma (= kc)$ .

Из формул (8) § 292 следует, что это уравнение всегда приводится к виду

$$\operatorname{tg} ka = F(ka), \quad (3)$$

где  $F(ka)$  есть рациональная алгебраическая функция. Корни вычисляются тогда без затруднений или при помощи рядов, или посредством способа, данного Фурье <sup>2)</sup>.

В случае чисто радиальных колебаний ( $n=0$ ) мы получаем

$$\varphi = A \frac{\sin kr}{kr} e^{i\sigma t} \quad (4)$$

с граничным условием, определяющим частоту нормальных колебаний,

$$\operatorname{tg} ka = ka. \quad (5)$$

Корни этого уравнения, встречающиеся в различных физических задачах, легче всего можно вычислить посредством ряда <sup>3)</sup>. Шверд <sup>4)</sup> получил для первых корней следующие значения

$$\frac{ka}{\pi} = 1,4303, 2,4590, 3,4709, 4,4774, 5,4818, 6,4844. \quad (6)$$

Эти значения приближаются к виду  $m + \frac{1}{2}$ , где  $m$  — целое число, и представляют отношение  $\frac{2a}{\lambda}$  диаметра шара к длине волны. Если мы возьмем

обратные значения, то найдем

$$\frac{\lambda}{2a} = 0,6992, 0,4067, 0,2881, 0,2233, 0,1824, 0,1542. \quad (7)$$

<sup>1)</sup> Ср. Rayleigh, Theory of Sound, § 327.

<sup>2)</sup> Fourier, Théorie analytique de la Chaleur, Париж, 1822, § 286.

<sup>3)</sup> Euler, Introductio in Analysin Infinitorum, Лозанна, 1748, II, 319; Rayleigh, Theory of Sound, § 207.

<sup>4)</sup> Приведено в книге Verdet, Leçons d'Optique Physique, Париж, 1869—1870, I, 266.

В случае второго и следующих корней уравнения (5) положение сферических узлов ( $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$ ) определяется корнями низшего порядка. Так, например, при втором нормальном колебании имеется один сферический узел, радиус которого равен

$$\frac{r}{a} = \frac{1,4303}{2,4590} = 0,5817.$$

В случае  $n=1$ , если мы направим ось  $x$  по оси сферической функции  $S_1$  и положим  $x=r \cos \theta$ , будем иметь

$$\varphi = A \left( \frac{\sin kr}{k^2 r^2} - \frac{\cos kr}{kr} \right) \cos \theta \cdot e^{i\omega t}, \quad (8)$$

и уравнение (2) получит тогда вид

$$\operatorname{tg} ka = \frac{2ka}{2 - k^2 a^2}. \quad (9)$$

Корень, равный нулю, значения не имеет. Ближайший корень дает для отношения диаметра к длине волны значение

$$\frac{ka}{\pi} = 0,6625,$$

а для корней более высокого порядка значение этого отношения приближается соответственно к целым числам 2, 3, 4, ... В случае наименьшего корня, если возьмем обратное значение, будем иметь

$$\frac{\lambda}{2a} = 1,509.$$

При этом, самом медленном из всех нормальных колебаний, воздух движется до некоторой степени таким же образом, как в закрытой с обоих концов трубе. В случае корней более высокого порядка корни низшего порядка будут давать положения сферических узлов ( $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$ ). Относительно дальнейших подробностей этой задачи мы отсылаем читателя к исследованиям Рэлея<sup>1)</sup>.

2. Чтобы определить движение воздуха, заключенного в замкнутый сосуд, если это движение вызвано колебанием граничной поверхности в направлении нормалей, например, по закону

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = S_n e^{i\omega t}, \quad (10)$$

положим

$$= A \varphi_n(kr) e^{-n} S_n e^{i\omega t}; \quad (11)$$

тогда из граничного условия получим

$$A \{ ka \varphi_n'(ka) + n \varphi_n(ka) \} a^{n-1} = 1,$$

и, следовательно,

$$\varphi = \frac{\varphi_n(kr)}{ka \varphi_n'(ka) + n \varphi_n(ka)} a \left( \frac{r}{a} \right)^n S_n e^{i\omega t}. \quad (12)$$

Как и следовало ожидать, это выражение становится бесконечно большим, когда  $ka$  есть корень уравнения (2), т. е. всегда, когда период заданного на

<sup>1)</sup> Rayleigh, On the Vibrations of a Gas contained within a Rigid Spherical Envelope, Proc. Lond. Math. Soc. (1), IV, 93 (1872); Theory of Sound, § 331.

границе колебания совпадает с периодом свободного колебания, соответствующего сферической функции того же порядка  $n$ .

Если мы положим  $ka=0$ , то придем к случаю несжимаемой жидкости. Формула (12) приводится в этом случае, как и в § 91, к виду

$$\varphi = \frac{a}{n} \left( \frac{r}{a} \right)^n S_n e^{i\omega t}. \quad (13)$$

Важно обратить внимание на то, что этот результат в качестве уже приближенного имеет место и в случае газа, когда  $ka$  мало, т. е. всегда, когда длина волны  $\left( \frac{2\pi}{k} \right)$ , соответствующая действительному периоду, велика по сравнению с окружностью сферы. Мы имеем здесь пример общего закона, установленного в § 290; ниже (§§ 299, 300) этот закон будет использован более широко.

3. Чтобы определить движение газа, который заключен в пространстве, ограниченном двумя концентрическими шаровыми поверхностями, мы можем воспользоваться формулой (6) § 292 во всем ее объеме. Интересен только тот случай, когда оба радиуса приблизительно равны; однако, этот случай может быть легче исследован непосредственно <sup>1)</sup>.

Уравнение  $(\Delta + k^2)\varphi = 0$  в полярных координатах  $r, \theta, \omega$  принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right\} + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} \right] + k^2 \varphi = 0, \quad (14)$$

где  $\mu = \cos \theta$ . Если теперь  $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$  при  $r=a$  и  $r=b$ , причем  $a$  и  $b$  приблизительно равны, то мы можем совершенно пренебречь радиальным движением, так что уравнение приведет к виду

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right\} + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} + k^2 a^2 \varphi = 0. \quad (15)$$

Оказывается, точно так же как в § 199, что единственные решения, конечные на всей поверхности шара, относятся к типу

$$\varphi \text{ пропорционально } S_n, \quad (16)$$

где  $S_n$  — сферическая функция целого порядка  $n$  и соответственные значения  $k$  даны формулой

$$k^2 a^2 = n(n+1). \quad (17)$$

При самом медленном колебании ( $n=1$ ) газ движется через экватор функции  $S_1$  то в одну, то в другую сторону, причем в крайних фазах колебания газ сгущается на одном полюсе и разрежается на другом. Так как в этом случае  $ka = \sqrt{2}$ , то для соответствующей длины волны оказывается  $\frac{\lambda}{2a} = 2,221$ .

Для ближайшего следующего колебания ( $n=2$ ) вид колебаний зависит от типа сферической функции  $S_2$ . Если эта функция есть зональная сферическая функция, то экватор будет узловой линией. Частота определяется из равенства  $ka = \sqrt{6}$  или  $\frac{\lambda}{2a} = 1,283$ .

<sup>1)</sup> Rayleigh, Theory of Sound, § 233. Прямое решение принадлежит Chree, Mess. of Math., XV, 20 (1866); оно основывается на формуле (19) § 292.

§ 294. Рассмотрим теперь распространение волн в неограниченной среде от поверхности шара *наружу* <sup>1)</sup>.

Если на поверхности ( $r = a$ ) задана нормальная скорость

$$\dot{r} = S_n e^{i\sigma t}, \quad (1)$$

то соответствующее решение уравнения  $(\Delta + k^2)\varphi = 0$  в обозначениях § 292 будет иметь вид

$$\varphi = C_n f_n(kr) r^n S_n e^{i\sigma t}. \quad (2)$$

Условие

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r} = S_n e^{i\sigma t}, \quad (3)$$

которое должно быть выполнено на поверхности шара ( $r = a$ ), дает

$$C_n = -\frac{1}{\{ka f_n'(ka) + n f_n(ka)\} a^{n-1}}. \quad (4)$$

На расстояниях  $r$ , которые велики по сравнению с длиной волны  $\left(\frac{2\pi}{k}\right)$ , будем иметь приближенно

$$f_n(kr) = \frac{i^n e^{ikr}}{(kr)^{n+1}}, \quad (5)$$

так что формула (2) приобретет вид

$$\varphi = \frac{i^n C_n}{k^{n+1}} \frac{e^{ik(ct-r)}}{r} S_n \quad (6)$$

или в действительной форме

$$\varphi = \frac{|C_n|}{k^{n+1}} \frac{\cos k(ct-r+\varepsilon)}{r} S_n. \quad (7)$$

Поток энергии изнутри наружу, отнесенный к единице времени, равен

$$-\int \int p \frac{\partial \varphi}{\partial r} r^2 d\tilde{\omega}, \quad (8)$$

где  $d\tilde{\omega}$  обозначает элемент телесного угла и  $r$  следует считать очень большим. Так как

$$p = p_0 + \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (9)$$

то в качестве среднего значения для выражения (8) получаем

$$\frac{1}{2} \frac{\rho_0 c}{k^{2n}} |C_n|^2 \int \int S_n^2 d\tilde{\omega}. \quad (10)$$

Этот результат можно было бы получить прямо из формулы (9) § 280, так как волны, которые распространяются в каком-нибудь определенном направлении, в конце концов будут плоскими.

<sup>1)</sup> Эта задача несколько другим способом была решена Стоксом: Stokes, On the Communication of Vibrations from a Vibrating Body to a surrounding Gas, Phil. Trans., 1868 [Papers, IV, 299].



Если  $n > 0$ , то нормальная скорость в двух каких-либо областях поверхности шара  $r = a$ , разделенных узловой линией  $S_n = 0$ , имеет противоположные фазы. Боковое движение воздуха вблизи от поверхности шара по направлению от тех мест, в которых воздух движется наружу, к тем местам, в которых он движется внутрь, в случае не слишком малой длины волны проявляет себя в том, что интенсивность возмущения в некотором удалении уменьшается по сравнению с той интенсивностью, которая должна была бы иметь место, если бы скорость повсюду была в одинаковых фазах; это действие будет тем более заметным, чем выше будет порядок  $n$  соответствующей сферической функции, так как в этом случае число частей, на которые поверхность шара разделяется узловыми линиями, будет больше. Кроме того, для той же сферической функции  $S_n$  и для определенной частоты  $\frac{\sigma}{2\pi}$  влияние бокового движения будет очень быстро увеличиваться по мере возрастания скорости волны  $c$ , а, следовательно, по мере возрастания длины волны  $\frac{2\pi}{k}$ . Этим объясняется, почему колокол в воде звучит слабее, чем в воздухе<sup>1)</sup>.

Чтобы иллюстрировать эти результаты, заметим следующее: если бы боковое движение воздуха было задержано большим количеством конусообразных перегородок, идущих по направлению радиусов неограниченно наружу, то выражение (10) нужно было бы заменить следующим

$$\frac{1}{2} e_0 c |C_0|^2 \iint S_n^2 d\omega. \quad (11)$$

Отношение  $I_n$  этой величины к выражению (10) равно абсолютному значению количества

$$\frac{(ka)^{2n} \{ka f'_n(ka) + n f_n(ka)\}^2}{\{ka f'_0(ka)\}^2}. \quad (12)$$

Из данных в формулах (15) § 292 выражений для  $f_0, f_1, f_2$  легко получаем

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= 1, \\ I_1 &= \frac{4 + k^4 a^4}{k^2 a^2 (1 + k^2 a^2)}, \\ I_2 &= \frac{81 + 9k^2 a^2 - 2k^4 a^4 + k^6 a^6}{k^4 a^4 (1 + k^2 a^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$ka$	$I_0$	$I_1$	$I_2$
4	1	0,95588	0,87523
2	1	1	1,8625
1	1	2,5	44,5
0,5	1	13	1064,2
0,25	1	60,294	19650

Приведенные примеры вместе с некоторыми другими были даны Стоксом.

<sup>1)</sup> Stokes, см. выше.

Отношение скоростей переноса энергии для двух различных газов, находящихся в одинаковых условиях, равно абсолютному значению отношения

$$\frac{(k'a)^{2n-1} \{k'af'_n(ka) + nf_n(k'a)\}^2}{(ka)^{2n-1} \{kaf'_n(ka) + nf_n(ka)\}^2}, \quad (14)$$

причем штрихи у  $k$  относятся ко второму газу. Это выражение при помощи соотношения

$$\frac{\rho_0 c}{\rho'_0 c'} = \frac{c'}{c} = \frac{k}{k'}$$

легко можно вывести из выражений (10) и (4), так как частота в обоих случаях должна быть одинаковой <sup>1)</sup>. При  $n=2$  отношение (14) принимает вид

$$\frac{(ka)^7 (81 + 9k^2 a^2 - 2k^4 a^4 + k^6 a^6)}{(k'a)^7 (81 + 9k'^2 a^2 - 2k'^4 a^4 + k'^6 a^6)}. \quad (15)$$

Если мы предположим, например, что два рассматриваемых нами газа суть кислород и водород, и положим  $ka=0,5$ ,  $k'a=0,125$ , то найдем, что скорости распространения энергии по направлению изнутри наружу находятся приблизительно в отношении 16 000 : 1 <sup>2)</sup>.

**§ 295.** Случай  $n=1$  предыдущего параграфа в особенности интересен с точки зрения теории маятника, так как он соответствует прямолинейному колебательному движению шара, рассматриваемого как твердое тело. Следует, однако, заметить, что отбрасывание членов второго порядка в уравнениях движения равносильно предположению, что амплитуда колебаний шара мала по сравнению с радиусом.

Для решения этой задачи едва ли необходимо обращаться к общей теории, так как движение жидкости будет таковым, как если бы оно было вызвано диполем (§ 289) в центре шара.

Мы предположим, что центр шара колеблется вдоль оси  $x$  со скоростью  $U = ae^{i\omega t}$ , и положим

$$\varphi = C \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-ikr}}{r} = C \frac{d}{dr} \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot \cos \theta, \quad (16)$$

причем  $x = r \cos \theta$ . Условие, что  $-\frac{\partial \varphi}{\partial r} = U \cos \theta$ , для  $r=a$  дает

$$C \frac{d^2}{da^2} \frac{e^{-ika}}{a} = -a, \quad (17)$$

откуда следует

$$C = \frac{(2 - k^2 a^2 - 2ika) a a^3 e^{ika}}{4 + k^2 a^4}. \quad (18)$$

<sup>1)</sup> При этом предполагается также, что отношение  $\gamma$  удельных теплоемкостей для обоих газов одинаково.

<sup>2)</sup> Распределение энергии в пространстве вокруг колеблющегося шара было исследовано Дж. Е. Джоном (J. E. Jones), Proc. Lond. Math. Soc. (2), XX, 347 (1921). В области, непосредственно прилегающей к шару, энергия состоит главным образом из кинетической части, так как жидкость движется почти так, как если бы она была несжимаемой; ср. § 290. Эта область тем больше, чем ниже частота и чем выше порядок соответствующей сферической функции. Если мы рассмотрим всю систему волн, то найдем, что кинетическая энергия на конечную величину превышает потенциальную.

Результирующая давлений, действующих на шар, будет равна

$$X = - \int_0^{\pi} p \cos \theta \cdot 2\pi a^2 \sin \theta \, d\theta, \quad (19)$$

где  $p$  обозначает давление на наружную поверхность, именно,

$$p = p_0 + \rho_0 \varphi = p_0 + i\sigma \rho_0 C \frac{d}{da} \frac{e^{-ika}}{a} \cdot \cos \theta. \quad (20)$$

Если выполним интегрирование и подставим значение для  $C$  из формулы (18), то получим

$$X = - \frac{4}{3} \pi \rho_0 a^3 \cdot \frac{2 + k^2 a^2 - ik^3 a^3}{4 + k^4 a^4} i \sigma a e^{i\omega t}. \quad (21)$$

Это можно написать в виде

$$X = - \frac{1}{3} \pi \rho_0 a^3 \frac{2 + k^2 a^2}{4 + k^4 a^4} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{4}{3} \pi \rho_0 a^3 \cdot \frac{k^3 a^3}{4 + k^4 a^4} \cdot \sigma U. \quad (22)^1$$

Если изменим знак у  $X$ , то получим внешнюю силу, которая должна быть приложена, чтобы поддерживать рассматриваемое простое гармоническое колебательное движение.

Первый член выражения (22) выглядит совершенно так, как если бы масса шара была увеличена на количество

$$\frac{2 + k^2 a^2}{4 + k^4 a^4} \cdot \frac{4}{3} \pi \rho_0 a^3, \quad (23)$$

второй же член такой, как если бы на шар действовала сила трения, пропорциональная скорости с коэффициентом пропорциональности

$$\frac{k^3 a^3}{4 + k^4 a^4} \cdot \frac{4}{3} \pi \rho_0 a^3 \sigma. \quad (24)$$

В случае несжимаемой жидкости или в более общем случае, когда длина волны  $\frac{2\pi}{k}$  велика по сравнению с окружностью большого круга шара, мы можем положить  $ka = 0$ . Приращение инерции будет равно тогда половине массы вытесненной жидкости, в то время как коэффициент трения будет равен нулю<sup>2)</sup>, ср. § 92.

Коэффициент трения в каждом случае имеет высокий порядок относительно  $ka$ , так что колебания шара, окружность которого сравнительно мала по отношению к длине волны, лишь в малой степени будут подвержены влиянию этого „трения“. Чтобы вычислить энергию, которая должна быть израсходована в единицу времени для возбуждения волн в окружающей среде, мы должны в формуле (22), которая должна теперь рассматриваться как уравнение между действительными величинами, умножить отвечающий трению член на  $U$  и взять среднее значение; таким способом мы находим для энергии выражение

$$\frac{2}{3} \pi \rho_0 a^3 \cdot \frac{k^3 a^3}{4 + k^4 a^4} \cdot \sigma a^2. \quad (25)$$

<sup>1)</sup> Эта формула получена Рэлеем: Rayleigh, Theory of Sound, § 325. Другую трактовку задачи о колеблющемся шаре можно найти у Пуассона, Sur les mouvements simultanés d'un pendule et de l'air environnant. Mém. de l'Acad. des Sciences, XI, 521 (1832) и у Кирхгофа, Mechanik, Лекция XXIII.

<sup>2)</sup> Poisson, см. выше.

Другими словами: если  $\rho_1$  — средняя плотность шара, то энергия, расходуемая в течение одного периода, будет составлять от всей его энергии часть

$$2\pi \frac{\rho_0}{\rho_1} \cdot \frac{k^3 a^3}{4 + k^4 a^4}. \quad (26)$$

§ 296. Способ, рассмотренный в § 292, можно также применить к вычислению отражения волн сферическим препятствием. Рассмотрим, в частности, случай системы падающих плоских волн, движущихся в направлении отрицательной оси  $x$  и заданных функцией

$$\varphi = e^{ikx}, \quad (1)$$

причем множитель, зависящий от времени, опущен.

Так как эта функция удовлетворяет уравнению  $(\Delta + k^2)\varphi = 0$ , не имеет особых точек на конечном расстоянии и симметрична по отношению к оси  $x$ , то она должна разлагаться в ряд, члены которого имеют вид

$$\psi_n(kr) r^n P_n(\cos \theta), \quad (2)$$

причем следует иметь в виду обозначения  $x = r \cos \theta = r\mu$ . Положим поэтому

$$e^{ikr\mu} = A_0 \psi_0(kr) + A_1 \psi_1(kr) kr P_1(\mu) + \dots + \\ + A_n \psi_n(kr) (kr)^n P_n(\mu) + \dots \quad (3)$$

Если продифференцировать это выражение  $n$  раз по  $\mu$ , то первые  $n$  членов исчезнут, так как  $P_s(\mu)$  есть целая рациональная функция степени  $s$ . Разделяя результат на  $(kr)^n$  и обращая внимание на то, что согласно (1) § 85 имеет место равенство

$$\frac{d^n}{d\mu^n} P_n(\mu) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n - 1), \quad (4)$$

получим

$$i^n e^{ikr\mu} = 1 \cdot 3 \dots (2n - 1) A_n \psi_n(kr) + \dots \quad (5)$$

Полагая теперь  $r = 0$ , получим на основании (7) § 292

$$A_n = (2n + 1) i^n; \quad (6)$$

отсюда получается

$$e^{ikx} = \sum_0^{\infty} (2n + 1) \psi_n(kr) (ikr)^n P_n(\mu). \quad (7)^1$$

Это выражение представляет разложение по сферическим функциям потенциала скоростей источника, находящегося в бесконечности. Подобное же разложение для случая источника, лежащего на конечном расстоянии от

<sup>1)</sup> Rayleigh, Proc. Lond. Math. Soc. (1), IV, 253 (1873). См. также Heine, Kugelfunktionen, I, 82 (1878). Доказательство, приведенное выше, построено по образцу принадлежащего Гейне вывода формулы (13).

начала  $O$ , можно получить следующим способом. Обозначим через  $P'$  положение источника и через  $P$  точку, для которой отыскивается потенциал скоростей. Положим

$$OP = r, \quad OP' = r', \quad \rho^2 = r^2 - 2rr'\mu + r'^2, \quad (8)$$

где  $\mu = \cos POP'$ . Если  $r < r'$ , то мы можем принять

$$f_0(k\rho) = \sum_0^{\infty} A_n \psi_n(kr) (kr)^n P_n(\mu). \quad (9)$$

Если мы заставим изменяться только  $\rho$  и  $\mu$ , то будем иметь  $\rho \, d\rho = -rr' \, d\mu$  и вместе с тем

$$-\frac{1}{k\rho} \frac{d}{d(k\rho)} = \frac{1}{kr \cdot kr'} \frac{d}{d\mu}. \quad (10)$$

Выполняя над формулой (9) эту операцию  $n$  раз, получим на основании формулы (14) § 292

$$f_n(k\rho) = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{(kr')^n} \psi_n(kr) A_n + \dots \quad (11)$$

Если положить теперь  $r=0$ , то получится

$$A_n = (2n+1) (kr')^n f_n(kr') \quad (12)$$

и вместе с тем

$$f_0(k\rho) = \sum_0^{\infty} (2n+1) (kr)^n (kr')^n f_n(kr') \psi_n(kr) P_n(\mu). \quad (13)$$

Если  $r > r'$ , то мы должны только в формуле (13) поменять местами  $r$  и  $r'$ , так как  $\rho$  по отношению к этим переменным входит симметрично. Поэтому имеем:

$$f_0(k\rho) = \sum_0^{\infty} (2n+1) (kr)^n (kr')^n \psi_n(kr') f_n(kr) P_n(\mu). \quad (14)^1$$

Мы можем воспользоваться формулой (7), чтобы показать, как можно получить типичное решение уравнения

$$(\Delta + k^2) \varphi = 0, \quad (15)$$

конечное в начале, именно:

$$\varphi = \psi_n(kr) r^n S_n, \quad (16)$$

наложением плоских волн. Случай  $n=0$  был уже рассмотрен в § 289.

Вследствие свойств ортогональности сферических функций (§ 87) имеем

$$\iint e^{ikr\mu} S_n \, d\tilde{\omega} = (2n+1) (ikr)^n \psi_n(kr) \iint P_n(\mu) S_n \, d\tilde{\omega}, \quad (17)$$

где  $d\tilde{\omega}$  обозначает элемент поверхности шара, описанной около начала координат единичным радиусом. Буква  $\mu$  обозначает здесь косинус углового расстояния элемента  $d\tilde{\omega}$  от точки  $Q$ , в которой произвольный радиус-

<sup>1)</sup> Формула (13) указанным здесь способом (за исключением обозначений) была получена Гейне, I, 346. Равнозначный результат получил Клебш (1863 в работе, приведенной на стр. 138.

вектор  $r$  пересекает поверхность шара. Теперь имеем на основании известной формулы Лапласа <sup>1)</sup>

$$\iint P_n(\mu) S_n d\tilde{\omega} = \frac{4\pi}{2n+1} S'_n, \quad (18)$$

где  $S'_n$  обозначает значение  $S_n$  в точке  $Q$ . Отсюда следует

$$(ikr)^n \psi_n(kr) S'_n = \frac{1}{4\pi} \iint e^{ikr\mu} S_n d\tilde{\omega}. \quad (19)$$

Типичное решение оказывается, таким образом, представленным в виде ряда плоских волн, имеющих амплитуду, равную единице; нормали этих волн распределены вокруг начала с некоторою переменною плотностью, выражающеюся при помощи сферической функции  $S_n$ .

В результате получается, что движение в каждой свободной от источников области может быть разложено в ряды плоских волн, налагающихся друг на друга.

**§ 297.** Мы переходим теперь к специальной задаче воздушных волн, падающих на шаровое препятствие.

Рассмотрим одну из составляющих

$$\varphi = B_n \psi_n(kr) r^n S_n \quad (1)$$

падающей системы волн; пусть соответствующий элемент отраженных волн будет

$$\varphi' = B'_n f_n(kr) r^n S_n. \quad (2)$$

Если препятствие неподвижно, то условие

$$\frac{\partial}{\partial r} (\varphi + \varphi') = 0, \quad (3)$$

которое должно выполняться для  $r = a$ , дает

$$\frac{B'_n}{B_n} = - \frac{ka \psi'_n(ka) + n\psi_n(ka)}{ka f'_n(ka) + n f_n(ka)}. \quad (4)$$

Этот результат можно легко объяснить только в том случае, когда длина волны велика по сравнению с диаметром шара, т. е. когда  $ka$  мало. В этом случае для малых значений  $\zeta$  на основании формул (7), (16) § 292 имеем приближенно

$$\psi_n(\zeta) = \frac{1}{1 \cdot 3 \dots (2n+1)} \cdot f_n(\zeta) = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{\zeta^{2n+1}}; \quad (5)$$

отсюда следует для  $n > 0$

$$\frac{B'_n}{B_n} = \frac{n}{n+1} \frac{(ka)^{2n+1}}{\{1 \dots (2n-1)\}^2 (2n+1)}. \quad (6)$$

Случай  $n=0$  составляет исключение; для него имеем приближенно

$$\frac{B'_0}{B_0} = - \frac{1}{3} (ka)^2. \quad (7)$$

<sup>1)</sup> Ferrers, Spherical Harmonics, стр. 89.

Если падающие волны будут плоски и выражаются при помощи функции  $e^{ikx}$ , то будем иметь  $S_n = P_n$  и на основании формулы (7) § 296

$$B_n = (2n + 1) i^n k^n. \quad (8)$$

Отсюда следует

$$B_0 = -\frac{1}{3} (ka)^3, \quad B_1 = \frac{1}{2} ik (ka)^3. \quad (9)$$

Важнейшая составная часть отраженных волн на некотором расстоянии  $r$ , большом по сравнению с длиной волны, на основании формул (15) § 292 представляется в виде

$$\varphi' = B_0' j_0(kr) + B_1' j_1(kr) \cos \theta = - (ka)^3 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cos \theta \right) \frac{e^{-ikr}}{kr}. \quad (10)$$

Физическое значение обоих членов будет объяснено в конце § 300.

Количество энергии, которая уносится в единицу времени наружу вместе с отраженными волнами, как в § 294, определяется выражением

$$\sum \frac{1}{2} \frac{\rho_0 c}{k^{2n}} |B_n'|^2 \iint P_n^2 a_{\omega} \tilde{\omega}. \quad (11)$$

Подходящим масштабом для сравнения может быть в этом случае поток энергии через единицу поверхности фронта волны падающей системы. При наших предположениях этот поток, согласно с § 280, равен  $\frac{1}{2} \rho_0 k^2 c$ , и отношение количества (11) к этому потоку на основании формулы (5) § 87 будет равно

$$\sum \frac{4\pi}{(2n + 1) k^{2n+2}} |B_n'|^2. \quad (12)$$

Члены низшего порядка при малом  $ka$  суть те, для которых  $n=0$  и  $n=1$ . Подставляя из формул (9) и составляя сумму, получаем

$$\frac{7}{9} (ka)^4 \cdot \pi a^2. \quad (13)$$

Скорость, с которой энергия рассеивается, оказывается таким образом обратно пропорциональной четвертой степени длины волны<sup>1)</sup>.

Приведем в качестве примера маленький шарик с диаметром 0,025 мм, который будет рассеивать только  $1,43 \cdot 10^{-17}$  падающей энергии, если длина волны равна 1,22 м. Отсюда становится понятным, почему туман, оптически совершенно непроницаемый, свободно пропускает обыкновенные звуки.

**§ 298.** Рассмотрим теперь случай плоских волн, падающих на движущийся шар.

Уравнение движения этих волн имеет вид

$$M \ddot{\xi} = - \iint p \cos \theta a^2 d\omega + X, \quad (1)$$

где  $X$  обозначает внешнюю силу, если она имеется.

<sup>1)</sup> Рассматриваемая здесь задача другим методом была исследована Рэлеем, Proc. Lond. Math. Soc. (1), IV, 253 (1872); см. также Theory of Sound, §§ 296, 334, 335. Формулу (13) Рэлей дал в работе „On the Transmission of Light through an Atmosphere Containing Small Particles in Suspension“, Phil. Mag. (5), XLVII, 375 (1893) [Papers, IV, 397].

Если множитель, зависящий от времени, есть  $e^{ikhct}$ , то имеем

$$p = p_0 + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\varphi + \varphi') = p_0 + ikc\rho_0 (\varphi + \varphi'). \quad (2)$$

Далее, кинематическое граничное условие имеет вид

$$-\frac{\partial}{\partial r} (\varphi + \varphi') = \dot{\xi} \cos \theta = ikc\xi \cos \theta. \quad (3)$$

1. Допустим прежде всего, что шар совершенно свободен и движется под действием воздушных волн, так что  $X=0$ . Полагая  $M = \frac{4}{3} \pi \rho_1 a^3$  и подставляя значение  $p$  из формулы (2) в уравнение (1), находим

$$kc\rho_1 \dot{\xi} = i \{ B_1 \psi_1(ka) + B'_1 f_1(ka) \} \rho_0, \quad (4)$$

так как интегралы по поверхности шара от произведения сферических функций различного порядка исчезают. Далее, на основании формулы (3) будем иметь

$$-ikc\xi = B_1 \{ ka\varphi'_1(ka) + \psi_1(ka) \} + B'_1 \{ ka f'_1(ka) + f_1(ka) \}, \quad (5)$$

в то время как равенство (4) будет сохраняться для  $n > 1$ . Если исключить  $\xi$  из равенств (4) и (5), то получим

$$\frac{B'_1}{B_1} = - \frac{\{ ka\varphi'_1(ka) + \psi_1(ka) \} \rho_1 - \psi_1(ka) \rho_0}{\{ ka f'_1(ka) + f_1(ka) \} \rho_1 - f_1(ka) \rho_0}. \quad (6)$$

Если величина  $ka$  мала, то приближенные значения  $\psi_1(ka)$  и  $f_1(ka)$  дают

$$\frac{B'_1}{B_1} = \frac{\rho_1 - \rho_0}{6\rho_1 - 3\rho_0} k^3 a^3. \quad (7)$$

Рассеянные волны типа  $n=1$  при этой степени приближения, как и следовало ожидать, исчезают, когда  $\rho_1 = \rho_0$ . Шар в этом случае просто переносится воздухом вперед и назад.

Если через  $\xi_0$  обозначить смещение воздуха в начале координат в случае отсутствия сферы, то при наших настоящих предположениях имеет место формула

$$ikc\xi_0 = -ike^{ikhct}. \quad (8)$$

Отсюда получаем, если подставим из формулы (7) в формулу (5) и обратим внимание на то, что  $B_1 = 3ik$ ,

$$\frac{\xi}{\xi_0} = \frac{3\rho_0}{2\rho_1 + \rho_0}. \quad (9)$$

Как и следовало ожидать, это отношение меньше или больше единицы в зависимости от того  $\rho_1 \geq \rho_0$ .

2. В качестве иллюстрации теории резонанса мы можем рассмотреть случай, когда шар притягивается к неподвижной точке силой, пропорциональной расстоянию. Обозначая через  $\frac{2\pi}{\sigma_0}$  период свободных колебаний шара в том случае, когда влиянием воздуха мы пренебрегаем, положим в уравнении (1)

$$X = -M\sigma_0^2 \xi. \quad (10)$$

Тогда вместо формулы (4) будем иметь

$$(\sigma_0^2 - k^2 c^2) \rho_1 \dot{\xi} = -ikc\rho_0 \{ B_1 \psi_1(ka) + B'_1 f_1(ka) \}; \quad (11)$$



отсюда и из формулы (5) следует

$$\frac{\sigma_0^2 - k^2 c^2}{k^2 c^2} e_1 = - \frac{B_1 \psi_1(ka) + B_1' f_1(ka)}{B_1 \{ ka \psi_1'(ka) + \psi_1(ka) \} + B_1' \{ ka f_1'(ka) + f_1(ka) \}} e_0 \quad (12)$$

Если нет внешних источников, то  $B_1 = 0$  и

$$\frac{\sigma_0^2 - k^2 c^2}{k^2 c^2} e_1 = - \frac{f_1(ka)}{ka f_1'(ka) + f_1(ka)} e_0 \quad (13)$$

Это есть уравнение, определяющее  $k$ , а вместе с этим определяющее характер „свободного“ движения шара, вызванного окружающей средой. Если привести это уравнение на основании условия (15) § 292 к алгебраическому виду, то оно окажется биквадратным<sup>1)</sup> относительно  $k$  и будет иметь вид

$$(k^2 c^2 - \sigma_0^2) (k^2 a^2 - 2ika - 2) + 2\beta k^2 c^2 (ika + 1) = 0, \quad (14)$$

где  $\beta = \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\rho_1}$ . С нашей настоящей точки зрения имеют значение только два меньших корня. Они приближенно определяются из формулы

$$k^2 c^2 = \frac{\sigma_0^2}{1 + \beta} \quad (15)$$

Мы видим, что главное влияние присутствия жидкости состоит в том, что масса шара увеличивается на количество, равное половине массы вытесненной жидкости; ср. §§ 92, 295. Чтобы определить, с какой скоростью затухают колебания, мы должны пойти дальше в нашем приближении. Оказывается, в согласии с результатами § 295, что „свободные“ колебания выражаются формулой

$$\xi = C e^{-\sigma t} \cos(\sigma' t + \epsilon), \quad (16)$$

где

$$\sigma' = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1 + \beta}}, \quad \nu = \frac{\beta}{4(1 + \beta)} \frac{\sigma'^4 a^2}{c^2} \quad (17)$$

если мы удержим только важнейшие члены.

Для **вынужденных** колебаний, при которых значение  $k$  дано заранее имеем по формуле (12)

$$\frac{B_1'}{B_1} = - \frac{\{ ka \psi_1'(ka) + \psi_1(ka) \} (\sigma_0^2 - k^2 c^2) + 2\beta k^2 c^2 \psi_1(ka)}{\{ ka f_1'(ka) + f_1(ka) \} (\sigma_0^2 - k^2 c^2) + 2\beta k^2 c^2 f_1(ka)} \quad (18)$$

Если  $ka$  мало, то приближенные значения для  $\psi_1(ka)$  и  $f_1(ka)$  будут давать

$$\frac{B_1'}{B_1} = \frac{\sigma_0^2 - (1 - 2\beta) k^2 c^2}{\sigma_0^2 - (1 + \beta) k^2 c^2} \cdot \frac{1}{6} k^2 a^2; \quad (19)$$

приближение, однако, оказывается совершенно неприменимым, когда значение  $ka$  почти равно  $\frac{\sigma_0}{(1 + \beta)^{1/2}}$ , т. е. когда частота падающих волн почти в точности совпадает с частотой свободных колебаний.

<sup>1)</sup> Равносильный результат получим, если положим в равенстве (21) § 295

$$ae^{i\sigma t} = i\sigma \xi, \quad X = M(\sigma_0^2 - \sigma^2)\xi.$$

Чтобы точнее исследовать случай приближенного синхронизма, положим в точной формуле (18)

$$f_1(ka) = \Psi_1(ka) - i\psi_1(ka); \quad (20)$$

тогда получим

$$\frac{B'_1}{B_1} = -\frac{g_1(ka)}{G_1(ka) - ig_1(ka)}, \quad (21)$$

где

$$\left. \begin{aligned} g_1(ka) &= (ka\psi'_1(ka) + \psi_1(ka)) \left( \frac{\sigma_0^2 a^2}{c^2} - k^2 a^2 \right) + 2\beta k^2 a^2 \psi_1(ka), \\ G_1(ka) &= (ka\Psi'_1(ka) + \Psi_1(ka)) \left( \frac{\sigma_0^2 a^2}{c^2} - k^2 a^2 \right) + 2\beta k^2 a^2 \Psi_1(ka). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Абсолютное значение правой части уравнения (21) никогда не может быть больше единицы, но может достигать этого значения; амплитуда рассеянных волн имеет, таким образом, максимум для

$$G_1(ka) = 0; \quad (23)$$

в этом случае

$$B'_1 = -iB_1. \quad (24)$$

В случае системы плоских волн, представленных формулой (1) § 296, будем иметь

$$B'_1 = 3k; \quad (25)$$

действительная часть потенциала скоростей рассеянных волн будет иметь на некотором расстоянии вид

$$\varphi' = -3 \frac{\sin k(ct - r)}{kr} \cos \theta, \quad (26)$$

соответствующий потенциалу падающих волн

$$\varphi = \cos k(ct + x). \quad (27)$$

Следует заметить, что этот результат не зависит от значения величины  $ka$ .

Если  $ka$  мало, то выражение для  $\Psi_1(ka)$  мы возьмем из формулы (7) § 292. Уравнение (23) принимает в этом случае вид

$$-\left(2 + \frac{1}{4} k^2 a^2 + \dots\right) \left(\frac{\sigma_0^2 a^2}{c^2} - k^2 a^2\right) + 2\beta k^2 a^2 \left(1 + \frac{1}{2} k^2 a^2 + \dots\right) = 0, \quad (28)$$

и легко можно убедиться, что это уравнение при малых значениях  $\frac{\sigma_0 a}{c}$  удовлетворится действительным значением  $ka$ , именно

$$ka = \frac{\sigma_0 a}{(1 + \beta)^{1/2} c}; \quad (29)$$

это значение оказывается лишь немного меньше, чем то, которое соответствует свободным колебаниям. Далее, принимая во внимание условие (3), находим приближенно

$$\xi = \frac{6}{k^2 a^2 c} \sin kct. \quad (30)$$

Амплитуда колебаний частицы воздуха в первоначальной волне в тех же единицах масштаба будет равна  $\frac{1}{c}$ . Амплитуда же колебаний шара будет превышать это значение в отношении  $\frac{6}{k^2 a^2}$ . Кроме этого из выраже-

ния (10) получается, что рассеяние энергии в отраженных волнах имеет своим максимальным значением  $\beta \rho_0 c$  или, если выразить это значение через поток энергии в первоначальных волнах,

$$\frac{3\lambda^3}{\pi} \quad (31)$$

Отношение этой величины к величине рассеяния, имеющего место в случае неподвижного шара, равно  $\frac{108}{7} (ka)^{-3}$ .

С другой стороны, нужно заметить, что длина волны максимального рассеяния может быть определена очень точно. Без труда можно показать, что рассеяние убывает на половину своего максимального значения, когда длина волны падающих волн отличается от критического значения на долю этого значения, выражающуюся дробью

$$\frac{\beta k^3 a^3}{4(1 + \beta)}$$

При всех акустических приложениях эта дробь оказывается очень малой. На практике массивные тела обычно приводятся в сильное колебательное движение не непосредственно воздушными волнами, но посредством резонансных ящиков и звучащих планок.

Присутствие множителя 3 в выражении (31) требует некоторого разъяснения. Вследствие того, что шар имеет три степени свободы, результат оказывается независимым от направления падающих волн. Если бы движение шара было ограничено условием, что он должен совершать колебания вдоль определенной прямой, то степень рассеяния зависела бы от направления падения, и среднее значение для всех направлений было бы равно  $\frac{\lambda^3}{\pi}$ <sup>1)</sup>.

**§ 299.** Диффракция плоских звуковых волн у края пластинки или у отверстия в плоском экране может быть исследована приближенными методами, предполагая, что размеры препятствия или отверстия малы по сравнению с длиной волны<sup>2)</sup>. Это условие, очевидно, прямо противоположно условию, имеющему место в оптике, и соответственно этому результаты здесь имеют существенно отличный характер. В частности, при таком предположении мы не встречаемся ни с чем, что могло бы быть названо звуковой тенью или звуковым лучом.

1. Рассмотрим прежде всего следующий случай: система плоских волн, движущаяся в направлении отрицательной оси  $x$ , падает на плоскую пластинку, расположенную в плоскости  $x=0$ . При отсутствии пластинки движение всюду было бы представлено функцией

$$\varphi = e^{ikx} \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Исследования этого параграфа взяты из работы Ламба, A Problem in Resonance, Illustrative of the Theory of Selective Absorption of Light, Proc. Lond. Math. Soc., XXXII, 11 (1900). Заключительное замечание взято из работы Рэлея, Some General Theorems concerning Forced Vibrations and Resonance, Phil. Mag. (6), III, 97 (1902) (Papers, V, 8).

<sup>2)</sup> Rayleigh, On the Passage of Waves through Apertures in Plane Screens, and Allied Problems, Phil. Mag. (5), XLIII, 259 (1897) (Papers, IV, 283).

Это дает скорость  $-ik$  в направлении нормали к поверхности пластинки; полное же решение будет иметь тогда вид

$$\varphi = e^{ikx} + \chi, \quad (2)$$

где функция  $\chi$  представляет движение, которое возникло бы в окружающем воздухе вследствие колебаний пластинки, перпендикулярных к ее плоскости и происходящих со скоростью  $ik$ . Если мы приложим формулу (18) § 290, то получим

$$\chi_P = \frac{1}{2\pi} \iint \chi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS; \quad (3)$$

интеграция при этом распространяется только на положительную сторону пластинки. Если  $x, y, z$  суть координаты точки  $P$  относительно начала, лежащего на поверхности пластинки, то имеем  $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial x}$ , и если расстояние точки  $P$  от каждой точки пластинки велико по сравнению с линейными размерами пластинки, то имеет место равенство

$$\chi_P = -\frac{1}{2\pi} \iint \chi dS \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right), \quad (4)$$

где  $r$  теперь должно обозначать расстояние от начала. Отраженные волны оказываются, следовательно, такими, как если бы они были вызваны диполем соответствующей мощности.

При указанных основных условиях функция  $\chi$  в непосредственной близости от пластинки изменяется почти в точности так, как если бы жидкость была несжимаема (§ 290). В последнем случае, если плотность жидкости и скорость пластинки в направлении, перпендикулярном к ее плоскости, положить равными единице, то выражение  $2 \iint \chi dS$  сделалось бы равным „коэффициенту инерции“ пластинки [§ 121 (3)]. Обозначая этот коэффициент, зависящий только от величины и формы пластинки, через  $M$ , будем иметь в нашем случае

$$\iint \chi dS = \frac{1}{2} ikM \quad (5)$$

и вместе с тем приближенно

$$\chi_P = -\frac{ikM}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) = -\frac{k^2 M}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \cos \theta, \quad (6)$$

где  $\theta$  обозначает угол, который  $OP$  составляет с  $Ox$ .

Для *круговой* пластинки радиуса  $a$  имеем согласно §§ 102, 108

$$M = \frac{8}{3} a^3, \quad (7)$$

и, следовательно,

$$\chi_P = -\frac{8}{3} \frac{\pi a^3}{\lambda^2} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \cos \theta. \quad (8)$$

2. Если плоские волны падают непосредственно на экран, расположенный в плоскости  $x=0$ , то в случае сплошного экрана мы имели бы

$$\varphi = e^{ikx} + e^{-ikx} \text{ или } = 0, \quad (9)$$

соответственно для  $x \geq 0$ ; член  $e^{-ikx}$  представляет отраженные волны. Если же имеется отверстие, то мы примем для двух ее сторон

$$\varphi = e^{ikx} + e^{-ikx} + \chi \text{ и } \varphi = \chi'. \quad (10)$$

Непрерывность давления и скорости требует, чтобы у отверстия имели место равенства

$$2 + \chi = \chi', \quad \frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\partial \chi'}{\partial x}, \quad (11)$$

в то время как на остальной части плоскости  $x=0$  было бы

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \chi'}{\partial x} = 0. \quad (12)$$

Эти условия будут выполнены, если мы положим  $\chi$  и  $\chi'$  равными потенциалам таких распределений простых источников по поверхности отверстия, которые на этой поверхности дают

$$\chi = -1, \quad \chi' = +1. \quad (13)$$

Теперь на основании формулы (17) § 290 будем иметь

$$\chi_P = -\frac{1}{2\pi} \iint \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial \chi}{\partial n} dS, \quad (14)$$

так как  $r' = r$  для  $x=0$ . В рассматриваемом случае вследствие соотношений (12) интеграцию можно ограничить поверхностью отверстия. В таком случае на расстояниях  $r$ , значения которых велики по сравнению с размерами отверстия, формула (14) приводится к виду

$$\chi_P = -\frac{1}{2\pi} \iint \frac{\partial \chi}{\partial n} dS \cdot \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (15)$$

Если бы  $k$  было равно нулю, то в согласии с формулой (13) задача определения  $\chi$  была бы тождественна с задачей определения течения несжимаемой жидкости через отверстие; для точек в непосредственной близости к пластинке течение в нашей задаче будет иметь в существенном те же самые свойства. Мы можем поэтому написать

$$\iint \frac{\partial \chi}{\partial n} dS = C, \quad (16)$$

где  $C$  обозначает пропускную способность отверстия<sup>1)</sup>.

Вместе с тем уравнение (15) приближенно приобретает вид

$$\chi_P = -C \frac{e^{-ikr}}{\pi r}. \quad (17)$$

Отсюда получается значение  $\chi'$  на основании очевидного соотношения

$$\chi'(-x, y, z) = -\chi(x, y, z). \quad (18)$$

Оказывается, что волны, прошедшие сквозь отверстие, таковы, как если бы они возбуждались простым источником соответствующей мощности.

Значение  $C$  для эллиптического отверстия было уже дано в формуле (8) § 113. В случае же кругового отверстия имеем

$$C = 2a \quad (19)$$

и

$$\chi_P = -\frac{2a}{\pi} \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (20)$$

<sup>1)</sup> Ср. §§ 102, 3; 108, 1 и 113.

Сравнение с формулой (8) показывает, что при принимаемых выше условиях на одном и том же расстоянии амплитуда волн, отраженных пластинкой, оказывается намного меньше, чем амплитуда волн, прошедших через отверстие такой же величины и формы. Легко видеть, что отношение полной энергии, которая проходит в течение одной секунды через круговое отверстие, к потоку энергии в первоначальных волнах равно

$$\frac{8a^2}{\pi^2} \text{ или } 0,816 a^2. \quad (21)$$

Отношение амплитуды отраженных волн к амплитуде первоначальных волн в какой-либо удаленной точке не зависит от длины волны, пока длина волны велика по сравнению с наибольшей шириной отверстия.

**§ 300.** Подобные же вычисления можно выполнить и в том случае, когда звуковые волны отражаются от препятствия произвольной формы, если имеет место прежнее основное условие, что размеры препятствия малы по сравнению с длиной волны <sup>1)</sup>.

Пусть начало координат взято на самом препятствии или вблизи от него; положим

$$\varphi = e^{ikx} + \chi, \quad (1)$$

где первый член представляет падающие волны, а второй член — отраженные волны. На поверхности препятствия, которое мы считаем твердым и неподвижным, должны иметь место условия

$$\frac{\partial \chi}{\partial n} = - \frac{\partial}{\partial n} e^{ikx} = - ikle^{ikx} \quad (2)$$

в предположении, что  $l$ ,  $m$ ,  $n$  суть направляющие косинусы нормали, направленной наружу.

Формула (5) § 290 дает

$$\chi_P = - \frac{1}{4\pi} \iint \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial \chi}{\partial n} dS + \frac{1}{4\pi} \iint \chi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS, \quad (3)$$

причем интегрирования распространяются на поверхность препятствия. Найдем теперь приближенное значение для выражения в правой части в том случае, когда расстояния  $r$  велики по сравнению с размерами препятствия. Обозначим координаты произвольной точки поверхности через  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , а координаты точки  $P$  через  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ .

Если мы рассмотрим первый член в правой части равенства (3), то сможем написать

$$\frac{e^{-ikr}}{r} = \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right)_0 + x \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-ikr}}{r} \right)_0 + y \left( \frac{\partial}{\partial y} \frac{e^{-ikr}}{r} \right)_0 + z \left( \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{-ikr}}{r} \right)_0 + \dots,$$

где значок нуль указывает, что в выражениях, при которых он поставлен,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  нужно положить равными нулю. Равенство это можно также написать в виде

$$\frac{e^{-ikr}}{r} = \left( 1 - x \frac{\partial}{\partial x_1} - y \frac{\partial}{\partial y_1} - z \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots \right) \frac{e^{-ikr_0}}{r_0}, \quad (4)$$

<sup>1)</sup> Rayleigh, On the Incidence of Aerial and Electric Waves upon Small Obstacles in the Form of Ellipsoids or Elliptic Cylinders . . . , Phil. Mag. (5), XLIV, 28 (1897) [Papers, IV, 305].

где  $r_0$  обозначает расстояние точки  $P$  от начала. Далее из равенств (2) следует

$$\frac{\partial \chi}{\partial n} = -ikl + k^2 xl + \dots \quad (5)$$

Если мы перемножим равенства (4) и (5) и проинтегрируем по поверхности препятствия, то получим приближенное равенство

$$\iint \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial \chi}{\partial n} dS = k^2 Q \frac{e^{-ikr_0}}{r_0} + ikQ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{e^{-ikr_0}}{r_0}, \quad (6)$$

в котором  $Q$  обозначает объем препятствия. Мы использовали при этом очевидные соотношения

$$\iint l ds = 0, \quad \iint xl dS = Q, \quad \iint yl dS = 0, \quad \iint zl dS = 0. \quad (7)$$

Члены, удержанные в правой части равенства (6), имеют один и тот же порядок, между тем как отброшенные члены малы по сравнению с удержанными.

Что же касается второго члена в равенстве (3), то имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-ikr}}{r} &= \left( l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y} + n \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{e^{-ikr}}{r} = \\ &= - \left( l \frac{\partial}{\partial x_1} + m \frac{\partial}{\partial y_1} + n \frac{\partial}{\partial z_1} \right) \frac{e^{-ikr}}{r}. \end{aligned} \quad (8)$$

Мы можем, в согласии с нашим прежним приближением, написать  $r_0$  вместо  $r$  и вынести за знак интеграла пространственные производные от выражения  $\frac{e^{-ikr_0}}{r_0}$ . Результат будет тогда содержать интегралы

$$\iint l_x dS, \quad \iint m_x dS, \quad \iint n_x dS. \quad (9)$$

Из равенств (2) и (5) и из общего предложения, установленного в § 290, следует, что функция  $\chi$  в непосредственной близости от препятствия приблизительно совпадает с потенциалом скоростей движения жидкости, которое получится в том случае, когда препятствие будет двигаться в жидкости со скоростью  $ik$ , параллельной оси  $x$ . И для этого движения жидкости интегралы (9) представляют компоненты „импульса“, и мы можем в согласии с § 121 написать

$$\iint l_x dS = ikA, \quad \iint m_x dS = ikC', \quad \iint n_x dS = ikB', \quad (10)$$

причем плотность взятой для сравнения жидкости предполагается равной единице. Отсюда следует

$$\iint \chi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS = -ik \left( A \frac{\partial}{\partial x_1} + C' \frac{\partial}{\partial y_1} + B' \frac{\partial}{\partial z_1} \right) \frac{e^{-ikr_0}}{r_0}. \quad (11)$$

Окончательная приближенная формула будет, таким образом, иметь вид

$$\chi_P = -\frac{k^2 Q}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{ik}{4\pi} \left\{ (A + Q) \frac{\partial}{\partial x_1} + C' \frac{\partial}{\partial y_1} + B' \frac{\partial}{\partial z_1} \right\} \frac{e^{-ikr}}{r} \quad 1), \quad (12)$$

1) Если мы разделим на  $k$  и затем будем стремиться  $k \rightarrow 0$ , то воспроизведем результат, полученный в § 121a для случая несжимаемой жидкости.

причем значок нуль при  $r$ , как ненужный более, отброшен. Если  $kr$  велико, то эта формула может быть представлена в виде

$$\chi_P = -\frac{k^2 Q}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{k^2}{4\pi} \{(\mathbf{A} + \mathbf{Q}) \lambda_1 + \mathbf{C}' \mu_1 + \mathbf{B}' \nu_1\} \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad (13)$$

где  $\lambda_1, \mu_1, \nu_1$  суть направляющие косинусы для  $r$ .

Для шара радиуса  $a$  имеем

$$\mathbf{A} = \frac{2}{3} \pi a^3, \quad \mathbf{Q} = \frac{4}{3} \pi a^3, \quad \mathbf{B}' = 0, \quad \mathbf{C}' = 0,$$

что приводит снова к результату (10) § 297.

Отраженные волны можно представлять себе полученными в результате совместного действия простого источника и диполя. Ось последнего вообще не совпадает с направлением падающих волн.

Более симметричная формула получается, если принять, что первоначальные волны идут из произвольно заданного направления  $(\lambda, \mu, \nu)$ , так что формула (1) должна быть заменена формулой

$$\varphi = e^{ik(\lambda x + \mu y + \nu z)} + \chi. \quad (14)$$

Повторяя рассуждения предшествующего исследования, получим без затруднений вместо формулы (13) формулу

$$\begin{aligned} \chi_P = & -\frac{k^2 Q}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{k^2 Q}{4\pi} (\lambda \lambda_1 + \mu \mu_1 + \nu \nu_1) \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{k^2}{4\pi} \{ \mathbf{A} \lambda \lambda_1 - \mathbf{B} \mu \mu_1 + \\ & + \mathbf{C} \nu \nu_1 + \mathbf{A}' (\mu \nu_1 + \mu_1 \nu) + \mathbf{B}' (\nu \lambda_1 + \nu_1 \lambda) + \mathbf{C}' (\lambda \mu_1 + \lambda_1 \mu) \} \frac{e^{-ikr}}{r}. \end{aligned} \quad (15)$$

Как в § 124, направления координатных осей могут быть выбраны таким образом, что будем иметь  $\mathbf{A}' = \mathbf{B}' = \mathbf{C}' = 0$ ; тогда формула приведет к следующей

$$\begin{aligned} \chi_P = & -\frac{k^2 Q}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{k^2}{4\pi} \{ (\mathbf{A} + \mathbf{Q}) \lambda \lambda_1 + (\mathbf{B} + \mathbf{Q}) \mu \mu_1 + \\ & + (\mathbf{C} + \mathbf{Q}) \nu \nu_1 \} \frac{e^{-ikr}}{r}. \end{aligned} \quad (16)$$

В случае эллипсоида с полуосями  $a, b, c$  на основании формул (4) § 121 будем иметь

$$\mathbf{A} + \mathbf{Q} = \frac{2}{2 - a_0} Q, \quad \mathbf{B} + \mathbf{Q} = \frac{2}{2 - \beta_0} Q, \quad \mathbf{C} + \mathbf{Q} = \frac{2}{2 - \gamma_0} Q, \quad (17)$$

где  $a_0, \beta_0, \gamma_0$  определяются на основании формул (6) § 114. В случае круговой пластинки ( $a = b, c = 0$ ) имеем  $Q = 0, \mathbf{A} = \frac{8}{3} a^3, \mathbf{B} = 0, \mathbf{C} = 0$ ; уравнение (16) приводится при этом к виду

$$\chi_P = -\frac{2}{3} \frac{k^3 a^3}{\pi} \lambda \lambda_1 \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (18)$$

Если пластинка стоит наклонно к падающим волнам, то амплитуда отраженных волн будет меньше, именно в отношении косинуса угла наклона.

Объяснение обоих типов возмущений в (13) и (16) можно легко дать в одной и той же форме. Прежде всего, если препятствия налицо нет, то



в области, которую оно должно было бы занимать, будут происходить попеременно то сгущения, то разрежения. При наличии препятствия его сопротивление этим сгущениям и разрежениям оказывает определенное воздействие на окружающую среду; волны, получившиеся благодаря этому обстоятельству на большом расстоянии, на самом деле будут таковы, как если бы они были возбуждены в покоящейся до того среде периодическим колебательным движением жидкости в объеме препятствия; при этом движение должно быть достаточно интенсивным для того, чтобы компенсировать указанные выше изменения плотности. Этот результат оказывается равносильным „простому“ источнику звука. На это колебательное движение накладывается вторая система волн, которая обязана своим возникновением неподвижности препятствия. Если бы препятствие могло свободно двигаться и имело бы, кроме того, такую же массу, как и вытесненный им воздух, то оно стало бы раскачиваться вперед и назад вместе со звуковыми колебаниями, и вторая система волн не возникла бы. Эта вторая система в действительности такова, как если бы она получилась благодаря колебательному движению препятствия вдоль прямой со скоростью, равной и прямопротивоположной скорости частицы воздуха при невозмущенных волнах. Это действие препятствия равносильно диполю.

Если длина волны мала по сравнению с размерами препятствия, то задача диффракции в общем случае представляет большие аналитические трудности. Единственный случай, в котором задачу можно считать решенной до конца, есть случай плоского экрана, ограниченного с одной стороны; в этом случае ничто не зависит от длины волны. Мы исследуем этот случай в § 308.

Случай плоских волн, падающих на неподвижную сферу, кажется с первого взгляда многообещающим: полное выражение для возмущения, вызванного в этом случае падающими и отраженными волнами, дается формулами § 297; таким образом, мы имеем

$$\varphi + \varphi' = \sum (2n + 1) (ikr)^n \left\{ \varphi_n(kr) - \frac{ka\psi'_n(ka) + n\varphi_n(ka)}{ka f'_n(ka) + n f_n(ka)} j_n(kr) \right\} P_n(\mu). \quad (19)$$

Для точек поверхности шара выражение это приводится к виду

$$\varphi + \varphi' = - \sum \frac{(2n + 1) i^n P_n(\mu)}{(ka)^{n+1} \{ka f'_n(ka) + n f_n(ka)\}}. \quad (20)$$

Однако, если длина волны мала по сравнению с окружностью  $2ka$  шара, то значение  $ka$  велико, и ряд в формуле (20), к сожалению, сходится очень медленно, так что нужно взять большое число его членов, чтобы получить достаточно хорошее приближение. Рэлей <sup>1)</sup> провел эти вычисления для случая  $ka = 10$ , который оказывается достаточным для того, чтобы показать начало образования звуковой тени за задней стороной шара (т. е. вблизи значения  $\mu = -1$ ) <sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Rayleigh, On the Acoustic Shadow of a Sphere, Phil. Trans. A, CCIII, 7 (1904) [Papers, V, 149].

<sup>2)</sup> Относящиеся сюда оптические и электрические задачи очень важны, так как они связаны с самыми разнообразными вопросами, как, например, с теорией радуги и с влиянием кривизны земной поверхности на беспроводную телеграфию. Задачи эти были подробно разобраны Дебюи, Л. Лоренцом, Макдональдом, Пуанкаре, Никольсоном и другими, причем обнаружилось различия в мнениях относительно законности применяемых при этом математических методов. Полные указания по этим вопросам находятся в работе Лява, On the Transmission of Electric Waves over the Surface of the Earth, Phil. Trans. A, CCXV, 105 (1914). См. также Watson, Proc. Roy. Soc., XCV, 83 (1918).

§ 301. Если, не ограничиваясь простыми гармоническими колебаниями, мы постараемся проинтегрировать уравнение

$$\nabla^2 \varphi = c^2 \Delta \varphi \quad (1)$$

при помощи ряда сферических функций

$$\varphi = \sum R_n \varphi_n, \quad (2)$$

где  $\varphi_n$  — пространственная сферическая функция порядка  $n$ , то будем иметь на основании уравнения (4) § 292

$$\frac{\partial^2 R_n}{\partial t^2} = c^2 \left\{ \frac{\partial^2 R_n}{\partial r^2} + \frac{2(n+1)}{r} \frac{\partial R_n}{\partial r} \right\}. \quad (3)$$

Если  $R_n$  — решение этого уравнения, то можно легко показать, что соответствующее уравнение для  $R_{n+1}$  удовлетворится решением вида

$$R_{n+1} = \frac{1}{r} \frac{\partial R_n}{\partial r}; \quad (4)$$

поэтому уравнению (3) будет удовлетворять решение

$$R_n = \left( \frac{\partial}{r \partial r} \right)^n R_0 = \left( \frac{\partial}{r \partial r} \right)^n \frac{f(r-ct) + F(r+ct)}{r}. \quad (5)$$

В случае  $n=1$  мы имеем решение

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial r} \frac{f(r-ct) + F(r+ct)}{r} \cos \theta. \quad (6)$$

Этот результат был применен Кирхгофом и в более полном виде Лявом к подробному разбору довольно интересного вопроса о том, как распространяется в окружающей среде фронт системы волн, получившихся благодаря движению шара.

В исследовании <sup>1)</sup> Кирхгофа движение шара задано заранее, причем скорость этого движения есть данная функция времени, и решение в этом случае оказывается сравнительно простым.

Ляв <sup>2)</sup> разбирает случай волн, которые возникают в результате мгновенного импульса, приложенного к шаровому маятнику. Уравнение движения маятника, как и в § 298, имеет вид

$$M \left( \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \sigma_0^2 \xi \right) = - \iint p \cos \theta a^2 d\omega, \quad (7)$$

и мы полагаем

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial r} \frac{f(ct-r)}{r} \cos \theta, \quad (8)$$

<sup>1)</sup> Ср. Clebsch, см. выше стр. 138; Niven, Solutions of the Senate House Problems... for 1878, стр. 158.

<sup>2)</sup> Kirchhoff, см. выше, стр. 639.

<sup>3)</sup> Love, Some Illustrations of Modes of Decay of Vibratory Motions, Proc. Lond. Math. Soc. (2), II, 88 (1904).

причем член в формуле (6), который соответствует волнам, распространяющимся внутрь, отброшен. Это приводит к уравнению

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \sigma_0^2 \xi = \frac{2\beta c}{a^2} \left\{ f'(ct-a) + \frac{1}{a} f'(ct-a) \right\}, \quad (9)$$

где

$$\beta = \frac{\frac{2}{3} \pi \rho_0 a^3}{M}. \quad (10)$$

Из кинематического условия, которое должно быть выполнено на поверхности шара, имеем

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{1}{a} f'(ct-a) - \frac{2}{a^2} f'(ct-a) - \frac{2}{a^2} f(ct-a). \quad (11)$$

Чтобы решить совместную систему уравнений (9) и (11), положим

$$f(ct-r) = Ae^{\lambda(ct-r+a)}, \quad \xi = Be^{\lambda ct}, \quad (12)$$

тогда получим

$$\left. \begin{aligned} (\lambda^2 c^2 + \sigma_0^2) B &= \frac{2\beta c}{a^2} (\lambda a + 1) \lambda A, \\ \lambda c B &= -\frac{1}{a^2} (\lambda^2 a^2 + 2\lambda a + 2) A. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Если мы исключим отношение  $A/B$ , то получим биквадратное уравнение <sup>1)</sup> относительно  $\lambda$

$$(\lambda^2 c^2 + \sigma_0^2) (\lambda^2 a^2 + 2\lambda a + 2) + 2\beta c^2 \lambda^2 (\lambda a + 1) = 0. \quad (14)$$

Отмечая различные корни значками вниз, будем иметь

$$\xi = - \sum_1^4 \frac{\lambda_s^2 a^2 + 2\lambda_s a + 2}{c a^2 \lambda_s} A_s e^{\lambda_s ct}, \quad (15)$$

$$\varphi = - \sum_1^4 (\lambda_s r + 1) \frac{A_s}{r^2} e^{\lambda_s (ct-r+a)} \cos \theta. \quad (16)$$

Если мы будем исходить от произвольных начальных значений для  $\xi$  и  $\frac{d\xi}{dt}$  и если окружающая среда вначале находится в покое, то в этом решении следует считать  $t > 0$  и  $r < ct + a$ . Начальные условия дают два уравнения для четырех постоянных  $A_s$ . Полагая, например, что для  $t=0$  имеют место равенства

$$\xi = 0, \quad \frac{d\xi}{dt} = U_0, \quad (17)$$

будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^4 \left( \lambda_s a + 2 + \frac{2}{\lambda_s a} \right) A_s &= 0, \\ \sum_1^4 (\lambda_s^2 a^2 + 2\lambda_s a + 2) A_s &= -U_0 a^2. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

<sup>1)</sup> Если положить  $\lambda = ik$ , то это уравнение совпадает с уравнением (26) § 298.

Остальные условия получаются из рассмотрения разрывов сплошности на шаровой граничной поверхности фронта движущихся волн. Обозначим через  $\delta S$  элемент этой граничной поверхности и проведем через точки контура элемента  $\delta S$  нормали по направлению изнутри наружу, которые на расстоянии  $c \delta t$  пересекут поверхность шара, параллельную первой. Таким способом получается элемент объема величины  $\delta S \cdot c \delta t$ . За промежуток времени  $\delta t$  жидкость, содержащаяся в этом элементе объема, изменяет свою скорость в направлении нормали от значения 0 до значения  $-\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ , равного значению скорости в направлении внутренней нормали к граничной поверхности элемента, вследствие избытка давления  $c^2 \rho_0 s$ , где  $s$  обозначает коэффициент уплотнения на внутренней стороне поверхности. Отсюда получается уравнение

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \rho_0 \delta S \cdot c \delta t = c^2 \rho_0 s \cdot \delta S \cdot \delta t$$

или, так как  $c^2 s = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ , уравнение <sup>1)</sup>

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -c \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad (19)$$

которое должно удовлетворяться для  $r = ct + a$ . Подставляя в это уравнение значение  $\varphi$  из формулы (16), находим

$$\sum (\lambda_s r + 2) A_s = 0.$$

Это уравнение вообще может удовлетворяться только в том случае, когда имеем

$$\sum \lambda_s A_s = 0, \quad \sum A_s = 0, \quad (20)$$

что, как это следует отметить, обеспечивает непрерывность  $\varphi$  и вместе с тем также непрерывность компоненты скорости, касательной к волновому фронту.

Четыре условия (18), (20) могут теперь быть записаны следующим образом:

$$\sum \lambda_s^2 A_s = -U_0 a, \quad \sum \lambda_s A_s = 0, \quad \sum A_s = 0, \quad \sum \frac{A_s}{\lambda_s} = 0; \quad (21)$$

отсюда следует

$$A_1 = -\frac{\lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} \cdot U_0 a, \quad \dots, \dots, \dots \quad (22)$$

Движение воздуха определяется, таким образом, уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{\partial}{\partial r} \sum_1^4 \frac{A_s}{r} e^{\lambda_s(ct - r + a)} \cos \theta & [r < ct + a] \\ \varphi &= 0 & [r > ct + a]. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

<sup>1)</sup> Теория разрывов сплошности на поверхности фронта волн была систематически изучена Кристоффелем, Untersuchungen über die mit dem Forbestehen linearer partieller Differentialgleichungen verträglichen Unstetigkeiten, Ann. d. Matemat., VIII, 81 (1876) и Лявом, Wave-Motions with Discontinuities at Wave-Fronts, Proc. Lond. Math. Soc. (2), 1, 37 (1903).

В практически встречающихся случаях  $\beta$  есть очень малая дробь, и корни уравнения (14) в первом приближении равны

$$\lambda_1 = \frac{i\sigma_0}{c}, \quad \lambda_2 = -\frac{i\sigma_0}{c}, \quad \lambda_3 = \frac{-1+i}{a}, \quad \lambda_4 = \frac{-1-i}{a}. \quad (24)$$

Если путь, пройденный звуковой волной в течение одного периода колебаний, превосходит во много раз окружность шара, то  $\lambda_3, \lambda_4$  оказываются большими по сравнению с  $\lambda_1, \lambda_2$ . Отсюда для  $r < ct + a$  находим подстановкой в выражения (22) и (23)

$$\varphi = -\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{U_0 a^2}{2r} \cos \sigma_0 \left( t - \frac{r-a}{c} \right) - \frac{\sqrt{2} U_0 a^2}{2r} e^{-\frac{-(ct+a-r)}{a}} \cdot \cos \left( \frac{ct+a-r}{a} - \frac{1}{4} \pi \right) \right\} \cos \theta. \quad (25)$$

Первая часть этого выражения такова, как если бы шар в течение неограниченного времени испытывал простые гармонические колебания с периодом  $\frac{2\pi}{\sigma_0}$  и амплитудой  $\frac{U_0}{\sigma_0}$ . Вторая часть становится незаметной на расстоянии нескольких диаметров шара от внутренней граничной поверхности движущейся волны; однако, вблизи от этой поверхности вторая часть оказывается сравнимой с первой частью. Чтобы исследовать затухание колебаний, нужно перейти ко второму приближению; но эта часть задачи была разобрана уже в §§ 295, 298. Здесь достаточно заметить, что наиболее важная часть возмущения внутри движущейся волны дается выражением вида

$$\varphi = \frac{C}{r} e^{-m(ct-r)} \cos \sigma_0 \left( t - \frac{r}{c} + \varepsilon \right) \cos \theta. \quad (26)$$

Множитель  $e^{-mct}$  дает затухание в произвольной точке, получающееся вследствие того, что первоначальная энергия маятника расходуется на возбуждение волн. Что же касается множителя  $e^{mr}$ , то следует заметить, что внутри пространства, занятого волнами, амплитуда в какой-либо точке  $Q$  (если мы будем пренебрегать тем изменением, которое обусловлено расхождением радиусов) оказывается больше, чем амплитуда в точке  $P$ , лежащей на том же радиусе-векторе ближе к центру, и именно — в отношении  $e^{m \cdot PQ}$ ; причина этого заключается в том, что амплитуда в точке  $Q$  представляет возмущение, которое началось ранее на промежуток времени  $\frac{PQ}{c}$ , в течение которого амплитуда колебаний убывала по закону  $e^{-mct}$  1).

### Звуковые волны в двух измерениях.

§ 302. Если  $\varphi$  не зависит от  $z$ , то имеем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta_1 \varphi, \quad (1)$$

где

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (2)$$

1) Ср. Lamb, On a Peculiarity of the Wave-System due to the Free Vibrations of a Nucleus in an Extended Medium, Proc. Lond. Math. Soc. (1), XXXII, 208 (1900).

В случае симметрии относительно начала отсюда получается

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \quad (3)$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Общее решение (этого уравнения) мы получили в § 196 в виде

$$2\pi\varphi = \int_0^\infty f\left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u\right) du + \int_0^\infty F\left(t + \frac{r}{c} \operatorname{ch} u\right) du, \quad (4)$$

и далее было показано, что решение

$$2\pi\varphi = \int_0^\infty f\left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u\right) du \quad (5)$$

представляет систему расходящихся волн, которая возбуждается источником  $f(t)$ , находящимся в начале координат.

Мы теперь можем дать другой вывод этих результатов. Из формулы (13) § 285 получается следующее: если точечный источник  $f(t) \delta z$  находится в точке  $(0, 0, z)$ , то его действие в точке, лежащей в плоскости  $xu$  на расстоянии  $r$  от начала, может быть представлено выражением

$$\frac{1}{4\pi \sqrt{r^2 + z^2}} f\left(t - \frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{c}\right) \delta z.$$

Интегрируя это выражение по  $z$  между пределами  $-\infty$  и  $+\infty$ , мы получим действие системы точечных источников, распределенных вдоль оси  $z$  с равномерной линейной плотностью  $f(t)$  в виде

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{c}\right) \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty f\left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u\right) du. \end{aligned} \quad (6)$$

Тот же метод, конечно, может быть применен и для получения второго члена в формуле (4).

Уравнения движения звука в одном, двух или трех измерениях в случае симметрии содержатся в формуле

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{m-1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right). \quad (7)$$

Сложная и несколько неудобная форма, в которой получено решение для случая  $m=2$ , находится в резком контрасте с аналитической простотой и внешним формальным видом решений для случаев  $m=1$ ,  $m=3$ ; но это обстоятельство не должно вводить нас в заблуждение относительно истин-

ных физических соотношений. Чтобы иметь возможность сравнить между собой эти три случая, рассмотрим действие (А) плоского источника, (В) линейного источника и (С) точечного источника, причем мощность источника в каждом из этих случаев пусть будет равна

$$f(t) = \frac{\tau}{t^2 + \tau^2}. \quad (8)$$

Это дает удобное представление для того источника, который имеет более или менее преходящий характер, так как мы можем, уменьшая  $\tau$ , сделать произвольно малым тот промежуток времени, в течение которого действие источника оказывается заметным, тогда как интеграл по времени остается неизменным.

Результаты (для всех трех случаев) можно выразить в более удобной форме, введя коэффициент уплотнения  $s$ .

(А). В случае  $m=1$  находим для  $x > 0$

$$s = \frac{\tau}{2c} \frac{1}{\left(t - \frac{x}{c}\right)^2 + \tau^2}. \quad (9)$$

(В). Для  $m=2$  аналитическое представление оказывается подобным данному в § 197. Результат для главной части волны может быть представлен в виде

$$s = \frac{1}{4\sqrt{2c^2\tau^2}} \sqrt{\frac{c\tau}{r}} \sin\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{3}{2}\eta\right) \cos^{3/2}\eta, \quad (10)$$

где  $\eta$  определяется из уравнения

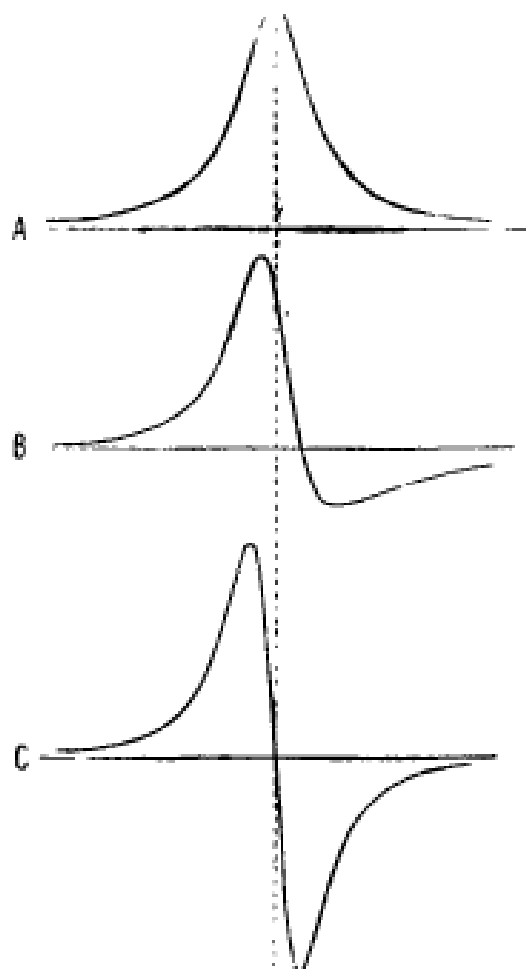
$$t = \frac{r}{c} + \tau \operatorname{tg} \eta.$$

(С). В случае трех измерений мы имеем

$$s = \frac{\tau}{2\pi c^2} \frac{\frac{r}{c} - t}{r \left\{ \left(t - \frac{r}{c}\right)^2 + \tau^2 \right\}^2}. \quad (11)$$

Эти три случая представлены на фиг. 77, причем в качестве ординат взяты значения  $s$ , а в качестве абсцисс значения  $t$ . Масштаб для  $t$  во всех трех случаях взят один и тот же, но между вертикальными масштабами не имеется, конечно, никакого соответствия. В случае (А) мы имеем чистую волну сгущения; в случае (В) за начальным сгущением следует разрежение менее сильное, но зато с большей продолжительностью; в случае (С), наоборот, сгущение и разрежение будут антисимметричны. В случаях (В) и (С) для каждой произвольной точки необходимо имеет место одно и то же равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} s dt = 0; \quad (12)$$



Фиг. 77.

ср. § 288. Если бы источник по своей продолжительности был строго ограничен, то в случае трех измерений среда после прохождения волны

оставалась бы совершенно в покое, как и в случае одного измерения, хотя и по другой причине. В промежуточном случае двух измерений волна будет оставлять после себя хвост неограниченной длины, и следовательно, здесь имеет место только лишь асимптотическое приближение к положению покоя.

Оказывается, что с физической точки зрения случаи  $m=1$ ,  $m=2$ ,  $m=3$  образуют последовательность с правильным чередованием тех свойств, которые обусловлены возрастающей подвижностью среды.

Если мы не будем ограничиваться случаем симметрии, то общее решение уравнения (1) в полярных координатах будет иметь вид

$$\varphi = \sum (Q_s r^s \cos s\theta + R_s r^s \sin s\theta), \quad (13)$$

где  $Q_s$ ,  $R_s$  суть функции от  $r$  и  $t$ , удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\partial^2 Q_s}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 Q_s}{\partial r^2} + \frac{2s+1}{r} \frac{\partial Q_s}{\partial r} \right) \quad (14)$$

и аналогичному уравнению относительно  $R_s$ . Решение уравнения (14) есть

$$Q_s = \left( \frac{\partial}{r \partial r} \right)^s Q_0, \quad (15)$$

где

$$Q_0 = \int_0^\infty f \left( t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u \right) du + \int_0^\infty F \left( t + \frac{r}{c} \operatorname{ch} u \right) du. \quad (16)$$

Доказательство аналогично приведенному в (5) § 301<sup>1)</sup>.

**§ 303.** В случае простого гармонического колебания ( $e^{ikt}$ ) будем иметь в полярных координатах уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + k^2 \varphi = 0, \quad (1)$$

где  $k = \frac{\sigma}{c}$ . Решение этого уравнения, подчиненное условию быть конечным в начале координат, может быть представлено, как в § 191, в виде

$$\varphi = \sum (A_s \cos s\theta + B_s \sin s\theta) J_s(kr), \quad (2)$$

где  $s$  может принимать любые целые значения между 0 и  $\infty$ .

Отсюда мы сразу получаем предложение, что среднее значение ( $\bar{\varphi}$ ) функции  $\varphi$  в круге, описанном около начала координат радиусом  $r$ , равно

$$\bar{\varphi} = J_0(kr) \varphi_0, \quad (3)$$

где  $\varphi_0$  обозначает значение  $\varphi$  в начале<sup>2)</sup>. Эта теорема (при том ограничении, которое высказано выше) аналогична теореме (8) § 289 и доказывается подобным же способом.

<sup>1)</sup> Этот параграф с незначительными изменениями взят из одной работы автора, указанной на стр. 374.

<sup>2)</sup> H. Weber, Math. Ann. I (1868).



При поперечных колебаниях воздуха, заключенного в сосуде, имеющем форму круглого цилиндра, нормальные колебания выражаются различными членами ряда (2), причем допускаемые значения  $k$ , а следовательно, и  $\sigma$  определяются из уравнения

$$J'_s(ka) = 0, \quad (4)$$

где  $a$  обозначает радиус. Смысл этого результата может быть выяснен из § 191, где рассматривается точно такая же математическая задача. Фиг. 45 показывает для двух важнейших случаев форму линий равного давления; движение частиц происходит в направлениях, перпендикулярных к этим линиям <sup>1)</sup>.

Бесселевы функции  $J_s(z)$  удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\frac{d}{d\zeta} \frac{J_s(\zeta)}{\zeta^s} = -\frac{J_{s+1}(\zeta)}{\zeta^s}, \quad (5)$$

отвечающему формуле (17) § 292. Соотношение это легко получается из разложения в ряд функции  $J_s(\zeta)$ , данного в § 101. Из формулы (5) и из дифференциального уравнения для  $J_s(\zeta)$ , именно,

$$f''(\zeta) + \frac{1}{\zeta} f'(\zeta) + \left(1 - \frac{s^2}{\zeta^2}\right) f(\zeta) = 0, \quad (6)$$

можно получить различные рекуррентные формулы, например,

$$\zeta J'_s(\zeta) + s J_s(\zeta) = \zeta J_{s-1}(\zeta); \quad (7)$$

эта формула соответствует формуле (18) § 292.

Последовательным применением формулы (5) получаем

$$J_s(\zeta) = \zeta^s \left(-\frac{d}{\zeta d\zeta}\right)^s J_0(\zeta). \quad (8)$$

Методом полной индукции можно легко показать, что выражение в правой части равенства (8) действительно есть решение дифференциального уравнения (6), если  $J_0(\zeta)$  удовлетворяет тому же уравнению при  $s=0$ . Это подсказывает подходящий для наших целей выбор функций Бесселя „второго рода“. Мы полагаем

$$D_s(\zeta) = \zeta^s \left(-\frac{d}{\zeta d\zeta}\right)^s D_0(\zeta), \quad (9)$$

где  $D_0(\zeta)$  обозначает функцию <sup>2)</sup>, введенную в § 194, именно

$$D_0(\zeta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-i\zeta \operatorname{ch} u} du. \quad (10)$$

<sup>1)</sup> Эта задача исчерпывающим образом была разобрана Рэлеем, *Theory of Sound*, § 339.

<sup>2)</sup> При помощи метода § 302 можно легко показать, что  $D_0(kr)$  представляет потенциал простых гармонических точечных источников, равномерно распределенных вдоль оси  $z$ . См. *R a y l e i g h*, *On Point-, Line- and Plane-Sources of Sound*, *Proc. Lond. Math. Soc.*, XIX, 504 (1888) [*Papers*, III, 44; *Theory of Sound*, § 342].

Ясно без дальнейшего доказательства, что  $D_s(\zeta)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (6) и той же системе рекуррентных формул, как и  $J_s(\zeta)$ . Важный частный случай формулы (9) представляет равенство

$$D_1(\zeta) = -D'_0(\zeta). \quad (11)$$

Полезны следующие приближенные формулы. Для малого  $\zeta$  имеют место на основании §§ 100, 194 равенства

$$\left. \begin{aligned} J_0(\zeta) &= 1 - \frac{\zeta^2}{4} + \dots, \\ D_0(\zeta) &= -\frac{2}{\pi} \left( \log \frac{1}{2} \zeta + \gamma + \frac{1}{2} i\pi + \dots \right); \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

отсюда и из формул (8) и (9) следует для  $s > 0$

$$\left. \begin{aligned} J_s(\zeta) &= \frac{\zeta^s}{2^s s!} + \dots, \\ D_s(\zeta) &= \frac{2^s (s-1)!}{\pi \zeta^s} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

С другой стороны, для больших значений  $\zeta$  мы имеем

$$\left. \begin{aligned} J_s(\zeta) &= \left( \frac{2}{\pi \zeta} \right)^{1/2} \sin \left( \zeta + \frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2} s\pi \right) + \dots, \\ D_s(\zeta) &= \left( \frac{2}{\pi \zeta} \right)^{1/2} i^s e^{-i \left( \zeta + \frac{1}{4} \pi \right)} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

до тех пор пока порядок  $s$  функций не станет сравнимым с порядком  $\zeta$  или больше, чем  $\zeta$ .

Формулы эти могут быть применены для того, чтобы исследовать, как колебания цилиндра (например, фортепианной струны) сообщаются окружающему воздуху.

Пусть поперечные колебания цилиндра определяются функцией

$$U = a e^{i\omega t}; \quad (15)$$

тогда радиальная скорость на поверхности  $r = a$  будет дана формулой

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r} = a e^{i\omega t} \cos \theta. \quad (16)$$

Соответствующее значение  $\varphi$  будет равно

$$\varphi = A D_1(kr) \cos \theta e^{i\omega t} \quad (17)$$

при условии

$$-k D'_1(ka) A = a. \quad (18)$$

Если, как мы и будем предполагать, окружность поперечного сечения цилиндра очень мала по сравнению с длиной звуковой волны, то  $ka$  представляет очень малую дробь, и мы находим из формул (13)

$$A = \frac{1}{2} \pi k a^3 a.$$

На расстояниях  $r$ , больших по сравнению с  $k^{-1}$ , мы имеем таким же образом на основании формул (14)

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{2} \pi} \frac{ik^{1/2} a^2}{r^{1/2}} \alpha \cos \theta e^{i(\sigma t - kr + 1/4\pi)}. \quad (19)$$

Если бы скорость на границе  $r = a$  всюду была направлена по радиусам и амплитуда была бы равна  $\alpha$ , то значение  $\varphi$  на некотором расстоянии было бы равно

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{2} \pi} \frac{a}{k^{1/2} r^{1/2}} \alpha e^{i(\sigma t - kr - 1/4\pi)}. \quad (20)$$

В действительности интенсивность, измеряемая квадратом амплитуды, оказывается меньше в отношении  $k^2 a^2$ , которое по предположению очень мало.

Это показывает, что боковое движение воздуха вблизи цилиндрической поверхности имеет своим следствием то, что амплитуды распространяющихся волн на некотором расстоянии уменьшаются; ср. § 294. Так, например, значительно большая часть звука фортепианной струны получается не непосредственно от проволоки, а от резонансного ящика, который приводится в вынужденные колебания вследствие изменения давления в местах укрепления струны.

Реакция воздуха, действующая на колеблющийся цилиндр, на основании уравнения (18) будет равна

$$\begin{aligned} - \int_0^{2\pi} p \cos \theta a \, d\theta &= - \rho_0 a \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cos \theta \, d\theta = - \pi \rho_0 a i \sigma A D_1(ka) e^{i\sigma t} = \\ &= \pi \rho_0 a^2 \frac{D_1(ka)}{ka D_1'(ka)} \frac{dU}{dt}. \end{aligned} \quad (21)$$

Если  $ka$  мало, то это выражение приближенно равно

$$- \pi \rho_0 a^2 \frac{dU}{dt}. \quad (22)$$

Наиболее важное действие воздуха проявляется в том, что масса цилиндра увеличивается на количество, равное массе вытесненного воздуха; ср. § 68<sup>1)</sup>.

**§ 304.** Исследуем теперь отражение системы плоских волн от твердого цилиндрического препятствия, ось которого параллельна фронту волн.

Примем потенциал падающих волн, как и в § 296, равным

$$\varphi = e^{ikhx} \quad (1)$$

и найдем прежде всего разложение этого потенциала в ряд вида (2) § 303. Искомая формула имеет вид

$$e^{ikhx} = J_0(kr) + 2i J_1(kr) \cos \theta + \dots + 2i^s J_s(kr) \cos s\theta + \dots \quad (2)$$

<sup>1)</sup> Более полное исследование выполнено Стоксом, см. выше стр. 636.

Этот результат можно получить прямо <sup>1)</sup>, если разложить в ряд  $e^{i kr \cos \theta}$ , воспользоваться формулой

$$\cos^n \theta = \frac{1}{2^{n-1}} \left\{ \cos n\theta + \frac{n}{1} \cos (n-2)\theta + \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos (n-4)\theta + \dots \right\} \quad (3)$$

и из результата отобрать коэффициенты при  $\cos s\theta$ .

Разложение (2) заключает в себе формулу

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{i kr \cos \theta} \cos s\theta d\theta = i^s J_s(kr); \quad (4)$$

эта формула хорошо известна в теории бесселевых функций <sup>2)</sup>.

Наоборот, считая эту формулу известной, получим на основании ее другой вывод формулы (2).

Отраженные волны, будучи представлены функцией

$$\varphi' = \sum B_s D_s(kr) \cos s\theta, \quad (5)$$

должны удовлетворять условию на поверхности

$$\frac{\partial}{\partial r} (\varphi + \varphi') = 0 \quad (r=a), \quad (6)$$

которое дает значение

$$B_s = -\frac{2i^s J'_s(ka)}{D'_s(ka)}, \quad (7)$$

за исключением случая  $s=0$ , когда множитель 2 должен быть опущен.

Если  $ka$  будет мало, то имеют место приближенные равенства

$$J'_0(ka) = -\frac{1}{2} ka, \quad D'_0(ka) = -\frac{2}{\pi ka} \quad (8)$$

и для  $s > 0$

$$J'_s(ka) = \frac{(ka)^{s-1}}{2^s (s-1)!}, \quad D'_s(ka) = -\frac{2^s s!}{\pi (ka)^{s+1}}. \quad (9)$$

Отсюда следует

$$B_0 = -\frac{1}{4} \pi k^2 a^2, \quad B_s = \frac{\pi i^s (ka)^{2s}}{2^{2s-1} s! (s-1)!} \quad (s > 0). \quad (10)$$

Наиболее важными членами являются те, которые соответствуют значениям  $s=0$  и  $s=1$ . Если остальные члены отбросить, то будем иметь для отраженных волн

$$\varphi' = -\frac{1}{4} \pi k^2 a^2 \{ D_0(kr) - 2i D_1(kr) \cos \theta \}. \quad (11)$$

<sup>1)</sup> Н е і п е, Kugelfunctionen, I, 82. Можно также применить метод, использованный в (7) § 296.

<sup>2)</sup> W a t s o n, стр. 21. Случай  $s=0$  встречался нам уже в § 100; его можно истолковать, говоря, что он показывает, как можно получить потенциал  $J_0(kr)$  наложением плоских систем волн, которые движутся в направлениях, равномерно распределенных в плоскости  $xz$  вокруг начала; ср. (7), § 289.

Для больших значений  $ka$ , если ввести опять множитель с временем, эта функция примет вид

$$\varphi' = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} \pi} \frac{k^{3/2} a^2}{r^{1/2}} \cdot (1 + 2 \cos \theta) e^{i(kr - kr - 1/4 \pi)}. \quad (12)^1$$

Скорость, с которой энергия (на единицу длины цилиндра) уносится отраженными волнами наружу, равна

$$-\int_0^{2\pi} p \frac{\partial \varphi'}{\partial r} r d\theta = -\rho_0 r \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} \frac{\partial \varphi'}{\partial r} d\theta,$$

где значение  $r$  может быть взято ради удобства очень большим. Подставляя действительное значение  $\varphi'$  из формулы (12), найдем в качестве среднего значения

$$\frac{3}{8} \pi^2 \rho_0 \sigma (ka)^4. \quad (13)$$

Поток энергии в первоначальных волнах равен, как и в § 297,  $\frac{1}{2} \rho_0 k^2 c$ . Отношение величины (13) к этой величине будет равно (так как  $\sigma = kc$ )

$$\frac{3}{8} \pi^2 (ka)^2 2a. \quad (14)$$

Так, например, проволока диаметром в 0,5 мм, при длине волны 1220 мм, отражает только  $6,63 \cdot 10^{-8}$  падающей энергии.

**§ 305.** Приближенные методы §§ 299, 300 могут быть также применены к соответствующим задачам двух измерений<sup>2)</sup>.

Формула (5) § 290 должна быть теперь заменена формулой

$$\varphi_P = -\frac{1}{4} \int D_0(kr) \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds + \frac{1}{4} \int \varphi \frac{\partial}{\partial n} D_0(kr) ds, \quad (1)$$

которую можно получить аналогичным способом. В случае области, простирающейся до бесконечности, линейный интеграл можно брать только по внутренним границам, так как  $\varphi$  на большом расстоянии  $R$  от начала стремится к виду

$$D_0(kR) \quad \text{или} \quad \frac{e^{-ikR}}{R^{1/2}}.$$

Таким же способом находим соотношение

$$0 = -\frac{1}{4} \int D_0(kr') \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds + \frac{1}{4} \int \varphi \frac{\partial}{\partial n} D_0(kr') ds. \quad (2)$$

где  $r'$  обозначает расстояние от точки  $P'$ , лежащей вне рассматриваемой области.

<sup>1)</sup> R a y l e i g h, Theory of Sound, § 343.

<sup>2)</sup> R a y l e i g h, см. выше, стр. 647, 650.

Внутри области в плоскости  $xu$ , размеры которой малы по сравнению с длиной волны, величина  $kr$  будет малой, и формула (1) приводится к виду

$$\varphi_P = \frac{1}{2\pi} \int \ln r \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \frac{1}{2\pi} \int \varphi \frac{\partial}{\partial n} \ln r ds, \quad (3)$$

причем постоянный член здесь отброшен. Функция  $\varphi_P$ , определенная таким образом, удовлетворяет уравнению

$$\Delta_1 \varphi = 0, \quad (4)$$

имеющему место в случае несжимаемой жидкости.

1. Рассмотрим прежде всего случай, когда волны падают нормально на плоскую пластинку; положим

$$\varphi = e^{ikh} + \chi, \quad (5)$$

где  $\chi$  обозначает потенциал отраженных волн. Если мы предположим, что пластинка занимает часть плоскости  $x = 0$ , лежащую между прямыми  $y = \pm b$ , то условие для  $\chi$  примет вид

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = -ik \quad (x = 0, \quad b > y > -b). \quad (6)$$

Применяя теперь формулы (1) и (2) к области, лежащей вправо от оси  $y$ , и совмещая точку  $P'$  с зеркальным изображением точки  $P$  по отношению к границе этой области, получим после вычитания

$$\chi_P = \frac{1}{2} \int_{-b}^b \chi \frac{\partial}{\partial n} D_0(kr) dy, \quad (7)$$

где значения  $\chi$  и  $\frac{\partial D_0}{\partial n}$  должны быть взяты на положительной стороне пластинки. Обозначая через  $x$  и  $y$  координаты точки  $P$ , мы будем иметь  $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial x}$ , и тогда на расстоянии  $r$  от начала, значительно превосходящем  $2b$ , будет иметь место формула

$$\chi_P = -\frac{1}{2} \int_{-b}^b \chi dy \frac{\partial}{\partial x} D_0(kr); \quad (8)$$

ср. (4) § 299. Определенный интеграл равен половине „импульса“ пластинки, отнесенного к единице длины; при этом предполагается, что пластинка движется в несжимаемой жидкости с плотностью, равной единице, со скоростью  $ik$  и обращена широкой стороной вперед. Отсюда на основании формулы (11) § 71 получаем

$$\int_{-b}^b \chi dy = \frac{1}{2} ik\pi b^2 \quad (9)$$

и, следовательно,

$$\chi_P = -\frac{1}{4} ik\pi b^2 \frac{\partial}{\partial x} D_0(kr) = \frac{1}{4} ik^2 b^2 D_1(kr) \cos \theta. \quad (10)$$

Если значение  $kr$  велико, то эта формула на основании формул (14) § 303 приводится к виду

$$\chi_P = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\pi^{1/2} k^{3/2} b^2}{r^{1/2}} e^{-i(kr + 1/4\pi)} \cos \theta. \quad (11)$$

Отношение энергии, рассеянной в течение одной секунды, к потоку энергии первоначальных волн равно

$$\frac{1}{16} \pi^2 (kb)^2 2b; \quad (12)$$

это отношение в точности равно одной шестой соответствующего отношения в случае кругового цилиндра радиуса  $b$ .

2. В случае отверстия в плоском экране ( $x=0$ ), ограниченного параллельными прямыми ( $y = \pm b$ ), положим, как в (10) § 299.2,

$$\varphi = e^{ikx} + e^{-ikx} + \chi \quad \text{и} \quad \varphi = \chi' \quad (13)$$

соответственно для  $x \geq 0$ , и постараемся так определить  $\chi$  и  $\chi'$ , чтобы для всего отверстия имели место равенства

$$\chi = -1, \quad \chi' = +1, \quad (14)$$

в то время как на самом экране было бы

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \chi'}{\partial x} = 0. \quad (15)$$

Если мы приложим теперь формулы (1) и (2) к части плоскости, лежащей вправо от оси  $y$ , и если далее мы совместим точку  $P'$  с зеркальным изображением точки  $P$ , то получим в результате сложения

$$\chi_P = -\frac{1}{2} \int_{-b}^b D_0(kr) \frac{\partial \chi}{\partial n} dy, \quad (16)$$

причем  $dn$  взято с положительной стороны (плоскости  $y=0$ ). Для расстояний  $r$  от начала, значительно превосходящих  $2b$ , из этой формулы получается

$$\chi_P = -\frac{1}{2} \int_{-b}^b \frac{\partial \chi}{\partial n} dy D_0(kr). \quad (17)$$

В непосредственной близости от отверстия движение, представленное функциями  $\chi$  и  $\chi'$ , одинаково с течением несжимаемой жидкости через то же самое отверстие, и поэтому приближенное значение определенного интеграла (17) может быть получено из сравнения с соответствующими результатами § 66, 1. Оказывается, что соответствующее единице потока приращение  $\chi$  на пути от самого отверстия до точки, находящейся на расстоянии  $r$ , значительно превосходящем  $2b$ , будет равно

$$\frac{1}{\pi} \ln \frac{2r}{b}.$$

Мы можем все же принять, что значение  $r$  мало по сравнению с длиной волны, и тогда формулы (14) и (17) показывают, что в действительной задаче соответствующее приращение  $\chi$  на основании формул (12) § 303 будет равно

$$1 + \frac{1}{\pi} \int_{-b}^b \frac{\partial \chi}{\partial n} dy \left( \ln \frac{1}{2} kr + \gamma + \frac{1}{2} i\pi \right). \quad (18)$$

Полагая это выражение равным

$$\frac{1}{\pi} \int_{-b}^b \frac{\partial \chi}{\partial n} dy \ln \frac{2r}{b}, \quad (19)$$

находим

$$\int_{-b}^b \frac{\partial \chi}{\partial n} dy = - \frac{\pi}{\ln \frac{1}{4} kb + \gamma + \frac{1}{2} i\pi}. \quad (20)$$

Тогда, если значение  $kr$  велико, из формулы (17) следует

$$\begin{aligned} \chi_P &= \frac{\frac{1}{2} \pi}{\ln \frac{1}{4} kb + \gamma + \frac{1}{2} i\pi} D_0(kr) = \\ &= \frac{1}{\ln \frac{1}{4} kb + \gamma + \frac{1}{2} i\pi} \left( \frac{\pi}{2kr} \right)^{1/2} e^{-i(kr + 1/4 \pi)} \end{aligned} \quad (21)$$

Значение функции  $\chi'$  в произвольной точке  $P$  с отрицательной стороны плоскости  $x = 0$  равно и по знаку прямо противоположно значению  $\chi$  в точке, представляющей зеркальное изображение точки  $P$  по отношению к этой плоскости.

Отношение энергии, прошедшей через отверстия, к потоку энергии первоначальных волн получается равным

$$\frac{\frac{1}{4} \pi^2}{kb \left\{ \left( \ln \frac{1}{4} kb + \gamma \right)^2 + \frac{1}{4} \pi^2 \right\}} 2b. \quad (22)$$

Если длина волны в 10, 100 или 1000 раз больше ширины отверстия, то множитель  $2b$  оказывается соответственно равным 1,240, 3,795, 17,20.

3. Задача в двух измерениях о дифракции плоских волн у цилиндрического препятствия с произвольной формой поперечного сечения может быть исследована методом § 300<sup>1)</sup>, причем вместо формулы (5) § 290 должна быть взята приведенная выше формула (1). Так как при этом новые вопросы не затрагиваются, то достаточно будет привести важнейшие результаты. Мы будем считать, что волны исходят из направления  $(\lambda, \mu, 0)$  и будем поэтому писать

$$\varphi = e^{ik(\lambda x + \mu y)} + \chi, \quad (23)$$

где функция  $\chi$  должна представлять отраженные волны. Далее мы предположим, что оси  $x$  и  $y$  имеют специальные направления в плоскости поперечного сечения. Эти направления определяются тем, что кинетическая энергия несжимаемой жидкости с плотностью, равной единице, отнесенная к единице длины вдоль оси  $z$ , при движении цилиндра в жидкости со скоростью  $(u, v, 0)$  дается выражением вида

$$\frac{1}{2} (Au^2 + Bv^2), \quad (24)$$

где, следовательно, член с произведением  $uv$  должен отсутствовать. Размеры поперечного сечения предполагаются при этом малыми по сравнению с дли-

<sup>1)</sup> Ср. R a y l e i g h, см. выше, стр. 650.



ной волны; волны, отраженные в направлении  $(\lambda_1, \mu_1, 0)$ , определяются тогда формулой

$$\begin{aligned} \chi_P = & -\frac{k^2 S}{(8\pi k r)^{1/2}} e^{-i\left(kr + \frac{1}{4}\pi\right)} \\ & -\frac{k^2}{(8\pi k r)^{1/2}} \left\{ (A+S)\lambda_1 + (B+S)\mu_1 \right\} e^{-i\left(kr + \frac{1}{4}\pi\right)}, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $S$  — площадь поперечного сечения.

Для эллиптического поперечного сечения, полуоси которого  $a$  и  $b$  лежат в направлении осей  $x$  и  $y$ , имеем [см. (11) § 77]

$$S = \pi ab, \quad A = \pi b^2, \quad B = \pi a^2. \quad (26)$$

В случае кругового цилиндра ( $a = b$ ) или плоской пластинки ( $a = 0$ ) мы приходим к уже ранее полученным результатам.

**§ 306.** Мы можем также исследовать те возмущения, которые производятся в последовательности плоских волн тонким экраном, прорезанным рядом параллельных, равных и равноотстоящих друг от друга щелей. Как и выше, метод исследования является приближенным и основывается на предположении, что длина волны велика по сравнению с расстоянием между центрами соседних отверстий.

Предварительно определим течение несжимаемой жидкости сквозь твердую решетку вышеупомянутого вида. Это можно сделать при помощи метода Шварца (§ 73), но для нашей цели достаточно будет только привести результаты и их проверить. Возьмем ось  $x$  перпендикулярно к плоскости решетки, ось  $y$  в плоскости решетки перпендикулярно к направлению длины отверстий и напишем

$$\operatorname{ch} w = \mu \operatorname{ch} z, \quad (1)$$

где

$$w = \varphi + i\psi, \quad z = x + iy \quad (2)$$

и  $\mu$  предполагается больше, чем единица. Определенное таким способом  $w$  будет циклической функцией; но мы можем избежать всякую неопределенность, если ограничимся сначала той половиной плоскости  $xu$ , для которой  $x > 0$ , а затем зафиксируем значение  $w$  в какой-либо точке. Будем предполагать, что в начале координат  $\psi = 0$ , в то время как значение  $\varphi$  равно действительному положительному значению  $\operatorname{arcsch} \mu$ .

Формула (1) дает

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch} \varphi \cos \psi &= \mu \operatorname{ch} x \cos y, \\ \operatorname{sh} \varphi \sin \psi &= \mu \operatorname{sh} x \sin y. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Геометрическое место точек, для которых  $\varphi = 0$ , состоит из тех частей оси  $y$ , для которых

$$1 > \mu \cos y > -1;$$

эти части представляют отверстия, так что в масштабе наших формул половина ширины отверстия равна  $\operatorname{arcsin} \frac{1}{\mu}$ . Для других частей области  $x > 0$  значения  $\varphi$  будут положительными. Далее линии

$$\psi = 0, \quad \psi = \pm \pi, \quad \psi = \pm 2\pi, \dots$$

состоят отчасти из прямых

$$y = 0, \quad y = \pm \pi, \quad y = \pm 2\pi, \dots,$$

отчасти же из тех отрезков оси  $y$ , для которых

$$|\mu \cos y| > 1;$$

эти отрезки соответствуют частям экрана между отверстиями.

Кривые  $\varphi = \text{const.}$ ,  $\psi = \text{const.}$  для одного специального случая изображены на фиг. 78, причем значение  $\mu$  для упрощения вычислений принято равным

$$\mu = \text{ch } \frac{1}{5} \pi = 1,2040;$$

отсюда получается

$$\text{arc sin } \frac{1}{\mu} = 0,312 \pi, \quad \text{arc cos } \frac{1}{\mu} = 0,188 \pi$$

Последние числа дают значения относительной ширины отверстий и лежащих между ними частей экрана.

Формулы (3) и фиг. 78<sup>1)</sup> допускают различные интерпретации в электростатике и других смежных математических областях. В рассматриваемом здесь случае мы должны принять, что значения  $\psi$  в двух точках, лежащих симметрично по отношению к обеим сторонам оси  $y$ , равны, в то время как значения  $\varphi$  в этих точках хотя и равны друг другу, но противоположны по знаку.

Из формул (3) или из рассмотрения фиг. 78 получается, что функция  $\varphi$  в формулах (3) есть четная периодическая функция от  $y$  с периодом  $\pi$ . Поэтому она может быть разложена по теореме Фурье в ряд по косинусам кратных от  $2y$ , причем коэффициенты суть функции от  $x$ , общий вид которых определяется подстановкой в уравнение

Фиг. 78.

$$\Delta_1 \varphi = 0. \quad (4)$$

Если мы примем во внимание условие, которое должно удовлетворяться при больших значениях  $x$ , то найдем для положительных значений  $x$

$$\varphi = \ln \mu + x + \sum_1^{\infty} C_s e^{-2sx} \cos 2sy. \quad (5)$$

<sup>1)</sup> Взятые из работы автора, указанной на стр. 675. Формула, равносильная с формулой (1), была дана Л а р м о р о м, *Mathematical Tripos* ч. II, 1895.

<sup>2)</sup> Точные значения коэффициентов  $C_s$  для наших целей не требуются. Можно показать, что в обозначениях гипергеометрических функций

$$\begin{aligned} C_s &= \frac{(-1)^{s-1}}{s} F\left(s, -s, 1, \frac{1}{\mu^2}\right) = \\ &= \frac{(-1)^{s-1}}{s} \left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right) F\left(1+s, 1-s, 1, \frac{1}{\mu^2}\right). \end{aligned}$$

См. названную работу.

Если мы введем более общую линейную единицу и обозначим ширину каждого отверстия через  $a$ , а ширину полосы экрана между отверстиями через  $b$ , то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch} \varphi \cos \psi &= \mu \operatorname{ch} \frac{\pi x}{a+b} \cos \frac{\pi y}{a+b}, \\ \operatorname{sh} \varphi \sin \psi &= \mu \operatorname{sh} \frac{\pi x}{a+b} \sin \frac{\pi y}{a+b}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где

$$\mu = \sec \frac{\pi b}{2(a+b)} = \operatorname{cosec} \frac{\pi a}{2(a+b)}. \quad (7)$$

Вместо разложения (5) получается теперь разложение

$$\varphi = \ln \mu + \frac{\pi x}{a+b} + \sum_1^{\infty} C_s e^{-\kappa_s x} \cos \frac{2s\pi y}{a+b}, \quad (8)$$

где

$$\kappa_s = \frac{2s\pi}{a+b}. \quad (9)$$

Обратимся теперь к акустической задаче. Соответственно последовательности падающих волн с потенциалом  $e^{ikx}$  положим <sup>1)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= e^{ikx} + e^{-ikx} + \chi && \text{при } x > 0 \\ \Phi &= \chi' && \text{при } x < 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Как и в §§ 299,2 и 305,2 для отверстий должны иметь место условия

$$\chi = -1, \quad \chi' = +1, \quad (11)$$

а для остальной части плоскости  $x=0$

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \chi'}{\partial x} = 0. \quad (12)$$

Так как функция  $\chi$  должна удовлетворять уравнению

$$(\Delta_1 + k^2) \chi = 0 \quad (13)$$

и должна к тому же быть периодической относительно  $y$  с периодом  $a+b$ , то она должна разлагаться в ряд Фурье вида

$$\chi = B_0 e^{-ikx} + \sum_1^{\infty} B_s e^{-\lambda_s x} \cos \frac{2s\pi y}{a+b}, \quad (14)$$

где

$$\lambda_s^2 = \frac{4s^2\pi^2}{(a+b)^2} - k^2. \quad (15)$$

Так как по предположению величина  $a+b$  мала по сравнению с длиной волны  $\frac{2\pi}{k}$ , то величины  $\lambda_s$  будут действительными и, кроме того, очень

мало будут уклоняться от значений  $\kappa_s$ . Члены, содержащие  $e^{\lambda_s x}$ , исключены условием, что функция  $\chi$  должна быть конечной при  $x=\infty$ , так что волны, представленные при помощи функции  $\chi$ , должны сделаться в конце концов плоскими. То обстоятельство, что волны движутся от решетки наружу, оправдывает отбрасывание члена с  $e^{ikx}$ .

<sup>1)</sup> Буква  $\Phi$  употреблена здесь для обозначения акустического потенциала скоростей, тогда как  $\varphi$  использована здесь для другой цели.

Если бы  $k$  было равно нулю, то условия для определения  $\chi$  были бы такими же, как в случае несжимаемой жидкости, и мы имели бы

$$\chi = -1 + C\varphi, \quad (16)$$

где  $\varphi$  — функция, определяемая из формул (6) (способом, указанным выше), а  $C$  — некоторая постоянная; мы можем заранее предвидеть, что то же самое выражение будет в качестве приближенного пригодным и в рассматриваемом случае в непосредственной близости от решетки. Кроме того, для малых значений  $kx$  разложение (14) принимает вид

$$\chi = B_0(1 - ikx) + \sum_1^{\infty} B_s e^{-\lambda_s x} \cos \frac{2s\pi y}{a+b}, \quad (17)$$

причем подстановка  $\kappa_s$  вместо  $\lambda_s$  в показательную функцию соответствует ошибке порядка  $\frac{k^2(a+b)^2}{4\pi^2}$ . Подставляя из (8) в (16), найдем, что формулы (16) и (17) в действительности будут тождественны, если принять

$$B_0 = -1 + C \ln \mu, \quad -ikB_0 = \frac{\pi C}{a+b} \quad (18)$$

и для  $s > 0$

$$B_s = CC_s. \quad (19)$$

Отсюда получается

$$B_0 = -\frac{1}{1 + ikl}, \quad (20)$$

где

$$l = \frac{a+b}{\pi} \ln \sec \frac{\pi b}{2(a+b)}. \quad (21)$$

Что же касается функции  $\chi'$ , то все условия оказываются выполненными, если мы предположим, что ее значение для каждой точки  $P'$  на отрицательной стороне решетки равно и прямо противоположно значению  $\chi$  в точке  $P$ , лежащей на положительной стороне и являющейся зеркальным изображением точки  $P'$ . Из этого следует

$$\chi' = -B_0 e^{ikx} - \sum_1^{\infty} B_s e^{\lambda_s x} \cos \frac{2s\pi y}{a+b}. \quad (22)$$

На расстоянии от решетки, равном нескольким длинам волн, можно пренебречь последними членами в формулах (14) и (22), а поэтому волны там оказываются почти плоскими. Принимая во внимание формулы (10), мы видим, что коэффициенты отраженных и прошедших через решетку волн суть  $1 + B_0$  и  $-B_0$  или соответственно

$$\frac{ikl}{1 + ikl} \quad \text{и} \quad \frac{1}{1 + ikl}, \quad (23)$$

если каждая из первоначальных волн принята в качестве единичной. В таком случае интенсивности этих волн представляются формулами

$$I = \frac{k^2 l^2}{1 + k^2 l^2}, \quad I' = \frac{1}{1 + k^2 l^2}. \quad (24)$$

При достаточно больших длинах волн отражение имеет место лишь в очень малой степени даже тогда, когда отверстия составляют только очень

малую часть поверхности экрана. Соответствующие числовые значения могут быть записаны в виде

$$\frac{a}{a+b} = 0, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9, 1,0,$$

$$\frac{l}{a+b} = \infty, 0,590, 0,374, 0,251, 0,169, 0,110, 0,067, 0,037, 0,016, 0,004, 0.$$

Если мы предположим, например, что длина волны в десять раз больше интервала  $a+b$  и что отверстия занимают десятую часть поверхности решетки, то найдем для интенсивностей отраженных и прошедших сквозь решетку волн значения

$$I = 0,121, \quad I' = 0,879.$$

Несмотря на то, что отверстия сравнительно узки, 88% звука проходит сквозь решетку.

**§ 307.** Подобный же метод может быть применен к случаю решетки, которая составлена из параллельных равноотстоящих друг от друга проволок.

В § 64 мы показали, что потенциал скоростей и функция тока для несжимаемой жидкости, которая протекает сквозь решетку, составленную из параллельных цилиндрических стержней радиуса  $b$ , приближенно определяются из формулы

$$w = z + \frac{\pi b^2}{a} \coth \frac{\pi z}{a}, \quad (1)$$

где  $a$  обозначает расстояние между осями двух последовательных стержней и предполагается, что  $b < \frac{1}{4} a$ .

Если действительная часть  $z$  будет положительной, то будем иметь

$$w = z + \frac{\pi b^2}{a} \left( 1 + 2 \sum_1^{\infty} e^{-\frac{2s\pi x}{a}} \right) \quad (2)$$

и отсюда получим

$$\varphi = x + \frac{\pi b^2}{a} \left( 1 + 2 \sum_1^{\infty} e^{-\frac{2s\pi x}{a}} \cos \frac{2s\pi y}{a} \right). \quad (3)$$

Аналогично находим для отрицательных  $x$

$$\varphi = x - \frac{\pi b^2}{a} \left( 1 + 2 \sum_1^{\infty} e^{\frac{2s\pi x}{a}} \cos \frac{2s\pi y}{a} \right). \quad (4)$$

В случае же акустической задачи потенциал скоростей будет принимать вид

$$\Phi = e^{ikx} + Ae^{-ikx} + \sum_1^{\infty} C_s e^{-\lambda_s x} \cos \frac{2s\pi y}{a} \quad (5)$$

или

$$\Phi = Be^{ikx} - \sum_1^{\infty} C_s e^{-\lambda_s x} \cos \frac{2s\pi y}{a}, \quad (6)$$

смотря по тому, какое из двух неравенств  $x \cong 0$  имеет место; при этом  $\lambda_0$  обозначает положительную величину, определенную формулой

$$\lambda_0^2 = \frac{4s^2\pi^2}{a^2} - k^2. \quad (7)$$

Для значений  $x$ , малых по сравнению с длиной волны, мы можем пренебречь разностью между  $\lambda_0$  и  $\frac{2s\pi}{a}$ , если длина волны велика по сравнению с  $a$ . При этих условиях формулы (5) и (6) приводятся соответственно к виду

$$\Phi = 1 + A + ik(1-A)x + \sum_1^{\infty} C_n e^{-\frac{2n\pi x}{a}} \cos \frac{2s\pi y}{a} \quad (8)$$

и

$$\Phi = B + ikBx - \sum_1^{\infty} C_n e^{\frac{2n\pi x}{a}} \cos \frac{2s\pi y}{a}. \quad (9)$$

Функция  $\Phi$  принимает, следовательно, вид

$$\Phi = a\varphi + \beta, \quad (10)$$

где  $\varphi$  определяется формулами (3) и (4), а  $a$  и  $\beta$  суть постоянные, причем имеют место соотношения

$$\left. \begin{aligned} 1 + A &= a \frac{\pi b^2}{a} + \beta, & B &= -a \frac{\pi b^2}{a} + \beta, \\ ik(1-A) &= a, & ikB &= a, & C_n &= 2a \frac{\pi b^2}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Это дает

$$A = \frac{ikl}{1 + ikl}, \quad B = \frac{1}{1 + ikl}, \quad (12)$$

где

$$l = \frac{\pi b^2}{a}. \quad (13)$$

Интенсивности отраженных и прошедших через решетку волн будут равны поэтому

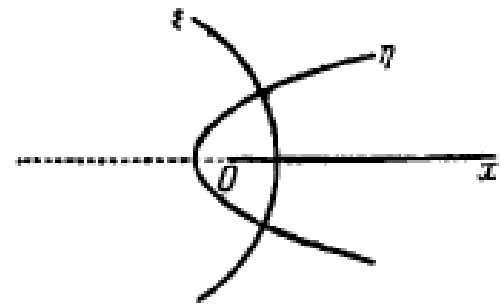
$$I = \frac{k^2 l^2}{1 + k^2 l^2}, \quad I' = \frac{1}{1 + k^2 l^2}. \quad (14)$$

Если половина длины волны велика по сравнению с  $\frac{b^2}{a}$ , то имеет место свободное прохождение волн почти без отражения. Этим обстоятельством объясняется чрезвычайно малое сопротивление, которое оказывают прохождению звука тонкие проволоки и волокна <sup>1)</sup>.

**§ 308.** Диффракция плоских звуковых волн у края бесконечно простирающегося в одну сторону экрана и образование звуковой

<sup>1)</sup> Rayleigh, Theory of Sound, § 343. Исследования §§ 306, 307 взяты с соответствующими изменениями из одной работы автора, „On the Reflection and Transmission of Electric Waves by a Metallic Grating“, Proc. Lond. Math. Soc. (1), XXIX, 523 (1898).

тени были исследованы Зоммерфельдом <sup>1)</sup> и Кэрслоу <sup>2)</sup>. Следует заметить, что в условия этой задачи не входят никакие другие особые линейные величины, кроме длин волн, и вместе с тем оказывается, что общий характер результата не зависит от длины волны. Случай нормального падения может быть исследован очень простым способом, который описывается ниже <sup>3)</sup>.



Фиг. 79.

Мы будем предполагать, что экран занимает ту половину плоскости  $xz$ , для которой координата  $x$  положительна. Удобно ввести „параболические координаты“, которыми пользовались Ганкель и другие авторы. Положим

$$k(x + iy) = (\xi + i\eta)^2 \quad (1)$$

или

$$kx = \xi^2 - \eta^2, \quad ky = 2\xi\eta; \quad (2)$$

следовательно, будем иметь

$$kr = \xi^2 + \eta^2, \quad (3)$$

если через  $r$  обозначить расстояние от начала координат. Кривые

$$\xi = \text{const.}, \quad \eta = \text{const.}$$

образуют систему софокусных парабол, общий фокус которых лежит в начале.

Можно принять, что координата  $\eta$  (фиг. 79) всюду положительна, за исключением обеих сторон экрана, где она равна нулю. Координата  $\xi$  будет тогда на обеих сторонах оси  $x$  иметь противоположные знаки и на части этой оси, занятой экраном, исчезать. Легко получаем следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{1}{2} \frac{\xi}{r}, & \frac{\partial \eta}{\partial x} &= -\frac{1}{2} \frac{\eta}{r}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} &= \frac{1}{2} \frac{\eta}{r}, & \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{1}{2} \frac{\xi}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Потенциал скоростей  $\varphi$  должен удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k^2 \varphi = 0, \quad (5)$$

причем фактор времени, как обычно, равен  $e^{ikt}$ .

Пусть первоначальные волны представлены функцией

$$\varphi = e^{iky}, \quad (6)$$

и мы будем искать решения вида

$$e^{iky_u} \quad \text{и} \quad e^{-iky_v}. \quad (7)$$

<sup>1)</sup> Sommerfeld, Mathematische Theorie der Diffraction, Math. Ann., XLVII, 317 (1895).

<sup>2)</sup> Carslaw, Some Multiform Solutions of the Partial Differential Equations of Physics . . . , Proc. Lond. Math. Soc., XXX, 121 (1899).

<sup>3)</sup> Метод заимствован из одной работы автора, „On Sommerfeld's Diffraction Problem, and on Reflection by a Parabolic Mirror“, Proc. Lond. Math. Soc. (2), IV, 190 (1906).

Если возьмем решение первого вида, то для  $u$  получим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (8)$$

Вследствие соотношений (4) отсюда получается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 4i \left( \eta \frac{\partial u}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (9)$$

которое удовлетворяется решением вида

$$u = f(\xi + \eta) = f(\zeta), \quad (10)$$

если

$$\frac{d^2 f}{d\zeta^2} + 2i\zeta \frac{df}{d\zeta} = 0, \quad (11)$$

т. е., если

$$u = A + B \int_0^{\zeta+\eta} e^{-i\zeta^2} d\zeta. \quad (12)$$

Если же значение  $\omega$  велико и положительно, то мы будем иметь приближенную формулу

$$\int_0^{\omega} e^{-i\zeta^2} d\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-1/4 i\pi} + \frac{i}{2\omega} e^{-i\omega^2} + \dots \quad (13)$$

На большом расстоянии от начала со стороны положительных значений  $y$  имеет также место приближенное равенство

$$ue^{iky} = \left( A + \frac{1}{2} \sqrt{\pi} B e^{-1/4 i\pi} \right) e^{iky} + \frac{i}{2(\zeta + \eta)} e^{-iky}. \quad (14)$$

Последний член в этом равенстве представляет волны, расходящиеся от начала.

Подобным же способом можно получить и решение вида

$$u' = A' + B' \int_0^{\xi-\eta} e^{i\zeta^2} d\zeta, \quad (15)$$

но так как это решение представляет волны, сходящиеся к началу, то оно не подходит для наших целей.

Если рассмотрим теперь второе из решений (7), то для  $v$  получим выражение вида

$$v = C + D \int_0^{\xi-\eta} e^{-i\zeta^2} d\zeta \quad (16)$$

и другое выражение, которое мы на указанном выше основании отбрасываем.

Покажем теперь, что функция

$$\varphi = Ae^{iky} + Ce^{-iky} + Be^{iky} \int_0^{\zeta+\eta} e^{-i\zeta^2} d\zeta + De^{-iky} \int_0^{\zeta-\eta} e^{-i\zeta^2} d\zeta \quad (17)$$

при подходящем выборе постоянных удовлетворяет всем условиям задачи.



Прежде всего эта функция должна при  $y=0$  и при отрицательном  $x$ , абсолютное значение которого велико, приводиться к виду (6). Отсюда получаются, если положить  $\xi=0$ ,  $\eta=\infty$  и принять во внимание уравнение (13), условия

$$A + \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-1/4 i\pi} B = 1, \quad C - \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-1/4 i\pi} D = 0. \quad (18)$$

Далее для  $y=0$  и  $x > 0$  должно быть

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Применяя равенства (4) и полагая  $\eta=0$ , находим, что это условие удовлетворяется при

$$A = C, \quad B = D. \quad (19)$$

Окончательно для  $\varphi$  получаем выражение

$$\varphi = \frac{1}{2} (e^{ikv} + e^{-ikv}) + \frac{e^{1/4 i\pi}}{\sqrt{\pi}} \left\{ e^{ikv} \int_0^{\xi+\eta} e^{-i\zeta^2} d\zeta + e^{-ikv} \int_0^{\xi-\eta} e^{-i\zeta^2} d\zeta \right\}. \quad (20)$$

Это выражение равносильно той форме, которую принимает результат Зоммерфельда в случае нормального падения волн <sup>1)</sup>.

Если значения  $\xi+\eta$  и  $\xi-\eta$  велики и положительны, то формула приводится к виду

$$\varphi = e^{ikv} + e^{-ikv}. \quad (21)$$

Эта формула относится к области, которая лежит вправо от экрана на большом расстоянии перед ним; второй член представляет всю отраженную часть волн.

Если значение  $\xi+\eta$  велико и положительно, а значение  $\xi-\eta$  велико по абсолютной величине и отрицательно, то будем иметь приближенно

$$\varphi = e^{ikv}. \quad (22)$$

Эта формула относится к области, которая целиком лежит на левой стороне оси  $y$ , где преобладают первоначальные волны. Когда же величины  $\xi+\eta$  и  $\xi-\eta$  обе велики и отрицательны, то будем иметь

$$\varphi = 0; \quad (23)$$

это равенство относится к области звуковой тени за экраном.

На каждой стороне плоскости  $y=0$  существует промежуточная область, в которой имеет место переход от состояния, представленного приближенно функцией (22), к состоянию, выраженному функциями (21) или (23) соответственно. Чтобы установить критерий приложимости нашего приближенного способа, выберем величину  $\omega$  таким образом, чтобы значение величины  $\omega \sqrt{\pi}$  можно было считать большим <sup>2)</sup>. Результаты (21) и (22) основываются на предположении, что как значение  $|\xi-\eta|$ , так и значение  $|\xi+\eta|$  велики. Границу соответствующей области, лежащей на стороне положительных значений  $y$ , мы получим, если положим

$$|\xi-\eta| = \omega.$$

<sup>1)</sup> Случай наклонного падения разобран в работах, указанных на стр. 675.

<sup>2)</sup> Значение  $\omega$  не должно быть очень большим. Если мы положим, например,  $\omega=6$ , то ошибка не будет превосходить 10%.

Это приводит, на основании равенств (2), к параболе

$$y = \frac{k}{2\omega} x^2 - \frac{\omega^2}{2k}, \quad (24)$$

параметр которой пропорционален длине волны. Соответствующая область на стороне отрицательных значений  $y$  ограничена параболой

$$y = -\frac{k}{2\omega} x^2 + \frac{\omega^2}{2k}. \quad (25)$$

Эти промежуточные области представляют собой то место, где происходят явления дифракции, важные по своей оптической аналогии; здесь эти явления не могут быть исследованы ближе. Нетрудно показать, что для точек, которые лежат вблизи от геометрической тени и расстояния которых от краев экрана велики по сравнению с длиной волны, результаты практически совпадают с теми, которые получены при помощи метода Френеля <sup>1)</sup>.

### Атмосферные волны.

**§ 309.** Теория волн, распространяющихся в атмосфере по вертикальному направлению, интересна как пример распространения волн в среде неодинаковой плотности <sup>2)</sup>.

Мы будем считать ось  $x$  направленной вертикально вверх; пусть  $\xi$  обозначает вертикальное смещение в момент  $t$  той плоскости частиц, невозмущенное положение которой есть  $x$ . Соответствующие значения давления и плотности обозначим через  $p$  и  $\rho$ , а значения тех же величин в случае равновесия через  $p_0$  и  $\rho_0$ . Последние две величины подчинены статическому условию

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = -g\rho_0. \quad (1)$$

Уравнение движения в этом случае имеет вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} - g\rho_0 = -\frac{\partial}{\partial x} (p - p_0), \quad (2)$$

а уравнение непрерывности

$$\rho \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \rho_0. \quad (3)$$

Если мы будем пренебрегать теплопроводностью и лученспусканием, то значения  $p$  и  $\rho$  в произвольной точке будут связаны адиабатическим соотношением

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma, \quad (4)$$

где  $\gamma$  есть отношение обеих удельных теплоемкостей. Отсюда следует в первом приближении

$$p - p_0 = -\gamma p_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (5)$$

<sup>1)</sup> См. названную работу. Дифракция „единичной волны“ была исследована автором в Proc. Lond. Math. Soc. (2), VIII, 422 (1910).

<sup>2)</sup> Эта задача была исследована Пуассоном, см. выше, стр. 617 и Рэлеем, On Vibrations of an Atmosphere, Phil. Mag. (4), XXIX, 173 (1890) (Papers, III, 335). Исследование, данное в тексте, появилось в Proc. Lond. Math. Soc. (2), VII, 122 (1908).

Подставляя значение  $p - p_0$  из (5) в (2), получим

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \gamma g \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (6)$$

причем здесь положено

$$c^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}, \quad (7)$$

т. е.  $c$  обозначает скорость звука (обыкновенно переменную), соответствующую условиям среды в плоскости  $x=0$ . Если обозначить через  $H$  высоту „однородной атмосферы“, которая соответствует температуре в этой плоскости, то получится

$$c^2 = \gamma g H. \quad (8)$$

Предполагая вначале, что температура в состоянии равновесия всюду одинакова, так что  $H$  и  $c$  суть постоянные, получим

$$\rho_0 = C e^{-\frac{x}{H}}. \quad (9)$$

Удобно принять  $2H$  за единицу длины, а единицу времени выбрать так, чтобы было  $c=1$ . При этом условии будем иметь

$$\rho_0 = C e^{-2x} \quad (10)$$

и

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (11)$$

Если положить

$$\xi = u e^x, \quad (12)$$

то из (11) получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u. \quad (13)$$

В случае простых гармонических колебаний с фактором времени  $e^{i\sigma t}$  для  $\sigma^2 > 1$  будем иметь

$$u = A e^{i\sigma t + i \sqrt{\sigma^2 - 1} x} + B e^{i\sigma t - i \sqrt{\sigma^2 - 1} x}; \quad (14)$$

первый и второй члены этого выражения представляют системы волн, движущихся соответственно вниз и вверх.

Если  $\sigma^2 < 1$ , то имеем

$$u = \{ A e^{\sqrt{1 - \sigma^2} x} + B e^{-\sqrt{1 - \sigma^2} x} \} e^{i\sigma t}. \quad (15)$$

Каждый член представляет такую стоячую волну, которая в конце концов установилась бы благодаря продолжительному действию источника простых гармонических колебаний; оба члена относятся к областям соответственно над и под источником.

Следовательно, возмущение, произведенное заданным и поддерживаемым в плоскости  $x=0$  колебанием

$$\xi = e^{i\sigma t}, \quad (16)$$

будет выражаться формулами

$$\xi = e^x e^{i(\sigma t \mp \sqrt{\sigma^2 - 1} x)}, \quad (\sigma^2 > 1) \quad (17)$$

или

$$\xi = e^{(1 \mp \sqrt{1 - \sigma^2}) x} e^{i\sigma t}, \quad (\sigma^2 < 1) \quad (18)$$

причем следует брать верхний или нижний знак, смотря по тому, какое из двух неравенств  $x \cong 0$  имеет место.

Далее для возмущения, которое производится периодической силой, сконцентрированной в бесконечно тонком слое в плоскости  $x=0$ , находим формулы

$$\xi = -\frac{l}{2\sqrt{\sigma^2 - 1}} e^x e^{i(\sigma t \mp \sqrt{\sigma^2 - 1} x)} \quad (\sigma^2 > 1) \quad (19)$$

или

$$\xi = \frac{l}{2\sqrt{1 - \sigma^2}} e^{(1 \mp \sqrt{1 - \sigma^2}) x} e^{i\sigma t} \quad (\sigma^2 < 1), \quad (20)$$

если только плотность в плоскости  $x=0$  примем за единицу плотности. Чтобы проверить это, заметим, что формула (5) в выбранных нами единицах имеет вид

$$p - p_0 = -e^{-2x} \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (21)$$

Формулы (19) и (20) дают, таким образом, для разности давлений на обеих сторонах плоскости  $x=0$  значение  $e^{i\sigma t}$ . Можно заметить, что определяемые из формул (19) и (20) амплитуды бесконечно возрастают, когда  $\sigma$  приближается к критическому значению, равному единице. В общих единицах критическое значение  $\sigma$  равно  $\frac{c}{2H}$ , а соответствующий период есть  $\frac{4\pi H}{c}$ . Для воздуха при обыкновенной температуре период равен примерно (в очень грубом приближении) 5 минутам.

Из формулы (14) получается, если возвратиться к общим единицам, что для прогрессивной последовательности волн с длиной  $\frac{2\pi}{k}$

$$\xi = ae^{\frac{1}{2} \frac{x}{H}} \cos(\sigma t - kx), \quad (22)$$

причем

$$\sigma^2 = k^2 c^2 + \frac{1}{4} \frac{c^2}{H^2}. \quad (23)$$

Скорость волн оказывается при этом равной

$$V = \frac{\sigma}{k} = c \sqrt{1 + \frac{1}{4k^2 H^2}}. \quad (24)$$

Эта величина изменяется вместе с частотой, но остается приблизительно постоянной, пока длина волны мала по сравнению с  $4\pi H$ , причем она отличается от  $c$  только на малую величину второго порядка. Наибольшее влияние от изменения плотности испытывает амплитуда, которая возрастает по закону, выраженному показательным множителем в формуле (22), если волны при движении вверх входят в более разреженный воздух. Это возрастание можно было бы предвидеть и без вычислений; в самом деле, если изменение плотности в пределах одной волны мало, то не происходит никакого заметного отражения, и энергия на единицу длины, пропорциональная величине  $a^2 \rho_0$  (где  $a$  обозначает амплитуду), остается при этом неизменной при движении волны. Так как значение  $\rho_0$  пропорционально  $e^{-\frac{x}{H}}$ , то отсюда следует, что амплитуда  $a$  должна быть пропорциональна  $e^{\frac{1}{2} \frac{x}{H}}$ .

Легко проверить, что средняя энергия на единицу объема для каждой из последовательности волн (22) равна

$$\frac{1}{2} \rho \sigma^2 a^2, \quad (25)$$

а скорость распространения энергии равна кинематической групповой скорости

$$U = \frac{d\sigma}{dk} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{1}{4k^2 H^2}}}. \quad (26)$$

Атмосфера предполагалась неограниченной вверх и вниз; однако, легко установить эффект твердой горизонтальной стенки. Например, в случае атмосферы, слой которой в плоскости  $x = -h$  находится в покое, если в плоскости  $x = 0$  поддерживается заданное колебание

$$\xi = a \cos \sigma t \quad \left( \sigma > \frac{c}{2H} \right),$$

будем иметь

$$\xi = a e^{\frac{1}{2} \frac{x}{H}} \cos(\sigma t - kx) \quad (x > c),$$

и

$$\xi = a e^{\frac{1}{2} \frac{x}{H}} \frac{\sin k(x+h)}{\sin kh} \cos \sigma t \quad (x < c),$$

где связь между  $k$  и  $\sigma$  такая же, как и в формуле (23).

Чтобы определить свободное движение, соответствующее произвольным начальным условиям, будем исходить из типичного решения <sup>1)</sup>

$$u = \left\{ A(k) \cos \sqrt{k^2 + 1} t + B(k) \frac{\sin \sqrt{k^2 + 1} t}{\sqrt{k^2 + 1}} \right\} e^{ikx} \quad (27)$$

уравнения (13). Это решение дает

$$u = A(k), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = B(k) \quad (t \rightarrow 0). \quad (28)$$

Обобщая формулу (27) на основании теоремы Фурье, получим

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \cos \sqrt{k^2 + 1} t e^{ikx} dk + \int_{-\infty}^{\infty} B(k) \frac{\sin \sqrt{k^2 + 1} t}{\sqrt{k^2 + 1}} e^{ikx} dk, \quad (29)$$

где

$$A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) e^{-ik\alpha} d\alpha, \quad B(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-ik\alpha} d\alpha. \quad (30)$$

Выражение (29) удовлетворяет уравнению (13) и дает

$$u = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = F(x) \quad (t = 0). \quad (31)$$

В качестве примера рассмотрим тот случай, когда начальные перемещения равны нулю, а начальное количество движения сосредоточено в непосредственной близости от плоскости  $x=0$ . Тогда имеем  $f(x)=0$ , в то время как функция  $F(x)$  заметно изменяется только для бесконечно малых значений  $x$ , где она становится бесконечно большой, но так, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) d\alpha = 1. \quad (32)$$

Если мы примем плотность на плоскости  $x=0$  за единицу плотности, то сообщенное количество движения окажется благодаря этому равным единице (на единицу площади). Отсюда получается  $A(k)=0$ ,  $B(k) = \frac{1}{2\pi}$  и

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{\sin \sqrt{k^2 + 1} t}{\sqrt{k^2 + 1}} dk. \quad (33)$$

Значение этого интеграла может быть определено. Вводя новую переменную, получаем

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(t \operatorname{ch} \omega + x \operatorname{sh} \omega) d\omega.$$

Если  $t^2 > x^2$ , то положим

$$t = \sqrt{x^2 - t^2} \operatorname{ch} \beta, \quad x = \pm \sqrt{x^2 - t^2} \operatorname{sh} \beta, \quad \omega + \beta = \omega'$$

<sup>1)</sup> Этот метод подобен тому, который применил Пуанкаре в случае „телеграфного уравнения“; см. его *Théorie analytique de la propagation de la chaleur*, Париж, 1895, гл. VIII.

и на основании формулы Мелера [§ 194 (7)] получим

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\sqrt{t^2 - x^2} \operatorname{ch} \omega') d\omega' = \frac{1}{2} J_0(\sqrt{t^2 - x^2}). \quad (34)$$

Если же  $t^2 < x^2$ , то полагаем

$$t = \sqrt{x^2 - t^2} \operatorname{sh} \beta, \quad x = \pm \sqrt{x^2 - t^2} \operatorname{ch} \beta, \quad \omega \pm \beta = \omega'$$

и получаем

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\sqrt{x^2 - t^2} \operatorname{sh} \omega') d\omega' = 0. \quad (35)$$

Возмущение достигает положения  $x$  только по истечении промежутка времени  $t = \pm x$ ; соответствующее перемещение определяется формулой

$$\xi = \frac{1}{2} e^x J_0(\sqrt{t^2 - x^2}) \quad (36)$$

или в общих единицах формулой

$$\xi = \frac{1}{2\sqrt{\rho_0 \rho_0^i}} J_0\left(\frac{\sqrt{c^2 t^2 - x^2}}{2H}\right), \quad (37)$$

где  $\rho_0$  обозначает плотность в положении  $x$  и  $\rho_0^i$  — плотность в том месте ( $x=0$ ), где был приложен единичный импульс. Структура этой формулы согласуется с хорошо известным законом взаимности<sup>1)</sup>.

Можно заметить, что перемещение  $\xi$  в произвольной точке после прохода волны не остается постоянным, как это было бы в случае однородной среды, а колеблется по знаку, непрерывно убывая по амплитуде. Более того, в этих колебаниях знака имеется тенденция к определенной периодичности, а именно, период стремится к пределу  $2\pi$ , или, в общих единицах,

к  $\frac{4\pi H}{c}$ .

Следует еще заметить, что можно проверить сохранение количества движения в этом случае. Рассмотрим статический момент ( $\sum \rho x$ ) по отношению к плоскости  $x=0$  для массы воздуха, заключенной между верхней и нижней границами системы волн. По сравнению с состоянием равновесия момент этот увеличился на

$$\int_{-t}^t \rho_0 \xi dx = \frac{1}{2} \int_{-t}^t e^{-x} J_0(\sqrt{t^2 - x^2}) dx = \int_0^t \operatorname{ch} x J_0(\sqrt{t^2 - x^2}) dx. \quad (38)$$

Можно показать, что этот определенный интеграл равен  $t^2$ .

<sup>1)</sup> См. Lamb, Proc. Lond. Math. Soc. (1), XIX, 144.

<sup>2)</sup> Непосредственным умножением рядов получаем

$$\operatorname{ch}(t \cos \theta) J_0(t \sin \theta) = 1 + \frac{t^2}{2!} P_2(\cos \theta) + \frac{t^4}{4!} P_4(\cos \theta) + \dots,$$

отсюда на основании (8) § 87 следует

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{ch}(t \cos \theta) J_0(t \sin \theta) \sin \theta d\theta = 1.$$

Это разложение принадлежит Гобсону, Proc. Lond. Math. Soc. (1), XXV, 66 (1893).

Дифференцированием убеждаемся в том, что общее количество движения равно единице.

§ 310. Теперь мы предположим, что температура не всюду одинакова, но убывает по направлению вверх с постоянным градиентом. Это определяет верхнюю границу атмосферы, причем оказывается удобным поместить начало на этой границе и положительные значения  $x$  отсчитывать вниз. Если в соответствии с этим обозначим через  $\theta_0$  абсолютную температуру в состоянии равновесия, то можем написать

$$\theta_0 = \beta x, \quad (1)$$

где  $\beta$  — постоянный температурный градиент. Так как  $p_0$ ,  $\rho_0$ ,  $\theta_0$  связаны соотношением

$$p_0 = R \rho_0 \theta_0, \quad (2)$$

то имеем

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dx} = \frac{1}{p_0} \frac{dp_0}{dx} - \frac{1}{\theta_0} \frac{d\theta_0}{dx} = \frac{g\rho_0}{p_0} - \frac{\beta}{\theta_0} = \frac{m}{x},$$

где

$$m = \frac{g}{R\beta} - 1. \quad (3)$$

Отсюда следует:

$$\rho_0 \text{ пропорционально } x^m, \quad p_0 \text{ пропорционально } x^{m+1}. \quad (4)$$

В случае атмосферы, находящейся в „конвективном равновесии“<sup>1)</sup>, когда величина  $p_0$  пропорциональна  $\rho_0^\gamma$ , будем иметь  $m\gamma = m + 1$  или

$$m = \frac{1}{\gamma - 1}, \quad \beta = \frac{(\gamma - 1)g}{\gamma R}. \quad (5)$$

Если  $\beta = \frac{g}{e}$ , то оказывается  $m = 0$  и плотность постоянна. Это условие, так же как и всякое другое, при котором  $m$  оказывается меньше, чем значение, полученное из формулы (5), означало бы неустойчивость, если бы мы отбросили ограничение, наложенное на вертикальное движение.

Изменяя знак у  $x$  в уравнении (6) § 309, получим

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \gamma g \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (6)$$

где

$$c^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} = \gamma R \beta x. \quad (7)$$

Положим теперь

$$\tau = \int_0^x \frac{dx}{c} = \sqrt{\frac{4x}{\gamma R \beta}} \quad \text{или} \quad x = \frac{1}{4} \gamma R \beta \tau^2, \quad (8)$$

<sup>1)</sup> Thomson W., Manch. Memoirs (3), II, 125 (1862) (Papers, III, 255)



так что  $\tau$  обозначает промежуток времени, необходимый для того, чтобы точка, двигаясь со скоростью, все время равной скорости звука в соответствующем месте, прошла расстояние от верхнего края атмосферы до положения  $x$ . Если заменим в уравнении (6) независимую переменную  $x$  через  $\tau$ , то получим

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} + \frac{2m+1}{\tau} \frac{\partial \xi}{\partial \tau}. \quad (9)$$

где  $m$  имеет значение, данное формулой (3).

В случае простого гармонического колебания ( $e^{i\sigma t}$ ) имеем

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} + \frac{2m+1}{\tau} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \sigma^2 \xi = 0. \quad (10)$$

Решение этого уравнения есть

$$\xi = \tau^{-m} \{A J_m(\sigma \tau) + B J_{-m}(\sigma \tau)\}. \quad (11)$$

Из (5) § 309 получается, что

$$p - p_0 \text{ пропорционально } p_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \text{ пропорционально } \tau^{2m+1} \frac{\partial \xi}{\partial \tau}, \quad (12)$$

и для того, чтобы эта величина могла стремиться к предельному значению 0 для  $x \rightarrow 0$ , должно быть  $B = 0$ .

Решение, которое соответствует колебанию

$$\xi = e^{i\sigma t}, \quad (13)$$

происходящему в плоскости  $\tau = \tau_1$ , имеет вид

$$\xi = \left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^m \frac{J_m(\sigma \tau)}{J_m(\sigma \tau_1)} e^{i\sigma t}. \quad (14)$$

Для больших значений  $\sigma \tau$  будем иметь

$$\xi \text{ пропорционально } \frac{1}{\tau^{m+1/2}} \sin\left(\sigma \tau + \frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2} m\pi\right) e^{i\sigma t}. \quad (15)$$

Выражение (14) представляет, таким образом, стоячую волну, которая получается в результате наложения двух последовательностей волн одинаковой амплитуды, движущихся одна вверх, а другая вниз. Если  $\Delta x$ ,  $\Delta \tau$  представляют изменения  $x$  и  $\tau$ , соответствующие длине волны ( $\lambda$ ), то имеем  $\Delta(\sigma \tau) = 2\pi$  и, следовательно, в пределе, когда  $x$  будет большим,

$$\lambda = \Delta x = \frac{1}{2} \gamma R \beta \tau \Delta \tau = \pi \gamma R \beta \frac{\tau}{\sigma} = \frac{2\pi c}{\sigma}, \quad (16)$$

как и следовало ожидать.

Выражение (14) обращается в бесконечность при

$$J_m(\sigma \tau_1) = 0. \quad (17)$$

Это уравнение определяет периоды  $\frac{2\pi}{\sigma}$  свободных колебаний слоя воздуха, лежащего над определенной горизонтальной плоскостью, для которой  $\tau = \tau_1$  <sup>1)</sup>.

§ 311. Переходя к рассмотрению возмущений, распространяющихся в горизонтальном направлении, выберем оси  $x$  и  $y$  в горизонтальной плоскости, а ось  $z$  вертикально с положительным направлением вниз. Тогда уравнения малых колебаний в переменных Эйлера будут иметь вид

$$e_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad e_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad e_0 \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + g e, \quad (1)$$

$$\frac{D e}{D t} + e_0 \chi = 0, \quad (2)$$

где

$$\chi = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (3)$$

Мы будем предполагать по большей части, что отклонения давления и плотности от их равновесных значений связаны между собой адиабатическим соотношением

$$\frac{D p}{D t} = c^2 \frac{D e}{D t}, \quad (4)$$

где

$$c^2 = \frac{\gamma p_0}{e_0} = \gamma R \theta_0, \quad (5)$$

т. е.  $c$  обозначает скорость звука, соответствующую температурному равновесию на уровне  $z$ .

Полагая

$$p = p_0 + p', \quad e = e_0 + e' \quad (6)$$

и продолжая пренебрегать малыми величинами второго порядка, будем иметь

$$e_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x}, \quad e_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial y}, \quad e_0 \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial z} + g e' \quad (7)$$

и

$$\frac{\partial e'}{\partial t} + w \frac{\partial e_0}{\partial z} = -e_0 \chi. \quad (8)$$

Точно так же из (4) и (2) получим

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + g e_0 w = -\gamma p_0 \chi. \quad (9)$$

<sup>1)</sup> Исследование влияния произвольных начальных условий имеется в работе автора, указанной на стр. 678 в подстрочном примечании.

Исключая  $p'$  и  $q'$ , найдем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} (c^2 \chi + gw), & \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial y} (c^2 \chi + gw), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial z} (c^2 \chi + gw) - \left\{ \frac{dc^2}{dz} - (\gamma - 1) g \right\} \chi. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Отсюда, если обозначить через  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  компоненты вихря, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= - \left\{ \frac{dc^2}{dz} - (\gamma - 1) g \right\} \frac{\partial \chi}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= \left\{ \frac{dc^2}{dz} - (\gamma - 1) g \right\} \frac{\partial \chi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

и

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0.$$

До сих пор уравнения были общими; они показывают, что безвихревое движение невозможно, если только не выполнено одно из двух условий. Мы должны иметь либо

$$c = \text{const.}, \quad \gamma = 1, \quad (12)$$

что представляет случай постоянного температурного равновесия с изотермическим расширением, либо

$$\frac{dc^2}{dz} = (\gamma - 1) g, \quad (13)$$

или

$$\frac{d\theta_0}{dz} = \frac{(\gamma - 1) g}{\gamma R}, \quad (14)$$

что представляет случай конвективного равновесия. Эти заключения находятся в согласии с § 17. В каждом из этих частных случаев имеем

$$u = - \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = - \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = - \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (15)$$

при условии, что для  $\varphi$  имеет место уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = - (c^2 \chi + gw) = c^2 \Delta \varphi + g \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (16)$$

Таким образом, возможны, как мы и могли ожидать, стационарные вихревые движения, так как каждое из двух имеющих в виду физических состояний в известном смысле представляет одно из средних состояний равновесия <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> За подробностями по этому вопросу можно отослать к работе Lamb, On Atmospheric Oscillations, Proc. Roy. Soc. A, LXXXIV, 551 (1890), из которой взяты в большей части §§ 311, 311а и 312,

§ 311а. Переходим теперь к различным предположениям относительно вертикального распределения температуры. В случае *изотермической* атмосферы, где  $c$  будет постоянной, соответствующее решение имеет вид

$$u = e^{-\frac{(\gamma-1)gz}{c^2}} f(ct-x), \quad v = 0, \quad w = 0 \quad (1)$$

или в более общем виде

$$u = e^{-\frac{(\gamma-1)gz}{c^2}} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad v = e^{-\frac{(\gamma-1)gz}{c^2}} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad w = 0, \quad (2)$$

если  $P$  есть функция горизонтальных координат  $x$  и  $y$  и времени, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c^2 \Delta_1 P, \quad (3)$$

где

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Эти уравнения представляют системы волн, распространяющихся в горизонтальном направлении с постоянной скоростью  $c$  или  $\sqrt{\gamma g H}$ , где  $H$  есть высота „однородной атмосферы“. Так как в принятом допущении  $\rho_0$  изменяется по закону  $e^{z/H}$  или  $e^{\gamma g z / c^2}$ , то из (4) и (2) § 311 следует, что  $\frac{DP}{Dt}$  будет изменяться по закону  $e^{gz/c^2}$ . Условие неизменяемости давления в верхних областях, где  $z \rightarrow -\infty$ , будет, таким образом, выполняться. Скорость  $c$  с высотой увеличивается, но *количество движения*, отнесенное к единице объема, уменьшается. Расширение предполагалось при этом адиабатическим. Если же оно будет изотермическим, то мы должны положить  $\gamma = 1$ ; тогда скорость частиц не будет зависеть от высоты.

В случае конвективного равновесия начало возьмем на верхней границе атмосферы и положим в согласии с (5) § 310

$$c^2 = (\gamma - 1)gz = \frac{gz}{m}. \quad (4)$$

Чтобы исследовать распространение волн в горизонтальном направлении, предположим, что  $\varphi$  в (16) § 311 изменяется по закону  $e^{i(\sigma t - kx)}$  или, более обще, с учетом зависимости от горизонтальных координат, оно удовлетворяет уравнению

$$(\Delta_1 + k^2) \varphi = 0, \quad (5)$$

предполагая множитель от времени в виде  $e^{i\sigma t}$ . В том и другом случае уравнение (16) принимает вид

$$z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + m \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \left( \frac{m\sigma^2}{gk} - kz \right) k\varphi = 0. \quad (6)$$

Оно упростится, если положить

$$\varphi = e^{-kz} \psi, \quad (7)$$

тогда получим

$$z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + (m - 2kz) \frac{\partial \psi}{\partial z} - m \left(1 - \frac{\sigma^2}{gk}\right) k\psi = 0. \quad (8)$$

Если обозначить

$$m \left(1 - \frac{\sigma^2}{gk}\right) = 2\alpha, \quad (9)$$

то решение, конечное при  $z \rightarrow 0$ , имеет вид

$$\psi_1 = A \left\{ 1 + \frac{\alpha}{1 \cdot m} (2kz) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1 \cdot 2m(m+1)} (2kz)^2 + \dots \right\}, \quad (10)$$

или в применяемых обозначениях <sup>1)</sup>

$$\psi_1 = A {}_1F_1(\alpha; m; 2kz). \quad (11)$$

Второе же решение будет иметь вид

$$\psi_2 = B \psi_1 \int_0^z \frac{e^{2kz} dz}{z^m \psi_1^2}. \quad (12)$$

Для последнего решения  $\frac{\partial \psi_2}{\partial z}$  при  $z \rightarrow 0$  изменяется, как  $z^{-m}$ , тогда как  $\rho_0$  изменяется по закону  $z^m$ . Теперь из (2) и (4) § 311 имеем

$$\frac{DP}{Dt} = -\rho_0 c^2 \chi = \rho_0 (\ddot{\varphi} + gw) \quad (13)$$

и, следовательно,  $\frac{DP}{Dt}$  при  $z \rightarrow 0$  не будет исчезать, если только не положить  $B = 0$ .

Условие  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$  при  $z = h$ , где  $h$  — высота атмосферы, теперь будет давать

$$\begin{aligned} \frac{2\alpha}{m} \left\{ 1 + \frac{\alpha+1}{1(m+1)} (2kh) + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{1 \cdot 2(m+1)(m+2)} (2kh)^2 + \dots \right\} = \\ = 1 + \frac{\alpha}{1 \cdot m} (2kh) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1 \cdot 2m(m+1)} (2kh)^2 + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

или

$$\frac{2\alpha}{m} {}_1F_1(\alpha+1; m+1; 2kh) = {}_1F_1(\alpha; m; 2kh). \quad (15)$$

Это соотношение определяет  $\alpha$  через длину волны  $\frac{2\pi}{k}$ . Соответствующее же значение  $\sigma$ , а вместе с ним и значение скорости волны будет определяться из (9).

<sup>1)</sup> См., например, Vagnes, Camb. Trans., XX, 253 (1906), где имеются ссылки и на другие работы.

Главный интерес представляют волны, которые являются длинными по сравнению с  $h$ . Если  $kh$  будет мало, то в качестве первого приближения для корней (14) получим  $\frac{2a}{m} = 1$ , а в качестве второго приближения

$$\frac{2a}{m} = \frac{1 + kh}{1 + \frac{m+2}{m+1} kh} = 1 - \frac{kh}{m+1}, \quad (16)$$

откуда следует

$$\frac{\sigma^2}{gk} = \frac{kh}{m+1}. \quad (17)$$

Теперь, если мы через  $H_1$  обозначим „приведенную высоту“ атмосферы, т. е. высоту, до которой она простиралась бы, если бы она имела постоянную плотность, равную плотности нижнего слоя, то будем иметь

$$H_1 = h^{-m} \int_0^h z^m dz = \frac{h}{m+1}, \quad (18)$$

и тогда скорость распространения длинных волн будет стремиться к значению

$$V = \frac{\sigma}{k} = \sqrt{gH_1}. \quad (19)$$

Полученную формулу можно сравнить с формулой (7) § 278, которая относится к изотермическому случаю. При  $15^\circ\text{C}$  значение  $H_1$  приблизительно равно 8292 м, откуда для скорости будем иметь  $V = 283$  м/сек.

Из формул (7) и (10), рассматривая зависимость  $\varphi$  от  $z$ , приближенно получим

$$\varphi = A \left\{ 1 + \frac{k^2}{m+1} \left( \frac{1}{2} z^2 - hz \right) \right\}. \quad (20)$$

Ради простоты примем, что второй множитель имеет вид  $e^{i(\sigma t - kz)}$ . В таком случае получим

$$u = ikA, \quad v = 0, \quad w = \frac{k^2 A}{m+1} (h - z), \quad (21)$$

при этом тот же множитель подразумевается. Так как отношение  $w/u$  будет порядка  $kh$ , то колебания будут главным образом горизонтальными. Кроме того, горизонтальная амплитуда будет почти постоянной от края до дна. Эти характерные свойства, как вскоре окажется, обусловлены принятыми допущениями при рассмотрении колебаний, а именно допущением о конвективном равновесии и допущением об изотермической атмосфере с изотермическим расширением.

Далее мы заметим, не выписывая подразумеваемый множитель, что формула (20) приближенно дает

$$c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + gw = \frac{gk^2 h}{m+1} \quad (22)$$

и не содержит высоты.

Остальные решения уравнения (14), уместные тогда, когда  $kh$  является малым, включают в себя и такие, которые будут отличаться от малых значений  $akh$ . Соответствующие этим решениям колебания приближаются к типу волн, распространяющихся вертикально, таких как в § 310, но с постепенным изменением фаз в горизонтальном направлении.

**§ 312.** В более общем случае, когда вертикальное распределение температуры является произвольным, мы снова обратимся к уравнениям (10) § 311. Из них с помощью дифференцирования получим

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \chi + \left( \frac{dc^2}{dz} + \gamma g \right) \frac{\partial \chi}{\partial z} + g \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right), \quad (1)$$

так как

$$\Delta w = \frac{\partial \chi}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2)$$

тождественно. Тогда из (11) § 311 получим

$$\frac{\partial^4 \chi}{\partial t^4} = c^2 \Delta \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + \left( \frac{d \cdot c^2}{dz} + \gamma g \right) \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2 \partial z} - g \left( \frac{d \cdot c^2}{dz} - (\gamma - 1) g \right) \Delta_1 \chi. \quad (3)$$

Если мы допустим, что  $\chi$  изменяется по закону  $e^{i(\sigma t - kx)}$ , или более общо, что  $\chi$  удовлетворяет уравнению

$$(\Delta_1 + k^2) \chi = 0, \quad (4)$$

имея в качестве множителя  $e^{i\sigma t}$ , где  $k$  является постоянной (которая может быть, если это необходимо, определена из условий на боковых границах), то мы найдем следующее дифференциальное уравнение для  $\chi$ :

$$c^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \left( \frac{dc^2}{dz} + \gamma g \right) \frac{\partial \chi}{\partial z} + \left[ \sigma^2 - k^2 c^2 - \frac{gk^2}{\sigma^2} \left\{ \frac{dc^2}{dz} - (\gamma - 1) g \right\} \right] \chi = 0. \quad (5)$$

Кроме того из первых двух уравнений (10) § 311 получим

$$\sigma^2 \frac{\partial w}{\partial z} + gk^2 w = (\sigma^2 - k^2 c^2) \chi, \quad (6)$$

а из третьего уравнения

$$g \frac{\partial w}{\partial z} + \sigma^2 w = -c^2 \frac{\partial \chi}{\partial z} - (\gamma - 1) g \chi. \quad (7)$$

Исключая из (6) и (7)  $\frac{\partial w}{\partial z}$ , мы и получим необходимое для нас соотношение

$$(\sigma^4 - g^2 k^2) w = -\sigma^2 c^2 \frac{\partial \chi}{\partial z} - g(\gamma \sigma^2 - k^2 c^2) \chi. \quad (8)^1$$

Дальнейшие рассуждения мы попытаемся провести здесь только для случая, когда равновесный температурный градиент постоянен, т. е.

$$\theta_0 = \beta z_1, \quad (9)$$

если начало взято на уровне нулевой температуры. При этом, как и в § 310, значения  $\rho_0$  и  $p$  будут соответственно изменяться по законам  $z^m$  и  $z^{m+1}$ , где

$$m = \frac{g}{R\beta} - 1, \quad (10)$$

и, следовательно,

$$c^2 = \gamma R \beta z = \frac{\gamma g z}{m+1}. \quad (11)$$

Отсюда будем иметь

$$\frac{dc^2}{dz} - (\gamma - 1)g = -\frac{\gamma g}{m+1} \left( \frac{\beta_1}{\beta} - 1 \right), \quad (12)$$

где  $\beta_1$ , как в (5) § 310, означает температурный градиент при конвективном равновесии.

Уравнение (5) в таком случае приводится к виду

$$z \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + (m+2) \frac{\partial \chi}{\partial z} + \left\{ \frac{m+1}{\gamma} \frac{\sigma^2}{gk} + \left( \frac{\beta_1}{\beta} - 1 \right) \frac{gk}{\sigma^2} - kz \right\} k\chi = 0 \quad (13)$$

или, если мы положим

$$\chi = e^{-kz} \psi, \quad (14)$$

к виду

$$z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + (m+2 - 2kz) \frac{\partial \psi}{\partial z} + 2ak\psi = 0, \quad (15)$$

где

$$2a = \frac{m+1}{\gamma} \frac{\sigma^2}{gk} + \left( \frac{\beta_1}{\beta} - 1 \right) \frac{gk}{\sigma^2} - (m+2). \quad (16)$$

Решение уравнения (15), конечное при  $z \rightarrow 0$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \psi &= 1 - \frac{a}{1(m+2)} (2kz) + \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2(m+2)(m+3)} (2kz)^2 - \dots = \\ &= {}_1F_1(-a; m+2; 2kz). \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя из (14) и (17) в уравнение (8), получим

$$\begin{aligned} (\sigma^4 - g^2 k^2) w &= \\ &= -\frac{\gamma g^2 k}{m+1} \left[ \frac{\sigma^2}{gk} \left\{ z \frac{\partial \psi}{\partial z} + (m+1)\psi \right\} - \left( 1 + \frac{\sigma^2}{gk} \right) kz\psi \right] e^{kz}. \end{aligned} \quad (18)$$

<sup>1)</sup> Полное же исключение  $w$  из (6) и (7) снова привело бы нас к (5).



Мы можем заранее предвидеть, что для длинных волн ( $kh \rightarrow 0$ ) скорость волны будет сравнимой с величиной  $\sqrt{gh}$ . Поэтому величина

$$\frac{\sigma^2}{gk} = \frac{\sigma^2}{k^2} \frac{kh}{gh}$$

может предполагаться заранее малой.

„Конвективный“ случай  $\beta = \beta_1$  был уже рассмотрен, и мы можем ожидать, что если отношение  $\beta/\beta_1$  только немногим меньше единицы, то результаты не будут сильно различаться. Но если это отношение заметно отличается от единицы, то в выражении (16) для  $2a$  средний член будет превосходить остальные и поэтому  $a$  может быть большим, хотя  $akh$  будет конечным. В таком случае мы приближенно будем иметь

$$\begin{aligned} \psi &= 1 - \frac{2akz}{1(m+2)} + \frac{(2a \cdot kz)^2}{1 \cdot 2(m+2)(m+3)} - \dots = \\ &= {}_0F_1(m+2; -2akz), \end{aligned} \quad (19)$$

и вместе с этим

$$\begin{aligned} z \frac{\partial \psi}{\partial z} + (m+1)\psi &= (m+1) \left\{ 1 - \frac{2akz}{1(m+1)} + \frac{(2akz)^2}{1 \cdot 2(m+1)(m+2)} - \dots \right\} = \\ &= (m+1) {}_0F_1(m+1; -2akz). \end{aligned} \quad (20)$$

Эти ряды могут быть представлены через функции Бесселя. Если мы положим

$$\eta^2 = 8akz, \quad \omega^2 = 8akh, \quad (21)$$

то получим

$$\psi = 2^{m+1} \Pi(m+1) \eta^{-m-1} J_{m+1}(\eta), \quad (22)$$

$$z \frac{\partial \psi}{\partial z} + (m+1)\psi = 2^m \Pi(m+1) \eta^{-m} J_m(\eta). \quad (23)$$

Так как из (16) приближенно имеем

$$\frac{gk}{\sigma^2} = \frac{2a}{\frac{\beta_1}{\beta} - 1}, \quad (24)$$

то условие  $\psi = 0$  для  $\eta = \omega$  приводится к виду

$$\left( \frac{\beta_1}{\beta} - 1 \right) J_m(\omega) = \frac{1}{2} \omega J_{m+1}(\omega). \quad (25)$$

Это соотношение определяет  $\omega$ , а вместе с этим и  $a$ . Для скорости волны мы будем иметь

$$V^2 = \frac{\sigma^2}{k^2} = \left( \frac{\beta_1}{\beta} - 1 \right) \frac{4gh}{\omega^2} = \left( \frac{\beta_1}{\beta} - 1 \right) \frac{4(m+1)gH_1}{\omega^2}, \quad (26)$$

где, как и в § 311a,  $H_1$  — высота однородной атмосферы, имеющей температуру низшего слоя. Эта формула делает  $V$  мнимой, если  $\beta < \beta_1$ ; в этом случае атмосфера будет неустойчивой.

Для числового примера допустим, что температурный градиент имеет половину того значения, которое соответствует конвективному случаю. Принимая  $\gamma = 1,40$ , получим  $m = 6$ , а уравнение (25) примет вид

$$J_6(\omega) = \frac{1}{2} \omega J_7(\omega). \quad (27)$$

Наименьший корень этого уравнения приближенно равен  $\omega = 4,96$ ; тогда

$$V = 1,07 \sqrt{gH_1}. \quad (28)$$

В любом случае результат должен лежать между  $\sqrt{gH_1}$  и  $\sqrt{\gamma gH_1}$  или  $1,18 \sqrt{gH_1}$ . Если мы примем при  $15^\circ \text{C}$  значение  $H_1$  равным 8 292 метрам, то формула (28) даст

$$V = 303 \text{ м/сек}^1).$$

Чтобы сравнить горизонтальные и вертикальные скорости в простейшем случае, допустим, что  $u$  изменяется как  $e^{i(\sigma t - kx)}$ , а  $v = 0$ . Возвращаясь к уравнениям (10) § 311, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \sigma^2 u - igkw &= ikc^2 \chi, \\ igku + \sigma^2 w &= -c^2 \frac{\partial \chi}{\partial z} - \gamma g \chi. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} (\sigma^4 - g^2 k^2) u &= -ik \left\{ gc^2 \frac{\partial \chi}{\partial z} + (\gamma g^2 - \sigma^2 c^2) \chi \right\} = \\ &= -\frac{iyg^2 k}{m+1} \left\{ z \frac{\partial \chi}{\partial z} + (m+1) \chi - \frac{\sigma^2}{gk} kz \chi \right\} = \\ &= \frac{iyg^2 k}{m+1} \left\{ z \frac{\partial \psi}{\partial z} + (m+1) \psi - \left(1 + \frac{\sigma^2}{gk}\right) kz \psi \right\} e^{-kz}. \end{aligned} \quad (30)$$

Исключение  $u$  из (29) снова дало бы нам соотношение (13). Если мы сравним с формулой (18), то увидим, что для  $z=0$  отношение вертикальной скорости к горизонтальной дает  $\frac{\sigma^2}{gk}$ , а так как  $w = 0$  для  $z=h$ , то мы заключаем, что вертикальная скорость всюду будет сравнительно малой.

<sup>1)</sup> Проф. Тэйлор вычислил скорость длинных волн при таких предположениях, которые очень близки к условиям действительной атмосферы. Принимая, что температура падает равномерно от  $283^\circ$  (по абсолютной шкале) на земле до  $220^\circ$  на высоте 3 км и далее остается постоянной, он нашел для  $V$  значение  $307,2 \text{ м/сек}$ , которое немногим отличается от скорости воздушных волн, вызванных огромным взрывом в Кракатоа в 1883 г. [Proc. Roy. Soc., CXXVI, 169, 728 (1929)].

Если мы выразим полученные результаты через функции Бесселя, опустив все общие множители и выписывая только важнейшие члены, то получим

$$u = \frac{J_m(\eta)}{\eta^m}, \quad (31)$$

$$w = \frac{1}{2a} \left\{ \left( \frac{\beta_1}{\beta} - 1 \right) J_m(\eta) - \frac{1}{2} \eta J_{m+1}(\eta) \right\} \frac{1}{\eta^m}. \quad (32)$$

Теперь горизонтальная скорость изменяется с высотой; отношение этой скорости в крайних слоях к скорости у земли будет равно

$$\frac{\omega^m}{2^m \Pi(m) J_m(\omega)}. \quad (33)$$

В рассмотренном выше случае, где  $\beta = \frac{1}{2} \beta_1$ ,  $m = 6$ ,  $\omega = 4,96$ , это отношение выражается числом 2,55.

Для примера *внутренних* колебаний мы можем ввести возмущающий потенциал приливного типа, например

$$\Omega = gH e^{-kz + i(\sigma t - kx)}, \quad (34)$$

ср. § 181. Характерные черты получаемого при этом результата могут быть, однако, установлены на основании теории колебаний, изложенной вкратце в главе VIII. Если заданный период  $\frac{2\pi}{\sigma}$  отличается, но мало, от свободного

периода, соответствующего длине волны  $\frac{2\pi}{k}$ , то движение будет иметь в общем тот же характер, что и соответствующее свободное колебание, с таким распределением вертикальной скорости, о котором только что шла речь. Но в случае значительного расхождения заданного периода от свободного горизонтальная скорость может стать практически постоянной от края до дна.

**§ 313.** Общие уравнения малых колебаний газа около равновесного состояния в стационарном силовом поле  $(X, Y, Z)$  могут быть получены с помощью небольшого обобщения метода § 311.

Для невозмущенного состояния будем иметь

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = e_0 X, \quad \frac{\partial p_0}{\partial y} = e_0 Y, \quad \frac{\partial p_0}{\partial z} = e_0 Z. \quad (1)$$

Тогда, пользуясь предшествующими обозначениями, получим

$$\left. \begin{aligned} e_0 \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial p'}{\partial x} + e' X, \\ e_0 \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial p'}{\partial y} + e' Y, \\ e_0 \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{\partial p'}{\partial z} + e' Z, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = -e_0 \chi, \quad (3)$$

где

$$\chi = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Мы будем, как и раньше, предполагать, что *изменения* давления и плотности связаны адиабатической зависимостью

$$\frac{Dp}{Dt} = c^2 \frac{D\rho}{Dt}, \quad (4)$$

где

$$c^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} = \gamma R \theta_0,$$

т. е.  $c$  есть скорость звука, которая соответствует температуре в точке  $(x, y, z)$  в состоянии равновесия.

В таком случае будем иметь

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 (Xu + Yv + Zw) = -\rho_0 c^2 \chi. \quad (5)$$

Исключая  $p'$  и  $\rho'$  из уравнений (2), (3) и (5), получим

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \{ \rho_0 c^2 \chi + \rho_0 (Xu + Yv + Zw) \} - \\ - X \left\{ \frac{\partial (\rho_0 u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_0 v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho_0 w)}{\partial z} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

и два других уравнения.

Предположим теперь, что силы  $X, Y, Z$  имеют потенциал; в этом случае давление  $p_0$  в состоянии равновесия есть функция только  $\rho_0$ , т. е.

$$p_0 = f(\rho_0). \quad (7)$$

Тогда получим

$$X = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} f'(\rho_0), \quad Y = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} f'(\rho_0), \quad Z = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} f'(\rho_0), \quad (8)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} (Xu + Yv + Zw) = X \left( \frac{x}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + \frac{v}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} + \frac{w}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right). \quad (9)$$

Уравнение (6) можно поэтому написать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \{ c^2 \chi + Xu + Yv + Zw \} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} \{ c^2 - f'(\rho_0) \} \chi. \quad (10)$$

Этому уравнению будет эквивалентно уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (c^2 \chi + Xu + Yv + Zw) - \left\{ \frac{\partial c^2}{\partial x} - (\gamma - 1) X \right\} \chi. \quad (11)$$

Возмущенное движение, таким образом, не будет свободно от вихрей. Если же, однако, распределение температуры в невозмущенном состоянии было таково, что газ находился в конвективном равно-

весни, так что величина  $p_0$  пропорциональна  $e_0^{\gamma}$ , то будет иметь место равенство

$$f'(e_0) = \frac{\gamma p_0}{e_0} = c^2,$$

и второе слагаемое в формуле (10) будет исчезать. Три уравнения (10) удовлетворятся тогда решениями вида

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (12)$$

если

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi + \left( X \frac{\partial \varphi}{\partial x} + Y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + Z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right). \quad (13)$$

То же самое заключение будет иметь место и тогда, когда температура в состоянии равновесия повсюду одинакова, если только предположить, что *расширения* происходят изотермически. Скорость волны  $c$  в этом случае будет постоянной.

Эти же самые результаты можно было бы, разумеется, получить легче, если сначала принять некоторые специальные гипотезы. Если мы предположим, что давление и плотность остаются связанными той же зависимостью, как и в состоянии равновесия, а именно, соотношением (7), то будем иметь вместо уравнения (5)

$$p' = e f'(e_0) = c^2 e'. \quad (14)$$

Поэтому уравнение (2) может быть представлено в виде

$$e_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{p'}{e_0} \frac{\partial e_0}{\partial x}. \quad (15)$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p'}{e_0} \right), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p'}{e_0} \right), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p'}{e_0} \right). \quad (16)$$

Эти уравнения имеют свободное от вихрей решение (11) вместе с зависимостью

$$p' = e_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (17)$$

Исключая  $p'$  и  $e'$  из (5), (11) и (16), получим уравнение (12).

Рассмотренные до сих пор движения были „свободны“ в том смысле, что кроме сил стационарного поля не действовали никакие другие силы. В случае наличия малой возмущающей силы с потенциалом  $\Omega$  нужно к правой части уравнения (10) прибавить еще член  $-e_0 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial t}$ . Уравнение (12) будет тогда заменено уравнением

$$p' = e_0 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Omega \right), \quad (18)$$

и мы получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi + \left( X \frac{\partial \varphi}{\partial x} + Y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + Z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial \Omega}{\partial t}. \quad (19)$$

**§ 314.** Теория таких задач, как большие колебания земной атмосферы, еще очень несовершенна. Особенное затруднение в этом случае представляет то, что приходится принимать во внимание физические условия в верхних слоях атмосферы.

Результаты §§ 311а, 312 показывают, что при более медленных нормальных колебаниях движение воздуха происходит главным образом в горизонтальном направлении. Мы рассмотрим теперь случай атмосферы с постоянной температурой, которая окружает невращающийся шар и подчиняется закону изотермического расширения; тогда уравнение (13) § 313 в полярных координатах  $r, \theta, \varphi$  принимает вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c^2 \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right\} - g \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad (1)$$

причем потенциал скоростей мы обозначаем теперь через  $\Phi$ . Если в согласии с результатом § 311а (при  $\gamma = 1$ ) мы будем пренебрегать радиальным движением и положим  $r = a$  (= радиусу шара), то в случае простых гармонических колебаний получим

$$\frac{c^2}{a^2} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right\} + \sigma^2 \Phi = 0. \quad (2)$$

Как и в случае задачи § 199, функция  $\Phi$ , соответствующая какому-то нормальному колебанию, будет изменяться как поверхностная сферическая функция целого порядка  $n$ ; из этого следует

$$\frac{\sigma^2 a^2}{c^2} = n(n+1). \quad (3)$$

Интерпретация этого результата получается таким же способом, как и в названных выше параграфах. Коэффициент сгущения  $\left( s = c^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$  соответствует величине  $\frac{\zeta}{h}$  этого параграфа, а  $c^2$  занимает место  $gh$ . Так как теперь имеет место равенство  $c^2 = gH$ , где  $H$  обозначает высоту однородной атмосферы, то оказывается, что свободные колебания подчиняются тем же законам, как и колебания жидкого океана постоянной глубины  $H$ , покрывающего земной шар<sup>1)</sup>

В качестве числового примера положим

$$c = 2,80 \times 10^4 \text{ см/сек}, \quad 2\pi a = 4 \times 10^8 \text{ см.}$$

В случаях  $n=1, n=2$  это дает, на основании формулы (3), при температуре  $0^\circ \text{C}$  периоды свободных колебаний 28,1 и 16,2 часа. При температуре  $15^\circ \text{C}$  периоды делаются равными 27,4 и 15,8 часа.

**§ 315.** Гипотеза конвективного равновесия с адиабатическим расширением так же хорошо пригодна для вычислений. В математиче-

<sup>1)</sup> Рэлей, см. прим., стр. 678.

ском отношении преимущество этой гипотезы заключается в том, что она позволяет на верхней границе установить определенные условия.

Уравнение (1) предыдущего параграфа будет сохранять все еще свою силу, если только иметь в виду, что величина  $c^2$  теперь изменяется вместе с глубиной места относительно верхней границы атмосферы. Принимая, что потенциал скоростей изменяется, как сферическая функция порядка  $n$ , для свободных колебаний будем иметь

$$c^2 \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2} \Phi \right\} - g \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \sigma^2 \Phi = 0. \quad (1)$$

Глубина  $h$  атмосферы считается малой в сравнении с радиусом земли. Отсюда, если положим  $r = a - z$ , где  $a$  относится к внешней границе, и напишем в согласии с (5) § 310

$$c^2 = \frac{gz}{m}, \quad (2)$$

то найдем

$$z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + m \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \left\{ \frac{m\sigma^2}{g} - \frac{n(n+1)z}{a^2} \right\} \Phi = 0, \quad (3)$$

так как величиной  $\frac{c^2}{a}$  по сравнению с  $g$  можно пренебречь. Если мы положим

$$k^2 = n(n+1) \frac{1}{a^2}, \quad (4)$$

то полученное уравнение будет тождественно совпадать с уравнением (6) § 311а. В таком случае будем иметь

$$\sigma^2 = n(n+1) \frac{gH_1}{a^2}. \quad (5)$$

Свободные колебания соответствуют, таким образом, колебаниям жидкого океана, глубина которого равна приведенной глубине  $H_1$  атмосферы.

**§ 316.** Аналогия все еще будет продолжать сохраняться и тогда, когда мы перейдем к случаю *вращающегося* земного шара. Если мы временно предположим, что ось  $z$  совпадает с осью вращения, в то время как оси  $x$  и  $y$  вращаются с угловой скоростью  $\omega$  земного шара, то уравнения (2) § 313 заменятся следующими уравнениями

$$\left. \begin{aligned} e_0 \left( \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v \right) &= -\frac{\partial p'}{\partial x} + e' X - e_0 \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ e_0 \left( \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u \right) &= -\frac{\partial p'}{\partial y} + e' Y - e_0 \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ e_0 \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{\partial p'}{\partial z} + e' Z - e_0 \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

причем мы предполагаем, что центробежная сила включена в  $(X, Y, Z)$ . Буквы  $u, v, w$  обозначают здесь относительные скорости, т. е. скорости по отношению к вращающемуся земному шару. Для общ-

ности в уравнения введены члены, которые должны представлять влияние возмущающих сил с потенциалом  $\Omega$ . Уравнение непрерывности остается по форме неизменным.

Если мы будем поступать так же, как в указанных выше параграфах, то получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\omega \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial P}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\omega \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial P}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial P}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где

$$P = c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + Xu + Yv + Zw - \frac{\partial \Omega}{\partial t}. \quad (8)$$

Если мы теперь изменим значение наших символов и будем понимать под  $u$  скорость вдоль меридиана, под  $v$  — скорость вдоль параллельного круга и под  $w$  — скорость в вертикальном направлении, то будем иметь по аналогии с (5) § 213

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\omega \frac{\partial v}{\partial t} \cos \theta &= \frac{\partial P}{r \partial \theta}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\omega \frac{\partial u}{\partial t} \cos \theta + 2\omega \frac{\partial w}{\partial t} \sin \theta &= \frac{\partial P}{r \sin \theta \partial \varphi}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\omega \frac{\partial v}{\partial t} \sin \theta &= \frac{\partial P}{\partial r}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где  $\theta$ ,  $\varphi$  обозначают географическую широту и долготу.

В применении к приливным движениям мы можем так же, как в случае задачи, относящейся к океану (§ 213), ввести различные упрощения. В частности, пренебрегая вертикальным ускорением, мы можем приближенно считать на основании последнего уравнения, что  $P$  может рассматриваться как величина, независимая от  $r$ , и что вместе с тем горизонтальные скорости  $u$ ,  $v$  для всех частиц одной и той же вертикали практически будут одинаковыми<sup>1)</sup>. Если положить теперь  $r = a - z$ , то будем иметь в полярных координатах

$$P = \frac{c^2}{a \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (u \sin \theta) + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right\} - c^2 \frac{\partial w}{\partial z} - gw - \frac{\partial \Omega}{\partial t}. \quad (10)$$

<sup>1)</sup> При более общем подходе к строению атмосферы приближенное допущение  $\frac{\partial P}{\partial r} = 0$  может быть заменено через

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \left\{ \frac{\partial c^2}{\partial r} + (\gamma - 1) g \right\} z,$$

и тогда сходство с приливами в океанах становится менее точным.



Полагая  $c^2 = \frac{gz}{m}$ , умножая на  $z^{m-1}$  и интегрируя по  $z$  в пределах от 0 до  $h$ , находим в предположении, что  $z^m w$  исчезает при обоих пределах интегрирования,

$$P = \frac{gH_1}{a \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (u \sin \theta) + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right\} - \frac{\partial \Omega}{\partial t}. \quad (11)$$

Упрощенные уравнения имеют теперь вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\omega \cos \theta \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial P}{a \partial \theta}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\omega \cos \theta \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial P}{a \sin \theta \partial \varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

причем  $P$  дано формулой (11). Если положить

$$P = -g \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad \Omega = -g \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t}, \quad (13)$$

то уравнения (11) и (12) будут похожи на те уравнения, которые мы нашли в § 214 для случая водяного океана постоянной глубины  $H_1$ . Поэтому теория океанских приливов на вращающемся земном шаре, изложенная в главе VIII, может быть как раз применена и к приливам в атмосфере рассмотренного здесь вида, вызванным силой тяжести.

Результаты распространяются также и на случай изотермической атмосферы (с изотермическим расширением), если в (10) мы положим  $c^2 = gH$ .

Некоторые вычисления периодов свободных колебаний изотермической атмосферы были выполнены Маргулисом<sup>1)</sup>. Он брал температуру  $0^\circ \text{C}$  и (возможную) скорость звука, равную  $c = 2,84 \cdot 10^4 \text{ см/сек}$ . Периоды, получающиеся в результате его вычислений, можно рассматривать как периоды водяного океана глубиной в 7980 м, если пренебречь взаимными притяжениями водяных частиц.

Для первых трех колебаний зонального типа ( $s=0$  в обозначениях § 223), симметричных по отношению к экватору, он находит периоды

$$12,28 \quad 7,88 \quad 6,37$$

звездных часов, а для первых трех асимметричных колебаний

$$20,44 \quad 9,59 \quad 6,67.$$

<sup>1)</sup> Margules, Wiener Sitzber. Math. nat. Wiss. Classe. CI, 597 (1892) и CII (1895). Автор обязан этими литературными указаниями проф. Чепману.

Во второй из указанных работ вычислены свободные периоды, отличные от 24 часов, для ряда значений  $\frac{2\pi}{\omega}$ ; здесь же содержатся примеры такого типа, который рассмотрен в конце § 206. В обеих работах исследуется влияние сил трения, пропорциональных скорости.

Для симметричных колебаний секториального типа ( $s = 1$ ) результаты получаются в виде пар значений, соответствующих волнам, которые движутся на вращающемся земном шаре на восток и на запад; таким образом, имеем

$$\left. \begin{array}{l} 13,87 \\ 39,57 \end{array} \right\}, \left. \begin{array}{l} 9,22 \\ 10,22 \end{array} \right\}, \left. \begin{array}{l} 6,63 \\ 6,77 \end{array} \right\}.$$

Для тессерального типа ( $s = 2$ ) вычисления Маргулиса дают значения  $\left. \begin{array}{l} 11,94 \\ 18,42 \end{array} \right\}$ .

Эти результаты можно сравнить с теми, которые получил Хоф (Hough) (см. стр. 440, 441) для океана глубиной в 8 850 м, с той лишь разницей, что при их получении не принималось во внимание взаимное притяжение частиц. Ср. также §§ 210, 212.

Если обратить внимание на возможное увеличение амплитуды вследствие „резонанса“, то интересно поставить вопрос о том, не может ли атмосфера иметь свободные периоды приблизительно в 12 солнечных или лунных часов. Маргулис находит для наиболее важных свободных колебаний, имеющих такой же, в общем, характер, как и полусуточные приливные волны, период 11,94 звездного часа в предположении постоянной температуры 0° С. С другой стороны, Хоф <sup>1)</sup> в своих исследованиях по теории приливов находит, что глубина  $h$  океана, для которого период в точности равен 12 звездным часам, определяется из формулы:

$$\frac{gh}{4\omega^2 a^3} = 0,10049.$$

Это дает значение  $h = 8895$  м. Следует, однако, заметить, что при этих вычислениях было принято во внимание взаимное притяжение частиц возмущенной жидкости, в то время как в случае воздушного океана влияние взаимного притяжения должно быть совершенно незаметным. Если принять это во внимание и провести вычисления для периода в 12 средних солнечных часов, то получится

$$\frac{gh}{4\omega^2 a^3} = 0,08911$$

или  $h = 7834$  м <sup>2)</sup>. Средняя температура воздуха вблизи земной поверхности оценивается обычно в 15° С, что дает  $H_1 = 8425$  м. Не делая слишком далеко идущих выводов из той гипотезы, что атмосфера над поверхностью земли однородна и приблизительно находится в конвективном равновесии, мы можем все же с достаточной вероятностью утверждать, что существуют свободные колебания атмосферы полусуточного типа, период которых очень близок к 12 средним солнечным часам, но несколько меньше.

Известно из опыта, что в показаниях барометра наблюдаются правильные колебания с периодом в одни солнечные сутки и в половину солнечных суток, между тем как влияние соответствующих лунных приливов почти незаметно <sup>3)</sup>. Амплитуда полусуточных колебаний (по солнечным суткам) на экваторе примерно равна 0,937 мм, в то время как амплитуда, которую дает „статиче-

<sup>1)</sup> Hough, см. выше стр. 437.

<sup>2)</sup> См. работу автора, указанную на стр. 687.

<sup>3)</sup> Так, Чепман (Chapman) находит амплитуду 0,00914 мм ртутного столба для полусуточных атмосферных лунных приливов в Гринвиче [Q. J. R. Met. Soc., XLIV, 271 (1918)].

ская\* теория приливов, равна только 0,011 мм. Некоторые числовые результаты, которые приводит Хоф для иллюстрации динамической теории океанских приливов, показывают, что свободные периоды должны отличаться от вынужденных периодов не более чем на 2 или 3 минуты, чтобы эта амплитуда могла возрасти благодаря динамическому воздействию в восемьдесят или девяносто раз. Так как разность между периодами полусуточных колебаний, вызванных солнцем и луной, доходит до 26 минут, то возможно, что влияние солнца этим путем может передаваться значительно более эффективно, чем влияние луны. При этом, однако, сохраняется то затруднение, что фаза наблюдаемого полусуточного несоответствия по отношению к прохождению солнца имеет ускорение, а не запаздывание (как это должно было бы быть благодаря приливному трению).

Кельвин приписал наблюдаемые колебания другой причине, а именно, суточному колебанию температуры, которое, будучи разложено на простые гармонические составляющие, будет иметь компоненты с периодами  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$  солнечных суток. В особенности заслуживает внимания то обстоятельство, что второе (т. е. полусуточное) колебание барометра имеет значительно большую амплитуду, чем первое. Кельвин полагал, что объяснение этой особенности может быть найдено в том, что период полусуточной компоненты лучше согласуется со свободным периодом земной атмосферы, чем период суточной компоненты <sup>1)</sup>.

Для того чтобы объяснить требуемую степень избирательного резонанса при той и другой гипотезе, необходимо постулировать существование свободного периода, почти равного 12 солнечным часам. Совсем недавняя оценка <sup>2)</sup>, основанная на сравнении скорости атмосферных волн со скоростью по приливной теории, обнаружила свободные периоды более кратковременные.

## ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ.

### ВЯЗКОСТЬ.

§ 317. Эта глава в основном посвящена рассмотрению сопротивления, вызываемого деформацией и известного под названием „вязкости“ или „внутреннего трения“; это сопротивление в большей или меньшей степени имеет место при движении всех жидкостей, но мы им до сих пор пренебрегали.

Для удобства будем следовать плану, которого мы уже придерживались в различных случаях, а именно сначала дадим обзор общей теории динамической системы, подверженной действию диссипативных сил, которые выражаются линейными функциями обобщенных скоростей <sup>3)</sup>. Это позволит не только свести к одной точке зрения

<sup>1)</sup> Kelvin, On the Thermodynamic Acceleration of the Earth's Rotation, Proc. R. S. Edin., XI (1882) (Papers, III, 341). О более подробном исследовании смотреть Чарман Q. J. R. Met. Soc., I, 165 (1923). Вынужденные приливы, которые происходят вследствие колебаний температуры, были исследованы Маргульсом, Wiener Ber., XCIX, 204 (1890).

<sup>2)</sup> Taylor G. J., Proc. Roy. Soc., CXXVI, 169, 728 (1929—1930).

<sup>3)</sup> Более полное изложение теории находится в книгах Rayleigh, Theory of Sound, гл. IV и V; Thomson and Tait, Natural Philosophy (2 изд.), § 340—345; Routh, Advanced Rigid Dynamics, гл. VI и VII.

большую часть дальнейших исследований, но иногда даст возможность указать общий характер ожидаемых результатов в тех случаях, которые не поддаются вычислениям.

Мы начнем с рассмотрения случая с одной степенью свободы. Уравнение движения имеет в этом случае вид

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q. \quad (1)$$

Здесь  $q$  есть обобщенная координата, характеризующая отклонение от положения равновесия;  $a$  — коэффициент инерции и представляет собой величину существенно положительную;  $c$  — коэффициент восстановления, который при наших исследованиях должен быть положительным;  $b$  — коэффициент трения и тоже положителен. Так как при изменении знака у  $t$  члены левой части уравнения (1) ведут себя различным образом, то движение системы, описываемое этим уравнением, не будет обратимым.

Если положить

$$T = \frac{1}{2} a\dot{q}^2, \quad V = \frac{1}{2} cq^2, \quad F = \frac{1}{2} b\dot{q}^2, \quad (2)$$

то уравнение можно написать в виде

$$\frac{d}{dt} (T + V) = -2F + Q\dot{q}. \quad (3)$$

Это показывает, что приращение энергии  $T + V$  в единицу времени оказывается меньшим произведенной внешними силами работы. Разность  $2F$  представляет рассеяние энергии за единицу времени; эта величина всегда положительна.

При свободном колебании будем иметь

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0. \quad (4)$$

Если мы предположим, что  $q$  пропорционально  $e^{\lambda t}$ , то решение примет различные формы в зависимости от относительной величины коэффициента трения. Если  $b^2 < 4ac$ , то

$$\lambda = -\frac{1}{2} \frac{b}{a} \pm i \left( \frac{c}{a} - \frac{1}{4} \frac{b^2}{a^2} \right)^{1/2} \quad (5)$$

или, в несколько иных обозначениях,

$$\lambda = -\tau^{-1} \pm i\sigma. \quad (6)$$

Следовательно, полное решение в действительной форме будет иметь вид

$$q = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (7)$$

где  $A$  и  $\varepsilon$  — произвольные постоянные. Представленное этим уравнением движение есть простое гармоническое колебание, амплитуда ко-

торого асимптотически приближается к нулю по закону  $e^{-\frac{t}{\tau}}$ . Промежуток времени  $\tau$ , в течение которого амплитуда убывает до  $\frac{1}{e}$  ее первоначального значения, называется „модулем затухания“ колебаний.

Если величина  $\frac{b}{2a}$  мала по сравнению с  $\left(\frac{c}{a}\right)^{1/2}$ , то  $\frac{b^2}{4ac}$  есть малая второго порядка, и трение в этом случае практически не оказывает влияния на „частоту“  $\sigma$ . Этот случай имеет место тогда, когда промежуток времени ( $2\pi\tau$ ), в течение которого амплитуда убывает на  $e^{-2\pi}$  ( $=\frac{1}{535}$ ) своего начального значения, оказывается большим по сравнению с периодом  $\left(\frac{2\pi}{\sigma}\right)$ .

Если имеет место неравенство  $b^2 > 4ac$ , то значения  $\lambda$  оказываются действительными и отрицательными. Обозначая их через  $-\alpha_1$  и  $-\alpha_2$ , будем иметь

$$q = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t}. \quad (8)$$

Это уравнение представляет „аперриодическое движение“; это означает, что система может не больше одного раза пройти через свое положение равновесия, к которому она потом приближается асимптотически.

В критическом случае  $b^2 = 4ac$  оба значения  $\lambda$  равны друг другу; в этом случае обычными методами находим решение

$$q = (A + Bt) e^{-at}, \quad (9)$$

которое может быть истолковано в том же смысле, что и в предшествующем случае.

Чем больше коэффициент трения  $b$ , тем больше отличаются друг от друга величины  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ; одна из них (например,  $\alpha_2$ ) стремится к значению  $\frac{b}{a}$ , а другая к значению  $\frac{c}{b}$ . Влияние второго члена в формуле (8) быстро убывает, и результирующее движение оказывается таким, как если бы коэффициент инерции ( $a$ ) был равен нулю.

**§ 318.** Рассмотрим теперь влияние периодической внешней силы. Если мы положим

$$Q = C e^{i(\sigma t + \epsilon)}, \quad (10)$$

то уравнение (1) дает

$$q = \frac{Q}{c - \sigma^2 a + i\sigma b}. \quad (11)$$

Вводя обозначения

$$1 - \frac{\sigma^2 a}{c} = R \cos \epsilon_1, \quad \frac{\sigma b}{c} = R \sin \epsilon_1, \quad (12)$$

где  $\epsilon_1$  должно лежать между  $0^\circ$  и  $180^\circ$ , получаем

$$q = \frac{Q}{Rc} e^{-i\epsilon_1}. \quad (13)$$

Если возьмем действительные части, то можем сказать, что сила

$$Q = C \cos(\sigma t + \varepsilon) \quad (14)$$

будет поддерживать колебания

$$q = \frac{C}{Rc} \cos(\sigma t + \varepsilon - \varepsilon_1). \quad (15)$$

Так как

$$R^2 = \left(1 - \frac{\sigma^2 a}{c}\right)^2 + \frac{\sigma^2 b^2}{c^2}, \quad (16)$$

то легко находим, что для  $b^2 < 2ac$  амплитуда будет наибольшей тогда, когда

$$\sigma = \left(\frac{c}{a}\right)^{1/2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \frac{b^2}{ac}\right)^{1/2}; \quad (17)$$

это наибольшее значение амплитуды будет равно

$$\frac{C}{b} \left(\frac{a}{c}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{b^2}{ac}\right)^{-1/2}. \quad (18)$$

При сравнительно небольшом трении, когда величиной  $\frac{b^2}{4ac}$  можно пренебречь как малой второго порядка, амплитуда будет наибольшей в том случае, когда период возмущающей силы совпадает с периодом свободных колебаний (ср. § 168). Формула (18) показывает далее, что отношение максимальной амплитуды к ее „статическому значению“  $\frac{C}{c}$  равно  $\frac{(ac)^{1/2}}{b}$ ; эта величина согласно предположению будет достаточно большой.

Если, наоборот,  $b^2 > 2ac$ , то амплитуда с уменьшением частоты непрерывно возрастает, стремясь в конце концов к „статическому значению“  $\frac{C}{c}$ .

Из формул (15) и (12) оказывается, что максимум смещения наступает позднее максимума силы на разность фаз, равную  $\varepsilon_1$ , где

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{\sigma b}{c - \sigma^2 a}. \quad (19)$$

Если период возмущающей силы больше, чем период свободных колебаний при отсутствии трения, то эта разность фаз лежит между  $0^\circ$  и  $90^\circ$ ; в противном случае она лежит между  $90^\circ$  и  $180^\circ$ . Если коэффициент трения  $b$  относительно мал, то разность фаз отличается очень мало от  $0^\circ$  или  $180^\circ$ , в зависимости от указанного выше случая, если только значение  $\sigma$  не оказывается близким к критической частоте  $\left(\frac{c}{a}\right)^{1/2}$ . Для критической частоты разность фаз равна  $90^\circ$ .

Рассеяние в единицу времени равно  $b\dot{q}^2$ ; среднее значение этой величины, как легко найти, оказывается равным

$$\frac{1}{2} \frac{bC^2}{\left(\sigma a - \frac{c}{\sigma}\right)^2 + b^2}. \quad (20)$$

Это выражение имеет наибольшее значение, когда  $\sigma = \left(\frac{c}{a}\right)^{1/2}$ .

Как и в § 168, формула (11) для очень быстрых колебаний приближенно дает

$$q = -\frac{Q}{\sigma^2 a}; \quad (21)$$

в этом случае существенное влияние оказывает лишь масса.

Если же значение  $\sigma$  мало, то смещение приближенно равно статическому смещению

$$q = \frac{Q}{c}. \quad (22)$$

**§ 319.** Интересный пример представляют приливы в экваториальном канале<sup>1)</sup>.

Уравнение движения, видоизмененное благодаря введению члена, соответствующего трению, имеет вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial \xi}{\partial t} + c^2 \frac{\partial^2 \xi}{a^2 \partial \varphi^2} + X, \quad (1)$$

где обозначения совпадают с принятыми в § 181<sup>2)</sup> и  $a$  обозначает радиус земли.

В случае свободных волн полагаем  $X=0$  и принимаем, что

$$\xi \text{ пропорционально } e^{\lambda t + i k a \varphi}; \quad (2)$$

в результате находим

$$\lambda^2 + \mu \lambda + k^2 c^2 = 0$$

и отсюда

$$\lambda = -\frac{1}{2} \mu \pm i \left( k^2 c^2 - \frac{1}{4} \mu^2 \right)^{1/2}. \quad (3)$$

Если пренебрежем квадратом величины  $\frac{\mu}{kc}$ , то из (2) получим для действительной части  $\xi$  выражение

$$\xi = A e^{-\frac{1}{2} \mu t} \cos \{ k(ct \pm a\varphi) + \epsilon \}. \quad (4)$$

Модуль затухания равен  $2\mu^{-1}$ , а скорость волны (в первом приближении) не зависит от трения.

Чтобы найти вынужденные колебания, вызванные притяжением луны, положим в согласии с § 181

$$X = i f e^{2i(nl + \varphi + \epsilon)}, \quad (5)$$

где  $n$  обозначает угловую скорость луны по отношению к фиксированной точке канала. Принимая тот же самый множитель, зависящий от времени, находим

$$\xi = \frac{1}{4} \frac{i f a^2}{c^2 - n^2 a^2 + \frac{1}{2} i \mu n a^2} e^{2i(nl + \varphi + \epsilon)}. \quad (6)$$

<sup>1)</sup> Airy, Tides and Waves, § 315 и далее.

<sup>2)</sup> В частности  $c^2$  обозначает теперь  $gh$ , где  $h$  — глубина.

Отсюда для возвышения поверхности получаем

$$\eta = -h \frac{\partial \xi}{a \partial \varphi} = \frac{1}{2} \frac{Hc^2}{c^2 - n^2 a^2 + \frac{1}{2} i \mu n a^2} e^{2i(nt + \varphi + \epsilon)}, \quad (7)$$

где, как и в § 180,

$$H = \frac{af}{g}.$$

Чтобы привести эти выражения к действительному виду, положим

$$\operatorname{tg} 2\chi = \frac{1}{2} \frac{\mu n a^2}{c^2 - n^2 a^2}, \quad (8)$$

причем  $0 < \chi < 90^\circ$ . Таким образом, мы найдем, что возмущающей силе

$$X = -f \sin 2(nt + \varphi + \epsilon) \quad (9)$$

соответствует горизонтальное перемещение

$$\xi = -\frac{1}{4} \frac{fa^2}{\left\{ (c^2 - n^2 a^2)^2 + \frac{1}{4} \mu^2 n^2 a^4 \right\}^{1/2}} \sin 2(nt + \varphi + \epsilon - \chi) \quad (10)$$

и возвышение поверхности, выражаемое формулой

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{Hc^2}{\left\{ (c^2 - n^2 a^2)^2 + \frac{1}{4} \mu^2 n^2 a^4 \right\}^{1/2}} \cos 2(nt + \varphi + \epsilon - \chi). \quad (11)$$

Так как величина  $nt + \varphi + \epsilon$  в этих выражениях измеряет часовой угол луны по отношению к меридиану, проходящему через произвольную точку ( $\varphi$ ) канала, то оказывается, что момент высокой воды наступает после прохождения луны через меридиан на промежутке времени  $t_1$ , определяемого равенством  $nt_1 = \chi$ .

Если  $c^2 < n^2 a^2$  или  $\frac{h}{a} < \frac{n^2 a}{g}$ , то в случае бесконечно малого трения мы имели бы  $\chi = 90^\circ$ , т. е. приливы были бы *обращенными* (ср. § 181). При заметном трении значение  $\chi$  лежит между  $90^\circ$  и  $45^\circ$ , и момент высокой воды *ускоряется* на промежуток времени, который соответствует углу  $90^\circ - \chi$ .

Если же  $\frac{h}{a} > \frac{n^2 a}{g}$ , так что при отсутствии трения приливы были бы *прямыми*, то значение  $\chi$  лежит между  $0^\circ$  и  $45^\circ$ , и момент высокой воды *запаздывает* на промежуток времени, соответствующий этому углу.

Фиг. 80 показывает оба случая. Буквы  $M, M'$  обозначают положения луны и противолуны (см. стр. 449), которые мы считаем находящимися в плоскости экватора; круглые стрелки указывают направления вращения земли.

Очевидно, что в обоих случаях притяжение, производимое возмущающим телом на приподнятые части воды, эквивалентно паре



сил, которая стремится *уменьшить* момент количества движения системы, состоящей из земли и покрывающего ее слоя воды.

В рассматриваемом случае момент этой пары сил может быть легко вычислен. Из (9) и (11) находим для среднего значения тангенциальной силы, действующей на поднятую часть воды и относящейся к единице площади, выражение

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho X_{\eta} d\varphi = -\frac{1}{2} \rho h f \sin 2\chi, \quad (12)$$

где  $h$  обозначает вертикальную амплитуду. Так как в качестве положительного направления для  $X$  выбрано восточное, то оказывается, что в общем итоге получается сила, направленная к западу. Если мы умножим среднее значение силы на площадь водной поверхности и радиус  $a$ , то получим величину замедляющего момента.

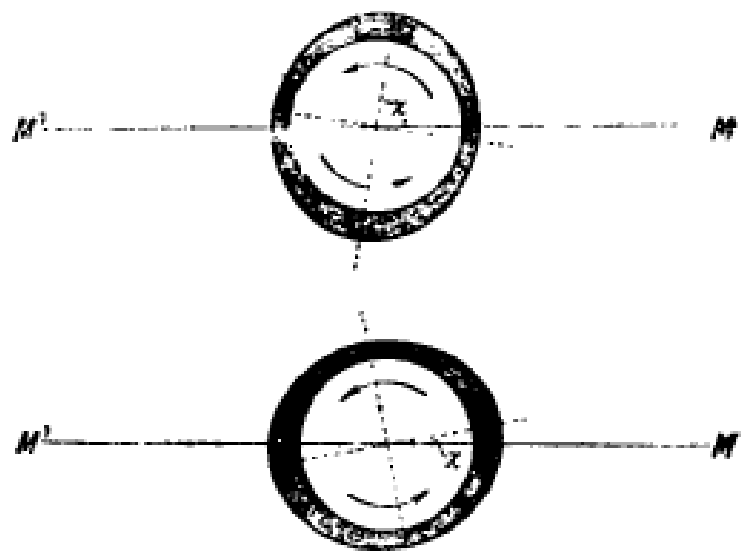
О влиянии разности фаз при сложении приливов, для которых значения частот лишь незначительно отличаются друг от друга, было упомянуто уже в § 224. Чтобы применить данную там формулу к рассматриваемому случаю, мы должны положить  $\sigma = 2n$ ,  $\chi = 2\chi$ . Тогда из уравнения (8) найдем

$$\frac{ds}{d\sigma} = \frac{d\chi}{dn} = \frac{\mu a^2 (c^2 + n^2 a^2)}{4 (c^2 - n^2 a^2)^2 + \mu^2 n^2 a^4}. \quad (13)^1$$

Если имеются налицо два тела, возбуждающие приливы с приблизительно равными периодами, то это выражение дает промежуток времени от момента совмещения действий тел (или противостояния) до наступления сильного прилива. Отношение этого значения  $\frac{ds}{d\sigma}$  к продолжительности суток  $\left(\frac{2\pi}{n}\right)$  не может быть больше, чем

$$\frac{n^2 a^2 + c^2}{8\pi |n^2 a^2 - c^2|}.$$

<sup>1)</sup> Ср. Airy, Tides and Waves, § 328 и далее.



Фиг. 80.

Мы привели это исследование лишь ради его теоретического интереса; для действительных же обстоятельств, имеющих место на земном шаре, оно имеет лишь ограниченное применение. Даже в случае широкой полосы воды, расположенной вдоль экватора, глубиной, скажем, в 3510 м, разности фаз, которые можно получить на основании этой теории, оказываются совершенно незначительными. Из равенства (8) и из § 181 получается

$$\operatorname{tg} 2\chi = -\frac{1}{1 - 311 \frac{h}{a}} \cdot \frac{1}{n\tau} = -0,191 \frac{2\pi}{n\tau},$$

где  $\tau = \frac{2}{\mu}$  обозначает коэффициент затухания свободных колебаний. Представляется естественным принять, что коэффициент затухания в подобном случае в значительное число раз превосходит лунные сутки  $\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ ; тогда изменение времени прилива, обусловленное трением, было бы сравнимо с величиной  $\frac{2\pi}{n\tau} \cdot 22$  минуты. Следовательно, этим способом мы не можем объяснить ускорение в фазе, большее чем на несколько минут.

Подобная же граница получается и для величины запаздывания сильного прилива, вычисляемого из формулы (13).

Приливные течения в открытом море в действительности так незначительны, что вызываемый ими эффект трения оказывается несущественным даже с астрономической точки зрения. В мелкой же воде и в узких морях и устьях рек этот эффект оказывается очень значительным вследствие инерции воды и свойств морского дна и берегов. В настоящее время, повидимому, можно считать установленным<sup>1)</sup>, что в таких областях общее рассеяние энергии в конце концов за счет энергии вращения земли становится сравнимой с той, которая получается на основании астрономических данных; см. § 371.

**§ 320.** Возвратимся снова к общей теории; пусть  $q_1, q_2, \dots, q_n$  суть координаты динамической системы, на которую действуют: 1) консервативные силы, зависящие от конфигурации системы, 2) силы, возникающие при движении и пропорциональные скоростям, и 3) заданные внешние силы. Уравнения малых движений для такой системы при самых общих предположениях имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} + B_{r1} q_1 + B_{r2} \dot{q}_2 + \dots = -\frac{\partial V}{\partial q_r} + Q_r, \quad (1)$$

где кинетическая и потенциальная энергии определяются выражениями вида

$$2T = a_{11} \dot{q}_1^2 + a_{22} \dot{q}_2^2 + \dots + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dots, \quad (2)$$

$$2V = c_{11} q_1^2 + c_{22} q_2^2 + \dots + 2c_{12} q_1 q_2 + \dots \quad (3)$$

Нужно иметь в виду, что

$$a_{sr} = a_{rs}, \quad c_{rs} = c_{sr}, \quad (4)$$

но мы не будем предполагать, что коэффициенты  $B_{r1}$  и  $B_{s1}$  равны друг другу.

<sup>1)</sup> Taylor G., см. выше, стр. 402. Jeffreys H., Phil. Trans. A, CCXXI, 239 (1921).

Если положим теперь

$$b_{rs} = b_{sr} = \frac{1}{2} (B_{rs} + B_{sr}) \quad (5)$$

и

$$\beta_{rs} = -\beta_{sr} = \frac{1}{2} (B_{rs} - B_{sr}), \quad (6)$$

то типовое уравнение (1) примет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r} + \beta_{r1} \dot{q}_1 + \beta_{r2} \dot{q}_2 + \dots = - \frac{\partial V}{\partial q_r} + Q_r, \quad (7)$$

где

$$2F = b_{11} \dot{q}_1^2 + b_{22} \dot{q}_2^2 + \dots + 2b_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dots \quad (8)$$

Из уравнений такого вида выводим

$$\frac{d}{dt} (T + V) + 2F = \sum \theta_r \dot{q}_r. \quad (9)$$

Правая часть этого выражения представляет работу, произведенную внешними силами в единицу времени. Часть этой работы идет на увеличение общей энергии  $T + V$  системы; остальная же часть, с нашей точки зрения в настоящий момент, рассеивается со скоростью  $2F$ . В приложениях к реальным задачам функция  $F$  оказывается существенно положительной; эту функцию, следуя Рэлею<sup>1)</sup>, который первый ее ввел, называют „диссипативной функцией“.

Члены в уравнении (7), зависящие от  $F$ , мы будем называть „членами трения“. Остальные же члены, в которые величины  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$  входят с коэффициентами, удовлетворяющими соотношению  $\beta_{rs} = -\beta_{sr}$ , имеют вид, который мы уже встречали в общих уравнениях „гиростатической“ системы (§ 141); их можно поэтому называть „гиростатическими членами“.

**§ 321.** Если гиростатических членов нет, то уравнение (7) приводится к виду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r} + \frac{\partial V}{\partial q_r} = Q_r. \quad (10)$$

Как и в § 168, мы можем предположить, что выражения  $T$  и  $V$  преобразованием координат приведены к сумме квадратов, так что

$$2T = a_1 \dot{q}_1^2 + a_2 \dot{q}_2^2 + \dots + a_n \dot{q}_n^2, \quad (11)$$

$$2V = c_1 q_1^2 + c_2 q_2^2 + \dots + c_n q_n^2. \quad (12)$$

Случайно может оказаться, хотя это вовсе не обязательно, что то же самое преобразование координат приводит также и функцию  $F$  к этому виду, т. е. к виду

$$2F = b_1 \dot{q}_1^2 + b_2 \dot{q}_2^2 + \dots + b_n \dot{q}_n^2. \quad (13)$$

<sup>1)</sup> Rayleigh, Some General Theorems relating to Vibrations, Proc. Lond. Math. Soc. (1), IV, 357 (1873) (Papers, I, 170); Theory of Sound, § 81.



где величина  $\sigma$  имеет то же значение, как и при отсутствии трения, в то время как амплитуда  $a$  медленно изменяется с течением времени, и что изменения других координат оказываются сравнительно малыми, то мы получим бы приближенное уравнение

$$T + V = \frac{1}{2} a_r \dot{q}_r^2 + \frac{1}{2} c_r q_r^2 = \frac{1}{2} \sigma^2 a_r a^2. \quad (22)$$

Далее, рассеяние выражалось бы формулой

$$2F = b_{rr} \dot{q}_r^2;$$

Среднее значение этой величины было бы приближенно равно

$$\frac{1}{2} \sigma^2 b_{rr} a^2. \quad (23)$$

Отсюда, приравнявая убыль энергии в единицу времени среднему значению рассеяния, получим

$$\frac{da}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{b_{rr}}{a_r} a \quad (24)$$

и, следовательно,

$$a = a_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (25)$$

если, как в формуле (18),

$$\tau^{-1} = \frac{1}{2} \frac{b_{rr}}{a_r}. \quad (26)$$

Этот способ определения скорости затухания колебаний иногда будет пригодным для тех случаев, в которых полное определение влияния трения было бы затруднительным (ср. §§ 348, 355).

Если коэффициенты трения сравнительно велики, то масса системы почти не будет оказывать влияние на движение; наиболее удобной системой координат тогда будет такая система, при которой функции  $F$  и  $V$  приводятся одновременно к суммам квадратов, т. е.

$$\left. \begin{aligned} 2F &= b_1 \dot{q}_1^2 + b_2 \dot{q}_2^2 + \dots + b_n \dot{q}_n^2, \\ 2V &= c_1 q_1^2 + c_2 q_2^2 + \dots + c_n q_n^2. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Уравнения свободных движений в этом случае будут иметь вид

$$b_r \dot{q}_r + c_r q_r = 0, \quad (28)$$

откуда следует

$$q_r = C e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (29)$$

если

$$\tau = \frac{b_r}{c_r}. \quad (30)$$

**§ 322.** Если в основные уравнения входят как гиростатические члены, так и члены, соответствующие силам трения, то теория естественно становится еще более сложной. Достаточно будет здесь рассмотреть случай *двух* степеней свободы, продолжая исследование § 206<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> За более подробным исследованием можно отослать к работе, цитированной на стр. 315.

Уравнения движения имеют в этом случае вид

$$\left. \begin{aligned} a_1 \ddot{q}_1 + b_{11} \dot{q}_1 + (b_{12} + \beta) \dot{q}_2 + c_1 q_1 &= Q_1, \\ a_2 \ddot{q}_2 + (b_{21} - \beta) \dot{q}_1 + b_{22} \dot{q}_2 + c_2 q_2 &= Q_2. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Чтобы определить свободные движения, положим  $Q_1 = 0$ ,  $Q_2 = 0$  и примем, что координаты  $q_1$  и  $q_2$  пропорциональны  $e^{\lambda t}$ . Это приводит к уравнению четвертой степени относительно  $\lambda$

$$a_1 a_2 \lambda^4 + (a_2 b_{11} + a_1 b_{22}) \lambda^3 + (a_2 c_1 + a_1 c_2 + \beta^2 + b_{11} b_{22} - b_{12}^2) \lambda^2 + (b_{11} c_2 + b_{22} c_1) \lambda + c_1 c_2 = 0. \quad (2)$$

При помощи критерия, установленного Раусом<sup>1)</sup>, можно без труда показать следующее. Если, как это и имеет место в нашем случае, величины

$$a_1, a_2, b_{11}, b_{22}, b_{11} b_{22} - b_{12}^2$$

оказываются все положительными, то необходимое и достаточное условие для того, чтобы действительные части корней этого уравнения четвертой степени были все отрицательными, заключается в том, что коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$  должны быть оба положительными.

Если мы отбросим члены второго порядка по отношению к коэффициентам трения, то то же заключение может быть получено более непосредственно следующим образом. При нашем предположении корни уравнения (2) могут быть выражены равенствами

$$\lambda = -a_1 \pm i\sigma_1, \quad \lambda = -a_2 \pm i\sigma_2, \quad (3)$$

причем значения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  в первом приближении оказываются такими же, как и при отсутствии трения, т. е. они являются корнями уравнения

$$a_1 a_2 \sigma^4 - (a_2 c_1 + a_1 c_2 + \beta^2) \sigma^2 + c_1 c_2 = 0, \quad (4)$$

между тем как значения  $a_1, a_2$  определяются уравнениями

$$a_1 + a_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{b_{11}}{a_1} + \frac{b_{22}}{a_2} \right), \quad \frac{a_1}{\sigma_1^2} + \frac{a_2}{\sigma_2^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{b_{11}}{c_1} + \frac{b_{22}}{c_2} \right). \quad (5)$$

Очевидно, для того чтобы  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  были действительны,  $c_1$  и  $c_2$  должны иметь одинаковые знаки, а для того чтобы  $a_1$  и  $a_2$  были положительны, знаки у  $c_1$  и  $c_2$  должны быть положительными. Если, наоборот, значения  $c_1$  и  $c_2$  оба положительны, то значения  $\sigma_1^2$  и  $\sigma_2^2$  оказываются действительными и положительными, и количества  $\frac{c_1}{a_1}$ ,  $\frac{c_2}{a_2}$  оба лежат в интервале, определяемом значениями  $\sigma_1^2$  и  $\sigma_2^2$ . Из уравнений (5) далее легко получается, что корни  $a_1$  и  $a_2$  будут тогда оба положительны<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> R a u t h, *Advanced Rigid Dynamics*, § 287.

<sup>2)</sup> Простой пример изложенной здесь теории представляет материальная частица в эллиптической чаше, вращающейся около вертикальной главной оси. Если бы поверхность чаши была абсолютно гладкой, то равновесие частицы в ее самом низшем положении было бы устойчивым, за исключением того случая, когда период вращения лежит между периодами обоих нормальных колебаний (каждое в соответствующей главной плоскости) частицы, имеющих место в случае покоящейся чаши. Но если принимается во внимание трение между частицей и поверхностью чаши, то равновесие только до тех пор будет „вековым образом“ устойчивым, пока угловая скорость вращения остается меньше, чем угловая частота более медленного из двух названных нормальных колебаний. А если вращение происходит более быстро, то частица постепенно удаляется от оси и переходит в положение относительного равновесия, в котором она вращается вместе с чашей подобно грузику конического маятника. В этом состоянии система, состоящая из частицы и чаши, при том же главном моменте количества движения обладает меньшей энергией, чем в том случае, когда частица остается в самой нижней точке чаши (ср. § 254). Некоторые дальнейшие иллюстрации имеются в работе: L a m b, *On kinetic Stability*, Proc. Roy. Soc. A, LXXX, 163 (1907).

Если один из коэффициентов  $c_1, c_2$  (например,  $c_2$ ) равен нулю, то одно из значений  $\sigma$  (например,  $\sigma_2$ ) тоже должно быть равно нулю, благодаря чему одно из нормальных колебаний будет иметь бесконечно большой период. Мы будем тогда иметь

$$\sigma_1^2 = \frac{c_1}{a_1} + \frac{\beta^2}{a_1 a_2}, \quad a_2 = \frac{b_{22} c_1}{a_2 c_1 + \beta^2}. \quad (6)$$

Как и в § 206, легко могут быть написаны выражения для вынужденных колебаний в общем случае, когда  $Q_1$  и  $Q_2$  пропорциональны  $e^{i\sigma t}$ ; мы, однако, исследуем здесь более подробно частный случай, когда  $c_2 = 0$  и  $Q_2 = 0$ . Уравнения (1) дают в этом случае

$$\left. \begin{aligned} (c_1 - \sigma^2 a_1 + i\sigma b_{11}) q_1 + (b_{12} + \beta) \dot{q}_2 &= Q_1, \\ i\sigma (b_{12} - \beta) q_1 + (i\sigma a_2 + b_{22}) \dot{q}_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

откуда следует

$$q_1 = \frac{i\sigma a_2 + b_{22}}{-a_1 a_2 i\sigma^3 - (a_1 b_{11} + a_1 b_{22}) \sigma^2 + (a_2 c_1 + \beta^2 + b_{11} b_{22} - b_{12}^2) i\sigma + b_{22} c_1} Q_1. \quad (8)$$

Это равенство можно написать также в виде

$$q_1 = \frac{i\sigma a_2 + b_{22}}{a_1 a_2 \{ (i\sigma + a_1)^2 + \sigma_1^2 \} (i\sigma + a_2)} Q_1. \quad (9)$$

Главная наша задача состоит в том, чтобы исследовать случай возмущающей силы бесконечно большого периода по той причине, что он фигурирует в теории Лапласа для объяснения четырнадцатидневных приливов (§ 217). Мы предположим поэтому, что как отношение  $\frac{\sigma_1}{\sigma}$ , так и отношение

$\frac{\sigma_1}{a_1}$  велики. Тогда формула приведет к виду

$$q_1 = \frac{i\sigma a_2 + b_{22}}{a_1 a_2 \sigma_1^2 (i\sigma + a_2)} Q_1 = \frac{i\sigma a_2 + b_{22}}{b_{22} c_1 \left( \frac{i\sigma}{a_2} + 1 \right)} Q_1. \quad (10)$$

Все зависит теперь от значений отношений  $\frac{\sigma}{a_2}$  и  $\frac{\sigma a_2}{b_{22}}$ . Если значение  $\sigma$  настолько мало, что значениями обоих отношений можно пренебречь, то в согласии со статической теорией получаем

$$q_1 = \frac{Q_1}{c_1}. \quad (11)$$

Принятое здесь допущение означает, что период приложенной силы велик по сравнению с промежутком времени, в течение которого амплитуды свободных колебаний убывают вследствие трения до  $\frac{1}{e^{2\pi}}$  их первоначальных значений.

Если же мы предположим, что и отношения  $\frac{\sigma}{a_2}$  и  $\frac{\sigma a_2}{b_{22}}$  велики, то получим, как в (8) § 206.

$$q_1 = \frac{a_2 a_1}{b_{22} c_1} Q_1 = \frac{a_2}{a_2 c_1 + \beta^2} Q_1. \quad (12)$$

### Вязкость.

§ 323. Переходим теперь к рассмотрению сопротивления особого рода, которое характерно для жидкостей. Методы, которые мы будем применять при этом, неизбежно будут теми же самыми, какие применяются при рассмотрении сопротивления изменению формы, называемого „упругостью“ и характерного для твердых тел. Оба этих класса явлений с физической стороны являются различными, ибо последний зависит от действительно произведенных изменений формы, тогда как первый зависит от *скорости* этого изменения, но применяемые при этом математические методы оказываются в обоих случаях в значительной степени тождественными.

Проведем через произвольную точку  $P$  три плоскости перпендикулярно к координатным осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и обозначим три составляющие напряжения, действующего на первую из этих плоскостей и отнесенного к единице площади, через  $p_{xx}$ ,  $p_{xy}$ ,  $p_{xz}$ , составляющие напряжения на вторую плоскость — через  $p_{yx}$ ,  $p_{yy}$ ,  $p_{yz}$  и составляющие напряжения на третью плоскость — через  $p_{zx}$ ,  $p_{zy}$ ,  $p_{zz}$ <sup>1)</sup>.

Если мы теперь рассмотрим элемент  $\delta x \delta y \delta z$ , имеющий центр в точке  $P$ , то найдем, составляя уравнения моментов и деля на  $\delta x \delta y \delta z$ ,

$$p_{yz} = p_{zy}, \quad p_{zx} = p_{xz}, \quad p_{xy} = p_{yx};$$

при этом мы отбрасываем внешние силы и кинетические реакции, так как они представляют малые величины более высокого порядка, чем поверхностные напряжения. Эти соотношения приводят девять составляющих напряжения к шести; для случая вязкой жидкости соотношения эти получаются также непосредственно из выражений для  $p_{yz}$ ,  $p_{zx}$ ,  $p_{xy}$ , которые будут даны ниже (§ 325).

§ 324. Из § 1 и § 2 следует, что отличие того состояния жидкости, которое определяется величинами  $p_{xx}$ ,  $p_{xy}$ , ..., от состояния, при котором давление по всем направлениям одинаково, обусловлено только движением от деформации в окрестности точки  $P$ . Эта деформация определяется шестью величинами  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $f$ ,  $g$ ,  $h$ , как было показано в § 30. Прежде чем перейти к определению  $p_{xx}$ ,  $p_{xy}$ , ... как функций этих величин, удобно будет установить здесь некоторые формулы преобразования.

	$x$	$y$	$z$
$x'$	$l_1$	$m_1$	$n_1$
$y'$	$l_2$	$m_2$	$n_2$
$z'$	$l_3$	$m_3$	$n_3$

<sup>1)</sup> В согласии с обычными обозначениями теории упругости мы считаем *растяжение* положительным, а *сжатие* отрицательным. В случае идеальной жидкости имеем, таким образом,  $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p$ .



Проведем оси  $Px'$ ,  $Pu'$ ,  $Pz'$  по направлениям главных осей деформации в точке  $P$ ; пусть  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  будут скорости деформации по этим направлениям. Пусть, далее, взаимное расположение обеих систем осей:  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  определено обычным способом при помощи приложенной здесь схемы направляющих косинусов. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \left( l_1 \frac{\partial}{\partial x'} + l_2 \frac{\partial}{\partial y'} + l_3 \frac{\partial}{\partial z'} \right) (l_1 u' + l_2 v' + l_3 w') = \\ &= l_1^2 \frac{\partial u'}{\partial x'} + l_2^2 \frac{\partial v'}{\partial y'} + l_3^2 \frac{\partial w'}{\partial z'}. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} a &= l_1^2 a' + l_2^2 b' + l_3^2 c', \\ b &= m_1^2 a' + m_2^2 b' + m_3^2 c', \\ c &= n_1^2 a' + n_2^2 b' + n_3^2 c', \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

причем последние два соотношения получаются просто по аналогии. Мы видим, что

$$a + b + c = a' + b' + c', \quad (2)$$

как и следовало ожидать, так как каждая из обеих частей этого равенства измеряет „кубическое расширение“ (§ 7). Далее имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} &= \left( m_1 \frac{\partial}{\partial x'} + m_2 \frac{\partial}{\partial y'} + m_3 \frac{\partial}{\partial z'} \right) (n_1 u' + n_2 v' + n_3 w') + \\ &+ \left( n_1 \frac{\partial}{\partial x'} + n_2 \frac{\partial}{\partial y'} + n_3 \frac{\partial}{\partial z'} \right) (m_1 u' + m_2 v' + m_3 w'); \end{aligned}$$

это соотношение вместе с двумя другими, аналогичными ему, дает

$$\left. \begin{aligned} f &= 2(m_1 n_1 a' + m_2 n_2 b' + m_3 n_3 c'), \\ g &= 2(n_1 l_1 a' + n_2 l_2 b' + n_3 l_3 c'), \\ h &= 2(l_1 m_1 a' + l_2 m_2 b' + l_3 m_3 c'). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

§ 325. Из соображений симметрии следует, что напряжения, действующие в точке  $P$  на плоскости  $y'z'$ ,  $z'x'$ ,  $x'y'$ , должны быть целиком направлены перпендикулярно к этим плоскостям.

Обозначим эти напряжения через  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ .

Пусть  $ABC$  на фиг. 1 (§ 2) обозначает теперь плоскость, проходящую в непосредственной близости от точки  $P$  перпендикулярно к оси  $x$  и пересекающую оси  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ;  $\Delta$  пусть обозначает площадь треугольника  $ABC$ . Площади остальных боковых граней тетраэдра  $PABC$  будут тогда  $l_1 \Delta$ ,  $l_2 \Delta$ ,  $l_3 \Delta$ . Если мы составим компоненту по оси  $x$  равнодействующей сил, действующих на тетраедр, то найдем

$$p_{xx} \Delta = p_1 l_1 \Delta \cdot l_1 + p_2 l_2 \Delta \cdot l_2 + p_3 l_3 \Delta \cdot l_3,$$

причем внешние приложенные силы и силы инерции на тех же основаниях, как и выше, отброшены. Отсюда и из подобных выражений, относящихся к осям  $y, z$ , получим

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= p_1 l_1^2 + p_2 l_2^2 + p_3 l_3^2, \\ p_{yy} &= p_1 m_1^2 + p_2 m_2^2 + p_3 m_3^2, \\ p_{zz} &= p_1 n_1^2 + p_2 n_2^2 + p_3 n_3^2. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Мы видим, что

$$p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = p_1 + p_2 + p_3. \quad (2)$$

Таким образом, значение среднего арифметического трех нормальных составляющих для каждой из трех взаимно перпендикулярных плоскостей в точке оказывается всегда одним и тем же. Мы будем обозначать это среднее давление через  $p^1$ .

Если мы составим далее компоненту, параллельную оси  $y$ , то получим третье соотношение из следующей симметричной системы равенств:

$$\left. \begin{aligned} p_{yz} &= p_1 m_1 n_1 + p_2 m_2 n_2 + p_3 m_3 n_3, \\ p_{zx} &= p_1 n_1 l_1 + p_2 n_2 l_2 + p_3 n_3 l_3, \\ p_{xy} &= p_1 l_1 m_1 + p_2 l_2 m_2 + p_3 l_3 m_3. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Отсюда следует, что

$$p_{yz} = p_{zy}, \quad p_{zx} = p_{xz}, \quad p_{xy} = p_{yx}$$

что другим способом было доказано в § 323.

Если мы на той же фиг. 1 примем, что  $PA, PB, PC$  параллельны осям  $x, y, z$  и  $ABC$  есть произвольная плоскость, проходящая в непосредственной близости от точки  $P$  и имеющая направляющие косинусы  $l, m, n$ , то подобным же способом найдем, что составляющие  $p_{hx}, p_{hy}, p_{hz}$  напряжения, действующего на эту плоскость, будут даны выражениями вида

$$\left. \begin{aligned} p_{hx} &= l p_{xx} + m p_{xy} + n p_{xz}, \\ p_{hy} &= l p_{yx} + m p_{yy} + n p_{yz}, \\ p_{hz} &= l p_{zx} + m p_{zy} + n p_{zz}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

**§ 326.** Значения величин  $p_1, p_2, p_3$  отличаются от  $-p$  на количества, которые зависят от движения, обусловленного деформацией, и потому должны быть функциями только величин  $a', b', c'$ .

<sup>1)</sup> Остается открытым вопрос, представляет ли среднее значение давления в случае газа функцию только плотности и температуры (как при статических условиях, к которым в первую очередь относятся законы Бойля и Дальтона), или оно зависит также и от скорости кубического расширения в точке  $(x, y, z)$ ; см. § 358.

Простейшее из возможных здесь предположений заключается в том, что эти функции линейные. Мы напишем поэтому

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -p + \lambda(a' + b' + c') + 2\mu a', \\ p_2 &= -p + \lambda(a' + b' + c') + 2\mu b', \\ p_3 &= -p + \lambda(a' + b' + c') + 2\mu c', \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — постоянные, зависящие от природы и физического состояния жидкости; эти соотношения в наиболее общей форме представляют высказанные выше допущения и согласуются с симметрией. Подставляя эти значения  $p_1, p_2, p_3$  в равенства (1) и (3) § 325 и применяя результаты § 324, находим

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= -p + \lambda(a + b + c) + 2\mu a, \\ p_{yy} &= -p + \lambda(a + b + c) + 2\mu b, \\ p_{zz} &= -p + \lambda(a + b + c) + 2\mu c, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$p_{yz} = \mu f, \quad p_{zx} = \mu g, \quad p_{xy} = \mu h. \quad (3)$$

На основании определения среднего давления  $p$ , введенного в § 325, получаем соотношение

$$3\lambda + 2\mu = 0; \quad (4)$$

принимая это во внимание и подставляя в равенства (2) значения  $a, b, c, f, g, h$  из § 30, приходим к следующим соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= -p - \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ p_{yy} &= -p - \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \\ p_{zz} &= -p - \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} p_{yz} &= \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = p_{zy}, \\ p_{zx} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = p_{xz}, \\ p_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = p_{yx}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Постоянная  $\mu$  называется „коэффициентом вязкости“ или „коэффициентом внутреннего трения“. Физическое значение этого коэффициента можно истолковать, рассматривая так называемое „ламинарное“ движение (§ 30); в этом случае жидкость движется как система параллельных плоскостей, причем скорость всюду имеет одно и то же направление и по величине пропорциональна расстоянию от некоторой неподвижной плоскости системы. Каждый слой жидкости действует при этом на ближайший соседний слой с тангенциальной силой, противодействующей относительному движению слоев; численное

значение этой силы, отнесенное к единице площади, равно коэффициенту  $\mu$ , умноженному на градиент скорости в направлении, перпендикулярном к плоскостям. Выражая это формулами и полагая  $u = ay$ ,  $v = 0$ ,  $w = 0$ , получим

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p, \quad p_{yz} = 0, \quad p_{zx} = 0, \quad p_{xy} = \mu a.$$

Если  $[M]$ ,  $[L]$ ,  $[T]$  обозначают единицы массы, длины и времени, то напряжение имеет размерность  $[ML^{-1}T^{-2}]$ , а скорости деформации ( $a, b, c, \dots$ ) размерность  $[T^{-1}]$ , так что размерность величины  $\mu$  есть  $[ML^{-1}T^{-1}]$ .

Напряжения в различных жидкостях, движущихся одинаковым образом, относятся как соответствующие значения  $\mu$ ; но если мы хотим сравнить влияние этих напряжений на видоизменение существующего движения, то мы должны ввести в рассмотрение отношение этих напряжений к инерции жидкости. С этой точки зрения характерной величиной будет отношение  $\frac{\mu}{\rho}$ ; поэтому принято эту величину обозначать особым символом, буквою  $\nu$ , и, следуя Максвеллу, называть „кинематическим коэффициентом“ вязкости. Размерность величины  $\nu$  есть  $[L^2T^{-1}]$ <sup>1)</sup>.

Следует заметить, что сделанное выше предположение, согласно которому напряжения  $p_{xx}$ ,  $p_{xy}, \dots$  суть *линейные* функции скоростей деформации  $a, b, c, \dots$ , имеет чисто пробный характер, и что хотя а priori имеется большая вероятность того, что эта гипотеза в случае бесконечно малых движений на самом деле соответствует действительности, все же у нас далеко нет уверенности в том, что она приложима вообще.

Рейнольдс<sup>2)</sup>, однако, обратил внимание на то, что основанные на этом предположении уравнения подверглись очень строгой проверке в опытах, поставленных Пуазейлем и другими, ссылка на которые следует ниже (§ 331). Если учесть достаточно широкий диапазон изменения скоростей деформации в указанных опытах, то едва ли можно сомневаться в том, что эти уравнения вполне представляют законы вязкости. Для случая газов дополнительные основания законности этих уравнений можно найти в исследованиях Максвелла<sup>3)</sup> по кинетической теории газов.

Практическое определение значения величины  $\mu$  (или  $\nu$ ) представляет некоторым трудностям. Не входя в детали экспериментальных методов, приведем

<sup>1)</sup> В случае сжимаемых жидкостей при некотором особом подходе к вопросу может войти второй коэффициент вязкости, именно в выражение для среднего давления  $p$ , зависящего от физического состояния и скорости кубического расширения; см. §§ 325, 358.

<sup>2)</sup> Reynolds, On the Theory of Lubrication, etc., Phil. Trans., CLXXVII, 157 (1886) (Papers, II, 228).

<sup>3)</sup> Maxwell, On the Dynamical Theory of Gases, Phil. Trans. CLVII, 19 (1866) (Papers, II, 26).

здесь некоторые из наиболее надежных результатов. Приведенные Гельмгольцем <sup>1)</sup> наблюдения Пуазейля дают для воды значение

$$\mu = \frac{0,01779}{1 + 0,03368 \theta + 0,00022099 \theta^2},$$

выраженное в системе CGS, где  $\theta$  — температура в градусах Цельсия.

Для всех до сих пор исследованных несжимаемых жидкостей вязкость очень быстро убывает при возрастании температуры; при  $10^\circ \text{C}$ , например,  $\mu_{10} = 0,0131$ . Результаты более новых опытов хорошо согласуются с приведенной выше формулой <sup>2)</sup>. Для ртути Кох <sup>3)</sup> нашел  $\mu_0 = 0,01697$  и  $\mu_{10} = 0,01633$ .

Мы должны прибавить к этому, что для некоторых несжимаемых жидкостей, в особенности для минеральных масел, значение  $\mu$  значительно увеличивается при давлении порядка несколько сот атмосфер <sup>4)</sup>.

Для газов было найдено, что при изменении давления в очень широких границах значение  $\mu$  не изменяется заметным образом, при возрастании же температуры оно несколько *растет*. Для случая воздуха эмпирическая формула <sup>5)</sup> имеет вид

$$\mu = 0,0001702 (1 + 0,00329 \theta + 0,0000070 \theta^2).$$

Эта формула при атмосферном давлении, если положить  $\rho = 0,00129$ , дает

$$\nu_0 = 0,132.$$

Значение  $\nu$  изменяется обратно пропорционально давлению.

§ 327. Нам нужно теперь установить условия, которые должны удовлетворяться на границах.

На свободной поверхности или на поверхности раздела двух различных жидкостей три составляющие напряжения должны быть непрерывны вдоль поверхности <sup>6)</sup>. Получающиеся отсюда условия можно легко вывести при помощи формул (4) § 325.

Вопрос значительно усложняется при выяснении положения вещей на поверхности соприкосновения несжимаемой жидкости и твердого тела. Кажется очень вероятным, что во всех обычных случаях жидкость, находящаяся в непосредственном соприкосновении с твердым телом, не испытывает относительного движения по отношению к этому телу.

Противоположное предположение привело бы к тому, что при скольжении двух жидких частиц одна по другой получалось бы значительно большее сопротивление, чем при скольжении жидкости вдоль твердого тела <sup>7)</sup>.

<sup>1)</sup> Helmholtz, Über Reibung tropfbarer Flüssigkeiten, Wiener Sitzungsber., XL, 607 (1860) (Wiss. Abh., I, 218).

<sup>2)</sup> Hosking, Phil. Mag. (6), XVII, 502 (1909).

<sup>3)</sup> Koch, Wied. Ann. XIV (1881).

<sup>4)</sup> Hyde, Proc. Roy. Soc. A, XCVII, 240 (1919).

<sup>5)</sup> Grindley and Gibson, Proc. Roy. Soc. A, LXXX, 114 (1907).

<sup>6)</sup> Если принимается в расчет капиллярность, то это заключение должно, очевидно, несколько видоизмениться.

<sup>7)</sup> Stokes, On the Theories of the Internal Friction of Fluids In Motion, etc., Camb. Trans., VIII, 287 (1845) (Papers, I, 75).

Однако, если мы пожелаем бы считать на время этот вопрос открытым, то наиболее естественным было бы принять, что скольжение вызывает тангенциальную силу, которая пропорциональна относительной скорости. Если мы рассмотрим движение маленькой жидкой пленки, толщина которой бесконечно мала в сравнении с ее поперечными размерами и которая находится в соприкосновении с твердым телом, то очевидно, что касательное усилие, приложенное к ее внутренней поверхности, должно в конце концов уравновешиваться силой, с которой твердое тело действует на ее внешнюю поверхность. Первая сила может быть вычислена при помощи формул (4) § 325; вторая же будет направлена в сторону, противоположную относительной скорости, и будет пропорциональна относительной скорости. Постоянная (назовем ее  $\beta$ ), которая дает отношение тангенциальной силы к относительной скорости, может быть названа „коэффициентом трения скольжения“.

§ 328. Уравнения движения вязкой жидкости можно получить, рассматривая, как в § 6, прямоугольный параллелепипед  $\delta x \delta y \delta z$ , центр которого находится в точке  $(x, y, z)$ . Находя, например, результирующую в направлении оси  $x$ , будем иметь, что разность нормальных напряжений, действующих на площадки  $yz$ , равна  $\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}\right) \delta x \delta y \delta z$ . Касательные же напряжения на обе площадки  $zx$  дают составляющую  $\left(\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}\right) \delta y \delta z \delta x$ ; аналогично обе площадки  $xu$  дают составляющую  $\frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \delta z \delta x \delta y$ . Поэтому в обычных обозначениях будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= \rho X + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z}, \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= \rho Y + \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z}, \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= \rho Z + \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Подставляя значения  $p_{xx}$ ,  $p_{xy}$ , ... из равенств (5), (6) § 326, находим

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u, \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v, \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta w, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3)$$

и  $\Delta$  имеет обычное значение.

В случае несжимаемой жидкости эти уравнения приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u, \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v, \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta w. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Эти уравнения движения в первый раз были получены Навье<sup>1)</sup> и Пуассоном<sup>2)</sup> на основании различных соображений о взаимодействии между молекулами жидкости. Способ, примененный выше, свободный от предположений подобного рода, повидимому, в существенных чертах принадлежит Сен-Венану<sup>3)</sup> и Стоксу<sup>4)</sup>.

Уравнения (4) допускают интересное истолкование. Первое из них может быть написано в виде

$$\frac{Du}{Dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u. \quad (5)$$

Первые два члена в правой части представляют изменение скорости  $u$  в единицу времени, происходящее вследствие действия внешних сил и распределения давления в данный момент, и имеют такой же вид, как и в случае идеальной жидкости. Последний же член, зависящий от вязкости, представляет, таким образом, дополнительное изменение скорости, которое следует тому же закону, какой имеет место для температуры в теории теплопроводности или для плотности в теории диффузии. Это изменение скорости в самом деле пропорционально (положительной или отрицательной) разности между средним значением величины  $u$  на поверхности небольшой сферы, окружающей точку  $(x, y, z)$ , и значением  $u$  в этой точке<sup>5)</sup>.

В связи с термической аналогией интересно отметить, что значение величины  $\nu$  для воды имеет такой же порядок, как значение (0,01249), найденное Эвереттом для теплопроводности гринвичского гравия.

Если силы  $X, Y, Z$  имеют потенциал, то уравнения (4) можно написать в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - v \zeta + w \eta &= - \frac{\partial \chi'}{\partial x} + \nu \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - w \xi + u \zeta &= - \frac{\partial \chi'}{\partial y} + \nu \Delta v, \\ \frac{\partial w}{\partial t} - u \eta + v \xi &= - \frac{\partial \chi'}{\partial z} + \nu \Delta w, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где

$$\chi' = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} q^2 + \Omega; \quad (7)$$

<sup>1)</sup> Navier, Mémoire sur les Loix du Mouvement des Fluides, Mém. de l'Acad. des Sciences, VI, 389 (1822).

<sup>2)</sup> Poisson, Mémoire sur les Équations générales de l'Équilibre et du Mouvement des Corps solides élastiques et des Fluides, Journ. de l'École Polytechn., XIII, 1 (1829).

<sup>3)</sup> Saint-Venant, Comptes Rendus, XVII, 1240 (1843).

<sup>4)</sup> Stokes, On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion etc., Camb. Trans., VIII, 287 (1845) (Papers, I, 75).

<sup>5)</sup> Maxwell, On the Mathematical Classification of Physical Quantities, Proc. Lond. Math. Soc. (1), III, 224 (1871) (Papers, II, 257); Electricity and Magnetism, § 26.

$q$  обозначает здесь абсолютное значение скорости, а  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  суть составляющие вихря. Исключая  $\chi'$  перекрестным дифференцированием, находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{D\xi}{Dt} &= \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z} + \nu \Delta \xi, \\ \frac{D\eta}{Dt} &= \xi \frac{\partial v}{\partial x} + \eta \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta \frac{\partial v}{\partial z} + \nu \Delta \eta, \\ \frac{D\zeta}{Dt} &= \xi \frac{\partial w}{\partial x} + \eta \frac{\partial w}{\partial y} + \zeta \frac{\partial w}{\partial z} + \nu \Delta \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Первые три члена в правых частях этих уравнений дают, как в (4) § 146, скорости, с которыми изменяются значения  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  для данной частицы, когда вихревые линии движутся вместе с жидкостью и напряжения вихрей остаются постоянными. Добавочное изменение этих трех величин, происходящее вследствие вязкости, определяется последними членами и следует закону теплопроводности. Из этой аналогии следует, что вихревое движение не может возникнуть внутри вязкой жидкости; оно должно распространяться от граничной поверхности внутрь жидкости.

§ 328а. Для плоского случая уравнения (6) предшествующего параграфа приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - v\zeta &= -\frac{\partial \chi'}{\partial x} - \nu \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\zeta &= -\frac{\partial \chi'}{\partial y} + \nu \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Отсюда или из (8) предыдущего параграфа получается

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \nu \Delta_1 \zeta; \quad (2)$$

здесь аналогия с теплопроводностью вполне очевидна.

Из уравнений (1) можно установить простое выражение для скорости изменения циркуляции по фиксированному контуру. Таким образом, будем иметь

$$\frac{d}{dt} \int (u dx + v dy) = \int (lu + mv) \xi ds + \nu \int \frac{\partial \zeta}{\partial n} ds, \quad (3)$$

где  $(l, m)$  суть направляющие косинусы внутренней нормали. Первое слагаемое в правой части представляет эффект переноса вихрей в область, ограниченную данным контуром; второе слагаемое представляет эффект от вязкости.

Например, в случае движения по концентрическим окружностям будем иметь

$$r \frac{\partial q}{\partial t} = \nu r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial q}{\partial r} + \frac{q}{r} \right), \quad (4)$$

или

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \nu \left( \frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial r} - \frac{q}{r^2} \right). \quad (5)$$

Иногда бывает удобно иметь под рукой основные формулы в полярных координатах на плоскости. Если мы обозначим через  $u$ ,  $v$  радиальную компоненту скорости и компоненту по перпендикуляру к радиусу, то кинематические формулы, как это указано в дополнении к главе VIII, будут иметь вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} = 0, \quad (6)$$

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{\partial u}{r \partial \theta}. \quad (7)$$



Выражения для составляющих ускорения приведены на стр. 199. Поэтому уравнения движения преобразуются в следующие:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{r \partial \theta} - \frac{v^2}{r} &= R - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - v \frac{\partial \zeta}{r \partial \theta}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{uv}{r} &= \Theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta} + v \frac{\partial \zeta}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Здесь  $R$ ,  $\Theta$  обозначают радиальную и трансверсальную составляющие внешней силы.

Чтобы найти составляющие напряжения, мы обозначим через  $(u_1, v_1)$  составляющие скорости, отнесенные к неподвижным декартовым осям; тогда будем иметь

$$u_1 = u \cos \theta - v \sin \theta, \quad v_1 = u \sin \theta + v \cos \theta, \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \sin \theta \frac{\partial}{r \partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial y_1} &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial}{r \partial \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Если мы после дифференцирования примем ось  $x$  совпадающей с мгновенным положением радиуса-вектора, то, полагая в формулах (9), (10)  $\theta = 0$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial y_1} = \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r}, \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial y_1} &= \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{r \partial \theta} - \frac{v}{r}. \end{aligned}$$

Следовательно, напряжения из (5) § 326 представятся в виде

$$\left. \begin{aligned} p_{rr} &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r}, \quad p_{\theta\theta} = -p + 2\mu \left( \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r} \right), \\ p_{r\theta} &= \mu \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{r \partial \theta} - \frac{v}{r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Определяя результирующие напряжений в направлениях  $r$  и  $\theta$  по граням элемента  $r \delta\theta \delta r$ , мы воспроизведем уравнения (8).

**§ 329.** Чтобы найти скорость рассеяния энергии, происходящего вследствие вязкости, рассмотрим прежде всего часть жидкости, занимающую прямоугольный элемент  $\delta x \delta y \delta z$  с центром в точке  $(x, y, z)$ . Если мы вычислим работу, которая производится в единицу времени напряжениями, действующими на пары противоположных граней элемента, то получим

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} (p_{xx}u + p_{xy}v + p_{xz}w) + \frac{\partial}{\partial y} (p_{yx}u + p_{yy}v + p_{yz}w) + \frac{\partial}{\partial z} (p_{zx}u + p_{zy}v + p_{zz}w) \right\} \delta x \delta y \delta z. \quad (1)$$

Члены

$$\left\{ \left( \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right) u + \left( \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right) v + \left( \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) w \right\} \delta x \delta y \delta z \quad (2)$$

выражают согласно формулам (1) § 328 работу, которую производят в единицу времени напряжения, действующие на грани элемента при движении его как твердой частицы; эта работа идет на увеличение кинетической энергии элемента и на возмещение той работы, которая совершается против действия внешних сил  $X, Y, Z$ . Остальные члены выражают работу в единицу времени, производимую при изменении объема и формы элемента. Их можно написать в виде

$$(p_{xx}a + p_{yy}b + p_{zz}c + p_{yz}f + p_{zx}g + p_{xy}h) \delta x \delta y \delta z, \quad (3)$$

где  $a, b, c, f, g, h$  имеют те же значения, как в §§ 30 и 324. Подставляя значения напряжений из формул (2) и (3) § 326, получим

$$-p(a + b + c) \delta x \delta y \delta z + \left\{ -\frac{2}{3} \mu (a + b + c)^2 + \right. \\ \left. + \mu (2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + f^2 + g^2 + h^2) \right\} \delta x \delta y \delta z. \quad (4)$$

Достаточно будет пока рассмотреть тот случай, при котором не происходит изменения плотности, когда, следовательно,

$$a + b + c = 0. \quad (5)$$

Выражение (4) приводится тогда к виду

$$\mu (2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + f^2 + g^2 + h^2) \delta x \delta y \delta z \quad (6)$$

и представляет вместе с тем скорость рассеяния механической энергии. На основании законов, установленных Джоулем, энергия, которая кажется при этом потерянной, на самом деле должна переходить в теплоту, развивающуюся внутри элемента.

Если мы проинтегрируем по всему объему жидкости, то найдем для полного рассеяния энергии в единицу времени значение

$$2F = \int \int \int \Phi \, dx \, dy \, dz, \quad (7)$$

где

$$\Phi = \mu \left\{ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\}. \quad (8) \text{ } ^1$$

Вычитая отсюда выражение

$$2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2,$$

которое при сделанном выше допущении равно нулю, получим

$$\Phi = \mu \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} - \\ - 4\mu \left( \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (9)$$

<sup>1</sup> Stokes. On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums, Camb. Trans., IX (8) (1851) (Papers, III, 1).

Пронтегрируем это выражение по области, на границах которой величины  $u, v, w$  повсюду исчезают, как это имеет место для жидкости, заполняющей замкнутый сосуд согласно гипотезе прилипания; тогда скольжения нет, члены во второй строке (после интегрирования по частям) исчезают, и мы получаем

$$2F = \iiint \Phi \, dx \, dy \, dz = \mu \iiint (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \, dx \, dy \, dz. \quad (10)^1$$

Более непосредственное доказательство этой формулы будем иметь, если заметим, что при принятых предположениях уравнение энергии (5) § 10 заменяется следующим:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (T + V) &= \mu \iiint (u \Delta u + v \Delta v + w \Delta w) \, dx \, dy \, dz = \\ &= \mu \iiint \left\{ u \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + v \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) + w \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right\} \, dx \, dy \, dz = \\ &= -\mu \iiint (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \, dx \, dy \, dz. \end{aligned} \quad (11)$$

В общем случае, когда на граничные условия не накладываются ограничения, формула (\*) приводит к выражению

$$\begin{aligned} 2F &= \mu \iiint (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \, dx \, dy \, dz - \\ &\quad - \mu \iint \frac{\partial q^2}{\partial n} \, dS + 2\mu \iint \begin{vmatrix} l, m, n \\ u, v, w \\ \xi, \eta, \zeta \end{vmatrix} \, dS; \end{aligned} \quad (12)$$

$dn$  в первом поверхностном интеграле обозначает элемент нормали, а  $l, m, n$  во втором интеграле суть направляющие косинусы нормали; в обоих случаях нормаль направлена от поверхностного элемента  $dS$  внутрь.

Если рассматриваемое движение свободно от вихрей, то эта формула приводится к виду

$$2F = -\mu \iint \frac{\partial q^2}{\partial n} \, dS. \quad (13)$$

Для частного случая сферической поверхности это выражение следует непосредственно из формулы (5) § 44.

Из формулы (6) следует, что величина  $F$  не может обращаться в нуль если равенства

$$a = b = c = 0 \quad \text{и} \quad f = g = h = 0$$

не имеют места для каждой точки жидкости. Отсюда, принимая во внимание § 30, следует, что движение жидкости без рассеяния энергии вследствие вязкости возможно только в том случае, когда нигде в жидкости не происходит удлинение или сокращение линейных элементов. Другими словами, движение жидкости должно состоять из поступательного и вращательного движения всей массы как целого, как это имеет место в случае твердого тела.

<sup>1)</sup> B o b y l e f f, Einige Betrachtungen über die Gleichungen der Hydrodynamik, Math. Ann., VI, 72 (1873); Forsyth, On the Motion of a Viscous Incompressible Fluid, Mess. of Math., IX (1880).