

### Волны с конечной амплитудой.

§ 250. Положенное в основу исследований § 227 ограничение „бесконечно малыми“ движениями требует, чтобы отношение  $\frac{a}{\lambda}$  наибольшего возвышения к длине волны было мало. Определение вида волн, удовлетворяющих условиям равномерного распространения без изменения формы, если отбросить указанное ограничение, составляет содержание классической работы Стокса<sup>1)</sup> и многих других более поздних исследований.

Эту проблему наиболее удобно рассматривать как задачу установившегося движения. Рэлей<sup>2)</sup> указал, что если пренебречь малыми величинами порядка  $\frac{a^3}{\lambda^3}$ , то выражения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varphi}{c} &= -x + \beta e^{ky} \sin kx, \\ \frac{\psi}{c} &= -y + \beta e^{ky} \cos kx \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

суть решения для случая бесконечной глубины.

Пользуясь методом последовательных приближений, найдем, что уравнение профиля волны ( $\psi = 0$ ) имеет вид

$$\begin{aligned} y &= \beta e^{ky} \cos kx = \beta \left( 1 + ky + \frac{1}{2} k^2 y^2 + \dots \right) \cos kx = \\ &= \frac{1}{2} k \beta^2 + \beta \left( 1 + \frac{9}{8} k^2 \beta^2 \right) \cos kx + \frac{1}{2} k \beta^2 \cos 2kx + \\ &\quad + \frac{3}{8} k^2 \beta^3 \cos 3kx + \dots, \end{aligned} \quad (2)$$

или, положив

$$\begin{aligned} \beta \left( 1 + \frac{9}{8} k^2 \beta^2 \right) &= a, \\ y - \frac{1}{2} k a^2 &= a \cos kx + \frac{1}{2} k a^2 \cos 2kx + \frac{3}{8} k^2 a^3 \cos 3kx + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Выписанное здесь выражение совпадает с уравнением трохойды, для которой длина окружности катящегося круга равна  $\frac{2\pi}{k}$  или  $\lambda$ , а длина плеча вычерчивающей точки равна  $a$ .

<sup>1)</sup> Stokes, On the Theory of Oscillatory Waves, Camb. Trans., VIII (1847) [Papers, I, 197]. Его метод сводится к последовательному приближению, которое основывается на точных уравнениях § 9 и 20. В дополнительной работе, относящейся к 1880 г., координаты  $x$  и  $y$  рассматриваются как функции независимых переменных  $\varphi$ ,  $\psi$  [Papers, I, 314].

<sup>2)</sup> Rayleigh, см. примечание на стр. 328. Метод был впоследствии настолько разработан, что он обнимает все результаты Стокса, Phil. Mag. (6) XXI, 183 [Papers, VI, II].

Мы должны еще показать, что условие постоянства давления вдоль этой линии тока может быть выполнено при подходящем подборе значения  $c$ . Из (1), не прибегая к приближениям, получаем

$$\frac{p}{\rho} = \text{const.} - gy - \frac{1}{2} c^2 \{ 1 - 2k\beta e^{ky} \cos kx + k^2 \beta^2 e^{2ky} \}; \quad (4)$$

и, следовательно, для точек на линии  $y = \beta e^{ky} \cos kx$

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= \text{const.} + (kc^2 - g)y - \frac{1}{2} k^2 c^2 \beta^2 e^{2ky} = \\ &= \text{const.} + (kc^2 - g - k^2 c^2 \beta^2) y + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом условие для свободной поверхности будет выполняться при данной степени приближения, если

$$c^2 = \frac{g}{k} + k^2 c^2 \beta^2 = \frac{g}{k} (1 + k^2 a^2). \quad (6)$$

Это уравнение определяет скорость прогрессивных волн неизменяемого вида и показывает, что эта скорость немного возрастает с возрастанием амплитуды  $a$ .

Фиг. 61 показывает профиль волны, даваемой формулой (1) для  $ka = 1/2$  или  $\frac{a}{\lambda} = 0,0796$ <sup>1)</sup>.

Вид волны, приближающийся к трохонде, имеет очертание, более острое на гребнях и более пологое во впадинах, чем это было в случае просто гармонических волн с бесконечно малой амплитудой, исследованных в § 229, и эти особенности делаются еще более заметными, если амплитуда будет расти. Если бы вид волны не только приближенно, а в точности являлся бы трохондой, то этот предельный вид волны имел бы в гребнях заострение, как и в случае волн Герстнера, о которых мы сейчас будем говорить.



Фиг. 61.

В рассматриваемой задаче, в которой движение предполагается безвихревым, Стокс<sup>2)</sup> показал очень простым способом, что предельный вид волны имеет заострение с углом в  $120^\circ$ . Задачу можно все еще рассматривать как задачу об установившемся движении; движение же вблизи угла определяется формулами § 63; если мы, следовательно, введем полярные координаты  $r, \theta$ , начало координат возьмем на гребне и полярную ось направим вертикально вниз, то мы будем иметь

$$\psi = Cr^m \cos m\theta \quad (7)$$

<sup>1)</sup> Приближение в (3) едва ли будет удовлетворительным для такой большой величины  $ka$ ; см. уравнение (17). Фигура 58, однако, может служить для того, чтобы дать представление об общем виде профиля волны.

<sup>2)</sup> Stokes, Papers, I, 227 (1880).

с условием, что  $\psi = 0$  для  $\theta \pm \alpha$ , так что  $m\alpha = 1/2\pi$ . Эта формула дает

$$q = mCr^{m-1}, \quad (8)$$

где  $q$  обозначает абсолютную величину скорости жидкости. Но так как скорость на гребнях обращается в нуль, то ее значение в соседней точке на свободной поверхности определяется, как в (2) § 24, из уравнения

$$q^2 = 2gr \cos \alpha. \quad (9)$$

Если сравним (8) и (9), то увидим, что  $m = 3/2$  и, следовательно,  $\alpha = 1/3\pi$ <sup>1)</sup>.

Для волн, распространяющихся на спокойной воде, частицы на гребнях, если последние имеют предельную форму, движутся с такой же скоростью вперед, как сама волна.

Другое интересное свойство этих волн установившейся формы состоит в том, что они имеют по отношению к невозмущенной воде некоторое количество движения в направлении распространения волн. Количество движения жидкости, находящейся между свободной поверхностью и глубиной  $h$  (ниже уровня начала), причем  $h$  предполагается большим по сравнению с  $\lambda$ , отнесенное к длине волны, будет

$$-e \iint \frac{\partial \psi}{\partial y} dx dy = e c h \lambda, \quad (10)$$

так как по предположению на поверхности  $\psi = 0$  и согласно (1) на большой глубине  $h$   $\psi = ch$ . При отсутствии волн уравнение свободной поверхности согласно (3) имело бы вид

$$y = \frac{1}{2} ka^2$$

и соответствующее значение количества движения равнялось бы

$$ec \left( h + \frac{1}{2} ka^2 \right) \lambda. \quad (11)$$

Разность этих значений, равная

$$\pi qa^2 c, \quad (12)$$

есть количество движения на длину волны для системы прогрессивных волн установившейся формы, которые движутся на воде, покоящейся на большой глубине.

Чтобы найти вертикальное распределение этого количества движения, заметим, что уравнение линии тока  $\psi = ch'$  можно получить

<sup>1)</sup> Профиль волны был исследован и вычерчен *Mitchell*, *The Highest Waves in Water*, *Phil. Mag.* (5), XXXVI, 430 (1893). Он находит, что наибольшая высота равна  $0,142\lambda$  и что скорость волн больше, чем соответствующая скорость при бесконечно малой высоте в отношении 1,2 к 1; см. также *Wilton*, *Phil. Mag.* (6), XXVI, 1053 (1913).

из (2), полагая  $y + h'$  вместо  $y$  и  $\beta e^{-kh'}$  вместо  $\beta$ . Средний уровень этой линии тока определяется, следовательно, уравнением

$$y = -h' + \frac{1}{2} k\beta^2 e^{-2kh'}. \quad (13)$$

Поэтому в случае невозмущенного течения количество движения, отнесенное к длине волны слоя, заключенного между профилем поверхности и соответствующей линией тока, было бы равно

$$\rho c \lambda \left\{ h' + \frac{1}{2} k\beta^2 (1 - e^{-2kh'}) \right\}. \quad (14)$$

Так как действительное количество движения равно  $\rho c h' \lambda$ , то для волн, распространяющихся на спокойной воде, количество движения этого самого слоя равно

$$\rho \rho a^2 c (1 - e^{-2kh'}). \quad (15)$$

Мы видим, следовательно, что движение отдельных частиц при этих прогрессивных волнах установившейся формы есть не только чистое колебательное движение, но что еще имеет место медленное, но постоянное движение всех частиц вперед в направлении распространения волн<sup>1)</sup>. Дифференцируя (15) по  $h'$  и разделив на  $\rho \lambda$ , мы получим приближенно величину этого потока в единицу времени на глубине  $h'$ ; она равна

$$ka^2 c e^{-2kh'} \quad (16)$$

и убывает очень быстро от свободной поверхности вниз.

Дальнейшее приближение Стокса, которое было подтверждено независимыми вычислениями Рэля и других, дает для профиля волны следующее уравнение:

$$y = \text{const.} + a \cos kx - \left( \frac{1}{2} ka^2 + \frac{17}{24} k^2 a^4 \right) \cos 2kx + \\ + \frac{3}{8} k^2 a^2 \cos 3kx - \frac{1}{3} k^3 a^4 \cos 4kx + \dots, \quad (17)$$

а для скорости волны

$$c^2 = \frac{g}{k} \left( 1 + k^2 a^2 + \frac{5}{4} k^4 a^4 + \dots \right). \quad (18)$$

Вопрос о сходимости ряда, который образуется при продолжении приближения из коэффициентов при косинусах кратных дуг, а также и результирующего косинусоидального ряда, был поставлен Бурнсайдом<sup>2)</sup>, который даже сомневался в существовании волн строго установившейся формы. Это обстоятельство побудило Рэля<sup>3)</sup> предпринять детальное исследование, которое показывает, что усло-

<sup>1)</sup> Stokes, см. примечание на стр. 521. Другое очень простое доказательство этой теоремы было дано Рэлем, см. примечание на стр. 328.

<sup>2)</sup> Burnside, Proc. Lond. Math. Soc. (2), XV, 26 (1916).

<sup>3)</sup> Rayleigh, Phil. Mag. (6), XXXIII, 381 (1917) [Papers, VI, 478]. Укажем также на Havelock, Proc. Roy. Soc. A, XCV, 38 (1918).

вне равномерности давления на свободной поверхности для достаточно малых значений  $ka$  может быть выполнено вплоть до очень высокой степени точности. Отсюда он заключает, что существование установившегося типа волн, вплоть до высоких волн Митчела, следует рассматривать практически, если не теоретически, как вполне достоверное. Наконец, существование указанных волн было строго установлено исследованием проф. Леви-Чивита<sup>1)</sup>, который положил конец историческому спору.

Некоторые простые свойства этих установившихся волн можно легко установить на основании излагаемых вначале принципов<sup>2)</sup>. Задача сводится к задаче об установившемся движении. Начало выбирается на средней уровенной поверхности, например, под гребнем. Длина волны обозначается через  $\lambda$ . Обозначая возвышение поверхности над средним уровнем через  $\eta$ , будем иметь

$$\int_0^{\lambda} \eta dx = 0. \quad (19)$$

Таким образом, если  $q$  есть скорость на свободной поверхности, а  $q_0$  есть та же скорость на среднем уровне, то имеем

$$q^2 = q_0^2 - 2g\eta,$$

и следовательно,

$$\int_0^{\lambda} q^2 dx = q_0^2 \lambda; \quad (20)$$

Далее, рассмотрим массу жидкости, находящейся между вертикальными стенками, проходящими через два последовательных гребня, и ограниченной снизу плоскостью  $y = -h_1$ , где скорость почти горизонтальна и равна  $c$ . Легко видеть, что полное вертикальное ускорение массы есть нуль, так как нет переноса через границы количества движения по вертикали. А тогда, если  $p$  есть давление на свободной поверхности, а  $p_1$  — давление на глубине  $h_1$ , то будем иметь

$$\int_0^{\lambda} (p_1 - p) dx = g \int_0^{\lambda} (h_1 + \eta) dx = g h_1 \lambda. \quad (21)$$

А сравнивая давления по одной и той же вертикали, получим

$$p_1 - p = g(h_1 + \eta) + \frac{1}{2}(q^2 - c^2),$$

и, следовательно,

$$\int_0^{\lambda} q^2 dx = c^2 \lambda. \quad (22)$$

Полученный результат мы можем выразить словами так: среднее от квадрата скорости на поверхности, отнесенное к одинаковым приращением  $x$ , равно  $c^2$ . Из (20) также следует, что  $q_0 = c$ , т. е. скорость в точках пересечения профиля волны со средним уровнем равна  $c$ .

<sup>1)</sup> Levi-Civita, Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'amplitude finie, Math. Ann., XCIII, 264 (1925). Распространение этого метода на волны в канале конечной глубины было сделано Struik, Math. Ann., XCV, 595 (1926).

<sup>2)</sup> Levi-Civita, см. выше.

§ 251. Система *точных* уравнений, которые дают возможную форму волнового движения для бесконечной глубины жидкости, была установлена еще очень давно, именно в 1802 г. Герстнером <sup>1)</sup>, а позднее независимо Ранкином <sup>2)</sup>. Физическое значение этих результатов, однако, несколько уменьшается в виду того обстоятельства, что движение при этих волнах является вихревым.

Если взять ось  $x$  горизонтальной, а ось  $y$  провести вертикально вверх, то формулы для рассматриваемой задачи могут быть написаны в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= a + \frac{1}{k} e^{kb} \sin k(a + ct), \\ y &= b - \frac{1}{k} e^{kb} \cos k(a + ct), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где обозначения введены в согласии с методом Лагранжа (§ 16), т. е.  $a$ ,  $b$  обозначают два параметра, служащие для определения самой частицы, а  $x$  и  $y$  суть координаты этой частицы в момент  $t$ . Постоянная  $k$  определяет длину волны, а  $c$  — скорость волн, которые распространяются в направлении отрицательной оси  $x$ .

Чтобы проверить это решение и определить значение  $c$ , заметим сначала, что

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)} = 1 - e^{2kb}, \quad (2)$$

так что уравнение неразрывности в форме Лагранжа [§ 16 (2)] будет удовлетворяться. Далее, подставляя из (1) в уравнения движения (§ 13), найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{p}{\rho} + gy \right) &= kc^2 e^{kb} \sin k(a + ct), \\ \frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{p}{\rho} + gy \right) &= -kc^2 e^{kb} \cos k(a + ct) + kc^2 e^{2kb}; \end{aligned} \quad (3)$$

и отсюда

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= \text{const.} - g \left\{ b - \frac{1}{k} e^{kb} \cos k(a + ct) \right\} - \\ &\quad - c^2 e^{kb} \cos k(a + ct) + \frac{1}{2} c^2 e^{2kb}. \end{aligned} \quad (4)$$

Для частицы на свободной поверхности давление должно быть постоянным; это требует

$$c^2 = \frac{g}{k}, \quad (5)$$

как в § 229. Отсюда получается

$$\frac{p}{\rho} = \text{const.} - gb + \frac{1}{2} c^2 e^{2kb}. \quad (6)$$

<sup>1)</sup> Герстнер был профессором математики в Праге, 1789—1823. Его трактат „Теория волн“ был опубликован в *Abh. d. k. böhm. Ges. d. Wiss.* (1802) [*Gilbert's Annalen der Physik*, XXXII (1809)].

<sup>2)</sup> Rankine, On the Exact Form of Waves near the Surface of Deep Water, *Phil Trans.*, 1863 [Papers, стр. 481].

Согласно (1) траектория произвольной частицы  $(a, b)$ , очевидно, есть окружность с радиусом  $k^{-1}e^{kb}$ .

Мы уже сказали, что движение жидкости при этих волнах будет вихревым. Чтобы это доказать, заметим, что

$$\begin{aligned} u \delta x + v \delta y &= \left( \dot{x} \frac{\partial x}{\partial a} + \dot{y} \frac{\partial y}{\partial a} \right) \delta a + \left( \dot{x} \frac{\partial x}{\partial b} + \dot{y} \frac{\partial y}{\partial b} \right) \delta b = \\ &= \frac{c}{k} \delta \{ e^{kb} \sin k(a + ct) \} + ce^{2kb} \delta a, \end{aligned} \quad (7)$$

а это не является полным дифференциалом.

Циркуляция по контуру параллелограмма, вершины которого совпадают с частицами

$$(a, b), (a + \delta a, b), (a, b + \delta b), (a + \delta a, b + \delta b),$$

будет равна, следовательно,

$$- \frac{\partial}{\partial b} (ce^{2kb} \delta a) \delta b,$$

а величина площади области, ограниченной параллелограммом, равна

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)} \delta a \delta b = (1 - e^{2kb}) \delta a \delta b.$$

Следовательно, модуль вихря  $(\omega)$  элемента  $(a, b)$  будет равен

$$\omega = - \frac{2kce^{2kb}}{1 - e^{2kb}}. \quad (8)$$

Имея наибольшую величину на поверхности, он убывает очень быстро с увеличением глубины. *Направление* же вихря противоположно направлению движения частиц по их круговым траекториям.

Система волн рассматриваемого типа не может быть разрушена или образована из состояния покоя под действием сил вида, предполагаемого в общей теореме § 17, 33. Мы можем, однако, допустить, что жидкость под действием выбранных подходящим образом давлений, распределенных на свободной поверхности жидкости, постепенно приводится в такое состояние, когда течение происходит по горизонтальной прямой как раз со скоростью  $(u')$ , зависящей только от ординаты  $(y')$ <sup>1)</sup>. При этом состоянии будем иметь  $\frac{\partial x'}{\partial a} = 1$ , в то время как  $y'$  будет функцией от  $b$ , и эта функция определяется из условия

$$\frac{\partial(x', y')}{\partial(a, b)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)}, \quad (9)$$

или

$$\frac{\partial y'}{\partial b} = 1 - e^{2kb}. \quad (10)$$

<sup>1)</sup> Более полное изложение доказательства можно найти у Стокса, *Papers*, I, 222.

Отсюда получается

$$\frac{\partial u'}{\partial b} = \frac{\partial u'}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial b} = -2\omega \frac{\partial y'}{\partial b} = 2kce^{2kb}, \quad (11)$$

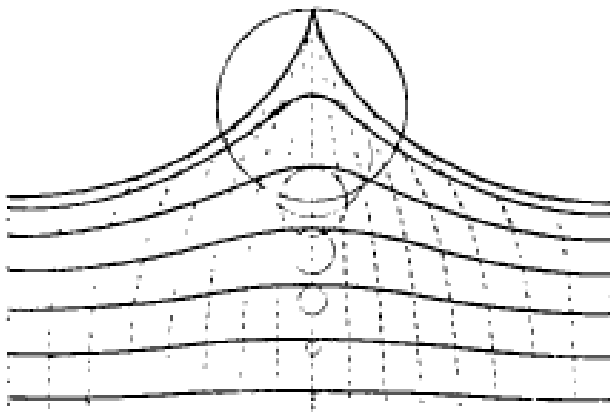
и, следовательно,

$$u' = ce^{2kb}. \quad (12)$$

Таким образом, чтобы образовать волны с помощью обыкновенных сил, нам необходимо в качестве начального состояния иметь горизонтальное движение, имеющее направление, *противоположное* направлению распространения образовавшихся в конце концов волн, и такое, которое очень быстро убывает от свободной поверхности вниз по закону (12);  $b$  при этом есть функция от  $y'$ , определяемая уравнением

$$y' = b - \frac{1}{2} k^{-1} e^{2kb}. \quad (13)$$

Необходимо отметить, что эти вихревые волны, раз они образовались, имеют количество движения, равное нулю.



Фиг. 62.

представляет обыкновенную циклоиду. Пунктирные линии представляют последовательные положения тех частиц, которые находились на вертикали при прохождении через гребень или впадину.

**§ 252.** При своих интересных экспериментальных исследованиях <sup>2)</sup> Скотт Руссель вынужден был обратить большое внимание на специальный тип волн, который он назвал „одиночными волнами“. Это есть волна, состоящая из одного единственного возвышения, высота которого не должна быть обязательно мала сравнительно с глубиной жидкости, и которая, если она соответственным образом воз-

<sup>1)</sup> Рисунок очень похож на тот рисунок, который первоначально дал Герстнер и который затем позднейшими авторами повторялся более или менее похожим на оригинал. Версия исследования Герстнера с включением в одном пункте некоторой поправки была приведена во втором издании этого труда в § 233.

<sup>2)</sup> Scott Russell, Report on Waves. Brit. Ass. Rep., 1844.



ника, может распространяться на значительные расстояния без или с малым изменением формы вдоль канала постоянного сечения. Волны, которые состоят из одной впадины такой же относительной амплитуды, как было найдено, не обладают такой же прочностью и распадаются на ряд более коротких волн.

„Одиночную волну“ Русселя можно рассматривать как предельную форму колебательной волны Стокса установившегося вида, причем, так как длина волны должна быть большой сравнительно с глубиной канала, далеко лежащие друг от друга возвышения практически будут независимы друг от друга. Примененные Стоксом приближенные методы оказываются, однако, непригодными, если длина волны намного превосходит глубину, поэтому дальнейшие исследования об одиночных волнах установившегося вида развивались в другом направлении.

Первые подобные исследования были проведены независимо друг от друга Буссинеском <sup>1)</sup> и Рэлеем <sup>2)</sup>. Последний, рассматривая задачу как задачу об установившемся движении, исходит в основном из формулы

$$\varphi + iy \pm F(x + iy) = e^{iy} \frac{d}{dx} F(x), \quad (1)$$

где  $F(x)$  есть функция действительного переменного.

Этот прием в особенности подходит для случаев, подобных рассматриваемому, в которых одна из линий тока есть прямая. Из (1) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= F - \frac{y^2}{2!} F'' + \frac{y^4}{4!} F^{(4)} - \dots, \\ \psi &= yF' - \frac{y^3}{3!} F''' + \frac{y^5}{5!} F^{(5)} - \dots, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где индексы указывают на дифференцирование по  $x$ . Линия тока  $\psi = 0$  образует здесь дно канала, а на свободной поверхности  $\varphi = -ch$ , где  $h$  обозначает глубину, а  $c$  — постоянная скорость тех частиц жидкости, которые достаточно удалены от волны и вперед и назад.

Условие для постоянства давления вдоль свободной поверхности дает

$$u^2 + v^2 = c^2 - 2g(y - h) \quad (3)$$

или, подставляя из (2),

$$F'^2 - y^2 F' F''' + y^2 F'''^2 + \dots = c^2 - 2g(y - h). \quad (4)$$

Согласно (2), вдоль той же самой поверхности имеем

$$yF' - \frac{y^3}{3!} F''' + \dots = -ch. \quad (5)$$

Исключив  $F$  из уравнений (4) и (5), получим дифференциальное уравнение, определяющее ординату  $y$  свободной поверхности. Если (как мы и примем) функция  $F'(x)$  и ее производные меняются настолько медленно с  $x$ , что они изменяются только на малую долю своих значений, когда  $x$  возрастает на величину порядка глубины  $h$ , то члены в уравнениях (4) и (5) будут постепенно убывать, и указанное исключение можно выполнить с помощью последовательных приближений.

<sup>1)</sup> Boussinesq, *Compte Rendus*, 19 июня 1871.

<sup>2)</sup> Rayleigh, см. примечание на стр. ...

Так, из уравнения (5) будем иметь

$$F' = -\frac{c \cdot h}{y} + \frac{1}{6} y^2 F''' + \dots = -ch \left\{ \frac{1}{y} + \frac{1}{6} y^2 \left( \frac{1}{y} \right)'' + \dots \right\}; \quad (6)$$

и, если мы сохраним только члены порядка выписанных в конце (6), то уравнение (4) примет вид

$$\frac{1}{y^2} - \frac{2}{3} y \left( \frac{1}{y} \right)'' + y^2 \left( \frac{1}{y} \right)''' = \frac{1}{h^2} - \frac{2g(y-h)}{c^2 h^2}$$

или, после некоторого приведения,

$$\frac{1}{y^2} + \frac{2}{3} \frac{y''}{y} - \frac{1}{3} \frac{y'^2}{y^2} = \frac{1}{h^2} - \frac{2g(y-h)}{c^2 h^2}. \quad (7)$$

Если умножим (7) на  $y'$  и проинтегрируем, причем определим произвольную постоянную таким образом, что  $y' = 0$  для  $y = h$ , то получим

$$-\frac{1}{y} + \frac{1}{3} \frac{y'^2}{y} = -\frac{1}{h} + \frac{y-h}{h^2} - \frac{g(y-h)^2}{c^2 h^2},$$

или

$$y'^2 = 3 \frac{(y-h)^2}{h^2} \left( 1 - \frac{gy}{c^2} \right). \quad (8)$$

Отсюда следует, что  $y'$  обращается в нуль только для  $y = h$  и  $y = \frac{c^2}{g}$ , и так как последний множитель должен быть положительным, то  $\frac{c^2}{g}$  есть, очевидно, *максимальное* значение  $y$ . Следовательно, волна необходимо будет состоять только из одного возвышения, и, обозначив через  $a$  наибольшее возвышение над невозмущенным уровнем, будем иметь

$$c^2 = g(h + a); \quad (9)$$

это выражение представляет в точности эмпирическую формулу, которую установил Руссель для скорости волн.

Предельная форма волны должна иметь, как в § 250, острый гребень в  $120^\circ$ , и так как жидкость здесь находится в покое, то будем иметь  $c^2 = 2ga$ . Если бы формула (9) была применима к такому предельному случаю, то получилось бы, что  $a = h$ .

Если для краткости положить

$$\left. \begin{aligned} y - h &= \eta, \\ \frac{h^2(h+a)}{3a} &= b^2, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

то из (8) получится уравнение

$$\eta' = \pm \frac{\eta}{b} \left( 1 - \frac{\eta}{a} \right)^{1/2}, \quad (11)$$

интеграл которого равен

$$\eta = a \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2} \frac{x}{b}, \quad (12)$$

при условии, что начало взято в точности под гребнем.

Определенной „длины волны“ не существует, но можно в качестве приблизительного указания относительно протяжения волны отметить, что возвышение имеет десятую часть своего максимума, если  $\frac{x}{b} = 3,636$ .

Фиг. 63 представляет изображение кривой

$$y = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2} x$$

и дает профиль волны для случая  $a = \frac{1}{2} h$ . Для более низких волн надо уменьшить масштаб для  $x$  и увеличить масштаб для  $y$  соответственно приведенной таблице, в которой для различных значений  $\frac{a}{h}$  дано отношение

$\frac{b}{h}$  и, следовательно, дан горизонтальный масштаб.

$a/h$	$b/h$
0,1	1,915
0,2	1,414
0,3	1,202
0,4	1,080
0,5	1,000
0,6	0,943
0,7	0,900
0,8	0,866
0,9	0,839
1,0	0,816



Фиг. 63.

При рассмотрении изложенного выше исследования можно установить, что приближение сказалось в том, что мы пренебрегаем четвертой степенью отношения  $\frac{h+a}{2b}$ <sup>1)</sup>.

Если сообщить жидкости скорость  $-c$  параллельно оси  $x$ , то получим случай прогрессивной волны на спокойной воде. Легко показать, что тогда для малых значений отношения  $\frac{d}{h}$  траектория каждой частицы есть дуга параболы, ось которой направлена вертикально и вершина которой обращена вверх<sup>2)</sup>.

С первого взгляда может казаться, что эта теория несовместима с результатами § 187, где было доказано, что волна конечной амплитуды, длина которой велика сравнительно с глубиной, должна безусловно испытывать постоянное изменение формы при поступательном ее движении, причем это изменение происходит тем быстрее, чем больше возвышение над невозможным уровнем. Однако там мы предполагали, что длина волны является настолько большой, что вертикальным ускорением можно пренебречь и, следовательно, считать горизонтальную скорость от поверхности до дна почти постоянной (§ 169). Вышеприведенная числовая таблица показывает также, что „одиночная волна“ тем ниже, чем она длиннее. Другими словами: чем более она приближается к характеру „длинной“ волны, в смысле § 169, тем легче предотвращается изменение формы незначительным приспособлением скоростей частиц<sup>3)</sup>.

Движение в крайних частях одиночной волны может быть представлено одной очень простой формулой. Рассматривая прогрессивную волну, распространяющуюся в направлении положительной оси  $x$ , и выбирая начало координат на дне канала, именно в точке на передней стороне волны, положим

$$\varphi = A e^{-m(x-ct)} \cos my. \quad (13)$$

<sup>1)</sup> Теория одиночной волны была изучена Weinstein, *Lincei* (6), III, 463 (1926), методом Леви-Чивита, на который была ссылка в § 250. Он нашел, что формула (9) представляет очень хорошее приближение.

<sup>2)</sup> Boussinesq, см. выше.

<sup>3)</sup> Stokes, On the Highest Wave of Uniform Propagation, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, IV, 361 (1883) [Papers V, 140].

Уравнение  $\Delta\varphi = 0$  при этом удовлетворяется, а условие на поверхности

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (14)$$

также будет удовлетворяться для  $y = h$ , если

$$c^2 = gh \frac{\operatorname{tg} mh}{mh}. \quad (15)$$

Легко видеть, что это приблизительно совпадает с исследованием Рэля, если положить  $m = b^{-1}$ .

Вышеизложенное замечание, которое было сообщено автору покойным сэром Георгом Стоксом <sup>1)</sup>, было вызвано исследованием Кована <sup>2)</sup>, который показал, что формула

$$\frac{\varphi + i\psi}{c} = -(x + iy) + a \operatorname{tg} h \frac{1}{2} m (x + iy) \quad (16)$$

удовлетворяет условиям приближенно до высокой степени точности, если принять

$$c^2 = \frac{g}{m} \operatorname{tg} mh \quad (17)$$

и

$$\left. \begin{aligned} ma &= \frac{2}{3} \sin^2 m \left( h + \frac{2}{3} a \right), \\ a &= a \operatorname{tg} \frac{1}{2} m (h + a), \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где  $a$  обозначает максимальное возвышение над невозмущенным уровнем, а  $\alpha$  есть некоторая вспомогательная постоянная. В более поздней работе была исследована <sup>3)</sup> предельная форма волн, где угол при гребне равен  $120^\circ$ .

Предельное значение отношения  $\frac{a}{h}$  получается равным 0,78; скорость волн в этом случае определяется из равенства  $c^2 = 1,56 gh$ .

**§ 253.** Исследование Рэля и Буссинеска можно слегка видоизменить таким образом, что оно будет давать теорию *колебательных* волн конечной высоты в канале ограниченной глубины <sup>4)</sup>.

Рассматривая задачу как задачу об установившемся движении, получим для количества движения на длину волны ( $\lambda$ ) выражение

$$\iint \rho u \, dx \, dy = -\rho \iint \frac{\partial \psi}{\partial x} \, dx \, dy = -\rho \psi_1 \lambda. \quad (19)$$

<sup>1)</sup> Stokes, Papers, V, 62.

<sup>2)</sup> Mc. Cowan, On the Solitary Wave, Phil. Mag. (5), XXXII, 45 (1891).

<sup>3)</sup> Mc. Cowan, On the Highest Wave of Permanent Type, Phil. Mag. (5), XXXVIII, 351 (1894).

<sup>4)</sup> Korteweg u. De Vries, On the Change of Form of Long Waves advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves, Phil. Mag. (5), XXXIX, 422 (1895). Метод этих авторов слегка отличается от вышеизложенного. Как указывает заглавие, эта работа содержит также исследование о том, как меняется профиль волны в некоторый произвольный момент, если не выполнены условия для постоянства формы.

Другое изменение метода Рэля можно найти у Gwyther, Phil. Mag. (5), L, 213, 308, 349 (1900).

где  $\psi_1$  соответствует свободной поверхности. Если  $h$  обозначает среднюю глубину, то это количество движения может быть положено равным  $\rho c h \lambda$ , где  $c$  означает (по смыслу) среднюю скорость потока. Здесь на поверхности имеем, как и раньше,  $\psi_1 = c h$ . Произвольную постоянную в (3) оставляем пока неопределенной, тогда можем написать

$$u^2 + v^2 = C - 2gy. \quad (20)$$

В таком случае вместо (8) получим

$$y'^2 = \frac{3g^2}{c^2 h^2} (y-l)(h_1-y)(y-h_2), \quad (21)$$

где  $h_1, h_2$  обозначают верхний и нижний пределы  $y$ , и

$$l = \frac{c^2 h^2}{g h_1 h_2}. \quad (22)$$

Отсюда следует, что  $l$  не может быть больше чем  $h_2$ .

Если теперь положить

$$y = h_1 \cos^2 \chi + h_2 \sin^2 \chi, \quad (23)$$

то будем иметь

$$\beta \frac{d\chi}{dx} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \chi}, \quad (24)$$

где

$$\beta = \sqrt{\frac{4h_1 h_2 l}{3(h_1 - l)}}, \quad k^2 = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - l}. \quad (25)$$

Следовательно, если мы возьмем начало для  $x$  на гребне, то будем иметь

$$x = \beta \int_0^\chi \frac{d\chi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \chi}} = \beta F(\chi, k) \quad (26)$$

и

$$y = h_2 + (h_1 - h_2) \operatorname{cn}^2 \frac{x}{\beta} \quad [\operatorname{mod} k]. \quad (27)^1$$

Длина волны определяется формулой

$$\lambda = 2\beta \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \chi}} = 2\beta F_1(k). \quad (28)$$

Далее из (23) и (24) следует

$$\int_0^\lambda y dx = 2\beta \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{h_1 \cos^2 \chi + h_2 \sin^2 \chi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \chi}} d\chi = 2\beta \{F_1(k) + (h_1 - l)E_1(k)\}. \quad (29)$$

Так как это должно быть равно  $h\lambda$ , то имеем

$$(h - l)F_1(k) = (h_1 - l)E_1(k). \quad (30)$$

<sup>1)</sup> Волны, представляемые формулой (27), указанные авторами называются "cnoidal waves". Что касается метода получения более высокой степени приближения, то мы должны отослать читателя к оригиналу.

Уравнения (25), (28), (30) представляют четыре соотношения между шестью величинами  $h_1, h_2, l, k, \lambda, \beta$ . Следовательно, когда две из этих величин будут даны, остальные можно будет определить аналитически. Скорость волн  $c$  определяется тогда из (22)<sup>1)</sup>. Например, форма волн и их скорость могут быть выражены через длину  $\lambda$  и высоту  $h_1$  гребней относительно дна.

Одиночная волна § 252 сюда включается как частный случай. Если положить  $l = h_2$ , то  $k = 1$  и формулы (28) и (30) показывают тогда, что  $\lambda = \infty, h_2 = h$ .

§ 254. Гельмгольц<sup>2)</sup> привел теорию волн установившейся формы в связь с общими принципами динамики.

Если в уравнениях движения „гиростатической“ системы (23) § 141 положить

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= -\frac{\partial V}{\partial q_1}, \\ Q_2 &= -\frac{\partial V}{\partial q_2}, \\ &\dots \dots \dots \\ Q_n &= -\frac{\partial V}{\partial q_n}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $V$  обозначает потенциальную энергию, то в качестве условий установившегося движения при постоянных  $q_1, q_2, \dots, q_n$  получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_1} (V + K) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial q_2} (V + K) &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial}{\partial q_n} (V + K) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь  $K$  есть энергия того движения, которое соответствует произвольно данным значениям координат  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , если эти последние вследствие применения соответственным образом выбранных внешних сил сохраняются постоянными.

Мы предполагаем, что эта энергия выражена через постоянные обобщенные импульсы, соответствующие скрытым координатам  $\chi, \chi', \dots$ , и через явные координаты  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Но она также может быть выражена через скорости  $\dot{\chi}, \dot{\chi}', \dots$  и координаты  $q_1,$

<sup>1)</sup> Если глубина будет конечной, то возникает вопрос, что именно следует понимать под скоростью распространения. То, что называлось в тексте скоростью, есть скорость профиля волны по отношению к центру инерции той массы жидкости, которая заключена между двумя вертикальными плоскостями, отдаленными друг от друга на длину волны. Ср. Stokes, Papers, I, 202.

<sup>2)</sup> Helmholtz, Die Energie der Wogen und des Windes, Berl. Monatsber., 17 июля 1890 [Wiss. Abh., III, 333].

$q_2, \dots, q_n$ ; в этой форме мы обозначим ее через  $T_0$ . Точно так, как в § 142, можно показать, что

$$\frac{\partial T_0}{\partial q_r} = -\frac{\partial K}{\partial q_r},$$

так что условия (2) равносильны условиям

$$\frac{\partial}{\partial q_1}(V - T_0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial q_2}(V - T_0) = 0, \dots, \quad \frac{\partial}{\partial q_n}(V - T_0) = 0. \quad (3)$$

Следовательно, условие для свободного установившегося движения с произвольно заданными постоянными значениями  $q_1, q_2, \dots, q_n$  состоит в том, что соответствующее значение  $V + K$  или  $V - T_0$  должно быть стационарным; ср. (7) § 203.

Далее, если мы напишем в уравнениях § 141  $-\frac{\partial V}{\partial q_r} + Q_r$  вместо  $Q_r$ , так что  $Q_r$  представляет теперь компоненту внешних сил, то найдем, умножая последовательно на  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$  и затем складывая,

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{E} + V + K) = Q_1\dot{q}_1 + Q_2\dot{q}_2 + \dots + Q_n\dot{q}_n. \quad (4)$$

где  $\mathfrak{E}$  есть та часть энергии, которая зависит от скоростей  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ . С помощью такого же рассуждения, как в § 205, мы получим, что если имеются налицо диссипативные силы, которые влияют на координаты  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , но не на скрытые координаты  $\chi, \chi', \dots$ , то условие для „вековой“ устойчивости будет состоять в том, что  $V + K$  должно быть минимумом.

При применении к задаче об установившихся волнах мы достигнем большей ясности, если удалим из рассматриваемого вопроса все бесконечное, принимая, что жидкость циркулирует в кольцеобразном канале постоянного прямоугольного поперечного сечения (стороны которого горизонтальны и вертикальны) очень большого радиуса. За обобщенную скорость  $\chi$ , соответствующую скрытой координате, можно взять поток через единицу ширины канала, а постоянное количество движения циркуляции можно заменить через циклическую константу  $\kappa$ . Координаты  $q_1, q_2, \dots, q_n$  общей теории представятся здесь через значения возвышения поверхности  $\eta$ , которая рассматривается как функция пространственной координаты продольного направления  $x$ . Соответствующие же компоненты внешней силы представляются произвольными давлениями, действующими на поверхность.

Если обозначить через  $l$  общую длину канала, то на единицу ширины будем иметь

$$V = \frac{1}{2} g \rho \int_0^l \eta^2 dx, \quad (5)$$

где  $\eta$  удовлетворяет условию

$$\int_0^l \eta dx = 0. \quad (6)$$

Если бы также легко мы могли найти общее выражение для кинетической энергии стационарного движения, соответствующего произвольной заданной форме поверхности, то приведенное выше условие в какой-либо из данных форм позволило бы с помощью обычного приема вариационного исчисления определить возможные, если таковые существуют, формы стационарных волн <sup>1)</sup>.

Практически это можно установить не иначе как методами последовательных приближений; но для известного уяснения вопроса мы можем воспроизвести, пользуясь настоящей теорией, результаты, которые мы получили для „длинных“ волн с бесконечно малой амплитудой.

Если обозначим через  $h$  глубину канала, то скорость в любом поперечном сечении, когда поверхность с произвольным возвышением  $\eta$  находится в покое, будет равна  $\frac{\dot{\chi}}{h + \eta}$ , где  $\dot{\chi}$  обозначает поток. Следовательно, для циклической постоянной приближенно будем иметь

$$\kappa = \dot{\chi} \int_0^l (h + \eta)^{-1} dx = \frac{l\dot{\chi}}{h} \left( 1 + \frac{1}{h^2 l} \int_0^l \eta^2 dx \right), \quad (7)$$

где члены первого порядка относительно  $\eta$  в силу уравнения (6) опущены.

Кинетическая энергия  $\frac{1}{2} \rho x \dot{\chi}$  может быть выражена как через  $\dot{\chi}$ , так и через  $\kappa$ . Таким образом мы получаем обе формы в виде

$$T_0 = \frac{1}{2} \frac{\rho l \dot{\chi}^2}{h} \left( 1 + \frac{1}{h^2 l} \int_0^l \eta^2 dx \right), \quad (8)$$

$$K = \frac{1}{2} \frac{\rho h \kappa^2}{l} \left( 1 - \frac{1}{h^2 l} \int_0^l \eta^2 dx \right). \quad (9)$$

Переменная часть от  $V - T_0$  будет равна

$$\frac{1}{2} \rho \left( g - \frac{\dot{\chi}^2}{h^3} \right) \int_0^l \eta^2 dx, \quad (10)$$

а от  $V + K$  равна

$$\frac{1}{2} \rho \left( g - \frac{\kappa^2}{hl^2} \right) \int_0^l \eta^2 dx. \quad (11)$$

Очевидно, обе эти величины стационарны для  $\eta = 0$  и остаются такими для любых бесконечно малых значений  $\eta$ , если только

$$\dot{\chi}^2 = gh^3 \quad \text{или} \quad \kappa^2 = gh^2 l^2.$$

<sup>1)</sup> Относительно некоторых общих исследований задачи об установившихся волнах на поверхности раздела двух потоков укажем на работу Гельмгольца. Она содержит в конце также некоторые, основанные на вычислении энергии и количества движения рассуждения относительно длин тех волн, которые вызываются в первый момент благодаря ветру данной скорости. Эти исследования, повидимому, содержат допущение о том, что волны предполагаются обязательно установившегося вида, так как только на основании подобного допущения можно получить определенное значение для количества движения ряда волн малой амплитуды.



Если положить  $\dot{\chi} = c\eta$  или  $\kappa = c\eta$ , то это условие дает в согласии с § 175

$$c^2 = gh. \quad (12)$$

Более того, оказывается, что предположение  $\eta = 0$  обращает  $V \pm K$  в максимум или минимум, смотря по тому, будет ли  $c^2$  больше или меньше, чем  $gh$ . Другими словами, плоская форма поверхности тогда и только тогда вековым образом устойчива, если  $c < \sqrt{gh}$ . Необходимо, однако, отметить, что рассмотренные здесь диссипативные силы имеют особый характер; они влияют на *вертикальное* движение поверхности, но не (прямым образом) на течение жидкости. В противном случае из § 175 очевидно, что если для сохранения какой-либо данной установившейся формы поверхности приложены давления, то тогда эти давления для  $c^2 > gh$  должны быть наибольшими в возвышениях и наименьшими во впадинах. Отсюда, если эти давления удалить, то неровности поверхности будут иметь стремление усиливаться.

### Распространение волн в двух измерениях.

**§ 255.** Рассмотрим теперь некоторые случаи распространения волн в двух горизонтальных измерениях  $x$  и  $y$ . Направив ось  $z$  вертикально вверх, мы будем иметь, предполагая движения бесконечно малыми,

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - gz + F(t), \quad (1)$$

где  $\varphi$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta \varphi = 0. \quad (2)$$

Произвольную функцию  $F(t)$  можно включить в значение  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ .

Если мы возьмем начало координат на невозмущенной поверхности и обозначим через  $\zeta$  возвышение над этим уровнем в момент  $t$ , то из условия постоянства давления на поверхности получим

$$\zeta = \frac{1}{g} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_{z=0}, \quad (3)$$

и кинематическое условие на поверхности представится в виде

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_{z=0}; \quad (4)$$

ср. § 227. Следовательно, для  $z = 0$  должно иметь место

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

или, в случае простых гармонических колебаний,

$$\sigma^2 \varphi = g \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (6)$$

если множитель, зависящий от времени, равен  $e^{i(\sigma t + \epsilon)}$ .

Предполагая жидкость простирающуюся до бесконечности в горизонтальном направлении и вниз, рассмотрим вкратце эффект локального начального возмущения, симметричного относительно начала координат.

Согласно § 100 легко видеть, что типовое решение для случая начального состояния равновесия будет

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= g \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{kz} J_0(k\tilde{\omega}), \\ \zeta &= \cos \sigma t J_0(k\tilde{\omega}), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где, как в § 228,

$$\sigma^2 = gk. \quad (8)$$

Чтобы обобщить этот результат, сохраняя симметрию, прибегнем к теореме (12) § 100, а именно к формуле

$$f(\tilde{\omega}) = \int_0^{\infty} J_0(k\tilde{\omega}) k dk \int_0^{\infty} f(a) J_0(ka) a da. \quad (9)$$

Принимая во внимание начальные условия

$$\zeta = f(\tilde{\omega}), \quad \varphi_0 = 0, \quad (10)$$

мы будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi &= g \int_0^{\infty} \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{kz} J_0(k\tilde{\omega}) k dk \int_0^{\infty} f(a) J_0(ka) a da, \\ \zeta &= \int_0^{\infty} \cos \sigma t J_0(k\tilde{\omega}) k dk \int_0^{\infty} f(a) J_0(ka) a da. \end{aligned} \quad (11)$$

Если начальное возвышение ограничивается непосредственной близостью с началом координат и если мы положим

$$\int_0^{\infty} f(a) 2\pi a da = 1, \quad (12)$$

то будем иметь

$$\varphi = \frac{g}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{kz} J_0(k\tilde{\omega}) k dk. \quad (13)$$

Разлагая в ряд и применяя уравнение (8), получим

$$\varphi = \frac{gt}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ k - \frac{gt^2}{3!} k^2 + \frac{(gt^2)^2}{5!} k^3 - \dots \right\} e^{kz} J_0(k\tilde{\omega}) dk. \quad (14)$$

Если положить

$$z = -r \cos \theta, \quad \tilde{\omega} = r \sin \theta, \quad (15)$$

то, согласно (9) § 102, будем иметь

$$\int_0^{\infty} e^{kz} J_0(k\tilde{\omega}) dk = \frac{1}{r} \quad (16)$$

и далее <sup>1)</sup>

$$\int_0^{\infty} e^{kz} J_0(k\tilde{\omega}) k^n dk = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n \frac{1}{r} = n! \frac{P_n(\mu)}{r^{n+1}}, \quad (17)$$

где  $\mu = \cos \theta$  (ср. § 85). Отсюда получается

$$\psi = \frac{gt}{2\pi} \left\{ \frac{P_1(\mu)}{r^2} - \frac{gt^2}{3!} \frac{2! P_2(\mu)}{r^3} + \frac{(gt^2)^2}{5!} \frac{3! P_3(\mu)}{r^4} - \dots \right\}. \quad (18)$$

Значение  $\zeta$  вычисляется отсюда с помощью формулы (3). Из §§ 84, 85 следует, что

$$P_{2n+1}(0) = 0, \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \quad (19)$$

и, следовательно,

$$\zeta = \frac{1}{2\pi\tilde{\omega}^2} \left\{ \frac{1^2}{2!} \frac{gt^2}{\tilde{\omega}} - \frac{1^2 \cdot 3^2}{6!} \left(\frac{gt^2}{\tilde{\omega}}\right)^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{10!} \left(\frac{gt^2}{\tilde{\omega}}\right)^3 - \dots \right\}. \quad (20)^2$$

Отсюда следует, что каждая особая фаза движения связана с особым значением величины  $\frac{gt^2}{\tilde{\omega}}$  и что, следовательно, различные фазы распространяются от начала координат по радиусам наружу, каждая с постоянным ускорением.

До сих пор не удалось найти выражение, эквивалентное ряду (20), подобное формуле (21) § 238, которая была установлена для плоского случая и которая, следовательно, была бы подходящей в случае, когда  $\frac{gt^2}{\tilde{\omega}}$  велико. Методом Кельвина (§ 241) можно, однако, получить приближенное значение. Так как  $J_0(z)$  есть колеблющаяся функция, стремящаяся с возрастанием  $z$  стать периодической с периодом  $2\pi$ , как  $\sin z$ , то элементы интеграла в (13) большей частью будут взаимно сокращаться за исключением тех, для которых приближенно

$$t \frac{d\sigma}{dk} = \tilde{\omega} \quad \text{или} \quad k\tilde{\omega} = \frac{gt^2}{4\tilde{\omega}}. \quad (21)$$

<sup>1)</sup> H o b s o n, Proc. Lond. Math. Soc., XXV, 72, 73 (1893). Эта формула, однако, не обязательна; см. стр. 482, сноска 1.

<sup>2)</sup> Этот результат принадлежит Коши и Пуассону.

Для больших значений  $k\tilde{\omega}$ , согласно формуле (15) § 194, имеем приближенно

$$J_0(k\tilde{\omega}) = \left(\frac{2}{\pi k\tilde{\omega}}\right)^{1/2} \sin\left(k\tilde{\omega} + \frac{1}{4}\pi\right); \quad (22)$$

следовательно, формулу (13) можно заменить через

$$\varphi = \frac{g^{1/2}}{2^{3/2}\pi^{3/2}\tilde{\omega}^{1/2}} \int_0^{\infty} e^{kz} \cos\left(\sigma t - k\tilde{\omega} - \frac{1}{4}\pi\right) dk. \quad (23)$$

Сравнивая с формулами (7) и (9) § 241 и полагая затем  $z=0$ , найдем для значения  $\varphi$  на поверхности

$$\varphi_0 = \frac{g^{1/2}}{2\pi\tilde{\omega}^{1/2} \sqrt{\left|\frac{td^2\sigma}{dk^2}\right|}} \sin(\sigma t - k\tilde{\omega}); \quad (24)$$

входящие сюда величины  $k$  и  $\sigma$  выражаются при помощи (8) и (21) через  $\tilde{\omega}$  и  $t$ . Здесь принято во внимание, что  $\frac{d^2\sigma}{dk^2}$  будет отрицательным. Так как

$$\sigma t = (gkt^2)^{1/2} = 2k\tilde{\omega},$$

$$t \frac{d^2\sigma}{dk^2} = -\frac{1}{4} g^{1/2} t k^{-3/2} = -\frac{2\tilde{\omega}^3}{gt^2}, \quad (25)$$

то имеем

$$\varphi_0 = \frac{gt}{2^{3/2}\pi\tilde{\omega}^2} \sin \frac{gt^2}{4\tilde{\omega}}. \quad (26)$$

Возвышение поверхности определяется тогда формулой (3). Если мы в соответствии с предшествующим сохраним только наиболее важные члены, то получим

$$\zeta = \frac{gt^2}{2^{3/2}\pi\tilde{\omega}^3} \cos \frac{gt^2}{4\tilde{\omega}}, \quad (27)$$

что совпадает с результатом, полученным Коши и Пуассоном другим путем.

Нет надобности останавливаться на истолковании этого результата; его можно вполне осмыслить из того, что было сказано в § 240 для двухмерного случая. Следствия были разобраны обстоятельно Пуассоном для случая начальной депрессии в форме параболоида.

Если в качестве начальных условий даны импульсы, то типовым решением будет

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \cos \sigma t e^{kz} J_0(k\tilde{\omega}), \\ \zeta &= -\frac{\sigma}{g\varrho} \sin \sigma t J_0(k\tilde{\omega}). \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Обобщая это решение для начальных условий

$$\left. \begin{aligned} \varrho \varphi_0 &= F(\tilde{\omega}), \\ \zeta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

получим

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{\varrho} \int_0^\infty \cos \sigma t e^{kz} J_0(k\tilde{\omega}) k dk \int_0^\infty F(a) J_0(ka) a da, \\ \zeta &= -\frac{1}{g\varrho} \int_0^\infty \sigma \sin \sigma t J_0(k\tilde{\omega}) k dk \int_0^\infty F(a) J_0(ka) a da. \end{aligned} \quad (30)$$

В частности, для случая сосредоточенного около начала координат импульса, при котором

$$\int_0^\infty F(a) 2\pi a da = 1, \quad (31)$$

найдем

$$\varphi = \frac{1}{2\pi\varrho} \int_0^\infty \cos \sigma t e^{kz} J_0(k\tilde{\omega}) k dk. \quad (32)$$

Так как это можно написать в виде

$$\varphi = \frac{1}{2\pi\varrho} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{kz} J_0(k\tilde{\omega}) k dk, \quad (33)$$

то, применяя операцию  $\frac{1}{g\varrho} \frac{\partial}{\partial t}$  к выражениям (18) и (20), получим

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2\pi\varrho} \left\{ \frac{P_1(\mu)}{r^2} - \frac{gt^2}{2!} \frac{2! P_2(\mu)}{r^3} + \frac{(gt^2)^2}{4!} \frac{3! P_3(\mu)}{r^4} - \dots \right\}, \\ \zeta &= \frac{t}{2\pi\varrho\tilde{\omega}^3} \left\{ 1 - \frac{1^2 \cdot 3^2}{5!} \left(\frac{gt^2}{\tilde{\omega}}\right)^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{9!} \left(\frac{gt^2}{\tilde{\omega}}\right)^4 - \dots \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Далее, если  $\frac{1/2 gt^2}{\tilde{\omega}}$  велико, то вместо (27) будем иметь

$$\zeta = -\frac{gt^3}{2^{7/2}\pi\varrho\tilde{\omega}^4} \sin \frac{gt^2}{4\tilde{\omega}}. \quad (35)^1$$

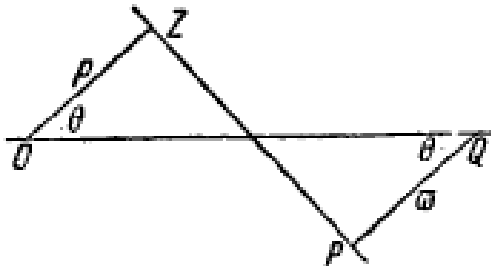
**§ 256.** Рассмотрим теперь эффект локального возмущения давления, предполагая, что это возмущение перемещается с постоянной

<sup>1)</sup> Волны, обусловленные различного рода взрывами под поверхностью. См. исследования T e r z a w a, Proc. Roy Soc. A, XCII, 57 (1915) и автором, см. примечание на стр. 513 и Proc. Lond. Soc. (2) XXI, 359 (1922).

скоростью по поверхности <sup>1)</sup>. Этим путем мы получим, хотя бы в основных чертах, объяснение той частной системы волн, которая сопровождает корабль, плывущий по достаточно глубокой воде.

Полное исследование, подобное исследованию §§ 242, 243, было бы довольно затруднительно; но общую характеристику явления можно легко получить на основе предшествующих результатов с помощью метода, подобного методу § 249.

Предположим, что центр давления движется со скоростью  $c$  вдоль оси  $x$  в отрицательном направлении; пусть в рассматриваемый момент он достиг точки  $O$ .



Фиг. 64.

Возвышение  $\zeta$  в какой-либо точке  $P$  (фиг. 64) можно рассматривать как происходящее от ряда бесконечно малых толчков, производимых через равные бесконечно малые промежутки времени на точки оси  $x$ , лежащие направо от  $O$ . Из тех кольцеобразных систем волн, которые благодаря этим толчкам постепенно

образуются, заметный эффект в точке  $P$  дают только те, которые возникают вблизи некоторых точек  $Q$ . Эти точки  $Q$  определяются из того соображения, что фаза в точке  $P$  должна быть „стационарной“ по отношению к изменениям положения точек  $Q$ . Если  $t$  обозначает время, которое необходимо источнику возмущения для того, чтобы переместиться из  $Q$  в  $O$ , то фаза возникших в точке  $Q$  волн будет равна в точке  $P$

$$\frac{gt^2}{4\omega} + \frac{1}{2} \pi, \quad (1)$$

где  $\tilde{\omega} = QP$  [(35) § 255]. Следовательно, условие, что фаза стационарна, будет

$$\tilde{\omega} = \frac{2\omega}{t}. \quad (2)$$

Так как при этом дифференцировании  $O$  и  $P$  следует считать фиксированными, то будем иметь

$$\tilde{\omega} = c \cos \theta,$$

где

$$\theta = \angle OQP,$$

откуда следует

$$OQ = ct = 2\tilde{\omega} \sec \theta. \quad (3)$$

Далее ясно, что точки, лежащие в непосредственной близости к  $P$ , для которых результирующая фаза такая же, как и в точке  $P$ ,

<sup>1)</sup> Более общую трактовку подобного рода задач можно найти в работе автора On Wave-Patterns due to a Travelling Disturbance, Phil. Mag. (6), XXXI, 539, 1916.

будут лежать на прямой, перпендикулярной к  $QP$ . Взглянув на фиг. 64, увидим, что кривая постоянной фазы характеризуется тем свойством, что касательная делит пополам отрезок между началом координат и основанием нормалей. Если обозначить через  $p$  перпендикуляр, опущенный из начала координат на касательную и через  $\theta$  — угол между  $p$  и осью  $x$ , то согласно известной формуле будем иметь

$$PZ = - \frac{dp}{d\theta} ;$$

отсюда следует

$$2p = - \frac{dp}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta, \tag{4}$$

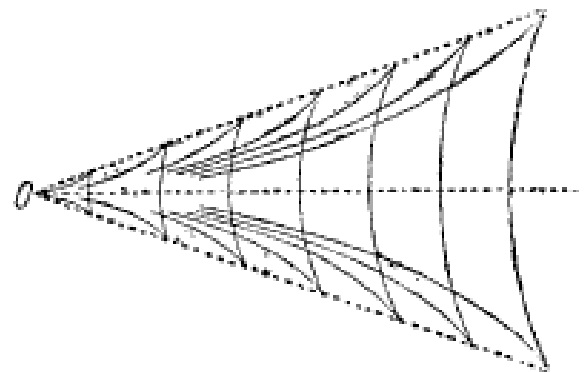
$$p = a \cos^2 \theta. \tag{5}$$

Формы кривых, определяемых условием (5), показаны на фиг. 65<sup>1)</sup>, которая начерчена согласно уравнениям

$$\left. \begin{aligned} x &= p \cos \theta - \frac{dp}{d\theta} \sin \theta = \frac{1}{4} a (5 \cos \theta - \cos 3\theta), \\ y &= p \sin \theta + \frac{dp}{d\theta} \cos \theta = - \frac{1}{4} a (\sin \theta + \sin 3\theta). \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

Разность фаз от одной кривой до соответствующей части следующей кривой равна  $2\pi$ . Это соответствует разности  $\frac{2\pi c^2}{g}$  значений параметра  $a$ .

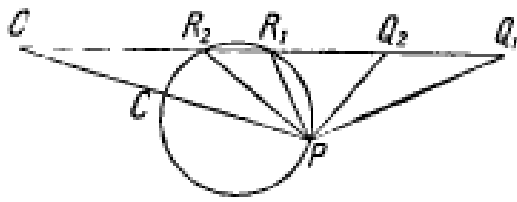
Так как через каждую заданную точку  $P$ , лежащую внутри грани системы волн, проходят две подобные кривые, то в рассматриваемом примере существуют, очевидно, два соответствующих действительных положения  $Q$ . Они определяются следующим очень простым построением: разделим отрезок  $OP$  пополам точкой  $C$  и построим на диаметре  $CP$  окружность; эта окружность пересечет ось  $x$  в точках  $R_1, R_2$ ; точки пересечения  $Q_1$  и  $Q_2$  (фиг. 66), в которых перпендикуляры  $PQ_1$  и  $PQ_2$ , восставленные соответственно к  $PR_1$  и  $PR_2$ , пересекают ось  $x$  и являются тогда иско-



Фиг. 65.

<sup>1)</sup> Ср. Sir W. Thomson, On Ship Waves, Proc. Inst. Mech. Eng. 3 августа 1887 [Popular Lectures, III, 482]; там дается аналогичный рисунок. Исследование, на которое мы сослались, несомненно, основывается на теории групповой скорости, но это не было указано; см. также Froude, On Ship Resistance, Papers of the Greenock, Phil. Soc., 19 января 1894. Можно непосредственно показать, что между двумя ветвями, сходящимися к острию, существует разность фаз, так что рисунок не в точности передает конфигурацию борозд волны.

мыми точками. В самом деле,  $CR_1$  параллельно  $PQ_1$  и, следовательно, равно  $1/2 PQ_1$ ; перпендикуляр, опущенный из  $O$  на  $PR_1$ , будет равен тогда  $PQ_1$ . Аналогично, перпендикуляр, опущенный из  $O$  на  $PR_2$ , будет равен  $PQ_2$ .



Фиг. 66.

Точки  $Q_1$  и  $Q_2$  будут совпадать, если  $OP$  составляет с осью симметрии угол, величина которого равна  $\arcsin 1/3$ , или  $19^\circ 28'$ . При больших углах наклона  $OP$  точки  $Q_1$  и  $Q_2$  становятся

мнимыми. Из формулы (6) следует также, что значения  $x$ ,  $y$  для  $\sin^2 \theta = 1/3$  будут стационарны; это дает ряд угловых точек, лежащих на прямых

$$\frac{x}{y} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} = \pm \operatorname{tg} 19^\circ 28'. \quad (7)$$

Чтобы иметь возможность приближенно оценить действительную высоту волн в различных частях системы, вернемся к формуле (35) § 255. Если  $P_0$  обозначает полное возмущающее давление, то возвышение в точке  $P$ , обусловленное кольцеобразной системой волн, исходящих из точки  $Q$ , лежащей направо от  $O$ , будет равно

$$\delta\zeta = - \frac{gt^2}{8\sqrt{2}\pi g\tilde{\omega}^4} \sin \frac{gt^2}{\pi} P_0 \delta t, \quad (8)$$

где  $\tilde{\omega} = PQ$ ,  $t = \frac{OQ}{c}$ . Это надо проинтегрировать по  $t$ , но, как уже было сказано, только те части интеграла будут иметь существенное значение для окончательного результата, для которых  $t$  приблизительно равно значениям  $(\tau_1, \tau_2)$ , соответствующим как раз упомянутым особым точкам  $Q_1, Q_2$ .

Что касается фаз, то, если положить  $t = \tau + t'$ , будем иметь

$$\frac{gt^2}{4\tilde{\omega}} = \left[ \frac{gt^2}{4\tilde{\omega}} \right] + t' \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{gt^2}{4\tilde{\omega}} \right) \right] + \frac{t'^2}{1 \cdot 2} \left[ \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{gt^2}{4\tilde{\omega}} \right) \right] + \dots, \quad (9)$$

где в членах, заключенных в квадратных скобках,  $t$  следует положить, смотря по необходимости, равным  $\tau_1$  или  $\tau_2$ . Второй член исчезает вследствие наших предположений, так как фаза в точке  $P$  для волн, возникающих вблизи  $Q_1$  или  $Q_2$ , „стационарна“. Далее, мы находим

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{gt^2}{4\tilde{\omega}} \right) = \frac{g}{2\tilde{\omega}} - \frac{g}{\tilde{\omega}^2} \tilde{\omega} + \frac{gt^2}{4} \left( \frac{2\tilde{\omega}^2}{\tilde{\omega}^3} - \frac{\ddot{\tilde{\omega}}}{\tilde{\omega}^2} \right).$$

Так как

$$\tilde{\omega} = c \cos \theta, \quad \ddot{\tilde{\omega}} = \frac{c^2 \sin^2 \theta}{\tilde{\omega}}, \quad (10)$$

то с помощью уравнения (2) получим

$$\left[ \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{gt^2}{4\tilde{\omega}} \right) \right] = \frac{g}{\tilde{\omega}} \left( \frac{1}{2} - \operatorname{tg}^2 \theta \right). \quad (11)$$



Вследствие колебаний тригонометрического множителя не будет большой ошибки, если в выражении (8) пренебречь изменением первого множителя или если затем взять в качестве пределов интегрирования для  $t'$  значения  $\pm \infty$ . Мы будем иметь тогда приближенно

$$\zeta = - \frac{g\tau_1^3 P_0}{8\sqrt{2}\pi\tilde{\omega}_1^4} \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{g\tau_1^2}{4\tilde{\omega}_1} + m_1^2 t'^2\right) dt' - \\ - \frac{g\tau_2^3 P_0}{8\sqrt{2}\pi\tilde{\omega}_2^4} \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{g\tau_2^2}{4\tilde{\omega}_2} + m_2^2 t'^2\right) dt', \quad (12)$$

где

$$\left. \begin{aligned} m_1^2 &= \frac{g}{2\tilde{\omega}_1} (1 - \operatorname{tg}^2 \theta_1), \\ m_2^2 &= \frac{g}{2\tilde{\omega}_2} (\operatorname{tg}^2 \theta_2 - \frac{1}{2}), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

а индексы относятся к точкам  $Q_1, Q_2$  фиг. 66. Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos m^2 t'^2 dt' = \int_{-\infty}^{\infty} \sin m^2 t'^2 dt' = \frac{V^{1/2} \pi}{m}, \quad (14)$$

то надо взять положительное значение  $m$ , то мы найдем

$$\zeta = - \frac{g\tau_1^3 P_0}{8\sqrt{2}\pi^{1/2}g\tilde{\omega}_1^4 m_1} \sin\left(\frac{g\tau_1^2}{4\tilde{\omega}_1} + \frac{1}{4}\pi\right) - \\ - \frac{g\tau_2^3 P_0}{8\sqrt{2}\pi^{1/2}g\tilde{\omega}_2^4 m_2} \sin\left(\frac{g\tau_2^2}{4\tilde{\omega}_2} - \frac{1}{4}\pi\right). \quad (15)$$

Два члена этого выражения представляют части, обусловленные соответственно поперечными боковыми волнами. Так как

$$\tilde{\omega}_1 = PQ_1 = \frac{1}{2} c\tau_1 \cos \theta_1,$$

$$\tilde{\omega}_2 = PQ_2 = \frac{1}{2} c\tau_2 \cos \theta_2,$$

то получается, что если мы будем рассматривать каждый отдельный член сам по себе, то фаза вдоль соответствующей части кривой

$$p = \tilde{\omega} = a \cos^2 \theta$$

будет постоянной, в то время как возвышение изменяется пропорционально выражению

$$\frac{\sqrt{2} g^{1/2} P_0}{\pi^{1/2} g c^3 a^{1/2}} \frac{\sec^3 \theta}{\sqrt{|1 - 3 \sin^2 \theta|}}. \quad (16)$$

В „остриях“, где обе системы соединяются, между ними существует разность фаз в четверть периода.

В „острие“, где  $\sin^2 \theta = 1/3$ , формулы дают бесконечное значение для  $\zeta$ , но это обстоятельство указывает скорее всего на недостаток нашего приближенного приема. Что возвышение в некоторой точке  $P$  вблизи „острия“ будет сравнительно большим, можно было и предвидеть, так как из уравнений (9) и (11) следует, что множество точек на оси  $x$ , посылающих в точку  $P$  волны приблизительно одинаковой фазы, будет тогда необычайно обширным. Напротив, бесконечность, которая встречается при  $\theta = 1/2 \pi$ , имеет несколько другой характер: она происходит от искусственного допущения, что давление сконцентрировано в одной точке. При распределенном давлении эта трудность исчезла бы <sup>1)</sup>.

Кроме того, необходимо заметить, что все это исследование имеет место только для тех точек, для которых  $\frac{gt^2}{\omega}$  велико; ср. §§ 240, 255. При более обстоятельном исследовании можно найти, что это ограничение равносильно предположению, что параметр  $a$  велик сравнительно с  $\frac{2\pi c^2}{g}$ . Следовательно, наши рассуждения нельзя распространить непосредственно на части системы волн, лежащие вблизи начала координат.

**§ 256а.** Как уже было указано, система волн рассматриваемого выше типа может быть образована и другими видами перемещающегося возмущения. Некоторые из этих случаев доступны для расчетов. Например, движение погруженного шара рассмотрено Хавелоком <sup>2)</sup>, и для этого случая подсчитано волновое сопротивление. Автор <sup>3)</sup> данной книги исследовал другим методом движение погруженного тела, не прибегая к ограничениям как формы тела, так и его ориентации. Результаты, естественно, получались наиболее простыми в том случае, когда направление движения совпадало с одним из трех возможных направлений установившегося движения, рассматриваемых в § 124. В этом случае волновое сопротивление выражается формулой

$$R = \frac{g^4 (A + \rho Q)^2 I}{\pi \rho c^6}. \quad (17)$$

Здесь  $A$  обозначает соответствующую присоединенную массу (§ 121),  $Q$  есть объем тела,  $c$  — его скорость, а

$$I = \int_0^{\pi/2} \sec^5 \theta e^{-\frac{2gI}{c^2 \sin^2 \theta}} d\theta, \quad (18)$$

<sup>1)</sup> Более подробные исследования были проведены Хопфом в его диссертации в Мюнхене в 1909 г. и Ногнер'ом, Arkiv för Matem., XVII (1923). Последний автор, в частности, исследовал вид волн вблизи „острий“, где сходятся обе системы.

<sup>2)</sup> Havelock, Proc. Roy. Soc. A, XCIII, 520 (1917); XCV, 354 (1918); см. также Green, Phil. Mag. (6), XXXVI, 48 (1918).

<sup>3)</sup> Lamb, Proc. Roy. Soc. A, CXI, 14 (1926).

где  $f$  есть глубина погружения. Другая форма этого интеграла (употребляемая Хавелоком) есть

$$I = \frac{1}{4} e^{-a} \left\{ K_0(a) + \left(1 + \frac{1}{2a}\right) K_1(a) \right\} \quad (19)$$

в обычных обозначениях функций Бесселя <sup>1)</sup>, где  $a = \frac{gf}{c^2}$ . Для шара мы имеем  $A = \frac{2}{3}\pi\rho a^3$ ,  $Q = \frac{4}{3}\pi a^3$ , где  $a$  есть радиус. Отсюда, если  $M'$  есть вытесненная масса жидкости, получим

$$R = 3M'g \left(\frac{a}{f}\right)^3 \left(\frac{gf}{c^2}\right)^3 I, \quad (20)^2)$$

что находится в согласии с результатами Хавелока. В качестве примера положим  $c = \sqrt{gf}$ , тогда

$$R = 0,365 M'g \left(\frac{a}{f}\right)^3.$$

График  $R$  как функции от  $c$  приведен Хавелоком; он имеет общее сходство с кривой фиг. 57.

В последующей работе <sup>3)</sup> Хавелок тот же метод применил к подвижному источнику возмущения, состоящему из различных комбинаций диполей, и дал важные применения к подсчету волнового сопротивления корабля.

Уместно будет дать здесь дальнейшее краткое изложение теоретической литературы о волновом сопротивлении. Хотя характер возмущения и будет различным, все же можно сравнивать влияние носа корабля с влиянием точечного источника давления. Фиг. 65 выявляет две системы поперечных и боковых волн, которые наблюдаются в действительности, и особую заметную группу волн вблизи острия, где сходятся эти две системы. Если мы вообразим дополнительный отрицательный источник давления на месте кормы корабля, то и получим грубое представление о действии корабля как целого. При изменяющейся скорости корабля кормовые волны могут частично погасить или усилить влияние носовых волн, в результате можно ожидать, что график сопротивления будет иметь горбы и впадины с возрастанием длины корабля или с изменением его скорости <sup>4)</sup>. В действительности, оказывается, кривая сопротивления в зависимости от скорости обладает несколькими максимумами (или „горбами“) и соответствующими минимумами.

Получить улучшенное представление о том, что происходит в непосредственной близости корабля, и вычислить соответствующее сопротивление представляет, конечно, трудную задачу, но все же попытки были сделаны и

<sup>1)</sup> Watson, стр. 172.

<sup>2)</sup> Эта формула в работе автора была приведена неправильно.

<sup>3)</sup> Proc. Roy. Soc. A. CXVIII, 24 (1927).

<sup>4)</sup> W. Froude, On the Effect on the Wave-Making Resistance of ships of Length of Parallel Middle Body, Trans. Inst. Nav. Arch., XVII (1877); также R. E. Froude, On the Leading Phenomena of the Wave-Making Resistance of Ships, Trans. Inst. Nav. Arch., XXII (1881), где даны рисунки действительных образцов волн, которые в своих главных чертах находятся в удивительном согласии с результатами предшествующей теории. Некоторые из этих рисунков воспроизведены в работе Келвина, Proc. Inst. Mech. Eng., цитированной выше.

не без значительного успеха. Начало было положено Митчеллом <sup>1)</sup> для идеализированной формы корабля, которая отличается от формы действительного корабля только тем, что для нее предполагается угол наклона поверхности к средней плоскости всюду малым. Этому допущения придерживается и Виглей <sup>2)</sup> в своих недавних работах, в которых он исследовал различные формы (подчиненные тому же ограничению), вычислил их сопротивления и сравнил с экспериментальными результатами для моделей, получив хорошее качественное согласие. Хавелок <sup>3)</sup> в целом ряде своих работ исследовал влияние различных деталей в конструкции корабля таких, как длина „средней параллельной плоскости“, средняя осадка и т. д. Его метод заключается (частично) в подборе соответственной комбинации движущихся источников и, следовательно, свободен от только что упомянутого специального ограничения <sup>4)</sup>.

Общая формула для волнового сопротивления геометрически подобных и подобно погруженных (целиком или частично) тел была дана еще очень давно Фрудом. Так как сопротивление может зависеть только от скорости, плотности жидкости, ускорения силы тяжести и некоторой линейной величины, которая определяет масштаб, то из рассмотрения размерностей можно показать, что оно должно представляться выражением

$$R = \rho l^2 c^2 f\left(\frac{gl}{c^2}\right), \quad (21)$$

где  $c$  есть скорость и  $l$  — характерная линейная величина. Можно заметить, что формула (17) есть частный случай (21). Из формулы (21) следует, что волновое сопротивление корабля можно вывести из экспериментов над моделями при условии, что значение  $\frac{l}{c^2}$  будет одно и то же для модели и природы.

**§ 256b.** Чтобы исследовать изменение фигур волн, учитывая глубину воды, мы должны рассуждениям в § 256 придать более общую форму. Обозначая через  $t$ , как и раньше, время, которое требуется, чтобы центр давления перешел от точки  $Q$  до точки  $O$ , можно показать, что фаза возмущения в точке  $P$ , возникшего от импульса, переданного из точки  $Q$ , отличается от значения

$$k(Vt - \tilde{\omega}) \quad (22)$$

только аддитивным постоянным, где  $\frac{2\pi}{k}$  обозначает длину волны, преобладающую вблизи  $P$ , а  $V$  — соответствующая скорость волн <sup>5)</sup>. Эта преобладающая длина волны определяется тем условием, что фаза

<sup>1)</sup> Phil. Mag. (5). XLV, 106 (1898).

<sup>2)</sup> Trans. Inst. Nav. Arch., LXVIII, 124 (1926); LXIX, 27 (1927); LXXII (1930).

<sup>3)</sup> Начиная с 1909 г. в журналах Proc. Roy Soc.

<sup>4)</sup> Превосходные доклады о развитии рассматриваемого вопроса были сделаны Ноглером, Proc. Congress Appl. Mech. Delft, 1924, стр. 146, и Wigley'ем, Congress for techn. Mechanics, Stockholm, 1930.

<sup>5)</sup> Символ  $c$ , который раньше употреблялся в этом смысле, обозначает теперь скорость центра давления относительно воды.

является стационарной относительно изменений длины волны, т. е. что

$$\frac{\partial}{\partial k} k(Vt - \tilde{\omega}) = 0 \quad \text{или} \quad \tilde{\omega} = Ut, \quad (23)$$

где  $U = \frac{d(kV)}{dk}$  обозначает групповую скорость (§ 236).

Далее, для эффективной части возмущения в точке  $P$  фаза (22) должна быть стационарной относительно изменений положения  $Q$ ; следовательно, взяв частную производную по  $t$ , мы получим

$$\tilde{\omega} = V \quad \text{или} \quad V = c \cos \theta, \quad (24)$$

так как  $\tilde{\omega} = c \cos \theta$ . Теперь, обращаясь к фиг. 61, будем иметь

$$p = ct \cos \theta - \tilde{\omega} = Vt - \tilde{\omega}. \quad (25)$$

Таким образом для данного гребня волны давление  $p$  будет находиться в постоянном отношении к длине волны  $\lambda$  и при переходе от одного гребня волны к следующему это отношение будет возрастать на единицу (или убывать). Так как  $\lambda$ , согласно (24), определяется как функция от  $\theta$ , то этим самым устанавливается соотношение между  $p$  и  $\theta$ .

Для случая бесконечной глубины формула (24) дает

$$c^2 \cos^2 \theta = V^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}, \quad (26)$$

и искомое соотношение будет иметь, как и раньше, вид

$$p = a \cos^2 \theta. \quad (27)$$

При конечной глубине ( $h$ ) имеем

$$c^2 \cos^2 \theta = V^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{tg} h \frac{2\pi h}{\lambda}, \quad (28)$$

и соответствующее соотношение представится в виде

$$\frac{p}{a} \operatorname{tg} h \frac{a}{p} = \frac{c^2}{gh} \cos^2 \theta, \quad (29)$$

где значения  $a$  для следующих друг за другом гребней волны образуют арифметическую прогрессию. Экманом <sup>1)</sup> начерчены кривые для различных случаев. Так как выражение в левой части не может превосходить единицу, то оказывается, что при  $c^2 > gh$  существует нижний предел для значения  $\theta$ , определяемый из уравнения

$$\cos^2 \theta = \frac{gh}{c^2}, \quad (30)$$

при котором кривая простирается в бесконечность.

<sup>1)</sup> Ekman, см. примечание на стр. 464.

Отсюда следует: если скорость возмущающего действия превосходит значение  $\sqrt{gh}$ , то исчезают поперечные волны и остаются только боковые. Это обстоятельство приводит к уменьшению волнового сопротивления (ср. § 249) <sup>1)</sup>.

Изменение конфигурации вида волн при увеличении отношения  $\frac{c^2}{gh}$  от нуля до бесконечности было прослежено Хавелоком <sup>2)</sup>.

### Стоячие волны в ограниченной жидкости.

§ 257. Задачу о свободных колебаниях в двух горизонтальных измерениях ( $x, y$ ) для случая, когда глубина постоянна и жидкость ограничена по сторонам вертикальными стенками, можно изложить в такой же математической форме, как задачу § 190.

Если взять начало координат на невозмущенной поверхности и обозначить через  $\zeta$  возвышение над этим уровнем в момент  $t$ , то условия, которые должны быть выполнены на свободной поверхности, будут такими же, как (3), (4) в § 255.

Уравнению неразрывности

$$\Delta\varphi = 0$$

и условию, что на глубине  $z = -h$  вертикальная скорость обращается в нуль, мы удовлетворим, полагая

$$\varphi = \varphi_1 \operatorname{ch} k(z+h), \quad (1)$$

где  $\varphi_1$  есть функция от  $x, y$ , удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + k^2 \varphi_1 = 0. \quad (2)$$

Вид функции  $\varphi_1$  и допустимые значения  $k$  определяются этим уравнением и условием, что на вертикальных стенках должно иметь место

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = 0. \quad (3)$$

Соответствующие значения частоты ( $\sigma$ ) колебаний будут тогда определяться условием на поверхности (6) § 255; именно, мы будем иметь

$$\sigma^2 = gh \operatorname{th} kh. \quad (4)$$

Отсюда получается

$$\zeta = \frac{ik}{\sigma} \operatorname{sh} kh \varphi_1. \quad (5)$$

<sup>1)</sup> Найдено, что мощность, потребная для продвижения торпедной лодки в сравнительно мелкой воде, возрастает с увеличением скорости до некоторого ее критического значения, зависящего от глубины, а затем убывает и, наконец, снова возрастает. См. работы Rasmussen, Trans. Inst. Nav. Arch., XLI, 12 (1899); Rota, там же, XLII, 239 (1900); Yarrow и Maggier, там же, XLVII, 339, 344 (1905).

<sup>2)</sup> Havelock, Proc. Roy. Soc., LXXXI, 426 (1908).

Условия (2) и (3) имеют такой же вид, как и в случае малой глубины, а поэтому мы можем сразу написать результаты для прямоугольного или круглого <sup>1)</sup> бассейна. Значения  $k$  и формы свободной поверхности при различных нормальных колебаниях будут те же, как в §§ 190, 191 <sup>2)</sup>, но амплитуда колебания с увеличением глубины теперь убывает по закону (1); значение  $\sigma$  для каждой особой формы колебания будет даваться формулой (4). Если  $kh$  мало, то будем иметь, как и в названных параграфах,

$$\sigma^2 = k^2 gh.$$

В связи с этим упомянем случай длинного, узкого, прямоугольного бассейна, в котором вблизи центра находится одно или несколько цилиндрических препятствий с вертикальными образующими.

Возьмем начало координат в центре свободной поверхности, а ось  $x$  параллельно длине  $l$ ; вообразим проведенными две плоскости  $x = \pm x'$ , где  $x'$  довольно велико по сравнению с горизонтальным размером препятствий, но все же является малым по сравнению с длиной ( $l$ ). Вне этих плоскостей приближенно будем иметь



Фиг. 67.

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + k^2 \varphi_1 = 0, \quad (6)$$

и, следовательно, для  $x > x'$

$$\varphi_1 = A \sin kx + B \cos kx, \quad (7)$$

а для  $x < -x'$

$$\varphi_1 = A \sin kx - B \cos kx, \quad (8)$$

так как при самом медленном колебании, которое только и должно здесь рассматриваться,  $\varphi$  должно быть нечетной функцией от  $x$ .

В области между плоскостями  $x = \pm x'$  распределение линий

$$\varphi_1 = \text{const.}$$

в основном такое же, каким оно было бы, если положить в формуле (2)  $k=0$ , на том основании, о котором мы будем говорить в связи с другими задачами в § 290. Поскольку мы интересуемся этой областью, то эта задача тождественна с задачей о распространении электричества в металлическом стержне, который имеет форму бассейна, занимаемого жидкостью, где на месте препятствий имеются отверстия. Электрическое сопротивление между двумя плоскостями будет равно тогда электрическому сопротивлению стержня, лишенного отверстий, с одинаковым поперечным сечением с некоторой длиной  $2x' + a$ . Разность потенциалов между обеими плоскостями, на основании (7), может быть принята равной  $2(kAx' + B)$ , так как  $kx'$  мало; сила

<sup>1)</sup> Указания на оригинальные работы Пуассона и Рэлея о волнах в круглом бассейне см. стр. 361. Проблема разрабатывалась также Meissner, Über die Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten in Gefässen, Basel, 1848 (см. Von der Mühl, Math. Ann., XXVII, 575) и Остроградским, Mémoire sur la propagation des ondes, dans un bassin cylindrique, Mém. des Savants Etrang., III (1862).

<sup>2)</sup> Необходимо заметить, что каждая из обеих нарисованных на фиг. 42 форм колебаний может быть легко вызвана подходящим движением туда и сюда стакана воды в горизонтальном направлении.

тока на единицу поперечного сечения приближенно будет равна  $kA$ . Следовательно,

$$2(kAx' + B) = (2x' + a)kA; \quad (9)$$

отсюда следует

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{2}ka, \quad (10)$$

и для  $x > x'$

$$\varphi_1 = A \left( \sin kx + \frac{1}{2}ka \cos kx \right). \quad (11)$$

Условие  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ , которое должно выполняться для  $x = \frac{1}{2}l$ , даст

$$\cos \frac{1}{2}kl - \frac{1}{2}ka \sin kl \quad (12)$$

или, так как  $ka$  есть малая величина,

$$\cos \frac{1}{2}k(l+a) = 0. \quad (13)$$

Введение препятствий, таким образом, имеет тот же самый эффект, как и удлинение сосуда на величину  $a$ . Период самого медленного колебания поэтому будет равен

$$\frac{2\pi}{\sigma} = 2 \sqrt{\frac{\pi l'}{g} \operatorname{cth} \frac{\pi h}{l'}}, \quad (14)$$

где  $l' = l + a$ .

Значение  $a$  известно только в немногих случаях. Для круглого цилиндра радиуса  $b$ , который находится в центре бассейна, формулы (11) и (13) § 64 показывают, что  $\varphi_1$  меняется практически как  $x + C$  или как  $x + \frac{\pi b^2}{a}$ , когда  $x$  будет величиной порядка ширины  $a$  бассейна. Сравнивая с (11), увидим, что

$$a = \frac{2\pi b^2}{a}, \quad (15)$$

при условии, что  $\frac{b}{a}$  приблизительно не превосходит  $\frac{1}{4}$  <sup>1)</sup>.

Если на месте плоскости  $x=0$  будем иметь тонкую твердую перегородку ширины  $a$ , которая в середине имеет вертикальную щель ширины  $c$ , то получим формулу

$$a = \frac{2a}{\pi} \ln \sec \frac{\pi(a-c)}{2a}. \quad (16)$$

**§ 258.** Число решенных до сих пор случаев движения при переменной глубине очень ограничено.

1. Мы рассмотрим сначала двумерные колебания воды в канале, поперечное сечение которого состоит из двух прямых, наклоненных под углом в  $45^\circ$  к вертикали <sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Формула (14) в этом случае хорошо согласуется с опытами [L a m b и S o o k e, Phil. Mag. (6), XX, 303 (1910)]. Опыты были проведены главным образом с той целью, чтобы испробовать вышесказанный приближенный способ, который имеет еще другие более важные возможности применения (см. § 306, 307).

<sup>2)</sup> Kirchhoff, Über stehende Schwingungen einer schweren Flüssigkeit, Berl. Monatsber., 15 мая 1879 г. [Ges. Abh., 428]; Greenhill, см. примечание на стр. 467.



Возьмем в плоскости поперечного сечения оси  $y$  и  $z$  соответственно по горизонтали и вертикали и положим

$$\varphi + i\psi = A \{ \operatorname{ch} k (y + iz) + \cos k (y + iz) \}, \quad (1)$$

причем зависящий от времени множитель  $\cos(\sigma t + \epsilon)$  следует здесь подразумевать. Это дает

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= A (\operatorname{ch} ky \cos kz + \cos ky \operatorname{ch} kz), \\ \psi &= A (\operatorname{sh} ky \sin kz - \sin ky \operatorname{sh} kz). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Вторая формула тотчас же показывает, что прямые  $y = \pm z$  образуют линию тока  $\psi = 0$  и поэтому могут быть взяты в качестве неподвижных границ.

Условие на свободной поверхности будет, как в § 227,

$$\sigma^2 \varphi = g \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (3)$$

Подставляя из (2), найдем, если  $h$  обозначает высоту поверхности над началом координат,

$$\sigma^2 (\operatorname{ch} ky \cos kh + \cos ky \operatorname{ch} kh) = gk (-\operatorname{ch} ky \sin kh + \cos ky \operatorname{sh} kh).$$

Это уравнение выполняется для всех значений  $y$ , если

$$\left. \begin{aligned} \sigma^2 \cos kh &= -gk \sin kh, \\ \sigma^2 \operatorname{ch} kh &= gk \operatorname{sh} kh; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

отсюда получаем

$$\operatorname{th} kh = -\operatorname{tg} kh. \quad (5)$$

Это уравнение определяет допустимые значения  $k$ ; соответствующие значения  $\sigma$  будут даны тогда одним из уравнений (4).

Так как  $\varphi$ , согласно (2), есть четная функция от  $y$ , то колебания, определяемые ею, будут симметричны по отношению к плоскости  $y = 0$ .

Асимметрические же колебания определяются из уравнений

$$\varphi + i\psi = iA \{ \operatorname{ch} k (y + iz) - \cos k (y + iz) \}, \quad (6)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= -A (\operatorname{sh} ky \sin kz + \sin ky \operatorname{sh} kz), \\ \psi &= A (\operatorname{ch} ky \cos kz - \cos ky \operatorname{ch} kz). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Линия тока  $\psi = 0$  состоит, как и выше, из прямых  $y = \pm z$ ; условие на поверхности (3) дает

$$\sigma^2 (\operatorname{sh} ky \sin kh + \sin ky \operatorname{sh} kh) = gk (\operatorname{sh} ky \cos kh + \sin ky \operatorname{ch} kh).$$

Это требует, чтобы

$$\left. \begin{aligned} \sigma^2 \sin kh &= gk \cos kh, \\ \sigma^2 \operatorname{sh} kh &= gk \operatorname{ch} kh; \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

отсюда следует

$$\operatorname{th} kh = \operatorname{tg} kh. \quad (9)$$

Уравнения (5) и (9) встречаются также в теории поперечных колебаний балки, свободной на обоих концах, и оба они могут быть включены в уравнение

$$\cos m \operatorname{ch} m = 1, \quad (10)^1$$

если положить  $m = 2kh$ .

<sup>1)</sup> Ср. Rayleigh, Theory of Sound, I, 277, где подробно разобрано числовое решение уравнения.

Корень  $kh=0$  уравнения (9) не имеет значения в упомянутой теории, но здесь он очень важен, именно, он соответствует самому медленному колебанию в рассматриваемой задаче. Если положить  $Ak^2=B$  и, рассматривая  $k$  как бесконечно малое, восстановить множитель, зависящий от времени, а потом взять только действительные части, то формулы (7) представятся в виде

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= -2Byz \cos(\sigma t + \varepsilon), \\ \psi &= B(y^2 - z^2) \cos(\sigma t + \varepsilon), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где, согласно уравнению (8),

$$\sigma^2 = \frac{g}{h}. \quad (12)$$

Соответствующий вид свободной поверхности будет

$$\zeta = \frac{1}{g} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_{z=h} = 2\sigma Bhy \sin(\sigma t + \varepsilon). \quad (13)$$

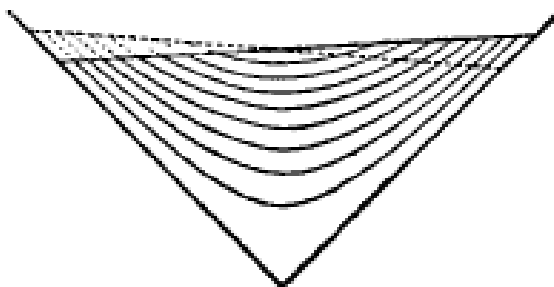
Следовательно, свободная поверхность при этом виде колебания есть всегда плоскость. Фиг. 68 показывает линии тока  $\psi = \text{const.}$  для ряда равноотстоящих значений  $\psi$ .

Следующее по медленности нормальное колебание будет симметричным и дается наименьшим, отличным от нуля, корнем уравнения (5). Этот корень будет  $kh = 2,3650$ , откуда следует

$$\sigma = 1,5244 \left( \frac{g}{h} \right)^{1/2}.$$

Профиль свободной поверхности имеет теперь два узла, положения которых найдутся, если в (2) положить  $\varphi = 0$ ,  $z = h$ , откуда получим

$$\frac{y}{h} = 0,5516 \quad 1).$$



Фиг. 68.

Следующее нормальное колебание соответствует наименьшему, отличному от нуля, корню уравнения (9) и т. д. 2).

2. Гринхилл в названной в примечании 3 на стр. 467 работе исследовал симметрические колебания воды в канале, поперечное сечение которого состоит из двух прямых, наклоненных к вертикали под углом в  $60^\circ$ . Для наиболее аналитически простого колебания этого рода мы будем иметь, опустив множитель, зависящий от времени,

$$\varphi + i\psi = iA(y + iz)^3 + B, \quad (14)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= Az(z^2 - 3y^2) + B, \\ \psi &= Ay(y^2 - 3z^2); \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

последняя формула дает  $\psi = 0$  вдоль границы  $y = \pm \sqrt{3}z$ . Условие на поверхности (3) будет выполняться для  $z = h$ , если

$$\sigma^2 = \frac{g}{h}, \quad B = 2Ah^3. \quad (16)$$

1) Rayleigh, Theory of Sound, § 178.

2) Экспериментальное подтверждение частот и положений петель (т. е. мест наибольшей вертикальной амплитуды) было дано для различных нормальных колебаний Kirchhoff и Hansemann, Über stehende Schwingungen des Wassers, Wied. Ann., X [Kirchhoff, Ges. Abh., стр. 442].

$\kappa_2 = \kappa_1$ . Первый член в формулах (16) и (17) оказывается теперь бесконечно большим, в то время как остальная часть выражения дает конечное значение. Чтобы в этом случае получить результат, имеющий смысл, мы должны удержать коэффициент трения  $\mu'$ .

Полагая  $\mu' = 2\tilde{\omega}^2$ , будем иметь

$$(k - \kappa)^2 + i\mu' = \{k - (\kappa + \tilde{\omega} - i\tilde{\omega})\} \{k - (\kappa - \tilde{\omega} + i\tilde{\omega})\}, \quad (25)$$

так что интеграл (10) можно теперь положить равным

$$\frac{1+i}{4\tilde{\omega}} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{e^{ikh}}{k - (\kappa - \tilde{\omega} + i\tilde{\omega})} dk - \int_0^{\infty} \frac{e^{ikh}}{k - (\kappa + \tilde{\omega} - i\tilde{\omega})} dk \right\}. \quad (26)$$

Формулы § 243 показывают, что когда величина  $\tilde{\omega}$  будет малой, то главная часть этого выражения для достаточно удаленных точек по обе стороны от начала будет равна

$$\frac{1+i}{4\tilde{\omega}} 2\pi i e^{i\kappa x}. \quad (27)$$

Возвышение поверхности определяется теперь из уравнения

$$\frac{\pi T_1}{P} y = -\frac{\pi}{\mu^{1/2}} \cos\left(\kappa x - \frac{1}{4}\pi\right). \quad (28)$$

**§ 272.** Исследование Рэлея<sup>1)</sup>, от которого только что проведенное здесь отличается главным образом способом представления определенных интегралов, было предпринято с целью найти более удовлетворительное объяснение для некоторых явлений, описанных Скоттом Расселем<sup>2)</sup> и Кельвином<sup>3)</sup>.

Когда препятствие незначительных размеров, например, леска от удочки, движется медленно в спокойной воде или (что, конечно, сводится к тому же) находится в покое в движущейся жидкости, то поверхность жидкости покрывается красивыми волнами, которые по отношению к препятствию остаются неподвижными. На стороне, лежащей вверх по течению, длина волны будет короче, и колебания, как показал Томсон, главным образом обуславливаются капиллярными силами. На стороне, расположенной по течению, волны оказываются длиннее и главным образом зависят от силы тяжести. Обе системы волн движутся с одинаковой относительной скоростью по отношению к воде, что необходимо для того, чтобы они могли сохранять неизменное положение относительно препятствия. Это же обстоятельство обуславливает и скорость, а вместе с тем и длину волны в той части системы волн, в которой гребни расположены наклонно к направлению движения. Если обозначить угол между направлением движения и нормалью к фронту волн через  $\theta$ , то ско-

<sup>1)</sup> Rayleigh, см. выше, стр. 498.

<sup>2)</sup> Scott Russell, On Waves, Brit. Ass. Rep., 1844.

<sup>3)</sup> Kelvin, см. прим. выше, стр. 574.

Если предположить, что  $\theta$  изменяется пропорционально  $\cos(\sigma t + \varepsilon)$ , то получим

$$\sigma^2 = \frac{8\pi}{48 - 3\pi^2} \cdot \frac{g}{h}, \quad (3)$$

или  $\sigma = 1,169 \left(\frac{g}{a}\right)^{1/2}$ .

В случае прямоугольного поперечного сечения ширины  $2a$  и глубины  $a$  частота определяется из (4) § 257, где мы должны положить  $k = \frac{\pi}{2a}$ , согласно § 178, и  $h = a$ . Это дает

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \pi \operatorname{th} \frac{1}{2} \pi \cdot \frac{g}{a}, \quad (4)$$

или  $\sigma = 1,200 \left(\frac{g}{a}\right)^{1/2}$ . В рассматриваемой задаче частота будет меньше, так как кинетическая энергия, зависящая от данного движения поверхности, будет больше, в то время как потенциальная энергия данной деформации останется той же самой; ср. § 45.

**§ 260.** Мы можем теперь рассмотреть свободные колебания воды между двумя поперечными перегородками в горизонтальном канале постоянного сечения. Перед тем как переходить к частным случаям, исследуем пока общий характер математической задачи.

Если ось  $x$  будет параллельна длине, а начало координат взято на одном из концов, то потенциал скоростей, относящийся к одному из нормальных видов колебаний, может быть представлен по теории Фурье в виде

$$\varphi = (P_0 + P_1 \cos kx + P_2 \cos 2kx + \dots + P_s \cos skx + \dots) \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (1)$$

где  $k = \frac{\pi}{l}$ , если  $l$  обозначает длину секции. Коэффициенты  $P_s$  будут функциями от  $y$  и  $z$ . Если ось  $z$  проведем вертикально вверх, а ось  $y$  горизонтально, перпендикулярно к длине канала, то вид этих функций и допустимые значения  $\sigma$  будут определяться из уравнения непрерывности

$$\Delta \varphi = 0 \quad (2)$$

и условий, что на стенках

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad (3)$$

а на свободной поверхности

$$\sigma^2 \varphi = g \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (4)$$

<sup>1)</sup> Lamb, Hydrodynamics, 2-е изд. (1895). Рэлей в качестве лучшего приближенного значения находит  $\sigma = 1,1644 \left(\frac{g}{a}\right)^{1/2}$ ; см. Phil. Mag. (5), XLVII, 566 (1899) [Papers, IV, 407].

Так как  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  должно обращаться в нуль для  $x=0$  и  $x=l$ , то, согласно известным теоремам <sup>1)</sup>, каждый член в выражении (1) должен удовлетворять условиям (2), (3), (4) независимо от других; поэтому мы должны иметь

$$\frac{\partial^2 P_s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_s}{\partial z^2} - s^2 k^2 P_s = 0, \quad (5)$$

а на продольных границах

$$\frac{\partial P_s}{\partial n} = 0 \quad (6)$$

и на свободной поверхности

$$\sigma^2 P_s = g \frac{\partial P_s}{\partial z}. \quad (7)$$

Член  $P_0$  представляет чисто поперечные колебания, такие, которые были рассмотрены в § 258. Другие члены  $P_s \cos skx$  дают ряд нормальных колебаний с  $s$  узловыми линиями, направленными поперек канала, и узловыми линиями  $0, 1, 2, 3, \dots$ , параллельными его длине.

Для наших целей будет достаточно рассмотреть член  $P_1 \cos kx$ . Очевидно, что выражение

$$\varphi = P_1 \cos kx \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (8)$$

с соответственно подобранной формой  $P_1$  и тем значением  $\sigma$ , которое определяется по указанному выше способу, представляет потенциал скоростей возможной системы стоячих волн с произвольной длиной волны  $\frac{2\pi}{k}$  в неограниченном канале заданного сечения. Как указано в § 129, наложением двух соответственно сопряженных систем стоячих волн этого типа мы теперь можем образовать систему прогрессивных волн, для которых

$$\varphi = P_1 \cos(kx \mp \sigma t). \quad (9)$$

Отсюда мы заключаем, что прогрессивные волны простого гармонического профиля с фиксированными длинами волн принадлежат к числу возможных для бесконечно длинного канала с произвольным постоянным сечением.

Мы можем идти и далее, подтверждая возможность бесконечного числа нормальных типов с произвольно заданной длиной волны и со скоростями распространения, изменяющимися от некоторого наименьшего значения до бесконечности. Однако, те типы, в которых имеют место продольные узловые линии на некотором расстоянии от боков, представляют с рассматриваемой точки зрения только подчиненное значение.

<sup>1)</sup> См. Stokes, On the Critical Values of the Sums of Periodic Series, Camb. Trans., VIII (1847) [Papers, I, 236].

Особо следует отметить два предельных случая, а именно тот, где длина волны очень велика, и тот, где она мала в сравнении с размерами поперечного сечения.

Наиболее интересен первый случай, не имеющий продольных узловых линий и охватываемый общей теорией „длинных“ волн, изложенной в §§ 169, 170. В этом случае мы можем получить только дополнительные сведения, например, о виде гребней волн в поперечном к каналу направлении.

В случае сравнительно коротких волн более важный тип есть тот, в котором гребни располагаются поперек канала с постепенно изменяющейся высотой и скорость распространения волн совпадает со скоростью свободных волн на глубокой воде, определяемой по формуле (6) § 229.

Имеются и другие короткие волны, которые проявляются тогда, когда берега будут наклонными; эти волны мы можем отличать названием „краевых волн“, так как их амплитуда уменьшается по экспоненциальному закону при увеличении расстояния от берега. Действительно, если амплитуда на краях будет лежать в пределах, допускаемых нашим приближением, то она становится мало заметной на расстоянии, проекция которого на откос превышает длину волны. Скорость волны здесь будет *меньше* скорости волн той же длины на глубокой воде. Поэтому нет оснований считать этот тип волн очень важным.

Общая формула для этих краевых волн была дана Стоксом <sup>1)</sup>. Выбирая начало на одном крае, ось  $z$  вертикально вверх, ось  $y$  перпендикулярно к каналу и рассматривая ширину как сравнительно бесконечно большую, указанную формулу можно представить в виде

$$\varphi = He^{-k(y \cos \beta - z \sin \beta)} \cos k(x - ct), \quad (10)$$

где  $\beta$  есть угол наклона берега к горизонту и

$$c = \left( \frac{g}{k} \sin \beta \right)^{1/2}. \quad (11)$$

Читатель без труда сам может проверить этот результат.

**§ 261.** Приступим теперь к рассмотрению некоторых частных случаев. Мы будем исследовать вопрос только о стоячих волнах в бесконечно длинном канале или в его секции, ограниченной двумя поперечными сечениями, расстояние между которыми есть кратное половине произвольной длины волны  $\left(\frac{2\pi}{k}\right)$ , но сами исследования можно легко видоизменить, подобно тому как в предшествующем параграфе, чтобы их распространить и на случай прогрессивных волн. Иногда будем формулировать результаты через скорость распространения волн.

<sup>1)</sup> Stokes, Report on Recent Researches in Hydrodynamics, Brit. Ass. Rep., 1846 [Papers, I, 167].

1. Решение для случая прямоугольного сечения при горизонтальном дне и вертикальных боковых сторонах может быть написано сразу на основании результатов §§ 190, 257. Узловые линии в этом случае суть продольные и поперечные, если только нет совпадения периодов двух различных типов, когда возможны более сложные формы. Последнее, например, будет встречаться в случае квадратного бассейна.

2. В случае канала, сечение которого состоит из двух прямолинейных отрезков, наклоненных под углом  $45^\circ$  к вертикали, мы будем иметь, прежде всего, тип, открытый Келландом, т. е. если ось  $x$  совпадает с линией дна канала, то

$$\varphi = A \operatorname{ch} \frac{ky}{\sqrt{2}} \operatorname{ch} \frac{kz}{\sqrt{2}} \cos kx \cos (\sigma t + \varepsilon). \quad (1)$$

Это выражение, очевидно, удовлетворяет уравнению  $\nabla^2 \varphi = 0$  и для  $y = \pm z$  соответственно дает

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \pm \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (2)$$

Условие на поверхности [(4) § 260] тогда будет давать

$$\sigma^2 = \frac{gk}{\sqrt{2}} \operatorname{th} \frac{kh}{\sqrt{2}}, \quad (3)$$

где  $h$  — возвышение свободной поверхности над линией дна. Если мы положим  $\sigma = kc$ , то скорость волны будет представляться формулой

$$c^2 = \frac{g}{k\sqrt{2}} \operatorname{th} \frac{kh}{\sqrt{2}}, \quad (4)$$

где  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , а  $\lambda$  — длина волны.

Когда  $\frac{h}{\lambda}$  будет мало, формула (4) приводится к выражению

$$c = \left( \frac{1}{2} gh \right)^{1/2}, \quad (5)$$

что находится в согласии с (13) § 170, так как средняя глубина теперь обозначается через  $\frac{1}{2} h$ . Если же, с другой стороны,  $\frac{h}{\lambda}$  будет значительно большим, то будем иметь

$$c^2 = \frac{g}{k\sqrt{2}}. \quad (6)$$

Формула (1) в этом случае обнаруживает быстрое возрастание амплитуды при подходе к боковым стенкам. В действительности мы будем иметь здесь пример „краевых волн“, и скорость волны будет совпадать с той скоростью, которую мы получим из формулы Стокса, полагая в ней  $\beta = 45^\circ$ .

Остальные типы колебаний, симметричные по отношению к срединной плоскости  $y = 0$ , будут представляться формулой

$$\varphi = C (\operatorname{ch} \alpha y \cos \beta z + \cos \beta y \operatorname{ch} \alpha z) \cos kx \cos (\sigma t + \varepsilon), \quad (7)$$

при соответственном подборе  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\sigma$ . Это выражение удовлетворяет условию (2), а уравнение непрерывности будет давать

$$\alpha^2 - \beta^2 = k^2, \quad (8)$$

Граничное условие (4) § 260 будет удовлетворено для  $z=h$ , если потребовать

$$\sigma^2 \operatorname{ch} ah = g\alpha \operatorname{sh} ah, \quad \sigma^2 \cos \beta h = -g\beta \sin \beta h. \quad (9)$$

Отсюда получаем

$$ah \operatorname{tg} h ah + \beta h \operatorname{tg} \beta h = 0. \quad (10)$$

Таким образом, значения  $\alpha$  и  $\beta$  определяются из соотношений (8) и (10), а соответственное значение  $\sigma$  будет даваться тем или другим уравнением (9). Если мы на момент положим

$$x = ah, \quad y = \beta h, \quad (11)$$

то корни уравнений (8) и (10) будут представляться точками пересечения кривой

$$x \operatorname{tg} hx + y \operatorname{tg} y = 0, \quad (12)$$

общий вид которой легко начертить, с гиперболой

$$x^2 - y^2 = k^2 h^2. \quad (13)$$

Действительных решений будет бесконечное число, причем соответствующие значения  $\beta h$  располагаются во втором, четвертом, шестом ... квадрантах. Последние и дают соответственно 2, 4, 6, ... продольные узлы свободной поверхности. Если  $\frac{h}{\lambda}$  будет значительно большим, то приближенно  $\operatorname{th} ah = 1$  и  $\beta h$  будет (при простейшем типе колебаний этого класса) немного превышать значение  $\frac{\pi}{2}$ . Два продольных узла в этом случае очень близко подходят к краям с уменьшением  $\lambda$ , тогда как скорость волны становится практически равной скорости волны длины  $\lambda$  на глубокой воде. В качестве числового примера положим  $\beta h = 1,1 \cdot \frac{\pi}{2}$ , тогда найдем

$$ah = 10,910, \quad kh = 10,772, \quad c = 1,0064 \left( \frac{g}{k} \right)^{1/2}.$$

Расстояние одной из узловых линий от ближайшего края будет тогда  $0,12h$ .

Мы можем, далее, рассмотреть асимметричные типы. Решение такого типа, аналогичное типу Келланда, было замечено Гринхиллом (см. выше). Оно представляется в виде

$$\varphi = A \operatorname{sh} \frac{ky}{\sqrt{2}} \operatorname{sh} \frac{kz}{\sqrt{2}} \cos kx \cos (\sigma t + \varepsilon), \quad (14)$$

где

$$\sigma^2 = \frac{gk}{\sqrt{2}} \operatorname{ctgh} \frac{kh}{\sqrt{2}}. \quad (15)$$

Когда  $kh$  мало, последнее дает  $\sigma^2 = \frac{g}{h}$ , так что частота будет значительно больше в сравнении с той, которая получается из теории „длинных“ волн. В действительности будут иметь место главным образом поперечные колебания с очень постепенным изменением фаз при продвижении вдоль канала. И, конечно, средняя линия поверхности будет узловой. Если, с другой стороны,  $kh$  будет велико, то мы получим „краевые волны“, как и в случае решения Келланда.



Остальные асимметричные колебания представляются формулой

$$\varphi = A (\operatorname{sh} \alpha y \sin \beta z + \sin \beta y \operatorname{sh} \alpha z) \cos kx \cos (\sigma t + \epsilon). \quad (16)$$

Из этой формулы тем же способом, что и раньше, получим

$$\alpha^2 - \beta^2 = k^2, \quad (17)$$

и

$$\sigma^2 \operatorname{sh} \alpha h = g \alpha \operatorname{ch} \alpha h, \quad \sigma^2 \sin \beta h = g \beta \cos \beta h, \quad (18)$$

где

$$\alpha h \operatorname{ctgh} \alpha h = \beta h \operatorname{ctg} \beta h. \quad (19)$$

Имеется бесконечное число решений, для которых значения  $\beta h$  лежат в третьем, пятом, седьмом, ... квадрантах и представляют 3, 5, 7, ... продольные узлы, один из которых является центральным.

3. Случай канала с боковыми сторонами, наклоненными к вертикали под углом в  $60^\circ$ , был изучен Макдональдом <sup>1)</sup>. Он установил очень широкий тип, к которому можно притти следующим образом.

Выражение

$$\varphi = P \cos kx \cos (\sigma t + \epsilon), \quad (20)$$

где

$$P = A \operatorname{ch} kz + B \operatorname{sh} kz + \operatorname{ch} \frac{ky\sqrt{3}}{2} \left( C \operatorname{ch} \frac{kz}{2} + D \operatorname{sh} \frac{kz}{2} \right), \quad (21)$$

очевидно, удовлетворяет уравнению неразрывности. Легко показать, что оно для  $y = \pm \sqrt{3}z$  дает

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \pm \sqrt{3} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

при условии

$$C = 2A, \quad D = -2B. \quad (22)$$

Граничное условие (4) § 260 будет тогда удовлетворено, если

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma^2}{gk} (A \operatorname{ch} kh + B \operatorname{sh} kh) &= A \operatorname{sh} kh + B \operatorname{ch} kh, \\ \frac{2\sigma^2}{gk} \left( A \operatorname{ch} \frac{kh}{2} - B \operatorname{sh} \frac{kh}{2} \right) &= A \operatorname{sh} \frac{kh}{2} - B \operatorname{ch} \frac{kh}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Первое из них эквивалентно соотношениям

$$A = H \left( \operatorname{ch} kh - \frac{\sigma^2}{gk} \operatorname{sh} kh \right), \quad B = H \left( \frac{\sigma^2}{gk} \operatorname{ch} kh - \operatorname{sh} kh \right), \quad (24)$$

а последнее приводится тогда к уравнению

$$2 \left( \frac{\sigma^2}{gk} \right)^2 - 3 \frac{\sigma^2}{gk} \operatorname{ctgh} 3 \frac{kh}{2} + 1 = 0. \quad (25)$$

Таким образом, подставляя из (22) и (24) в (21), получим

$$\begin{aligned} P = H \left\{ \operatorname{ch} k(z-h) + \frac{\sigma^2}{gk} \operatorname{sh} k(z-h) \right\} + \\ + 2H \operatorname{ch} \frac{ky\sqrt{3}}{2} \left\{ \operatorname{ch} k \left( \frac{z}{2} + h \right) - \frac{\sigma^2}{gk} \operatorname{sh} k \left( \frac{z}{2} + h \right) \right\}. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Macdonald, Waves in Canals, Proc. Lond. Math. Soc., XXV, 101 (1894);

Формулы (25) и (26) и были установлены Макдональдом, но другим способом. Граничное значение  $P$  представляется в виде

$$P = H \left\{ 1 + 2 \operatorname{ch} \frac{ky \sqrt{3}}{2} \left( \operatorname{ch} \frac{3kh}{2} - \frac{\sigma^2}{gk} \operatorname{sh} \frac{3kh}{2} \right) \right\}. \quad (27)$$

Уравнение (25) является квадратным относительно  $\frac{\sigma^2}{gk}$ . В случае волны, длина которой  $\left(\frac{2\pi}{k}\right)$  велика по отношению к  $h$ , будем иметь приближенно

$$\operatorname{ctgh} \frac{3kh}{2} = \frac{2}{3kh},$$

и корни (25) будут тогда приближенно равны

$$\frac{\sigma^2}{gk} = \frac{1}{2} kh \quad \text{и} \quad \frac{\sigma^2}{gk} = \frac{1}{kh}. \quad (28)$$

Если мы положим  $\sigma = kc$ , то первый результат дает  $c^2 = \frac{1}{2} gh$  в согласии с обычной теорией „длинных волн“ (§§ 169, 170). В этом случае формула (27) дает приближенно  $P = 3H$ ; последнее не зависит от  $y$ ; это значит, что гребни волны будут почти прямолинейными. Второй корень (28) дает  $c^2 = \frac{g}{k^2 h}$ , т. е. представляет значительную большую „фазовую скорость“, но ничего парадоксального в этом нет. Групповая скорость на самом деле будет сравнительно малой. При дальнейшем исследовании можно найти, что поперечные сечения волн будут по форме параболическими и что имеются две узловые линии, параллельные длине канала. Период колебаний будет почти в точности совпадать с периодом симметричных поперечных колебаний, о которых шла речь в § 258.

Если, с другой стороны, длина волны будет короткой в сравнении с поперечными размерами канала, то  $kh$  будет велико и приближенно  $\operatorname{ctgh} \frac{3}{2} kh = 1$ . Тогда корни уравнения (25) будут приближенно

$$\frac{\sigma^2}{gk} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{\sigma^2}{gk} = \frac{1}{2}. \quad (29)$$

Первый корень дает примерно  $P = H$ , т. е. гребни волн будут прямолинейными, обнаруживая только небольшое изменение высот в направлении к боковым стенкам. Частота  $\sigma = (gk)^{1/2}$  в точности есть та частота, которую мы могли бы ожидать на основании общей теории волн на сравнительно глубокой воде.

Если мы в этом случае перенесем начало на один край, полагая  $z + h$  вместо  $z$  и  $y - \sqrt{3}h$  вместо  $y$ , и затем устремим  $h$  к бесконечности, то получим случай системы волн, перемещающихся параллельно берегу, который наклонен в сторону течения под углом в  $30^\circ$  к горизонту. В результате имеем

$$\varphi = H \left\{ e^{kz} + e^{-\frac{1}{2}k(y\sqrt{3}+z)} - 3e^{-\frac{1}{2}k(y\sqrt{3}-z)} \right\} \cos kx \cos (\sigma t + \epsilon), \quad (30)$$

где  $\sigma = (gk)^{1/2}$ . Эта формула допускает непосредственную проверку. На расстоянии длины волны или на таком же расстоянии от берега значение  $\varphi$  вблизи поверхности практически будет приводиться к выражению

$$\varphi = H e^{kz} \cos kx \cos (\sigma t + \epsilon), \quad (31)$$

что согласуется с § 228. Вблизи края возвышение изменяет знак, так как там имеется продольная узловая линия, для которой

$$\frac{\sqrt{3}}{2} ky = \ln 2, \quad (32)$$

или  $\frac{y}{\lambda} = 0,127$ .

Второй из двух корней (29) дает систему краевых волн, и результаты будут эквивалентны тем результатам, которые получатся, полагая  $\beta = 30^\circ$  в формуле Стокса <sup>1)</sup>.

### Колебания сферической массы жидкости.

§ 262. Теорией гравитационных колебаний массы жидкости относительно ее сферической формы мы обязаны Кельвину <sup>2)</sup>.

Выбирая начало в центре и обозначая радиус-вектор произвольной точки свободной поверхности через  $a + \zeta$ , где  $a$  — радиус в невозмущенном состоянии, мы принимаем

$$\zeta = \sum_1^{\infty} \zeta_n, \quad (1)$$

где  $\zeta_n$  есть поверхностная сферическая функция целого порядка  $n$ . Уравнение неразрывности  $\nabla^2 \varphi = 0$  удовлетворяется выражением

$$\varphi = \sum_1^{\infty} \frac{r^n}{a^n} S_n, \quad (2)$$

где  $S_n$  — сферическая поверхностная функция, а кинематическое условие

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad (3)$$

будучи удовлетворено при  $r = a$ , дает

$$\frac{\partial \zeta_n}{\partial t} = - \frac{n}{a} S_n. \quad (4)$$

На свободной поверхности гравитационный потенциал (см. § 200) имеет значение

$$\Omega = - \frac{4\pi\gamma a^3}{3r} - \sum_1^{\infty} \frac{4\pi\gamma a}{2n+1} \zeta_n, \quad (5)$$

<sup>1)</sup> О распространении на другие углы наклона берега смотреть Н а п с о н, Proc. Roy. Soc., A, CXI, 491 (192f).

<sup>2)</sup> W. Thomson, Dynamical Problems regarding Elastic Spheroidal Shells and Spheroids of Incompressible Liquid, Phil. on Trans., 1863 [Papers, III, 384].

где  $g$  есть гравитационная постоянная. Полагая

$$g = \frac{4}{3} \pi \rho g a, \quad r = a + \sum \zeta_n,$$

получим

$$\Omega = \text{const.} + g \sum_1^{\infty} \frac{2(n-1)}{2n+1} \zeta_n. \quad (6)$$

Подставляя из (2) и (6) в уравнение давлений

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Omega + \text{const.} \quad (7)$$

и принимая  $p$  постоянным вдоль поверхности, мы получим

$$\frac{\partial S_n}{\partial t} = \frac{2(n-1)}{2n+1} g \zeta_n. \quad (8)$$

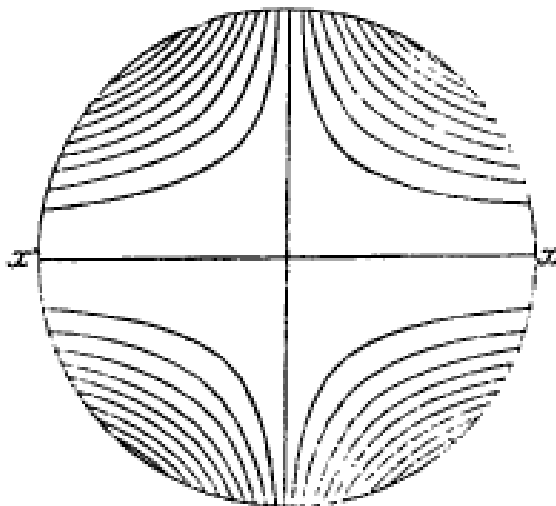
Исключая  $S_n$  из (4) и (8), будем иметь

$$\frac{\partial^2 \zeta_n}{\partial t^2} + \frac{2n(n-1)}{2n+1} \frac{g}{a} \zeta_n = 0. \quad (9)$$

Последняя формула показывает, что  $\zeta_n$  пропорционально  $\cos(\sigma_n t + \varepsilon)$ , где

$$\sigma_n^2 = \frac{2n(n-1)}{2n+1} \frac{g}{a}. \quad (10)$$

При одинаковой плотности жидкости  $g$  пропорционально  $a$ ; это значит, что частота не зависит от размера шара.



Фиг. 69.

Формула дает  $\sigma_1 = 0$ , как и следовало ожидать, так как при малых деформациях, представляемых сферической функцией первого порядка, поверхность остается сферической и период, следовательно, будет бесконечно длинным.

Для случая  $n = 2$ , или при эллипсоидальной деформации, длина изохронного простого маятника становится равной  $\frac{4}{5} a$  или составляет один с четвертью радиуса Земли для однородного жидкого шара той же массы и того же диаметра, что и Земля; следовательно, для этого

случая или для какого-либо однородного жидкого шара с  $5^{1/2}$ -кратной плотностью воды полупериод будет равен 47 мин. 12 сек.

„Стальной шар тех же размеров без взаимного притяжения своих частиц вряд ли мог бы колебаться так быстро, так как скорость плоских волн возмущения в стали составляет приблизительно только 3090 м

в секунду; с такой скоростью расстояние, равное диаметру Земли, нельзя пройти в меньшее время, чем 1 час 8 мин. 40 сек.<sup>1)</sup>

Когда поверхность совершает колебания вида *зонального* гармонического сфероида второго порядка, тогда уравнение линий тока представляется в виде  $x\omega^2 = \text{const.}$ , где  $\omega$  обозначает расстояние какой-либо точки от оси симметрии, которая принимается за ось  $x$  [см. (11) § 95]. Вид этих линий для ряда эквидистантных значений постоянного показан на фиг. 69.

**§ 263.** Эта проблема может быть также изучена очень компактно методом „нормальных координат“ (§ 168).

Кинетическая энергия представляется формулой

$$T = \frac{1}{2} \rho \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS, \quad (11)$$

где  $dS$  есть элемент поверхности  $r = a$ . Отсюда, если поверхность совершает колебания в виде  $r = a + \zeta_n$ , то, подставляя из формул (2) и (4) в (11), мы найдем

$$T = \frac{1}{2} \frac{\rho a}{n} \iint \dot{\zeta}_n^2 dS. \quad (12)$$

Чтобы найти потенциальную энергию, мы можем допустить, что внешняя поверхность сдвигается, чтобы принимать последовательно формы  $r = a + \theta \zeta_n$ , где  $\theta$  изменяется от 0 до 1. В каком-либо состоянии этого процесса гравитационный потенциал на поверхности, согласно (6), будет

$$\Omega = \text{const.} + \frac{2(n-1)}{2n+1} g\theta \zeta_n. \quad (13)$$

А тогда работа, потребная для приращения слоя толщины  $\zeta_n$  и  $\delta\theta$ , будет равна

$$\theta \delta\theta \frac{2(n-1)}{2n+1} g\rho \iint \zeta_n^2 dS. \quad (14)$$

Интегрируя от  $\theta = 0$  до  $\theta = 1$ , мы найдем

$$V = \frac{n-1}{2n+1} g\rho \iint \zeta_n^2 dS. \quad (15)$$

Результаты, отвечающие общей деформации (1), получаются представлением знака  $\sum$  суммирования по  $n$  в формулы (12) и (15), так как члены с произведениями поверхностных сферических функций разных порядков будут, согласно § 87, исчезать.

<sup>1)</sup> W. Thomson, см. выше. Точная теория колебаний упругой сферы для самого медленного колебания стального шара с размерами Земли дает период в 1 час 18 мин. См. работу „On the Vibrations of an Elastic Sphere“, Proc. Lond. Math. Soc., XIII, 212 (1882). Вибрации сферы с несжимаемым веществом при совместном влиянии притяжения и упругости были исследованы Bromwich, Proc. Lond. Math. Soc., XXX, 98 (1898). Влияние сжимаемости изучено Love, Some Problems of Geodynamics (Adams Prize Essay), Cambridge (1911), стр. 126.

Тот факт, что общие выражения для  $T$  и  $V$  приводятся к сумме квадратов, показывает, что деформация, отвечающая произвольной поверхностно-сферической функции, принадлежит к „нормальному типу“. Таким образом, принимая  $\zeta_n$  пропорциональной  $\cos(\sigma_n t + \varepsilon)$ , на основании того, что энергия  $T + V$  должна быть постоянной, мы снова приходим к результату (10).

В случае вынужденных колебаний, отвечающих потенциалу возмущения  $\Omega' \cos(\sigma t + \varepsilon)$ , который во всех точках внутри жидкости удовлетворяет уравнению  $\nabla^2 \Omega' = 0$ , мы должны предполагать  $\Omega'$  разложенной в ряд по объемным сферическим функциям. Если  $\bar{\zeta}_n$  будет равновесное возвышение, отвечающее члену порядка  $n$ , то при вынужденном колебании, согласно (14) § 168, мы будем иметь

$$\zeta_n = \frac{1}{1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_n^2}} \bar{\zeta}_n, \quad (16)$$

где  $\sigma$  — частота вынужденных колебаний, а  $\sigma_n$  — частота свободных колебаний того же типа, который представлен формулой (10).

Числовые результаты, приведенные выше для случая  $n = 2$ , показывают, что для невращающегося жидкого шара с теми же размерами и с той же средней плотностью, что и у Земли, вынужденные колебания, характер и периоды которых совпадают с действительными лунными и солнечными приливами, будут иметь практически те амплитуды, которые фигурируют в статической теории.

**§ 264.** Исследование легко распространить на случай океана произвольной постоянной глубины, покрывающего симметричное сферическое ядро.

Пусть  $b$  — радиус ядра и  $a$  — радиус внешней поверхности. Пусть вид поверхности представляется уравнением

$$r = a + \sum_1^{\infty} \zeta_n, \quad (1)$$

тогда для потенциала скоростей мы принимаем

$$\varphi = \left\{ (n+1) \frac{r^n}{b^n} + n \frac{b^{n+1}}{r^{n+1}} \right\} S_n, \quad (2)$$

где коэффициент подобран так, чтобы для  $r = b$  получилось  $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$ .

Условие, что для  $r = a$

$$\frac{\partial \zeta_n}{\partial t} = - \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad (3)$$

даст

$$\frac{\partial \zeta_n}{\partial t} = -n(n+1) \left\{ \left( \frac{a}{b} \right)^n - \left( \frac{b}{a} \right)^{n+1} \right\} \frac{S_n}{a}. \quad (4)$$

Для гравитационного потенциала на свободной поверхности (1) мы будем иметь

$$\Omega = -\frac{4\pi\rho_0 a^3}{3r} - \sum_1^{\infty} \frac{4\pi\rho a}{2n+1} \zeta_n, \quad (5)$$

где  $\rho_0$  — средняя плотность всей массы. Отсюда, полагая  $g = \frac{4}{3}\pi\rho_0 a$ , мы найдем

$$\Omega = \text{const} + g \sum_1^{\infty} \left(1 - \frac{3}{2n+1} \frac{\rho}{\rho_0}\right) \zeta_n. \quad (6)$$

Условие для давления на свободной поверхности тогда будет давать

$$\left\{ (n+1) \left(\frac{a}{b}\right)^n + n \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} \right\} \frac{\partial S_n}{\partial t} = \left(1 - \frac{3}{2n+1} \frac{\rho}{\rho_0}\right) g \zeta_n. \quad (7)$$

При исключении  $S_n$  из уравнений (4) и (7) получим

$$\frac{\partial^2 \zeta_n}{\partial t^2} + \sigma_{n+1}^2 \zeta_n = 0, \quad (8)$$

где

$$\sigma_n^2 = \frac{n(n+1) \left\{ \left(\frac{a}{b}\right)^n - \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} \right\}}{(n+1) \left(\frac{a}{b}\right)^n + n \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}} \left(1 - \frac{3}{2n+1} \frac{\rho}{\rho_0}\right) \frac{g}{a}. \quad (9)$$

Случай  $n=1$  является исключением, так как при вычислениях ядро предполагалось неподвижным. Однако, оказывается, что  $\sigma_1$  обращается в нуль при  $\rho = \rho_0$  и становится минимым при  $\rho > \rho_0$ , как и следовало ожидать. Поправка едва ли будет значительной, но все же можно показать, что если ядро не будет закреплено, то результат, получаемый из уравнения (9)

$$\sigma_1^2 = \frac{1 - \frac{b^3}{a^3}}{1 + \frac{b^3}{a^3}} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) \frac{g}{a}, \quad (10)$$

должен быть увеличен в отношении

$$\frac{1 + \frac{b^3}{2a^3}}{1 + \frac{b^3}{2a^3} - \frac{m}{M}},$$

где  $M$  есть вся масса, а  $m$  — масса только одного океана. Заключение же об устойчивости остается неизменным.

Если в выражении (9) положить  $b=0$ , то мы воспроизведем результат предшествующего параграфа. С другой стороны, если глубина океана будет мала в сравнении с радиусом, то, полагая  $b=a-h$  и пренебрегая квадратом  $h/a$ , мы найдем

$$\sigma_n^2 = n(n+1) \left(1 - \frac{3}{2n+1} \frac{\rho}{\rho_0}\right) \frac{gh}{a^2} \quad (11)$$

при условии, что  $n$  будет малым по отношению к  $a/h$ . А это согласуется с результатом Лапласа, полученным более прямым способом в § 200.

Но если  $n$  будет сравнимым с  $a/h$ , то мы будем иметь, полагая  $n = ka$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(1 - \frac{h}{a}\right)^{-ka} = e^{kh},$$

а тогда (9) приводится к тому же выражению, как и в § 228.

$$\sigma^2 = gk \operatorname{th} kh. \quad (12)$$

Более того, выражение (2) для потенциала скоростей, если мы положим  $r = a + z$ , принимает вид

$$\varphi = \varphi_1 \operatorname{ch} k(z + h), \quad (13)$$

где  $\varphi_1$  есть функция координат на поверхности, которую теперь мы можем рассматривать как плоскость (ср. § 257).

Формулы для кинетической и потенциальной энергии, легко устанавливаемые по тому же методу, как и в предшествующем параграфе, будут

$$T = \frac{1}{2} \rho a \sum_1^{\infty} \frac{n(n+1) \left(\frac{a}{b}\right)^n + n \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{n(n+1) \left\{ \left(\frac{a}{b}\right)^n - \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} \right\}} \iint \dot{\zeta}_n^2 dS, \quad (14)$$

$$V = \frac{1}{2} \rho g \sum_1^{\infty} \left(1 - \frac{3}{2n+1} \frac{\rho}{\rho_0}\right) \iint \dot{\zeta}_n^2 dS. \quad (15)$$

Последний результат снова показывает, что равновесная конфигурация есть конфигурация с минимальным значением потенциальной энергии и будет, следовательно, наверно устойчивой, если только  $\rho < \rho_0$ .

В случае, когда глубина является относительно малой, а  $n$  является конечным, полагая  $b = a - h$ , мы получим

$$T = \frac{1}{2} \frac{\rho a^2}{h} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \iint \dot{\zeta}_n^2 dS, \quad (16)$$

тогда как выражение для  $V$ , естественно, останется неизменным.

Если амплитуды гармоник  $\zeta_n$  рассматривать как обобщенные координаты, то формула (16) показывает, что при сравнительно малых глубинах „коэффициенты инерции“ изменяются обратно пропорционально глубине. Мы имели и другие иллюстрации эффекта связей при нашем рассмотрении приливных волн.

### Капиллярность.

§ 265. Роль, которую играет в некоторых случаях движения жидкости молекулярное сцепление, признавалась давно в общих чертах, но только сравнительно недавно этот вопрос был подчинен точному математическому анализу. Мы приведем некоторые результаты замечательных исследований Кельвина и Рэля в этом вопросе.

В нашу задачу не входит дать физическую теорию этого вопроса <sup>1)</sup>. Для наших целей достаточно будет знать, что свободная

<sup>1)</sup> См. Максвелл, Encyc. Britann., статья „Capillary Action“ [Papers, Cambridge, 1890, II, 541], где есть ссылки на более ранних авторов. Далее, Rayleigh, On the Theory of Surface Forces, Phil. Mag. (5), XXX, 285, 456 (1890). [Papers, III, 397].



поверхность жидкости или, в более общем случае, поверхность раздела двух несмешивающихся жидкостей ведет себя так, как если бы она находилась в состоянии равномерного *натяжения*, причем натяжение между двумя соседними частями поверхности, отнесенное к единице длины общей линии раздела, зависит только от природы обеих жидкостей и от температуры. Мы будем обозначать это так называемое „поверхностное натяжение“ буквой  $T_1$ . Размерность этой величины в абсолютной системе единиц есть  $MT^{-2}$ . Значение ее в системе единиц CGS (дина на сантиметр) для поверхности раздела вода — воздух при температуре  $20^\circ C$  оказывается приблизительно равным  $74^1$ ); при возрастании температуры это значение несколько убывает. Соответствующее значение для поверхности раздела ртуть — воздух приблизительно равно 540.

Можно высказать следующее положение, равносильное тому, что было изложено:

„Свободная“ энергия каждой системы, к которой принадлежит рассматриваемая поверхность, содержит член, пропорциональный площади поверхности, причем значение этой „поверхностной энергии“ (как она обычно называется), отнесенное к единице поверхности, равно  $T_1^2$ ). Так как условие устойчивости равновесия заключается в том, что свободная энергия должна быть наименьшей, то поверхность стремится сокращаться до тех пор, пока это оказывается совместимым с другими условиями задачи.

Существенное изменение в наших прежних методах, которое оказывается необходимым, если мы принимаем во внимание поверхностное натяжение, заключается в предложении, что давление жидкости на поверхности раздела испытывает теперь разрыв; именно, мы будем иметь

$$p - p' = T_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где  $p, p'$  обозначают давления на обеих сторонах поверхности, вблизи от нее, а  $R_1, R_2$  суть главные радиусы кривизны поверхности, причем радиус нужно считать отрицательным, когда соответствующий центр кривизны лежит на стороне, отмеченной значком штрих.

Эту формулу можно легко получить, определяя компоненты в направлении нормали к поверхности сил, действующих на прямоугольный элемент тонкого поверхностного слоя, ограниченный линиями кривизны; но здесь нет необходимости приводить это доказательство, которое можно найти почти во всех современных учебниках по гидростатике.

<sup>1)</sup> Rayleigh, On the Tension of Water-Surfaces, Clean and Contaminated, investigated by the method of Ripples, Phil. Mag. (5), XXX, 386 (1894); Papers, III, 394; Pedersen, Phil. Trans. A, CCVII, 341 (1907); Bohr, Phil. Trans. A, CCIX, 281 (1909).

<sup>2)</sup> Различие между „свободной“ и „внутренней“ энергией основывается на термодинамических принципах. В процессах с постоянной температурой и свободным теплообменом речь идет о свободной энергии.

§ 266. Простейшая задача, с которой мы можем начать, есть задача о волнах на плоской поверхности, образующей общую границу двух покоящихся жидкостей.

Если мы возьмем начало на этой плоскости, а ось  $y$  перпендикулярно к ней, то можем положить потенциалы скоростей, отвечающих простым гармоническим колебаниям поверхности раздела, равными

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= C e^{ky} \cos kx \cos(\sigma t + \varepsilon), \\ \varphi' &= C' e^{-ky} \cos kx \cos(\sigma t + \varepsilon), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

причем первое равенство относится к той стороне, где  $y$  отрицательно, а второе — к той стороне, где  $y$  положительно. В самом деле, эти выражения удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\varphi = 0, \quad \Delta\varphi' = 0$$

и дают для  $y = \mp \infty$  скорость, равную нулю.

Соответствующие перемещения точек поверхности в направлении оси  $y$  будут иметь вид

$$\eta = a \cos kx \sin(\sigma t + \varepsilon), \quad (2)$$

а условие что при  $y=0$  должно быть

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\varphi'}{\partial y},$$

даст

$$\sigma a = -kC = kC'. \quad (3)$$

Если мы на мгновение оставим в стороне силу тяжести, то переменная часть давления будет дана равенствами

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\sigma^2 a}{k} e^{ky} \cos kx \sin(\sigma t + \varepsilon), \\ \frac{p'}{\rho'} &= \frac{\partial\varphi'}{\partial t} = -\frac{\sigma^2 a}{k} e^{-ky} \cos kx \sin(\sigma t + \varepsilon). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Чтобы найти условие, которому должно удовлетворять давление на общей поверхности, вычислим силы, действующие в направлении оси  $y$  на отрезок шириной  $\delta x$ . Давления жидкости на обеих сторонах имеют результирующую  $(p' - p) \delta x$ , разность же напряжений, параллельных оси  $y$ , для обоих краев равна  $\delta \left( T' \frac{\partial\eta}{\partial x} \right)$ . Мы получаем, таким образом, уравнение

$$p - p' + T_1 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0, \quad (5)$$

которое должно иметь место, когда приближенно  $y=0$ . Можно было бы прямо написать это уравнение как частный случай обще-

то граничного условия (§ 265). Подставляя из (2) и (4) в (5), находим

$$\sigma^2 = \frac{T_1 k^2}{e + e'} ; \quad (6)$$

это уравнение определяет скорость для колебаний с длиной волны  $\frac{2\pi}{k}$ .

Кинетическая энергия жидкости, отнесенная к длине волны, если жидкость заключена между двумя плоскостями, параллельными плоскостям  $xu$  и отстоящими друг от друга на единицу длины, равна

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_0^\lambda \left[ \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{y=0} dx - \frac{1}{2} \rho' \int_0^\lambda \left[ \varphi' \frac{\partial \varphi'}{\partial y} \right]_{y=h} dx. \quad (7)$$

Если мы примем

$$\eta = a \cos kx, \quad (8)$$

где  $a$  зависит только от  $t$ , и положим, имея в виду кинематические условия,

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= -k^{-1} a e^{ky} \cos kx, \\ \varphi' &= k^{-1} a e^{-hy} \cos kx, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

то получим

$$T = \frac{1}{4} (e + e') k^{-1} a^2 \lambda. \quad (10)$$

Далее, потенциальная энергия, соответствующая растяжению поверхности раздела, будет равна

$$V = T_1 \int_0^\lambda \left\{ 1 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right\}^{1/2} dx - T_1 \lambda = \frac{1}{2} T_1 \int_0^\lambda \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (11)$$

Подставляя значение  $\eta$  из (8), получим

$$V = \frac{1}{4} T_1 k^2 a^2 \lambda. \quad (12)$$

Чтобы получить среднюю энергию как кинетическую, так и потенциальную на единицу площади поверхности раздела, мы должны отбросить множитель  $\lambda$ .

Если предположим, что  $a$  пропорционально  $\cos(\sigma t + \varepsilon)$ , где  $\sigma$  определяется формулой (6), то увидим, что полная энергия  $T + V$  будет постоянной. С другой стороны, полагая

$$\eta = \sum (a \cos kx + \beta \sin kx). \quad (13)$$

легко увидим, что выражения для  $T$  и  $V$  приведутся к суммам квадратов  $a$ ,  $\beta$  и, соответственно,  $a$ ,  $\beta$  с постоянными коэффициентами, так что величины  $a$ ,  $\beta$  суть „нормальные координаты“. Тогда общая теория § 168 независимо приводит к формуле (6) для скорости.

Если мы объединим вместе, как в § 229, две системы стоячих волн, то получим прогрессивную систему волн

$$\eta = a \cos (kx \mp \sigma t), \quad (14)$$

которая движется со скоростью

$$c = \frac{\sigma}{k} = \left( \frac{T_1 k}{\rho + \rho'} \right)^{1/2}; \quad (15)$$

выражая скорость через длину волны, будем иметь

$$c = \left( \frac{2\pi T_1}{\rho + \rho'} \right)^{1/2} \lambda^{-1/2}. \quad (16)$$

Заслуживает замечания отличие этого результата от результата § 229; если длина волны убывает, то период убывает еще быстрее, так что волновая скорость *возрастает*.

Так как  $c$  изменяется как  $\lambda^{-1/2}$ , то групповая скорость на основании (3) § 236 равна

$$U = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} = \frac{3}{2} c. \quad (17)$$

Представляет интерес проверка соотношения между групповой скоростью и скоростью переноса энергии.

Полагая

$$\eta = a \cos k (ct - x), \quad (18)$$

находим на основании формул (10), (12) для общей энергии на единицу поверхности раздела выражение

$$\frac{1}{4} (\rho + \rho') kc^2 a^2 + \frac{1}{4} T_1 k^2 a^2 = \frac{1}{2} (\rho + \rho') kc^2 a^2. \quad (19)$$

Средняя работа, произведенная в единицу времени давлением жидкости на плоскость, перпендикулярную к оси  $x$ , может быть найдена при помощи вычисления, подобного вычислениям § 237, и оказывается равной

$$\frac{1}{4} (\rho + \rho') kc^2 a^2. \quad (20)$$

Работа поверхностного натяжения на такой плоскости, отнесенная к единице времени, будет равна

$$T_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \dot{\eta} = T_1 k^2 c a^2 \sin^2 k (ct - x),$$

и среднее значение ее есть

$$\frac{1}{2} T_1 k^2 c a^2 = \frac{1}{2} (\rho + \rho') kc^2 a^2. \quad (21)$$

Если сложим это выражение с выражением (20) и разделим потом на правую часть формулы (19), то в частном получится  $3/2$   $c$ , в согласии с формулой (17).

То обстоятельство, что групповая скорость для капиллярных волн превосходит скорость самих волн, помогает объяснить некоторые интересные явления, о которых речь будет позднее (§§ 271, 272).

В качестве числового примера рассмотрим случай свободной поверхности воды.

Полагая

$$e = 1, \quad e' = 0, \quad T_1 = 74,$$

получим следующие результаты (в сантиметрах и секундах)<sup>1)</sup>:

Длина волны	Волновая скорость	Частота
0,50	30	61
0,10	68	680
0,05	96	1 930

§ 267. Если ввести в рассмотрение силу тяжести, то общая поверхность в состоянии равновесия будет, конечно, горизонтальной плоскостью. Направив положительную ось  $y$  вверх, получим для определения давления на возмущенной поверхности раздела следующие приближенные формулы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{e} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - gy &= \left( \frac{\sigma^2}{k} - g \right) a \cos kx \sin (\sigma t + \epsilon), \\ \frac{p'}{e'} = \frac{\partial \varphi'}{\partial t} - gy &= - \left( \frac{\sigma^2}{k} + g \right) a \cos kx \sin (\sigma t + \epsilon). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

После подстановки в уравнение (5) § 266 получится

$$\sigma^2 = \frac{e - e'}{e + e'} gk + \frac{T_1 k^3}{e + e'}. \quad (2)$$

Если положим  $\sigma = kc$ , то найдем для квадрата скорости ряда прогрессивных волн выражение

$$c^2 = \frac{e - e'}{e + e'} \frac{g}{k} + \frac{T_1}{e + e'} k = \frac{1 - s}{1 + s} \left( \frac{g}{k} + T' k \right), \quad (3)$$

где обозначено

$$\frac{e'}{e} = s, \quad \frac{T_1}{e - e'} = T'. \quad (4)$$

В частных случаях  $T_1 = 0$  и соответственно  $g = 0$  мы опять получаем результаты §§ 231 и 266.

По отношению к формуле (3) нужно сделать несколько замечаний. Прежде всего, хотя значение  $\sigma$  постоянно возрастает, когда длина

<sup>1)</sup> Ср. W. Thomson, Papers, III, 520.

Изложенная теория дает объяснение той ряби, которую можно наблюдать на поверхности воды в стакане, когда этот стакан легкими ударами смоченным пальцем о край приводится в колебание. Следует, однако, заметить, что частота капиллярных волн в этом опыте оказывается *вдвое* больше частоты колебаний самого стакана; см. Rayleigh, On Maintained Vibrations. Phil. Mag. (5) XV, 229 (1883) [Papers, II, 183; Theory of Sound, 2 изд., гл. 20].

волны  $\left(\frac{2\pi}{k}\right)$  убывает от  $\infty$  до 0, однако, скорость волн, после того как она упадет до известного минимума, начинает опять возрастать. Значение этого минимума, которое мы обозначим  $c_m$ , определяется равенством

$$c_m^2 = \frac{1-s}{1+s} 2(gT')^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

и отвечает длине волны

$$\lambda_m = \frac{2\pi}{k_m} = 2\pi \sqrt{\frac{T'}{g}}. \quad (6)^1$$

Формулу (3), если ввести в нее  $\lambda_m$  и  $c_m$ , можно записать в виде

$$\frac{c^2}{c_m^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda}{\lambda_m} + \frac{\lambda_m}{\lambda} \right); \quad (7)$$

это показывает, что для каждого заданного значения  $c$ , большего  $c_m$ , существует два допустимых (взаимных) значения  $\frac{\lambda}{\lambda_m}$ . Например, значениям

$$\frac{c}{c_m} = 1,2, \quad 1,4, \quad 1,6, \quad 1,8, \quad 2,0$$

отвечают значения

$$\frac{\lambda}{\lambda_m} = \begin{cases} 2,476, & 3,646, & 4,917, & 6,322, & 7,873 \\ 0,404, & 0,274, & 0,203, & 0,158, & 0,127 \end{cases}$$

добавим к этому еще значения

$$\arcsin \frac{c_m}{c} = 56^\circ 26', \quad 45^\circ 35', \quad 38^\circ 41', \quad 33^\circ 45', \quad 30^\circ,$$

которыми мы воспользуемся позднее.

Для достаточно больших значений  $\lambda$  первый член в формуле (3) для  $c^2$  оказывается большим по сравнению с вторым членом; поэтому силой, обуславливающей волновое движение, будет являться главным образом сила тяжести. Если же величина  $\lambda$  очень мала, то становится преобладающим второй член, и движение определяется, как в § 266, главным образом силами сцепления. Чтобы указать порядок входящих в рассмотрение величин, заметим, что для  $\frac{\lambda}{\lambda_m} > 3$  влияние сил сцепления на длину волны можно оценить примерно в 5%, а влияние

<sup>1)</sup> Теория минимума скорости волн так же, как и большая часть содержания §§ 266, 267, принадлежит W. Thomson, Hydrokinetic Solutions and Observations, Phil. Mag. (4) XLII, 374 (1871) [Papers, IV, 76]; см. также Nature V. 1 (1871).

силы тяжести оказывается в такой же степени незначительным, когда  $\frac{\lambda}{\lambda_m} < \frac{1}{3}$ .

Кельвин предложил называть рябью волны, длина которых меньше, чем  $\lambda_m$ .

Подставляя значение для  $\frac{dc}{d\lambda}$  из формулы (7) в общую формулу для групповой скорости [§ 236 (3)], находим

$$U = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} = c \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\lambda^2 - \lambda_m^2}{\lambda^2 + \lambda_m^2} \right). \quad (8)$$

Групповая скорость, таким образом, будет больше или меньше скорости самих волн, смотря по тому, какое из двух неравенств  $\lambda \lesseqgtr \lambda_m$  имеет место. Для достаточно длинных волн групповая скорость практически равна  $\frac{1}{2}c$ , в то время как для коротких волн она приближается к значению  $\frac{3}{2}c$ <sup>1)</sup>.

Относительная важность тяжести и сцепления в зависимости от значения  $\lambda$  может быть обнаружена на виде выражения для потенциальной энергии при деформации типа

$$\eta = a \cos kx. \quad (9)$$

Та часть энергии, которая получается в результате растяжения граничной поверхности и относится к единице площади, имеет своим значением

$$\frac{\pi^2 T_1 a^2}{\lambda^2}, \quad (10)$$

в то время как относящаяся к тяжести часть равна

$$\frac{1}{2} g (q - q') a^2. \quad (11)$$

При уменьшении  $\lambda$  выражение (10) становится все более и более важным по сравнению с выражением (11).

При тех же числовых данных, как и выше, и при  $g = 981$  находим для поверхности воды из формул (5) и (6)

$$\lambda_m = 1,73, \quad c_m = 23,2,$$

причем за единицы взяты сантиметр и секунда. Это значит, что минимум скорости волн приблизительно равен 23 см/сек или 830 м/час при длине волны 1,73 см. Вместе с уже полученными числовыми результатами это дает для

$$c = 27,8 \quad 32,5 \quad 37,1 \quad 41,8 \quad 46,4$$

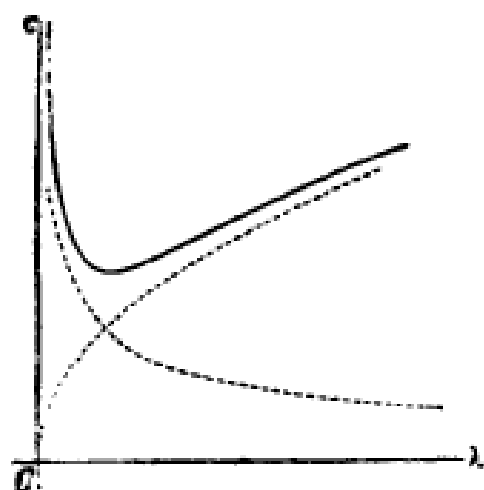
и для

$$\lambda = \begin{cases} 4,3 & 6,3 & 8,5 & 10,9 & 13,6 \\ 0,70 & 0,47 & 0,35 & 0,27 & 0,22 \end{cases}$$

в сантиметрах и секундах.

<sup>1)</sup> Ср. Rayleigh, см. прим. выше, стр. 429.

Фиг. 70 представляет зависимость между длиной и скоростью волн; пунктирные кривые относятся к тому случаю, когда тяжесть и капиллярность действуют отдельно, в то время как кривая, обозначенная сплошной линией, представляет совместное их действие. Как объяснено в § 236, групповая скорость выражается отрезком, который касательная отсекает на оси  $u$ .



Фиг. 70.

Так как из каждой точки этой оси, расстояние которой от точки  $O$  превосходит некоторое определенное значение, можно провести к кривой две касательные, то каждому произвольно заданному значению групповой скорости  $U$  отвечают две скорости самих волн. Эти два значения  $\lambda$  совпадают для некоторого (минимального) значения  $U$ , соответствующего точке пересечения оси  $Oc$  с касательной к кривой в ее точке перегиба; легко можно показать, что в этом случае

$$\frac{\lambda}{\lambda_m} = \sqrt{3 + 2\sqrt{3}} = 2,542,$$

$$U = 0,767 c_m,$$

если  $c_m$ , как и выше, обозначает минимальную скорость волн.

Обратим внимание еще на дальнейшее следствие из формулы (2). До сих пор мы молчаливо предполагали, что жидкость, находящаяся внизу, обладает большей плотностью (т. е.  $\rho > \rho'$ ), что в действительности необходимо для устойчивости, если пренебречь величиной  $T_1$ . Названная формула показывает, однако, что устойчивость имеет место также для  $\rho < \rho'$ , если предположить, что

$$\lambda < 2\pi \left( \frac{T_1}{g(\rho' - \rho)} \right)^{1/2}, \quad (12)$$

т. е., что значение  $\lambda$  должно быть меньше, чем длина волны, отвечающей минимальной скорости в том случае, когда более плотная жидкость находится внизу. Для случая воды, расположенной над воздухом, максимум длины волн, совместимой с устойчивостью, оказывается равным 1,73 см. Если обе жидкости заключены между двумя параллельными вертикальными стенками, то это обстоятельство обуславливает границу для допустимой длины волны; в результате мы приходим к выводу, что устойчивость в этом случае (в случае задачи двух измерений) будет иметь место тогда, когда расстояние между стенками не превосходит 0,86 см.

В этом заключается в основном объяснение известного опыта, при котором вода атмосферным давлением удерживается в опрокинутом стакане или в каком-либо другом сосуде, когда отверстие его заткнуто достаточно частой сеткой<sup>1)</sup>.

**§ 268.** Рассмотрим теперь случай волн на горизонтальной плоскости, представляющей общую границу двух параллельных потоков  $U, U'$ <sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Задача для того случая, когда жидкости заключены в цилиндрической трубе, была решена Максвеллом, Encyc. Britann. Art. Capillary Action [Papers, II, 585], и результаты были сравнены с некоторыми опытами Дупреца (Duprez). Совпадение оказалось лучше, чем можно было ожидать, если учесть, что не было принято во внимание особое условие, которое должно быть выполнено на линии соприкосновения поверхности со стенкой.

<sup>2)</sup> Ср. W. Thomson. см. прим. выше, стр. 574.



Если мы применим метод § 234, то найдем без затруднений, что условие для стационарного профиля волн будет иметь теперь вид

$$\varrho U^2 + \varrho' U'^2 = \frac{g}{k} (\varrho - \varrho') + kT_1, \quad (1)$$

где последний член получается из измененной формы условия, которому должно удовлетворять давление на граничной поверхности. Уравнение (1) можно представить в следующем виде:

$$\left( \frac{\varrho U + \varrho' U'}{\varrho + \varrho'} \right)^2 = \frac{g}{k} \frac{\varrho - \varrho'}{\varrho + \varrho'} + \frac{kT_1}{\varrho + \varrho'} - \frac{\varrho\varrho'}{(\varrho + \varrho')^2} (U - U')^2, \quad (2)$$

Относительная скорость волн, которая накладывается на среднюю скорость потоков (§ 232), будет равна  $\pm c$ , причем

$$c^2 = c_0^2 - \frac{\varrho\varrho'}{(\varrho + \varrho')^2} (U - U')^2, \quad (3)$$

где  $c_0$  обозначает скорость волн при отсутствии течения.

Различные следствия, которые можно получить из соотношения (3), будут в общем теми же, как в указанном выше параграфе, но со следующим существенным отличием: так как  $c_0$  теперь может иметь минимальное значение, именно, значение  $c_m$  из (5) § 267, то равновесие плоской поверхности будет устойчивым для возмущений всех длин волн, пока имеет место неравенство

$$|U - U'| < \frac{1+s}{s^{1/2}} c_m, \quad (4)$$

где  $s = \frac{\varrho'}{\varrho}$ .

Если относительная скорость обоих потоков превосходит это значение, то значение  $c$  для длины волн, которые лежат внутри известных границ, будет минимум.

Ясно, что множитель, зависящий от времени  $e^{i\sigma t}$  в методе § 232, принимает здесь вид

$$e^{\pm \alpha t + i\beta t},$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \left\{ \frac{s}{(1+s)^2} (U - U')^2 - c_0^2 \right\}^{1/2} k, \\ \beta &= \frac{s}{1+s} - k |U - U'|, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Действительная часть показательной функции указывает на возможность появления возмущения с постоянно возрастающей амплитудой.

В случае воздуха, расположенного над водой, мы имеем  $s = 0,0012^3$ ,  $c_m = 23,2$  (см/сек); вместе с тем максимальное значение функции  $|U - U'|$ , совместимое с устойчивостью, оказывается равным приблизительно 646 см в секунду или круглым числом 23,25 км/час<sup>4)</sup>.

<sup>4)</sup> Скорость ветра, при которой поверхность воды начинает рябиться вследствие образования капиллярных волн настолько, что теряет способность отражать, оказывается значительно меньше, чем приведенное в тексте значение, и это обуславливается другими причинами. Мы возвратимся несколько позже к этому вопросу (XI глава).

При несколько больших значениях имеет место неустойчивость, которая проявляется в первый момент в образовании мелких волн с длиной приблизительно в 17 м.м, амплитуды которых постепенно возрастают, пока не превзойдут предельных значений, которыми ограничиваются наши приближенные формулы.

**§ 269.** Волны, которые возникают на поверхности покоящейся воды благодаря местному возмущению, могут быть до некоторой степени исследованы применением метода Кельвина (§ 241).

Так как на поверхности имеем  $\dot{\eta} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ , то результат действия единичного импульса, приложенного в начале координат, выражается формулами

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{\pi \rho} \int_0^{\infty} \cos \sigma t e^{ky} \cos kx \, dx, \\ \eta &= -\frac{1}{\pi \rho} \int_0^{\infty} \frac{\sin \sigma t}{\sigma} \cos kx \, k \, dk. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Чтобы иметь согласие с формулой (6) § 241, мы должны положить

$$\varphi(k) = \frac{ik}{\rho \sigma}. \quad (2)$$

Если в формуле (2) § 267 положить  $\varrho' = 0$  и обозначить для краткости

$$\frac{T_1}{\rho} = T', \quad (3)$$

то будем иметь

$$\sigma^2 = gk + T'k^3. \quad (4)$$

Предположим прежде всего, что влияние оказывает только капиллярность, так что

$$\sigma^2 = T'k^3. \quad (5)$$

Так как

$$\frac{d\sigma}{dk} = \frac{3}{2} T'^{1/2} k^{1/2}, \quad \frac{d^2\sigma}{dk^2} = \frac{3}{4} T'^{1/2} k^{-1/2}, \quad (6)$$

то находим

$$k = \frac{4}{9} \frac{x^2}{T'^{2/3}}, \quad \sigma = \frac{8}{27} \frac{x^3}{T'^{1/3}}, \quad t \frac{d^2\sigma}{dk^2} = \frac{9}{8} \frac{T' t^2}{x}. \quad (7)$$

Способ, изложенный в § 241, тогда дает

$$\eta = \frac{1}{\pi^{1/2} \rho T'^{1/3} x^{1/2}} \sin \left( \frac{4x^3}{27T' t^2} - \frac{1}{4} \pi \right). \quad (8)$$

Критическое значение дроби (10) § 241 в данном случае имеет порядок величины  $\frac{T'^{2/3} t}{x^{3/2}}$ ; приближение в этом случае не может претендовать на высокую степень точности, за исключением начальных

стадий возмущения в какой-либо точке. Далее получается из формулы (8), что длина волны и период в произвольной точке сначала имеют бесконечно малые значения, а потом постепенно возрастают. Все эти обстоятельства находятся в полном контрасте с тем, что имело место для тяжелых волн (§ 240).

Мы видели в § 267, что если ввести в вычисления силу тяжести, то каждому заданному значению групповой скорости  $U$ , превосходящему минимальное значение  $U_0$ , соответствуют две длины волны. Отдельные длины волн, которые отвечают данным значениям  $x$  и  $l$ , можно найти при помощи геометрических методов § 241. Аналитически они определяются, если положить  $\frac{d\sigma}{dk} = U = \frac{x}{t}$ , действительными значениями  $k$ , удовлетворяющими уравнению

$$(g + 3T'k^2)^2 = 4\sigma^2 \left(\frac{d\sigma}{dk}\right)^2 = \frac{4x^2}{t^2} (gk + T'k^3). \quad (9)$$

Приближенное значение для  $\eta$  будет соответственно с этим составлено из двух членов типа (9) § 241, так что мы получим две наложенные друг на друга системы волн. Для  $x < U_0 t$  метод Кельвина показывает, что возмущение оказывается незначительным<sup>1)</sup>.

Для достаточно больших значений  $\frac{x}{U_0 t}$  приближенные значения действительных решений уравнения (9) будут

$$k = \frac{1}{4} \frac{gt^2}{x^2}, \quad k = \frac{4}{9} \frac{x^2}{T't^2}, \quad (10)$$

т. е. действительные решения таковы, как если бы сила тяжести и капиллярные силы действовали отдельно. Условия приложимости в этом случае приближенного метода Кельвина, заключающиеся в том, что значения  $\frac{gt^2}{x}$  и  $\frac{x^2}{T't^2}$  должны быть большими, до некоторой степени противоречат друг другу; они, однако, согласуются друг с другом, если как  $x$ , так и  $l$  одновременно достаточно велики. Длина волны в каждом из этих случаев должна быть мала по сравнению с  $x$ .

Эффект движущегося возмущения можно непосредственно представить на основании общих формул § 248. Если выражения  $\frac{2\pi}{\lambda_1}$ ,  $\frac{2\pi}{\lambda_2}$  обозначают две длины волн, соответствующие волновой скорости  $C$ , то из фиг. 67 следует, что для  $\lambda_1 < \lambda_2$  должны иметь место неравенства  $U_1 < c$ ,  $U_2 > c$ .

В результате будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{\varphi(\lambda_1)}{c - U_1} e^{i\lambda_1 x} & (x > 0), \\ \eta &= \frac{\varphi(\lambda_2)}{U_2 - c} e^{i\lambda_2 x} & (x < 0). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

<sup>1)</sup> Rayleigh, Phil. Mag. (6), XXI, 189 (1911) [Papers, VI, 9].

Если положить

$$\varphi(k) = \frac{iP}{e\sigma}, \quad (12)$$

то далее увидим, что эти результаты можно рассматривать как приближенное выражение результатов последующего более полного исследования.

**§ 270.** Возобновим по методам §§ 242, 243 более формальные исследования тех явлений, которые получаются в результате постоянного возмущения давления на поверхности движущегося потока, причем теперь мы примем во внимание влияние капиллярных сил. Это даст нам вместе с ранее полученными результатами объяснения (по крайней мере в принципе) той ряби, которая появляется впереди твердого тела, движущегося с умеренной скоростью в спокойной воде, а также наблюдается в движущемся равномерно потоке в местах, расположенных вверх по течению от места возмущения.

Мы начнем с простого гармонического распределения давления и положим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varphi}{c} &= -x + \beta e^{ky} \sin kx, \\ \frac{\psi}{c} &= -y + \beta e^{ky} \cos kx, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

причем верхняя поверхность должна совпадать с линией тока  $\psi = 0$ , приближенное уравнение которой имеет вид

$$y = \beta \cos kx. \quad (2)$$

Для точки, расположенной непосредственно под этой поверхностью, находим, как в (8) § 242, в качестве переменной части давления выражение

$$p_0 = \beta \varrho \{ (kc^2 - g) \cos kx + \mu c \sin kx \}, \quad (3)$$

где  $\mu$  — коэффициент трения. В соседней точке, расположенной непосредственно над поверхностью, должно иметь место равенство

$$p'_0 = p_0 + T_1 \frac{d^2y}{dx^2} = \beta \varrho \{ (kc^2 - g - k^2 T') \cos kx + \mu c \sin kx \}, \quad (4)$$

где  $T'$  написано вместо  $\frac{T_1}{e}$ . Это равно действительной части выражения

$$\beta \varrho (kc^2 - g - k^2 T' - i\mu c) e^{ikx}.$$

Отсюда заключаем, что приложенному извне давлению

$$p_0 = C \cos kx \quad (5)$$

соответствует форма поверхности, выраженная уравнением

$$\varrho y = C \frac{(kc^2 - g - k^2 T') \cos kx - \mu c \sin kx}{(kc^2 - g - k^2 T')^2 + \mu^2 c^2}. \quad (6)$$

Предположим вначале, что скорость  $c$  потока превосходит минимальное значение ( $c_m$ ) волновой скорости, полученное в § 267. В таком случае мы можем написать

$$kc^2 - g - k^2 T' = T' (k - \kappa_1)(\kappa_2 - k), \quad (7)$$

где  $\kappa_1, \kappa_2$  суть два значения  $k$ , соответствующие волновой скорости  $c$  в спокойной воде; другими словами, величины  $\frac{2\pi}{\kappa_1}, \frac{2\pi}{\kappa_2}$  суть длины волн тех двух систем свободных волн, которые могли бы занять стационарное положение в пространстве на свободной поверхности движущейся жидкости. Мы будем считать, что  $\kappa_2 > \kappa_1$ .

После подстановки этих величин формула (6) может быть представлена в виде

$$\varphi y = \frac{C}{T'} \frac{(k - \kappa_1)(\kappa_2 - k) \cos kx - \mu' \sin kx}{(k - \kappa_1)^2 (\kappa_2 - k)^2 + \mu'^2}, \quad (8)$$

где положено  $\mu' = \frac{\mu c}{T'}$ . Отсюда следует, что для малых значений  $\mu'$  давление на гребнях имеет наименьшее значение, а во впадинах — наибольшее значение, когда  $k$  больше, чем  $\kappa_2$ , или меньше, чем  $\kappa_1$ , и будет обратное, когда  $k$  лежит между  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ . В случае возмущения, распространяющегося по спокойной поверхности воды, эти результаты совпадают, очевидно, с результатами (14) § 168.

§ 271. Из формулы (8) мы можем, как в § 243, вывести некоторые заключения о том действии, которое производит давление, сосредоточенное вначале и имеющее общую величину  $P$ ; мы находим

$$y = \frac{P}{\pi T_1} \int_0^{\infty} \frac{(k - \kappa_1)(\kappa_2 - k) \cos kx - \mu' \sin kx}{(k - \kappa_1)^2 (\kappa_2 - k)^2 + \mu'^2} dk. \quad (9)$$

Этот определенный интеграл есть действительная часть интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{ikx} dk}{(k - \kappa_1)(\kappa_2 - k) - i\mu'}. \quad (10)$$

Коэффициент рассеяния  $\mu'$  введен единственно с той целью, чтобы сделать задачу определенной; поэтому мы можем воспользоваться этим и для упрощения в дальнейшем предположить  $\mu'$  величиной бесконечно малой. В этом случае корни знаменателя в выражении (10) суть

$$k = \kappa_1 + iv, \quad k = \kappa_2 - iv,$$

где

$$v = \frac{\mu'}{\kappa_2 - \kappa_1}.$$

Интеграл (10), таким образом, будет равен

$$\frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1 - 2iv} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{e^{ikx} dk}{k - (\kappa_1 + iv)} - \int_0^{\infty} \frac{e^{ikx} dk}{k - (\kappa_2 - iv)} \right\}. \quad (11)$$

Эти интегралы имеют вид, разобранный в § 243. Так как  $\kappa_2 > \kappa_1$ , то  $y$  будет положительным и, следовательно, для положительных значений  $x$  первый интеграл будет равен

$$2\pi i e^{i\kappa_1 x} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{k + \kappa_1} dk, \quad (12)$$

а второй получит вид

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{k + \kappa_2} dk. \quad (13)$$

Для отрицательных значений  $x$ , напротив, первый интеграл приводится к виду

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{k + \kappa_1} dk, \quad (14)$$

а второй интеграл будет равен

$$-2\pi i e^{i\kappa_2 x} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{k + \kappa_2} dk. \quad (15)$$

Мы упростили здесь формулу тем, что после преобразования положили  $y = 0$ .

Если теперь отбросить мнимые части наших выражений, то получим следующие результаты.

Если  $\mu'$  бесконечно мало, то уравнение (9) дает для положительных значений  $x$

$$\frac{\pi T_1}{P} y = -\frac{2\pi}{\kappa_2 - \kappa_1} \sin \kappa_1 x + F(x), \quad (16)$$

а для отрицательных значений  $x$

$$\frac{\pi T_1}{P} y = -\frac{2\pi}{\kappa_2 - \kappa_1} \sin \kappa_2 x + F(x), \quad (17)$$

где

$$F(x) = \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\cos kx}{k + \kappa_1} dk - \int_0^{\infty} \frac{\cos kx}{k + \kappa_2} dk \right\}. \quad (18)$$

Функция  $F(x)$  может быть выражена на основании (30) § 243 через известные функции

$$\text{Ci } \kappa_1 x, \quad \text{Si } \kappa_1 x, \quad \text{Ci } \kappa_2 x, \quad \text{Si } \kappa_2 x.$$

Выражаемое этими функциями возмущение уровня оказывается очень малым для всех тех положительных и отрицательных значений  $x$ , которые превосходят примерно половину наибольшей длины волны  $\left(\frac{2\pi}{\kappa_1}\right)$ .

Отсюда следует, что вне таких значений  $x$  поверхность оказывается покрытой вниз по течению правильной последовательностью простых гармонических волн длиной  $\frac{2\pi}{\kappa_1}$ , а вверх против течения последовательностью таких же волн с меньшей длиной волны  $\frac{2\pi}{\kappa_2}$ . Из числовых результатов § 267 тогда получается, что, если скорость течения  $c$  значительно превосходит минимальное значение волновой скорости ( $c_{\text{m}}$ ), то первая система волн происходит главным образом от действия силы тяжести, а вторая система волн получается в результате действия капиллярных сил.



Фиг. 71.

Заслуживает внимания то обстоятельство, что теперь, в противоположность случаю, рассмотренному в § 243, возвышение для  $x = 0$  оказывается конечным; мы имеем, в самом деле,

$$\frac{\pi T_1}{Q} y = \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \log \frac{\kappa_2}{\kappa_1}, \quad (19)$$

как это получается без затруднений из формул (16) и (18).

Фиг. 71 показывает переход от одной системы волн к другой для случая  $\kappa_2 = 5\kappa_1$ .

Общее исследование явлений, которые наблюдаются при движении по спокойной поверхности воды изолированного точечного источника возмущения давления видоизменяется теперь тем фактом, что заданному значению  $c$  скорости отвечают *две* системы волн различной длины. Для одной из этих систем волн, именно для более коротких волн, групповая скорость оказывается больше, чем  $c$ , в то время как для другой системы групповая скорость меньше  $c$ . Отсюда можно понять, почему волны с меньшей длиной волны находятся впереди, а волны с большей длиной находятся позади источника возмущения давления.

Заметим, что формулы (16), (17) дают для высоты капиллярных волн, расположенных вверх по течению, то же значение, как и для высоты гравитационных волн, расположенных вниз по течению; однако, этот результат существенно меняется, когда давление будет распределено по полосе конечной ширины вместо того, чтобы быть сосредоточенным на математической линии. Если, например, ширина полосы не будет превосходить четверти длины волн, расположенных вниз по течению, но будет значительно больше, чем длина

волн ряби, расположенной вверх по течению, что может случиться при небольшой скорости, то различные части этой полосы в отношении их действия на часть жидкости, расположенную ниже по течению, будут усиливать друг друга; в части же жидкости, лежащей вверх по течению, может произойти „интерференция“, и результирующая амплитуда окажется сравнительно небольшой.

Чтобы пояснить этот результат, предположим, что общее давление  $P$  на поверхности распределено по закону

$$p' = \frac{P}{\pi} \frac{b}{b^2 + x^2}. \quad (20)$$

Это распределение распространяется тем дальше, чем больше оказывается  $b$ . Способ вычисления вытекает из § 244. В результате получаем для стороны, лежащей вниз по течению,

$$y = -\frac{2P}{\rho T'(\kappa_2 - \kappa_1)} e^{-\kappa_1 b} \sin \kappa_1 x + \dots, \quad (21)$$

а для противоположной стороны

$$y = -\frac{2P}{\rho T'(\kappa_2 - \kappa_1)} e^{-\kappa_2 b} \sin \kappa_2 x + \dots, \quad (22)$$

причем в этих выражениях опущены те члены, которые оказываются мало заметными на расстоянии от начала, равном, примерно, половине длины волны. Показательные множители указывают на уменьшение высоты, получающееся вследствие распределения давления; и это уменьшение оказывается больше со стороны капиллярных волн, так как  $\kappa_2 > \kappa_1$ .

Если скорость течения  $c$  меньше, чем минимальное значение скорости волн, то множители при

$$kc^2 - g - k^2 T'$$

оказываются мнимыми. При этом не получится никакой неопределенности, если с самого начала положить  $\mu = 0$ . Форма поверхности в этом случае определяется интегралом

$$y = -\frac{P}{\pi \rho} \int_0^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2 T' - kc^2 + g} dk. \quad (23)$$

Этот интеграл можно преобразовать прежним способом, но а priori очевидно, что его значение при возрастании  $x$  очень быстро стремится к нулю вследствие все более и более быстрых изменений знака  $\cos kx$ . Возмущение уровня поверхности ограничивается поэтому только некоторой окрестностью около начала. Для  $x = 0$  находим

$$y = -\frac{P}{(c_m^2 - c^2)^{1/2} \rho} \left( 1 + \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{c^2}{c_m^2} \right). \quad (24)$$

Остается, наконец, рассмотреть еще критический случай, когда  $c$  оказывается в точности равным минимуму волновой скорости, т. е.



$\kappa_2 = \kappa_1$ . Первый член в формулах (16) и (17) оказывается теперь бесконечно большим, в то время как остальная часть выражения дает конечное значение. Чтобы в этом случае получить результат, имеющий смысл, мы должны удержать коэффициент трения  $\mu'$ .

Полагая  $\mu' = 2\tilde{\omega}^2$ , будем иметь

$$(k - \kappa)^2 + i\mu' = \{k - (\kappa + \tilde{\omega} - i\tilde{\omega})\} \{k - (\kappa - \tilde{\omega} + i\tilde{\omega})\}, \quad (25)$$

так что интеграл (10) можно теперь положить равным

$$\frac{1-i}{4\tilde{\omega}} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{e^{ikh}}{k - (\kappa - \tilde{\omega} + i\tilde{\omega})} dk - \int_0^{\infty} \frac{e^{ikh}}{k - (\kappa + \tilde{\omega} - i\tilde{\omega})} dk \right\}. \quad (26)$$

Формулы § 243 показывают, что когда величина  $\tilde{\omega}$  будет малой, то главная часть этого выражения для достаточно удаленных точек по обе стороны от начала будет равна

$$\frac{1-i}{4\tilde{\omega}} 2\pi i e^{i\kappa x}. \quad (27)$$

Возвышение поверхности определяется теперь из уравнения

$$\frac{\pi T_1}{P} y = - \frac{\pi}{\mu^{3/2}} \cos \left( \kappa x - \frac{1}{4} \pi \right). \quad (28)$$

**§ 272.** Исследование Рэля<sup>1)</sup>, от которого только что проведенное здесь отличается главным образом способом представления определенных интегралов, было предпринято с целью найти более удовлетворительное объяснение для некоторых явлений, описанных Скоттом Расселем<sup>2)</sup> и Кельвином<sup>3)</sup>.

Когда препятствие незначительных размеров, например, леска от удочки, движется медленно в спокойной воде или (что, конечно, сводится к тому же) находится в покое в движущейся жидкости, то поверхность жидкости покрывается красивыми волнами, которые по отношению к препятствию остаются неподвижными. На стороне, лежащей вверх по течению, длина волны будет короче, и колебания, как показал Томсон, главным образом обуславливаются капиллярными силами. На стороне, расположенной по течению, волны оказываются длиннее и главным образом зависят от силы тяжести. Обе системы волн движутся с одинаковой относительной скоростью по отношению к воде, что необходимо для того, чтобы они могли сохранять неизменное положение относительно препятствия. Это же обстоятельство обуславливает и скорость, а вместе с тем и длину волны в той части системы волн, в которой гребни расположены наклонно к направлению движения. Если обозначить угол между направлением движения и нормалью к фронту волн через  $\theta$ , то ско-

<sup>1)</sup> Rayleigh, см. выше, стр. 498.

<sup>2)</sup> Scott Russell, On Waves, Brit. Ass. Rep., 1844.

<sup>3)</sup> Kelvin, см. прим. выше, стр. 574.

рость распространения волн будет равна  $v_0 \cos \theta$ , где  $v_0$  обозначает скорость жидкости по отношению к неподвижному, препятствию\*.

„Томсон показал, что скорость распространения волн по поверхности, какова бы ни была длина волны, никогда не может быть меньше примерно 23 см/сек. Скорость же текущей воды должна быть несколько больше этого предельного значения, чтобы волны могли образоваться. Все же и в этом случае угол  $\theta$  подчинен ограничению, которое определяется равенством  $v_0 \cos \theta = 23$ , и искривленный фронт волн имеет соответствующую асимптоту“.

„Погруженная часть препятствия возмущает течение жидкости независимо от деформации свободной поверхности, и это обстоятельство делает задачу в ее первоначальной постановке чрезвычайно трудной. Мы можем, однако, не меняя существа дела, предположить, что возмущение произведено в одной точке поверхности давлением, несколько отличающимся от нормального, как это может произойти в результате электрического притяжения или при ударе о поверхность тонкой воздушной струи. И действительно, каждым из этих способов, в особенности последним, можно получить очень красивые волны\*<sup>1)</sup>).

Характер волн можно выяснить, пользуясь методом, изложенным в конце § 256. Если ввести в вычисления только капиллярные силы, то формула (19) указанного параграфа на основании § 266 дает

$$c^2 \cos^2 \theta = V^2 = \frac{2\pi T'}{\lambda}; \quad (1)$$

форма гребней определяется при этом уравнением

$$\rho = a \sec^2 \theta. \quad (2)^2$$

Это дает

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sec \theta (1 - 2 \operatorname{tg}^2 \theta), \\ y &= 3a \sec \theta \operatorname{tg} \theta. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Если мы примем во внимание как силу тяжести, так и капиллярные силы, то на основании § 267 получим

$$c^2 \cos^2 \theta = V^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi T'}{\lambda}. \quad (4)$$

Полагая

$$c_m = (4gT')^{\frac{1}{4}}, \quad b = 2\pi \left(\frac{T'}{g}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

будем иметь

$$\frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda}{b} + \frac{b}{\lambda} \right), \quad (6)$$

где

$$\cos \alpha = \frac{c_m}{c}. \quad (7)$$

<sup>1)</sup> Rayleigh, см. прим. выше.

<sup>2)</sup> Так как теперь  $U > V$ , то из (20) § 256 получается, что постоянная  $a$  должна быть отрицательной.

Соотношение между  $\rho$  и  $\theta$  принимает поэтому вид

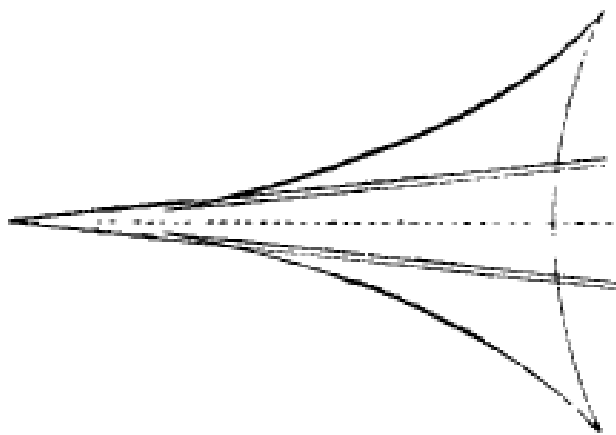
$$\frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{2} \left( a \frac{\rho}{\cos^2 \alpha} + \frac{a \cos^2 \alpha}{\rho} \right) \quad (8)$$

или

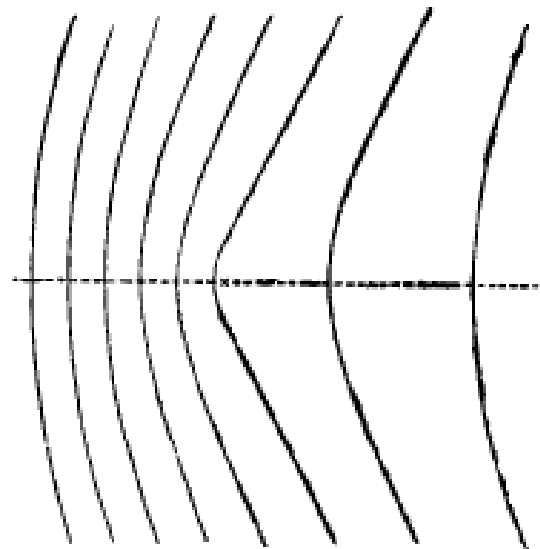
$$\frac{\rho}{a} = \cos^2 \theta \pm \sqrt{\cos^4 \theta - \cos^4 \alpha}. \quad (9)$$

Четыре прямые, для которых  $\theta = \pm \alpha$ , суть асимптоты определенной таким образом кривой. Значения выражения  $\frac{1}{2} \pi - \alpha$  для нескольких значений отношения  $\frac{c}{c_m}$  были даны в § 267.

Если отношение  $\frac{c}{c_m}$  достаточно велико, то  $\alpha$  приблизительно будет равно  $\frac{1}{2} \pi$ , и асимптоты образуют с осью  $x$  очень острые углы. На фиг. 72 показана часть кривой, которую приходится рассматривать при физической задаче в случае  $c = 10 c_m$ <sup>1)</sup>. Отношение длины волны самих „волн“ к длине



Фиг. 72.



Фиг. 73.

волн „ряби“ в плоскости симметрии естественно оказывается при этом очень большим. Кривая фиг. 72 может быть сравнена с кривой, которая образует основание фиг. 65 на стр. 543.

По мере того как отношение  $\frac{c}{c_m}$  убывает, угол между асимптотами становится все больше и больше, в то время как оба заострения с обеих сторон оси приближаются друг к другу, сходятся и, наконец, исчезают<sup>2)</sup>. Система волн имеет при этом расположение такого вида, какой указан на фиг. 73; эта фигура представляет тот случай, когда отношение длин волн на оси симметрии равно 4:1,

<sup>1)</sup> Все необходимые вычисления были выполнены Удалем (Woodall). Размеры фигуры 69 не позволяют провести асимптоты отдельно от кривой.

<sup>2)</sup> Опытная диаграмма показала, что для  $c = 2c_m$  ( $\alpha = 60^\circ$ ) заострения почти совпадают.

что соответствует значению  $\alpha = 26^\circ 34'$  или  $c = 1,12 c_m$ <sup>1)</sup>. Если  $c < c_m$ , то волнообразования исчезают.

§ 273. Другая очень интересная задача заключается в определении характера равновесия цилиндрического столба жидкости кругового сечения. Сюда же относится теория хорошо известных опытов Пидона, Савара и других о поведении струи, вытекающей под давлением из маленького отверстия в сосуде. Постоянная скорость в направлении оси струи, очевидно, не оказывает влияния на динамическую часть задачи и может быть поэтому при аналитическом рассмотрении оставлена без внимания.

Рассмотрим прежде всего колебания колонки жидкости в двух измерениях, предполагая движение во всех поперечных сечениях одинаковым. Применяя в плоскости поперечного сечения полярные координаты  $r, \theta$ , начало которых лежит на оси, мы можем в согласии с § 63 написать

$$\varphi = A \frac{r^2}{a^2} \cos s\theta \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (1)$$

где  $a$  обозначает средний радиус. Уравнение границы для произвольного момента времени будет

$$r = a + \zeta, \quad (2)$$

где

$$\zeta = -\frac{sA}{\sigma a} \cos s\theta \sin(\sigma t + \varepsilon), \quad (3)$$

и зависимость между коэффициентами определяется условием, что для  $r = a$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}. \quad (4)$$

Для переменной части давления внутри колонки и вблизи от свободной поверхности имеем

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\sigma A \cos s\theta \sin(\sigma t + \varepsilon). \quad (5)$$

Кривизна кривой, бесконечно мало отличающейся от окружности, имеющей свой центр в начале координат, находится элементарным способом и оказывается равной

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 r}{d\theta^2}$$

или, в обозначениях формулы (2),

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} \left( \zeta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} \right). \quad (6)$$

<sup>1)</sup> Фиг. 73 можно сравнить с той фигурой, которую построил из наблюдений Скотт Рассел, см. прим. на стр. 585.

Вместе с тем условие на поверхности

$$p = \frac{T_1}{R} + \text{const.} \quad (7)$$

дает после подстановки из формулы (5)

$$\sigma^2 = s(s^2 - 1) \frac{T_1}{\rho a^3}. \quad (8)^1$$

Для  $s = 1$  будем иметь  $\sigma = 0$ ; при нашей степени приближения поперечные сечения остаются круговыми, будучи только сдвинутыми, так что равновесие оказывается безразличным. Для всех других целочисленных значений  $s$  величина  $\sigma^2$  будет положительной, так что равновесие при плоских деформациях оказывается абсолютно устойчивым. Это ясно а priori, так как круг есть фигура с наименьшим периметром и вместе с тем с наименьшей энергией при заданной площади поперечного сечения.

В случае струн, которая вытекает из отверстий, имеющих форму эллипса, равностороннего треугольника или квадрата, возмущение принимает преимущественно одну из форм  $s = 2, 3$  или  $4$ . Так как в этом случае мы имеем стационарное движение, то на свободной струе образуется система стационарных волн, длина которых оказывается равной скорости струн, умноженной на период  $\left(\frac{2\pi}{\sigma}\right)^2$ .

§ 274. Отбросим теперь ограничение задачи двумя измерениями и положим

$$\varphi = \varphi_1 \cos kz \cos(\sigma t + \varepsilon); \quad (9)$$

при этом предполагается, что ось  $z$  должна совпадать с осью цилиндра и  $\varphi_1$  есть функция координат  $x, y$ . Подставляя это выражение в уравнение непрерывности  $\Delta\varphi = 0$ , получим

$$(\Delta_1 - k^2)\varphi_1 = 0, \quad (10)$$

где

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Полагая  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , мы можем написать уравнение (10) в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta^2} - k^2 \varphi_1 = 0. \quad (11)$$

<sup>1)</sup> По поводу оригинальных исследований на примененные энергетических методов см. Rayleigh. On the Instability of Jets, Proc. Lond. Math. Soc., X, 4 (1878) и On the Capillary Phenomena of Jets, Proc. Roy. Soc., XXIX, 71 (1879) [Papers, I, 361, 377; Theory of Sound, 2 изд., гл. XX]. Последняя из названных работ содержит сопоставление теории и опытов.

<sup>2)</sup> Предполагается, что эта длина волны велика по отношению к периметру сечения струн. Иначе нужно было бы применить формулу (18) при  $\sigma = kc$ , где  $c$  обозначает скорость струн.

Это уравнение за исключением знака при  $k^2$  имеет форму, разобранный в §§ 101, 191; решения, конечные при  $r=0$ , имеют поэтому такой вид:

$$\varphi_1 = \left\{ \begin{array}{l} BI_s(kr) \cos s\theta \\ BI_s(kr) \sin s\theta \end{array} \right\}; \quad (12)$$

при этом, как в (11) § 210,

$$I_s(z) = \frac{z^s}{2^s s!} \left\{ 1 + \frac{z^2}{2(2s+2)} + \frac{z^4}{2 \cdot 4(2s+2)(2s+4)} + \dots \right\}. \quad (13)$$

Полагая поэтому

$$\varphi = BI_s(kr) \cos s\theta \cos kz \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (14)$$

получим на основании соотношения (4)

$$\zeta = -B \frac{kaI'_s(ka)}{\sigma a} \cos s\theta \cos kz \sin(\sigma t + \varepsilon). \quad (15)$$

Чтобы найти сумму главных кривизн, заметим, что на основании теорем Эйлера и Менье о кривизне поверхности кривизна произвольного сечения, наклоненного под бесконечно малым углом к нормальному главному сечению, будет равна с точностью до бесконечно малых первого порядка кривизне самого главного нормального сечения. Достаточно поэтому в рассматриваемой задаче вычислить кривизны поперечного и осевого сечения цилиндра. Эти сечения представляют собой главные сечения в невозмущенном состоянии, главные же сечения деформированной поверхности образуют с ними бесконечно малые углы. Для поперечного сечения будет справедлива формула (6), тогда как для осевого сечения кривизна будет равна  $-\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}$ ; так что искомая сумма главных кривизн будет

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} &= \frac{1}{a} - \frac{1}{a^3} \left( \zeta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} \right) - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} = \\ &= \frac{1}{a} - B \frac{kaI'_s(ka)}{\sigma a^3} (k^2 a^2 + s^2 - 1) \cos s\theta \cos kz \sin(\sigma t + \varepsilon). \end{aligned} \quad (16)$$

Далее на поверхности имеем

$$\frac{p}{e} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\sigma BI_s(ka) \cos s\theta \cos kz \sin(\sigma t + \varepsilon). \quad (17)$$

Условие на поверхности § 265 дает поэтому

$$\sigma^2 = \frac{kaI'_s(ka)}{I_s(ka)} (k^2 a^2 + s^2 - 1) \frac{T_1}{\rho a^3}. \quad (18)$$

Для  $s > 0$  величина  $\sigma^2$  положительна; но в случае симметрии вокруг оси ( $s > 0$ ) значение  $\sigma^2$  становится отрицательным, если  $ka < 1$ ; это значит, что равновесие оказывается неустойчивым для

возмущений, длина волны которых  $\left(\frac{2\pi}{k}\right)$  больше, чем длина кривой поперечного сечения струи. Чтобы найти форму возмущения, для которой неустойчивость оказывается наибольшей, мы должны искать такое значение  $ka$ , которое соответствует максимуму выражения

$$\frac{kaI_0'(ka)}{I_0(ka)}(1 - k^2a^2).$$

Рэлей нашел для этого случая значение  $k^2a^2 = 0,4858$  и отсюда получил для длины волны, соответствующей наибольшей неустойчивости, значение

$$\frac{2\pi}{k} = 4,508 \cdot 2a.$$

В этом случае образуются похожие на бусинки возвышения и желобки с постоянно нарастающими размерами, до тех пор пока струя не распадется окончательно на отдельные капли<sup>1)</sup>.

§ 275. Эти результаты естественно побуждают к исследованию малых колебаний капли жидкости около ее шаровой формы<sup>2)</sup>. Мы несколько обобщим задачу, предполагая, что имеем жидкий шар с плотностью  $\rho$ , окруженный бесконечной массой другой жидкости с плотностью  $\rho'$ .

Возьмем начало координат в центре шара, пусть форма общей поверхности обеих жидкостей для некоторого произвольного момента времени задана уравнением

$$r = a + \zeta = a + S_n \sin(\sigma t + \varepsilon), \quad (1)$$

где  $a$  — средний радиус, а  $S_n$  — сферическая функция порядка  $n$ . Соответствующие значения потенциала скоростей будут тогда определены для внутренних точек функцией

$$\psi = -\frac{\sigma a}{n} \frac{r^n}{a^n} S_n \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (2)$$

а для внешних точек функцией

$$\psi' = -\frac{\sigma a}{n+1} \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} S_n \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (3)$$

<sup>1)</sup> Доказательство этого состоит в том, что если мы имеем ряд возможных форм возмущения с временными факторами  $e^{\alpha_1 t}$ ,  $e^{\alpha_2 t}$ ,  $e^{\alpha_3 t}$ , ... где  $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \dots$ , и если эти возмущения возбуждаются одновременно, то амплитуда первого из них по сравнению с амплитудами остальных будет возрастать в отношении  $e^{(\alpha_1 - \alpha_2)t}$ ,  $e^{(\alpha_1 - \alpha_3)t}$ , ... Поэтому в конце концов преобладающее влияние будет иметь слагающая с наибольшим значением  $\alpha$ .

Неустойчивость цилиндрической струи, окруженной другой жидкостью, была исследована Рэлеем в мемюаре: *On the Instability of Cylindrical Fluid Surfaces*, *Phil. Mag.* (5), XXXIV, 177 (1892) [*Papers*, III, 591]. В случае струи воздуха в воде длина волны наибольшей неустойчивости оказывается равной  $6,48 \cdot 2a$ .

<sup>2)</sup> Rayleigh, см. прим. выше, стр. 591; Webb, *Mess. of Math.*, IX, 177 (1880).

так как эти функции для  $r = a$  дают

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{\partial \varphi'}{\partial r}.$$

Переменные части внутреннего и внешнего давления определяются тогда выражениями вида

$$\left. \begin{aligned} p &= \dots + \frac{e\sigma^2 a}{n} S_n \sin(\sigma t + \epsilon), \\ p' &= \dots - \frac{e'\sigma^2 a}{n+1} S_n \sin(\sigma t + \epsilon). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Чтобы найти сумму кривизн, воспользуемся следующим предложением из пространственной геометрии. Если  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  обозначают направляющие косинусы нормали в точке  $(x, y, z)$  к поверхности семейства

$$F(x, y, z) = \text{const.},$$

проходящей через эту точку, т. е., если имеем

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \\ \mu &= \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \\ \nu &= \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \end{aligned}$$

то справедливо равенство

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z}. \quad (5)$$

Так как квадратом  $\zeta$  можно пренебречь, то уравнение (1) гармонического сфероида может быть записано в виде

$$r = a + \zeta_n, \quad (6)$$

где

$$\zeta_n = \frac{r^n}{a^n} S_n \sin(\sigma t + \epsilon), \quad (7)$$

т. е.  $\zeta_n$  есть *объемная* сферическая функция порядка  $n$ . Таким образом, находим

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{x}{r} - \frac{\partial \zeta_n}{\partial x} + n \frac{x}{r^2} \zeta_n, \\ \mu &= \frac{y}{r} - \frac{\partial \zeta_n}{\partial y} + n \frac{y}{r^2} \zeta_n, \\ \nu &= \frac{z}{r} - \frac{\partial \zeta_n}{\partial z} + n \frac{z}{r^2} \zeta_n. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

отсюда следует

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{r} + \frac{n(n+1)}{r^2} \zeta_n = \frac{2}{a} + \frac{(n-1)(n+2)}{a^2} S_n \sin(\sigma t + \epsilon). \quad (9)$$



Подставляя выражения (4) и (5) в общее граничное условие § 265, получим

$$\sigma^2 = n(n+1)(n-1)(n+2) \frac{T_1}{\{(n+1)\rho + n\rho'\} a^3}. \quad (10)$$

Полагая  $\rho' = 0$ , будем иметь

$$\sigma^2 = n(n-1)(n+2) \frac{T_1}{\rho a^3}. \quad (11)$$

Наиболее важный тип колебания соответствует случаю  $n = 2$ , для которого будем иметь

$$\sigma^2 = \frac{8T_1}{\rho a^3}.$$

Если мы положим для водяной капли  $T_1 = 74$ ,  $\rho = 1$ , то найдем для частоты значение

$$\frac{\sigma}{2\pi} = 3,87 a^{-\frac{3}{2}} \text{ колебаний в секунду,}$$

если  $a$  — радиус капли, выраженный в сантиметрах. Радиус шара, период колебания которого равен одной секунде, должен быть равен  $a = 2,47$  см.

Случай шаровидного пузырька воздуха, окруженного жидкостью, получим, если в формуле (10) положим  $\rho = 0$ ; тогда будем иметь

$$\sigma^2 = (n+1)(n-1)(n+2) \frac{T_1}{\rho' a^3}. \quad (12)$$

При одинаковой плотности жидкости частота данного нормального колебания благодаря уменьшению присоединенной массы оказывается в этом случае больше, чем в случае, которому соответствует формула (11); ср. (7), (8) § 91.

## ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

### ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ

§ 276. Учебник гидродинамики был бы неполным, если бы в нем не был затронут вопрос о звуковых волнах, хотя бы по той причине, что все действительные жидкости более или менее сжимаемы и что, только принимая во внимание сжимаемость жидкостей, мы можем избежать таких явно парадоксальных результатов, как в § 20, где было найдено, что изменение давления распространяется в жидкости *мгновенно*.

Мы рассмотрим в этой главе общие законы распространения малых возмущений, не входя, однако, большей частью в такие подробности, которые относятся больше к акустике.

В большинстве случаев, которые мы будем рассматривать, изменения давления будут малы; их можно будет поэтому считать пропорциональными изменениям плотности, т. е. можно положить

$$\Delta p = \kappa \frac{\Delta \varrho}{\varrho},$$

где  $\kappa \left( = \varrho \frac{dp}{d\varrho} \right)$  есть некоторый коэффициент, называемый „объемной упругостью“. Для данной жидкости значение  $\kappa$  изменяется с температурой и (в очень малой степени) с давлением. Для воды при  $15^\circ \text{C}$   $\kappa = 2,045 \cdot 10^{10}$  дин на квадратный сантиметр. Случай газов мы вскоре рассмотрим.

### Плоские волны

§ 277. Рассмотрим прежде всего плоские волны в однородной среде.

Когда движение происходит только в направлении оси  $x$ , то уравнение движения при отсутствии внешних сил будет

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\varrho} \frac{dp}{\partial x} = -\frac{1}{\varrho} \frac{dp}{d\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial x}, \quad (1)$$

а уравнение непрерывности (5) § 7 приведет к следующему

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\varrho u) = 0. \quad (2)$$

Если положить

$$\varrho = \varrho_0 (1 + s), \quad (3)$$

где  $\varrho_0$  есть плотность в невозмущенном состоянии, то  $s$  можно назвать „коэффициентом уплотнения“ в плоскости  $x$ . Подставляя выражение (3) в уравнения (1) и (2), находим, предполагая движение бесконечно малым,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\kappa}{\varrho_0} \frac{\partial s}{\partial x} \quad (4)$$

и

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (5)$$

где, как и выше,

$$\kappa = \left[ \varrho \frac{dp}{d\varrho} \right]_{\varrho = \varrho_0}. \quad (6)$$

Исключая  $s$ , получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (7)$$

где

$$c^2 = \frac{\kappa}{\varrho_0} = \left[ \frac{dp}{d\varrho} \right]_{\varrho = \varrho_0}. \quad (8)$$

Уравнение (7) имеет тот же вид, что и уравнение, разобранный в § 170; общее решение его будет

$$u = f(ct - x) + F(ct + x); \quad (9)$$

решение это представляет две системы волн, распространяющихся с постоянной скоростью  $c$  вдоль оси  $x$ ; одна в положительном, другая в отрицательном направлении. Из уравнения (5) получаем выражение для соответствующего значения  $s$  в виде

$$cs = f(ct - x) - F(ct + x). \quad (10)$$

Для одной волны будем иметь

$$u = \pm cs, \quad (11)$$

так как одна из функций  $f, F$  будет обращаться в нуль. В формуле (11) нужно брать верхний или нижний знак в соответствии с тем, распространяется ли волна в положительном или в отрицательном направлении. В этом случае легко показать, что приближение, заключающееся в формулах (4) и (5), оправдывается в том случае, когда  $u$  всюду мало по сравнению с  $c$ .

Между изложенной выше приближенной теорией и теорией „длинных“ тяжелых волн на поверхности воды имеется полная аналогия. Если мы напишем  $\frac{u}{h}$  вместо  $s$  и  $gh$  вместо  $\frac{\kappa}{\rho_0}$ , то уравнения (4) и (5) совпадут с уравнениями (3) и (5) § 169.

**§ 278.** При данном в § 276 значении для  $\kappa$  получим для воды при  $15^\circ \text{C}$

$$c = 1430 \text{ м/сек.}$$

Колладон и Штурм <sup>1)</sup> на основании своих опытов на Женевском озере получили для  $c$  значение 1437 при температуре  $8^\circ \text{C}$  <sup>2)</sup>.

В случае газа, предполагая, что температура остается постоянной, значение  $\kappa$  определяется на основании закона Бойля

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0}. \quad (1)$$

Получаем

$$\kappa = p_0, \quad (2)$$

так что

$$c = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}. \quad (3)$$

<sup>1)</sup> Colladon und Sturm, Ann. de Chim. et de Phys., XXXVI (1827). Укажем, что скорость звука в воде, заполняющей трубу, благодаря податливости стенки может быть значительно меньше. См. Helmholtz, Fortschritte d. Physik, IV, 119 (1848) (Wiss. Abh., I, 242); Korteweg, Wied. App., V, 526 (1878); Lamb, Manch. Mem., XLII, Nr. 1 (1898).

<sup>2)</sup> Новые опыты в морской воде дали для скорости  $c$  значение 1510 м/сек при температуре  $17^\circ \text{C}$  и обнаружили возрастание скорости приблизительно на 3,35 м/сек при возрастании температуры на  $1^\circ \text{C}$  [Wood и др. Proc. Roy. Soc. A, CIII, 284 1923)].

Это есть так называемая „Ньютонова“ скорость звука <sup>1)</sup>. Если обозначить через  $H$  высоту атмосферы, состоящей из газа одинаковой плотности и создающей давление  $p_0$ , то будем иметь  $p_0 = g\rho_0 H$  и

$$c = (gH)^{1/2}. \quad (4)$$

Этот результат можно сравнить с формулой (13) § 170, которая дает скорость „длинных“ гравитационных волн в жидкостях. Для воздуха при  $0^\circ\text{C}$  соответствующие значения в системе абсолютных единиц CGS будут  $p_0 = 76 \cdot 13,60 \cdot 981$ ,  $\rho_0 = 0,00129$ ; отсюда следует

$$c = 280 \text{ м/сек.}$$

Это значение для  $c$  значительно меньше найденного из непосредственных наблюдений.

Лаплас <sup>2)</sup> привел теоретические результаты в согласие с тем, что наблюдается в действительности. Если газ быстро сжать, то температура его поднимется, а потому давление возрастет в большей степени, чем это соответствует уменьшению объема; подобно этому дело обстоит и в случае расширения газа. Формула (1) годится только для того случая, когда сжатия и расширения происходят настолько медленно, что имеется достаточно времени для выравнивания температуры путем теплопроводности и лучеиспускания. В очень большом числе важных случаев изменения плотности совершаются чрезвычайно быстро; движение тепла от одной частицы к другой едва только начинается, как уже направление его меняется на обратное, так что практически каждая частица жидкости ведет себя так, как если бы ее запас тепла оставался постоянным.

По этой причине формула (1) должна быть заменена законом „адиабатического“ изменения давления

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma, \quad (5)$$

где  $\gamma$  обозначает отношение удельных теплоемкостей газов:  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ .

Это дает

$$x = \gamma p_0 \quad (6)$$

и, следовательно,

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma g H}. \quad (7)$$

<sup>1)</sup> Newton, Principia, кн. II, секц. VIII, предлож. 48.

<sup>2)</sup> Обыкновенно указывают на мемуар Лапласа: Sur la vitesse du son dans l'air et dans l'eau, Ann. de chim. et de Phys., III, 238 (1816). [Mécanique Céleste, кн. 12, гл. III (1823)]. Однако, Пуассон уже в работе, помещенной 1807 годом (на которую будет ссылка ниже), указывает на это согласование теории с опытом и прибавляет, что оно было дано Лапласом.

Если положим  $\gamma = 1,402$  <sup>1)</sup>, то прежний результат нужно умножить на 1,184; отсюда получается

$$c = 332 \text{ м/сек},$$

что очень хорошо согласуется с лучшими результатами непосредственных измерений.

Вывод Лапласа пользуется таким полным доверием среди физиков, что теперь формулу (7) применяют с обратной целью, именно, чтобы получить значения  $\gamma$  для различных паров и газов из наблюдений над скоростью звука в них.

Строго говоря, подобное же различие следовало бы проводить и между „адиабатическими“ и „изотермическими“ коэффициентами упругости капельной жидкости или твердого тела; однако, разница в этом случае практически не существенна. Для воды, например, вычисленное отношение обоих объемных коэффициентов упругости равно 1,0012 <sup>2)</sup>.

Влияние теплового лучеиспускания и теплопроводности теоретически было исследовано Стоксом <sup>3)</sup> и Рэлеем <sup>4)</sup>. Если колебания совершаются слишком быстро для того, чтобы могло иметь место выравнивание температуры, но достаточно медленно для того, чтобы переход тепла между соседними частицами не мог быть совершенно исключен, то амплитуда волн по мере их распространения постепенно убывает вследствие происходящего при термических процессах рассеяния энергии. Влияние теплопроводности вместе с влиянием вязкости будет рассмотрено в следующей главе.

Согласно закону Шарля и Дальтона имеем

$$p = R_2 \theta, \quad (8)$$

где  $\theta$  обозначает абсолютную температуру, а  $R$  — некоторую постоянную, зависящую от природы газов. Скорость звука будет изменяться, следовательно, как квадратный корень из  $\theta$ . Для некоторых из более устойчивых газов, имеющих приблизительно одинаковые значения  $\gamma$ , формула (7) показывает, что скорость звука обратно пропорциональна квадратному корню из плотности, если только относительные плотности определены при одинаковых условиях давления и температуры.

**§ 279.** Теорию плоских волн можно также очень просто изложить в переменных Лагранжа (§§ 13, 14).

Если обозначить через  $\xi$  соответствующее моменту времени  $t$  перемещение частицы жидкости, абсцисса которой в невозмущенном состоянии есть  $x$ , то слой жидкости, первоначально заключенный

<sup>1)</sup> Это значение для  $\gamma$  получено в результате непосредственных опытов, произведенных в последнее время.

<sup>2)</sup> Everett, Units and Physical Constants.

<sup>3)</sup> Stokes, An Examination of the possible effect of the Radiation of Heat on the Propagation of Sound, Phil. Mag. (4), 1, 305 (1851) [Papers, III 142].

<sup>4)</sup> Rayleigh, Theory of Sound, § 247. См. § 360 нашей книги. В работе „On the Cooling of Air by Radiation and Conduction, and on the Propagation of Sound“, Phil. Mag. (5), XLVII, 308 (1899) [Papers, IV, 376]. Рэлей на основании опытных данных заключает, что влияние теплопроводности значительно больше в этом отношении, чем влияние лучеиспускания.

между плоскостями  $x$  и  $x + \delta x$ , к моменту времени  $t + \delta t$  будет ограничен плоскостями

$$x + \xi \text{ и } x + \xi + \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \delta x,$$

так что уравнение непрерывности будет иметь вид

$$\rho \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \rho_0, \quad (1)$$

где  $\rho_0$  — плотность в невозмущенном состоянии. Обозначая через  $s$  „коэффициент уплотнения“

$$\frac{\rho}{\rho_0} = s,$$

получим

$$s = \frac{-\frac{\partial \xi}{\partial x}}{1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}}. \quad (2)$$

Принимая во внимание силы, действующие на единицу поверхности рассматриваемого слоя, получим уравнение движения в виде

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}. \quad (3)$$

Уравнения эти являются точными, но в случае малых движений можно положить

$$p = p_0 + \kappa s \quad (4)$$

и

$$s = -\frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (5)$$

Подставляя выражения (4) и (5) в уравнение (3), получим

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (6)$$

где  $c^2 = \frac{\kappa}{\rho_0}$ . Решение уравнения (6) получается так же, как в §§ 170, 277.

**§ 280.** *Кинетическая энергия* системы плоских волн выражается так:

$$T = \frac{1}{2} \rho_0 \int \int \int u^2 dx dy dz; \quad (1)$$

в этой формуле  $u$  обозначает скорость в точке  $(x, y, z)$  в момент  $t$ .

Вычисление *внутренней энергии* требует некоторой осторожности. Работа, которую совершит единица массы, когда объем ее возрастет от своего действительного значения  $v$  до нормального значения  $v_0$  при условии, что  $v$  лишь мало отличается от  $v_0$ , будет с точностью до малых второго порядка иметь значение

$$\frac{1}{2} (p + p_0) (v_0 - v),$$

как это непосредственно видно из диаграммы Уатта (фиг. 74). Полагая

$$p = p_0 + \kappa s, \quad v_0 - v = sv_0, \quad (2)$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (p + p_0)(v_0 - v) &= p_0(v_0 - v) + \frac{1}{2} (p - p_0)(v_0 - v) = \\ &= p_0(v_0 - v) + \frac{1}{2} \kappa s^2 v_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Если составить сумму соответствующих выражений для всех элементов массы системы, то член  $p_0(v_0 - v)$  будет исчезать во всех тех случаях, когда имеют место условия, при которых полное изменение объема равно нулю. В этих случаях работа, которую совершает газ, заключающийся в произвольном данном объеме, когда он из своего действительного состояния переходит в нормальное состояние, определяется выражением

$$W = \frac{1}{2} \kappa \iiint s^2 dx dy dz. \quad (4)$$

До сих пор не было сделано никакого предположения относительно характера этого перехода, определяющего значение  $\kappa$ . Выражение (4), строго говоря, только в случае *адиабатического* расширения представляет внутреннюю энергию данного объема газа. Если же расширение происходит *изотермически*, то это выражение дает то, что в термодинамике известно под названием „свободной энергии“.

В прогрессивной плоской волне мы имеем  $cs = \pm u$  и потому  $T = W$ . Равенство обеих энергий в этом случае можно вывести также из более общих соображений § 174.

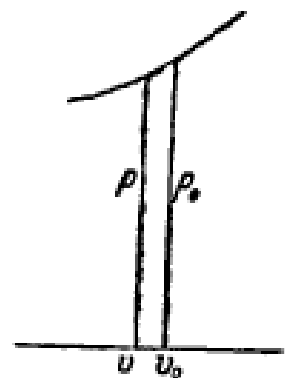
Для акустики особенный интерес, естественно, представляют простые гармонические колебания. Если  $a$  есть амплитуда прогрессивной волны, имеющей период  $\frac{2\pi}{\sigma}$ , то согласно (6) § 279 можем положить

$$\xi = a \cos(kx - \sigma t + \epsilon), \quad (5)$$

где  $k = \frac{\sigma}{c}$ , а соответствующая длина волны  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ . Формулы (1) и (4) дают для энергии, заключающейся в призматической области с площадью поперечного сечения, равной единице, и длиной  $\lambda$  (в направлении оси  $x$ ), значение

$$T + W = \frac{1}{2} \rho_0 \sigma^2 a^2 \lambda, \quad (6)$$

т. е. такое значение, какое имела бы кинетическая энергия всей рассматриваемой массы жидкости, если бы жидкость как целое двигалась со скоростью  $\sigma a$ .



Фиг. 74.

Скорость переноса энергии через единицу площади той плоскости, которая движется вместе с лежащими на ней частицами, определяется равенством

$$p \frac{\partial \xi}{\partial t} = \rho \sigma a \sin(kx - \sigma t + \epsilon). \quad (7)$$

Работа, совершаемая постоянной частью давления в течение полного периода, равна нулю. Для переменной же части давления будем иметь

$$\Delta p = \kappa s = -\kappa \frac{\partial \xi}{\partial x} = \kappa k a \sin(kx - \sigma t + \epsilon). \quad (8)$$

Подставляя это значение в формулу (7), получим среднее значение скорости переноса энергии

$$\frac{1}{2} \kappa k a^2 = \frac{1}{2} \rho_0 \sigma^2 a^2 c. \quad (9)$$

Таким образом, энергия, которая переносится в течение любого числа полных периодов через какую-нибудь плоскость, в точности равна энергии волн, проходящих через эту плоскость за тот же промежуток времени. Это и следовало ожидать, так как групповая скорость совпадает со скоростью волн в силу того, что  $c$  не зависит от  $\lambda$  (ср. § 237).

### Волны конечной амплитуды

§ 281. Если давление  $p$  есть функция только плотности  $\rho$ , то из уравнений (1) и (3) § 279 мы получаем не приближенное, а точное уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (1)$$

В случае „изотермического“ процесса, при котором

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad (2)$$

уравнение (1) принимает следующий вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}{\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2}. \quad (3)$$

Подобным же образом при „адиабатическом“ процессе, когда

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma, \quad (4)$$

получаем

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \frac{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}{\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{\gamma+1}}. \quad (5)$$

Точные уравнения (3) и (5) можно сравнить с аналогичным уравнением [(3) §173] для „длинных“ волн в канале постоянного сечения.



Из уравнения (1) следует, что уравнение (6) § 279 было бы точным, если бы между  $p$  и  $\rho$  имела место зависимость такого рода, что

$$\rho^2 \frac{d\rho}{d\rho} = \rho_0^2 c^2. \quad (6)$$

Отсюда плоские волны конечной амплитуды могут распространяться, не меняя своего вида, в том и только в том случае, когда

$$p - p_0 = \rho_0 c^2 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right). \quad (7)$$

Однако, зависимость такого рода не имеет места ни для одной из известных жидкостей как при постоянной температуре, так и в том случае, когда не происходит потери тепла вследствие теплопроводности и излучения<sup>1)</sup>. Поэтому звуковые волны конечной амплитуды безусловно должны изменять свой вид при своем распространении.

**§ 282.** Законы распространения волн конечной амплитуды в предположении, что давление  $p$  есть определенная функция от плотности  $\rho$ , были исследованы Ирришоу и независимо от него Риманом. Мы приведем здесь только результаты их исследований; подробности можно найти в оригинальных работах, а также в очень полной обработке этого вопроса у Рэля<sup>2)</sup>.

Уравнения Эйлера (1) и (2) § 277 можно написать в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x}, \\ \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} &= -c^2 \frac{\partial u}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где

$$\tilde{\omega} = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho}, \quad c = \sqrt{\frac{d\rho}{d\rho}}. \quad (2)$$

Величина  $c$  есть скорость распространения волн при малых амплитудах; в общем случае  $c$  есть функция от  $\rho$  и потому является величиной переменной. Если мы напишем теперь

$$d\tilde{\omega} = c d\omega \quad \text{или} \quad \omega = \int_{\rho_0}^{\rho} \left(\frac{d\rho}{d\rho}\right)^{1/2} \frac{d\rho}{\rho}, \quad (3)$$

то уравнения (1) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= -c \frac{\partial \omega}{\partial x}, \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} &= -c \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

<sup>1)</sup> Эта зависимость дала бы для  $p$  отрицательное значение, если бы плотность  $\rho$  упала ниже некоторого определенного значения.

<sup>2)</sup> Rayleigh, Aerial Plane Waves of finite Amplitude, Proc. Roy. Soc. A, LXXXIV, 247 (1910) [Papers, V, 573]. См. также Theory of Sound, гл. XI.

Отсюда получаем в результате сложения и вычитания уравнения

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial}{\partial x} \right\} (\omega + u) = 0 \quad (5)$$

и

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial}{\partial x} \right\} (\omega - u) = 0. \quad (6)$$

Из этих уравнений видно, что величина  $\omega + u$  остается постоянной для той геометрической точки, которая движется со скоростью

$$\left( \frac{dp}{d\rho} \right)^{1/2} + u, \quad (7)$$

в то время как величина  $\omega - u$  постоянна для точки, движущейся со скоростью

$$-\left( \frac{dp}{d\rho} \right)^{1/2} + u. \quad (8)$$

Это означает также, что когда данное значение величины  $\omega + u$  движется со скоростью (7) вперед, то значение величины  $\omega - u$  движется со скоростью (8) назад.

Таковы результаты, полученные Риманом<sup>1)</sup>. Эти результаты достаточны, чтобы получить общее представление о природе движения в каждом отдельном случае. Если начальное возмущение ограничено областью между плоскостями  $x = a$  и  $x = b$ , то мы можем принять, что как  $\omega$ , так и  $u$  исчезают при  $x < a$  и  $x > b$ . Область, в которой  $\omega + u$  является переменной, будет двигаться вперед; область же, в которой  $\omega - u$  является переменной, будет двигаться назад, и это будет происходить до тех пор, пока эти области не отделятся одна от другой; тогда в области между ними будем иметь  $\omega = 0$ ,  $u = 0$ , т. е. жидкость будет находиться в покое и будет иметь нормальную плотность  $\rho_0$ . Таким образом, первоначальное возмущение оказывается разложенным на две волны, движущиеся в противоположных направлениях. В волне, движущейся вперед, мы имеем  $\omega = u$ , так что как плотность, так и скорость частицы жидкости распространяются вперед и быстрота этого распространения определяется формулой (7). Эта скорость распространения, примем ли мы изотермический или адиабатический закон расширения, будет тем больше, чем больше будет значение  $\rho$ . Закон распространения волн можно наглядно изобразить так: построим кривую, точки которой будут иметь абсциссами значения  $x$ , а ординатами — значения  $\rho$ , и будем двигать вперед каждую точку этой кривой со скоростью, которая определяется выражением (7).

Так как частицы, имеющие большие ординаты, движутся более быстро, то кривая в некоторых точках может оказаться перпендику-

<sup>1)</sup> Riemann, Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite, Gött. Abh., VIII, 43 (1858—1859) (Werke 2 изд. Лейпциг, 1892, стр. 157).

лярной к направлению оси  $x$ . В этом случае соответствующие значения  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \rho}{\partial x}$  делаются бесконечно большими, и наш метод не может дать какое-либо заключение о дальнейшем ходе движения (ср. § 187).

§ 283. Исследование Ирншоу<sup>1)</sup> приводит к подобным же результатам; однако, оно является несколько менее общим, так как применяется только к прогрессивным волнам, которые при этом предполагаются уже существующими.

Для определенности будем считать, что значения  $p$  и  $\rho$  связаны между собой адиабатическим законом. Если положить  $y = x + \xi$ , так что  $y$  обозначает абсолютную координату для момента времени  $t$  частицы, имеющей в невозмущенном состоянии абсциссу  $x$ , то уравнение (5) § 281 примет вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\gamma+1}}, \quad (1)$$

где

$$c_0^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}.$$

Это уравнение удовлетворится, если положить

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right), \quad (2)$$

причем функция  $f\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$  должна удовлетворять уравнению

$$f'\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\pm c_0}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}}. \quad (3)$$

Отсюда первый интеграл уравнения (1) будет иметь вид

$$\frac{\partial y}{\partial t} = C \mp \frac{2c_0}{\gamma-1} \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}}. \quad (4)$$

Определяя  $C$  так, что  $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$  на границах волны, где  $\frac{\partial y}{\partial x} = 1$ , мы будем иметь

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = \mp \frac{2c_0}{\gamma-1} \left\{ \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} - 1 \right\}, \quad (5)$$

так как

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\rho_0}{\rho}.$$

<sup>1)</sup> Earnshaw, On the Mathematical Theory of Sound, Phil. Trans., CL, 133 (1858).

Чтобы найти скорость, с которой распространяется какое-либо частное значение  $u$ , заметим, что значение  $u$ , которое в момент времени  $t$  относится к частице  $x$ , в момент  $t + \delta t$  будет относиться к частице  $x + \delta x$ , при условии, что

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \delta t + \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \delta x = 0; \quad (6)$$

отсюда и из равенств (2) и (3) следует

$$\delta x \pm c_0 \left( \frac{e}{e_0} \right)^{\frac{\gamma+1}{2}} \delta t = 0. \quad (7)$$

Значения  $u$  и  $e$  распространяются, таким образом, от частицы к частице со скоростью

$$\mp \left( \frac{e}{e_0} \right)^{\frac{\gamma+1}{2}} c_0.$$

Для вывода формулы для скорости распространения в пространстве мы имеем

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial x} \delta x + \frac{\partial y}{\partial t} \delta t = \left\{ \mp f_0 \left( \frac{e}{e_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} + u \right\} \delta t. \quad (8)$$

Нижний знак относится к волне, перемещающейся в положительном направлении оси  $x$ , а верхний — к волне, перемещающейся в отрицательном направлении оси  $x$ . Скорость распространения тем больше, чем больше плотность, что было также установлено и на основании исследований Римана. Из (8) следует, что в положительной волне соотношение между  $u$  и  $y$  имеет вид

$$u = F \left\{ y - \left( c_0 + \frac{\gamma+1}{2} u \right) t \right\}, \quad (9)$$

который представляет рэлеевское обобщение формулы, полученной Пуассоном<sup>1)</sup> в 1807 г. для изотермического закона ( $\gamma = 1$ ).

Что формула Пуассона включает в себя изменение в типе распространяющейся волны, было еще указано Стоксом<sup>2)</sup>. Надо заметить, что если будем стремиться  $u$  к единице в (5), то получим

$$\left. \begin{aligned} u &= \pm c_0 \log \left( \frac{e_0}{e} \right), \\ \text{или} \\ e &= e_0 e^{\mp \frac{u}{c_0}}. \end{aligned} \right\} \quad (10)^3$$

§ 284. Условия распространения волн установившегося типа были очень простым способом исследованы Ранкином<sup>4)</sup>.

<sup>1)</sup> Poisson, Mémoire sur la théorie du son, Journ. de l'École Polytechn., VII, 367.

<sup>2)</sup> Stokes, On a Difficulty in the Theory of Sound, Phil. Mag. (3), XXIII, 349 (1848) [Papers, II, 51].

<sup>3)</sup> Этот результат вместе с аналогичным результатом для длинных волн в воде, кажется, впервые был указан Морганом. См. Airy, Phil. Mag. (3), XXXIV, 401 (1849).

<sup>4)</sup> Rankine, On the Thermodynamic Theory of Waves of Finite Longitudinal Disturbance, Phil. Trans., CLX, 277 (1870) [Papers, стр. 530].

Пусть  $A, B$  суть две точки воображаемой цилиндрической трубки (фиг. 75), которая имеет поперечное сечение, равное *единице*, и расположена в направлении движения волн; возьмем положительное направление оси  $x$  в том же направлении и обозначим давление, плотность и скорость частицы в точках  $A$  и  $B$  соответственно через  $p_1, \rho_1, u_1$  и  $p_0, \rho_0, u_0$ .



Фиг. 75.

Если сообщить, как в § 175, всей массе жидкости скорость  $c$ , равную, но противоположную скорости распространения волн, то задача приведет к рассмотрению установившегося движения. Так как теперь через любое поперечное сечение какой-нибудь трубки в каждую единицу времени протекает одинаковое количество жидкости, то мы должны иметь соотношение

$$\rho_1 (c - u_1) = \rho_0 (c - u_0) = m; \tag{1}$$

здесь  $m$  обозначает массу жидкости, которая протекает в единицу времени через единицу площади плоскости, движущейся вместе с волной, если рассматривать задачу в ее первоначальной форме. Ранкин называет величину  $m$  „массовой скоростью“ волны.

Далее, равнодействующая давлений в направлении  $BA$ , приложенных к массе жидкости, заключенной между сечениями  $A$  и  $B$ , равна  $p_0 - p_1$ , а приращение количества движения этой массы в том же направлении в единицу времени равно

$$m(c - u_1) - m(c - u_0).$$

Отсюда следует

$$p_0 - p_1 = m(u_0 - u_1). \tag{2}$$

Это равенство вместе с равенством (1) дает зависимость

$$p_1 + \frac{m^2}{\rho_1} = p_0 + \frac{m^2}{\rho_0}. \tag{3}$$

Таким образом, волна конечной амплитуды может распространяться, оставаясь неизменной, только в такой среде, для которой имеет место равенство

$$p + \frac{m}{\rho^2} = \text{const. или } p + m^2 v = \text{const.}, \tag{4}$$

где  $v$  обозначает объем единицы массы. К этому заключению другим путем мы уже пришли в § 281. Заметим, что соотношение (4) на диаграмме Уатта изображается *прямой линией*.

Если изменение плотности будет незначительным, то можно будет считать, что соотношение (4) в качестве приближенного годится при подходящем значении  $m$  и для действительных жидкостей. Полагая

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \rho_0 (1 + s), \\ p &= p_0 + \kappa s, \\ m &= \rho_0 c, \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

получим, как в § 277,

$$c^2 = \frac{\kappa}{\rho_0}. \tag{6}$$

Сначала Стокс<sup>1)</sup>, а позднее и многие другие авторы показали, что в случае такого рода волн должны выполняться как условие постоянства массы, так и условие постоянства количества движения. Простейшим случаем будет тот, когда величины  $\rho$  и  $u$  остаются всюду постоянными, кроме плоскости разрыва, где они претерпевают изменения. Если в предшествующих рассуждениях взять одно из сечений  $A$ ,  $B$  позади, а другое — впереди этой плоскости, то на основании зависимости (3) будем иметь

$$m = \left( \frac{p - p_0}{\rho_1 - \rho_0} \rho_1 \rho_0 \right)^{1/2}, \quad (7)$$

$$c - u_0 = \frac{m}{\rho_0} = \left( \frac{p_1 - p_0}{\rho_1 - \rho_0} \frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^{1/2} \quad (8)$$

и

$$u_1 - u_0 = \frac{m}{\rho_0} - \frac{m_1}{\rho_1} = \pm \left[ \frac{(p_1 - p_0)(\rho_1 - \rho_0)}{\rho_1 \rho_0} \right]^{1/2}. \quad (9)$$

Здесь следует брать верхний или нижний знак в зависимости от того, больше или меньше  $\rho_1$ , чем  $\rho_0$ , т. е. имеем ли мы дело с волной сгущения или разрежения. Полученные здесь результаты содержат только *разности* скоростей, что и следовало ожидать, так как мы можем сообщить всей массе рассматриваемой жидкости общую скорость, не изменяя характера волн.

Мы можем, например, принять, что величины  $p_0$ ,  $\rho_0$ ,  $u_0$ , определяющие состояние среды перед волной, заданы произвольно и что плотность  $\rho_1$  воздуха в самой распространяющейся волне тоже задана. Далее необходимо заранее принять на основании физических соображений какое-либо соотношение между  $p_1$ ,  $\rho_1$  и  $p_0$ ,  $\rho_0$ . Тогда остальные величины  $m$ ,  $c$ ,  $u_1$  определятся равенствами (7), (8), (9). Формула (8) дает скорость, с которой волна вступает в лежащую перед ней область.

Против этих результатов можно, однако, сделать то возражение<sup>2)</sup>, что для действительных жидкостей уравнение энергии не может иметь место одновременно с равенствами (1) и (2). Если мы вычислим избыток работы, которая производится в единицу времени силами давления, приложенными к жидкости, вытекающей через сечение  $B$  в пространство  $AB$ , над той работой, которую за то же время производит давление жидкости, вытекающей через сечение  $A$ , и вычтем отсюда приращение кинетической энергии, то получим

$$p_0(c - u_0) - p_1(c - u_1) - \frac{1}{2} m \left\{ (c - u_1)^2 - (c - u_0)^2 \right\},$$

или

$$p_1 u_1 - p_0 u_0 - \frac{1}{2} m (u_1^2 - u_0^2),$$

<sup>1)</sup> Stokes, см. выше, стр. 604.

<sup>2)</sup> Rayleigh, Theory of Sound, § 253. Представляет интерес сравнение этого параграфа труда Рэля с § 187 нашей книги.

или, наконец,

$$\frac{1}{2} (p_1 + p_0) (u_1 - u_0). \quad (10)$$

Эти выражения эквивалентны друг другу в силу динамического уравнения (2). Соответствующий результат для единицы массы получим, если разделим это выражение на  $m$ . Подставляя значение  $u_1 - u_0$  из формулы (1), получим

$$\frac{1}{2} (p_1 + p_0) (v_0 - v_1), \quad (11)$$

где буква  $v$  поставлена, как и раньше, вместо  $\frac{1}{\rho}$ .

Если обозначить на диаграмме Уатта через  $A$  и  $B$  два состояния среды, то выражение (11) будет измерять площадь между прямой  $AB$ , осью  $v$  и ординатами точек  $A$  и  $B$ . Если бы переход от состояния  $B$  к состоянию  $A$  на каждой стадии процесса мог быть осуществлен без притока или потери тепла, то соответствующие точки диаграммы лежали бы на одной и той же „адиабатической кривой“ и приращение внутренней энергии было бы представлено площадью, заключенной между этой кривой, осью  $v$  и крайними ординатами. Для действительных газов адиабата обращена вогнутостью кверху и потому последняя из названных площадей (по абсолютному значению) меньше, чем первая. Если мы обратим внимание на знак площади, то увидим, что для волны сгущения ( $v_1 < v_0$ ) работа внешнего давления была бы больше, чем приращение кинетической и внутренней энергии; в случае же волны разрежения ( $v_1 > v_0$ ), наоборот, отданная работа больше, чем соответствующая ей кажущаяся потеря энергии<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> В некоторых исследованиях Гюгонно (которые Адамар в своих „Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique“, Париж, 1903, развивает дальше) доказательство, приведенное в тексте, обращено. При предположении возможности волны разрыва оказывается, что уравнение энергии может быть удовлетворено, если выражение (10) положить равным приращению внутренней энергии [см. § 10 (8)]. На основании такого предположения Гюгонно делает заключение, что переход от одного состояния к другому происходит по закону

$$\frac{1}{2} (p_1 + p_0) (v_0 - v_1) = \frac{1}{\gamma - 1} (p_1 v_1 - p_0 v_0).$$

„Telle est la relation qu'Hugoniot a substituée à [ $p v^\gamma = \text{const.}$ ] pour exprimer que la condensation ou dilatation brusque se fait sans absorption ni dégagement de chaleur. On lui donne actuellement le nom de loi adiabatique dynamique, la relation [ $p v^\gamma = \text{const.}$ ], qui convient aux changements lents, étant désignée sous le nom de loi adiabatique statique“ (Hadamard, p. 192), что в переводе означает: „Таково соотношение, которое Гюгонно поставил на место закона [ $p v^\gamma = \text{const.}$ ], чтобы выразить, что внезапное сгущение или разрежение происходит без поглощения или выделения тепла. Эту зависимость называют динамическим адиабатическим законом, соотношение же [ $p v^\gamma = \text{const.}$ ], которое имеет место в случае медленных изменений, называют статическим адиабатическим законом“. Однако, для такого закона не даны какие-либо физические основания.

Оказывается, что уравнение энергии для волн разрыва не может удовлетворяться за исключением такой гипотетической среды, в которой адиабатами являются прямые линии. Это совпадает с тем условием, которое мы получили для возможности установившихся непрерывных волн.

В исследованиях, которые изложены выше, не принимались во внимание диссипативные силы, такие, как вязкость, теплопроводность и лученспускание. Практически же существование волны разрыва должно предполагать наличие конечной разности температур между частями жидкости, лежащими с обеих сторон плоскости разрыва; поэтому, если даже оставить в стороне вязкость, рассеяние энергии должно происходить вследствие тепловых явлений на плоскости разрыва. То обстоятельство, что установившаяся волна разрежения должна была бы дать выигрыш энергии, показывает, что такого рода волна невозможна. Отсюда следует, что такая волна, если даже она когда-либо возникла бы, оказалась бы неустойчивой.

Вопрос о том, можно ли соотношения между обоими состояниями при допущении рассеяния энергии согласовать с уравнением энергии, был подробно исследован Ранкином и (более подробно) Рэлеем<sup>1)</sup>. При этих исследованиях предполагалось, что переход от одного установившегося состояния к другому происходит непрерывно, хотя и очень быстро. Так как температурный градиент  $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)$  впереди и позади волны есть нуль, то полное приращение тепла на единицу массы при переходе от состояния *A* к состоянию *B* равно нулю. Количество тепла, необходимое для того, чтобы вызвать бесконечно малые приращения  $\delta p$  и  $\delta v$ , определяется термодинамической формулой

$$\delta Q = \frac{v \delta p + \gamma p \delta v}{\gamma - 1}. \quad (12)$$

Так как на основании уравнения (4) имеем

$$\delta p = -m^2 \delta v,$$

то формулу (12) можно представить в виде

$$\delta Q = \frac{\delta p}{(\gamma - 1) m^2} \{ p + m^2 v - (\gamma + 1) p \}. \quad (13)$$

Отсюда, выражая, что

$$\int dQ = 0,$$

получим соотношение

$$p + m^2 v = \frac{1}{2} (\gamma + 1) (p_0 + p_1). \quad (14)$$

<sup>1)</sup> Rayleigh, см. выше, стр. 601.



В частности имеем

$$\left. \begin{aligned} m^2 v_1 &= \frac{1}{2}(\gamma - 1) p_1 + \frac{1}{2}(\gamma + 1) p_0, \\ m^2 v_0 &= \frac{1}{2}(\gamma + 1) p_1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1) p_0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Из формул (13) и (14) получается

$$\delta Q = \frac{(\gamma + 1) \delta p}{2(\gamma - 1) m^2} (p_0 + p_1 - 2p), \quad (16)$$

а отсюда

$$Q = \frac{(\gamma + 1)}{2(\gamma - 1) m^2} (p_1 - p)(p - p_0). \quad (17)$$

Эта формула дает полное количество тепла, которое получила единица массы жидкости к тому моменту, когда давление сделалось равным  $p$ .

Если принять во внимание только теплопроводность, то поток тепла в область, расположенную влево от плоскости, которая лежит между плоскостями  $A$  и  $B$ , равен  $k \frac{d\theta}{dx}$ , где  $k$  обозначает коэффициент теплопроводности, в то время как количество тепла, проходящее в единицу времени через плоскость вследствие конвекции, оказывается равным  $mQ$ . Так как область, расположенная с левой стороны, не получает и не теряет тепла, то имеем

$$k \frac{d\theta}{dx} = -mQ. \quad (18)$$

Ранкин исключает  $\theta$  посредством формулы  $p\theta = R\theta$  и находит таким способом зависимость между величинами  $x$  и  $p$ . Формула  $p\theta = R\theta$  в соединении с формулой (14) дает соотношение

$$\theta = \frac{\left\{ \frac{1}{2}(\gamma + 1)(p_0 + p_1) - p \right\} p}{m^2 R}. \quad (19)$$

Отсюда на основании формулы (18) следует

$$\frac{dx}{dp} = \frac{\frac{d\theta}{dp}}{\frac{d\theta}{dx}} = - \frac{(\gamma - 1) k}{(\gamma + 1) m R} \cdot \frac{(\gamma + 1)(p_0 + p_1) - 4p}{(p_1 - p)(p - p_0)}. \quad (20)$$

Для некоторой точки волны вследствие предполагаемой непрерывности мы должны иметь  $p = \frac{1}{2}(p_0 + p_1)$ ; в этой точке значение величины  $\frac{dx}{dp}$  должно быть отрицательным. Кроме того, величина  $\frac{dx}{dp}$  не должна менять знак, так как в противном случае мы имели бы два различных значения для  $p$  при одном и том же значении  $x$ .

Следовательно, мы должны иметь  $p_0 < p_1$ , и потому  $v_0 > v_1$ , т. е. волна должна быть волной сгущения. При возрастании  $x$  значения  $p$  непрерывно уменьшаются от  $p_1$  до  $p_0$ , и потому знаменатель во второй дроби в правой части равенства (20) оказывается положительным. Для того чтобы числитель был положителен, должно выполняться равенство

$$\frac{p_1}{p_0} < \frac{\gamma + 1}{3 - \gamma}. \quad (21)$$

Для воздуха это предельное значение приблизительно равно  $3/2$ .

Интеграл от выражения (20) равен

$$x = \frac{k}{(\gamma + 1) m C_v} \left\{ \frac{(\gamma - 1)(p_0 + p_1)}{p_1 - p_0} \log \frac{p_1 - p}{p - p_0} - 2 \log \frac{4(p_1 - p)(p - p_0)}{(p_1 - p_0)^2} \right\}, \quad (22)$$

если начало отсчета  $x$  взять в точке, где  $p = \frac{1}{2}(p_0 + p_1)$ . Мы воспользовались при этом термодинамическим соотношением

$$R = (\gamma - 1) C_v, \quad (23)$$

в котором  $C_v$  обозначает удельную теплоемкость при постоянном объеме. При изменении величины  $p$  от значения  $p_1$  до значения  $p_0$  значение  $x$  возрастает от  $-\infty$  до  $+\infty$ ; однако, если отношение  $\frac{p_1}{p_0}$  заметно отклоняется от единицы, то область, в которой практически имеет место этот переход, оказывается очень малой, и все обстоятельства оказываются очень близкими к тем, которые наблюдаются в случае разрыва<sup>1)</sup>.

В случае воздуха мы можем положить в системе CGS

$$k = 5,22 \cdot 10^{-5}, \quad \gamma = 1,40, \quad C_v = 0,1715, \\ e_0 = 0,00129, \quad p_0 = 1,013 \cdot 10^4.$$

Отсюда, полагая для примера  $\frac{p_1}{p_0} = 1,4$ , мы находим из равенств (15)  $m = 49,6$  и, следовательно,

$$\frac{k}{(\gamma + 1) m C_v} = 2,559 \cdot 10^{-6}.$$

Из этих данных мы заключаем, что давление изменяется

$$\text{от } \frac{9}{10} p_1 + \frac{1}{10} p_0 \text{ до } \frac{9}{10} p_0 + \frac{1}{10} p_1$$

на протяжении  $2,7 \cdot 10^{-5}$  см. Скорость распространения возмущения относительно покоящегося воздуха получается равной

$$\frac{m}{e_0} = 3,84 \cdot 10^4 \text{ см/сек.}$$

<sup>1)</sup> Rayleigh, см. выше. Независимо от Рэля к подобным же результатам пришел Г. И. Тэйлор, The Conditions Necessary for Discontinuous Motion in Gases, Proc. Roy. Soc. A, LXXXIV, 371 (1910).

В том случае, когда и вязкость и теплопроводность будут приняты во внимание, исследование становится более сложным. Рэлеем было установлено, что общий характер полученных результатов не изменится, за исключением того, что область допустимых значений отношения  $\frac{\rho_1}{\rho_0}$  значительно расширится. Его решение для случая учета одной только вязкости будет приведено позднее (§ 360а).

### Сферические волны.

§ 285. Общие уравнения малых колебаний имеют следующий вид

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z}. \quad (1)$$

Если положим

$$p = p_0 + \kappa s, \quad c^2 = \frac{\kappa}{\rho_0} \quad (2)$$

и проинтегрируем уравнения (1) по  $t$ , то получим

$$\left. \begin{aligned} u &= -c^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t s dt + u_0, & v &= -c^2 \frac{\partial}{\partial y} \int_0^t s dt + v_0, \\ w &= -c^2 \frac{\partial}{\partial z} \int_0^t s dt + w_0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где  $u_0, v_0, w_0$  суть значения  $u, v, w$  в точке  $(x, y, z)$  в момент  $t=0$ . Если в начальный момент движение было безвихревым и обладало потенциалом скоростей  $\varphi_0$ , то будем иметь

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (4)$$

где

$$\varphi = c^2 \int_0^t s dt + \varphi_0. \quad (5)$$

Такое непрерывное существование потенциала скоростей мы доказали в более общем виде в §§ 17 и 33.

Из равенства (5) получается

$$c^2 s = \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (6)$$

Мы будем теперь предполагать, что возмущение симметрично относительно некоторой неподвижной точки, которую будем принимать за начало. Движение в данном случае необходимо должно быть безвихревым, так что должен существовать потенциал скоростей  $\varphi$ , который в нашем случае зависит только от расстояния  $r$  от начала и от времени  $t$ .

Чтобы составить уравнение непрерывности, заметим, что масса жидкости, заключенная между сферами  $r$  и  $r + \delta r$ , вследствие разности потоков через внутреннюю и внешнюю поверхности увеличится в единицу времени на величину

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( 4\pi r^2 \rho \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \delta r.$$

Так как это же количество может быть выражено также через  $\frac{\partial \rho}{\partial t} 4\pi r^2 \delta r$ , то имеем

$$r^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \rho r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right). \quad (7)$$

Это уравнение можно было бы также получить непосредственно из общего уравнения непрерывности (5) § 7. Для случая бесконечно малых движений из уравнения (7) следует

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right); \quad (8)$$

отсюда на основании формулы (6) получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right). \quad (9)^1$$

Это уравнение можно привести к более удобной форме

$$\frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2}; \quad (10)$$

решение его имеет вид

$$r\varphi = f(r - ct) + F(r + ct). \quad (11)$$

Движение складывается, таким образом, из двух систем сферических волн, из которых одна распространяется со скоростью  $c$  наружу, а другая с такой же скоростью внутрь.

Если мы рассмотрим теперь только первую систему, то на основании равенства (6) будем иметь

$$cs = -\frac{1}{r} f'(r - ct);$$

это показывает, что сгущение распространяется со скоростью  $c$  наружу, причем во время движения значение его убывает, так как оно оказывается обратно пропорциональным расстоянию от начала координат.

<sup>1)</sup> Если мы примем закон Бойля, то точное уравнение симметричных сферических волн будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right).$$

Скорость в одном и том же ряду волн равна

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{1}{r} f'(r - ct) + \frac{1}{r^2} f(r - ct).$$

С возрастанием  $r$  второй член становится все меньше по сравнению с первым, так что скорость в конце концов распространяется по тому же закону, как и сгущение.

Если имеются налицо только расходящиеся или только сходящиеся волны, то из равенства (11) имеем

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\varphi) = \mp cs; \quad (12)$$

это соответствует формуле (11) § 277.

Для наших целей удобнее представить формулу для расходящихся волн в следующем виде

$$4\pi r \varphi = f\left(t - \frac{r}{c}\right). \quad (13)$$

Так как отсюда получается

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[ -4\pi r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] = f(t), \quad (14)$$

то можно считать, что эти волны возбуждаются источником интенсивности  $f(t)$ , находящимся в начале; ср. § 196.

Если источник действует только в течение конечного промежутка времени, то значение  $\varphi$ , данное формулой (13), будет исчезать за границами волн. Отсюда на основании формулы (6) следует

$$\int s \, dt = 0, \quad (15)$$

где интеграл распространяется на весь тот промежуток времени, который необходим для того, чтобы возмущение прошло через рассматриваемую точку. То обстоятельство, что расходящаяся сферическая волна должна обязательно содержать как сгущенную, так и разреженную части, было в первый раз замечено Стоксом<sup>1)</sup>, ср. § 197.

Энергия конечной системы расходящихся сферических волн так же, как и в случае плоских прогрессивных волн, состоит наполовину из кинетической энергии, наполовину из потенциальной.

Это следует из общих рассуждений § 174, но может быть получено и независимо от них следующим образом. Имеем тождество

$$r^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 = \left\{ \frac{\partial (r\varphi)}{\partial r} \right\}^2 - \frac{\partial}{\partial r} (r\varphi^2).$$

<sup>1)</sup> Stokes, On some Points in the Received Theory of Sound, Phil. Mag. (3), XXXIV, 52 (1849) [Papers, II, 82]. См. также Rayleigh, Theory of Sound, § 279.

Если положим

$$q = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad c^2 s = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (16)$$

то это тождество на основании формулы (12) дает для случая расходящейся системы волн зависимость

$$r^2 q^2 = c^2 r^2 s^2 - \frac{\partial}{\partial r} (r \varphi^2).$$

Отсюда следует

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{2} \rho q^2 4\pi r^2 dr = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \rho c^2 s^2 4\pi r^2 dr, \quad (17)$$

так как  $r\varphi^2$  исчезает на внешней и внутренней границе системы волн<sup>1)</sup>.

**§ 286.** Определение функций  $f$  и  $F$  в формуле (11) из начальных условий для неограниченного пространства можно выполнить следующим способом.

Будем считать, что распределение скорости и плотности в момент  $t$  дается формулами

$$\varphi = \psi(r), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \chi(r), \quad (18)$$

где  $\psi$ ,  $\chi$  обозначают произвольные функции.

При сравнении с формулами (11) получим

$$\begin{aligned} f(z) + F(z) &= z\psi(z), \\ -f'(z) + F'(z) &= \frac{z}{c} \chi(z). \end{aligned} \quad (19)$$

Второе из этих уравнений дает после интегрирования

$$-f(z) + F(z) = \frac{1}{c} \int_0^z z\chi(z) dz + C. \quad (20)$$

Далее, из того условия, что в начале волн не происходит никакого возникновения или исчезания жидкости, т. е.  $r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \rightarrow 0$ , когда  $r \rightarrow 0$ , следует

$$f(-z) + F(z) = 0. \quad (21)$$

Формулы (19) и (20) определяют функции  $f$  и  $F$  для положительных значений  $z$ , после чего формула (21) определяет  $f$  для отрицательных значений  $z$ <sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Lamb, Proc. Lond. Math. Soc. (1), XXXV, 160 (1902).

<sup>2)</sup> Rayleigh, Theory of Sound, § 279.

Окончательный результат можно написать в виде

$$r\varphi = \frac{1}{2}(r - ct)\psi(r - ct) + \frac{1}{2}(r + ct)\psi(r + ct) + \frac{1}{2c} \int_{r-ct}^{r+ct} z\chi(z) dz \quad (22)$$

или

$$r\varphi = -\frac{1}{2}(ct - r)\psi(ct - r) + \frac{1}{2}(ct + r)\psi(ct + r) + \frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} z\chi(z) dz, \quad (23)$$

смотря по тому, будет ли  $r$  больше или меньше, чем  $ct$ . Эти формулы могут быть непосредственно проверены.

В качестве очень простого примера рассмотрим тот случай, когда воздух вначале находится в покое и начальное возмущение представляет собой сгущение  $s_0$ , постоянное внутри шара радиуса  $a$ . Тогда мы будем иметь  $\psi(z) = 0$ , в то время как  $\chi(z) = c^2 s_0$  или  $0$ , смотря по тому  $z \lesseqgtr a$ . На расстоянии  $r (> a)$  от начала координат движение начнется в момент  $t = \frac{r-a}{c}$  и закончится в момент  $t = \frac{r+a}{c}$ . Для промежуточных моментов времени мы будем иметь

$$r\varphi = \frac{1}{4} cs_0 \{ a^2 - (r - ct) \}^2 \quad (24)$$

и

$$\frac{s}{s_0} = \frac{r - ct}{2r}. \quad (25)$$

Возмущение оказывается заключенным в пространстве между двумя концентрическими сферами с разностью радиусов  $2a$ , и коэффициент сгущения  $s$  остается положительным для внешней половины этого пространства и отрицательным для внутренней половины.

Нам потребуется скоро выражение, которое дает значение  $\varphi$  в начале координат как функцию  $t$ , выраженную через начальные данные. На основании формул (11) и (21) имеем

$$\begin{aligned} [\varphi]_{r=0} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(r - ct) + F(r + ct)}{r} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{F(ct + r) - F(ct - r)}{r} = 2F'(ct) \end{aligned}$$

или на основании формулы (19) и последующей

$$[\varphi]_{r=0} = \frac{d}{dt} [t\psi(ct)] + t\chi(ct). \quad (26)$$

Например, в только что рассмотренной специальной задаче имеет место равенство  $\psi = 0$  для всех значений переменного, в то время как  $\chi(r) = c^2 s_0$  или  $0$  при  $r \lesseqgtr a$ . В начальной точке мы имеем, таким образом,  $\varphi = c^2 s_0 t$  или  $0$

для  $ct \lesssim a$ . Когда  $ct = a$ , то значение  $\varphi$  изменяется скачком от  $acs_0$  до 0, так что значение  $s$  в центре на одно мгновение обращается в отрицательную бесконечность. Мы можем избежать обращения  $\varphi$  в бесконечность, если примем, что начальное значение  $s$  вблизи значения  $r = a$  изменяется непрерывно, но быстро от  $s_0$  до 0.

### Общее уравнение звуковых волн.

§ 287. Мы переходим теперь к общему случаю распространения звуковых волн. Как и прежде, мы будем пренебрегать малыми величинами второго порядка, так что уравнение движения, как в § 285, будет иметь вид

$$c^2 s = \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (1)$$

Подставляя  $\rho = \rho_0(1 + s)$  в общее уравнение непрерывности, будем иметь с той же степенью приближения

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (2)$$

Исключение  $s$  из уравнений (1) и (2) дает

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

или, при нашем прежнем способе обозначения,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi. \quad (4)$$

Так как это уравнение линейное, то оно будет удовлетворяться средним арифметическим произвольного числа частных решений  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ . Как в § 38, представим себе бесконечное число прямоугольных систем осей, равномерно распределенных около точки  $P$  как около начала; пусть функции  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$  суть потенциалы скоростей тех движений, которые по отношению к этим системам оказываются такими же, как первоначальное движение по отношению к системе  $x, y, z$ . Тогда среднее арифметическое  $\bar{\varphi}$  функций  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  будет потенциалом скоростей движения, симметричного по отношению к точке  $P$ ; поэтому к функции  $\bar{\varphi}$  можно будет применить результаты исследования § 286, если через  $r$  обозначить расстояние произвольной точки от точки  $P$ . Другими словами, если  $\bar{\varphi}$  есть функция от  $r$  и  $t$ , определяемая уравнением

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{4\pi} \iint \varphi \, d\tilde{\omega}, \quad (5)$$

где  $\varphi$  обозначает произвольное решение уравнения (4), а  $d\tilde{\omega}$  — телесный угол, под которым из  $P$  виден элемент шаровой поверхности



радиуса  $r$  с центром в  $P$ , то будем иметь

$$\frac{\partial^2 r \bar{\varphi}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 r \bar{\varphi}}{\partial r^2}. \quad (6)^1$$

Отсюда следует

$$r \bar{\varphi} = f(r - ct) + F(r + ct). \quad (7)$$

Таким образом, среднее значение  $\varphi$  для шара, имеющего центр в произвольной точке среды, следует такому же закону, как потенциал скоростей симметрической шаровой волны. Мы видим сразу, что значение  $\varphi$  в точке  $P$  в момент  $t$  зависит от средних значений, которые функции  $\varphi$  и  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  имели первоначально в точках сферы с радиусом  $ct$  и с центром в  $P$ ; возмущение поэтому распространяется по всем направлениям с одинаковой скоростью  $c$ . Таким образом, если первоначальное возмущение распространялось только на конечную часть  $\Sigma$  области, то возмущение в точке  $P$ , лежащей вне  $\Sigma$ , начинается по истечении промежутка времени  $\frac{r_1}{c}$ , продолжается в течение времени  $\frac{r_2 - r_1}{c}$ , а потом совершенно прекращается;  $r_1, r_2$  обозначают радиусы двух сфер с центрами в  $P$ , из которых одна охватывает  $\Sigma$ , а другая ее исключает.

Чтобы дать математическое выражение решению уравнения (4), в существенных чертах уже полученному, положим, что значения функций  $\varphi$  и  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  в момент  $t=0$  даются формулами

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \psi(x, y, z), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \chi(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Средние значения этих функций в шаре радиуса  $r$  с центром в точке  $(x, y, z)$  суть

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= \frac{1}{4\pi} \iint \psi(x + lr, y + mr, z + nr) d\tilde{\omega}, \\ \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi} \iint \chi(x + lr, y + mr, z + nr) d\tilde{\omega}, \end{aligned}$$

где  $l, m, n$  обозначают направляющие косинусы произвольного радиуса этого шара и  $d\tilde{\omega}$  есть соответствующий элементарный телесный угол.

<sup>1)</sup> Этот результат другим путем был найден Пуассоном, *Mémoire sur la théorie du son*, Journ. de l'École Polytechn., VII, 334—338 (1807). Замечание, что это приводит также к полному решению уравнения (4), принадлежит Лиувиллю, Journ. de Math., I, 1 (1856).

Полагая

$$l = \sin \theta \cos \omega,$$

$$m = \sin \theta \sin \omega,$$

$$n = \cos \theta,$$

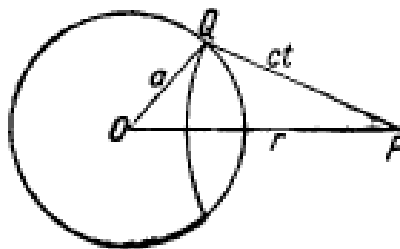
получим

$$\delta \tilde{\omega} = \sin \theta \delta \theta \delta \omega.$$

Если мы сравним этот результат с формулой (26) § 286, то увидим, что значение  $\varphi$  в точке  $(x, y, z)$  для какого-либо следующего момента времени  $t$  определится формулой

$$\left. \begin{aligned} \varphi = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} t \iint \psi (x + ct \sin \theta \cos \omega, y + ct \sin \theta \sin \omega, z + \\ + ct \cos \theta) \sin \theta d\theta d\omega + \\ + \frac{t}{4\pi} \iint \chi (x + ct \sin \theta \cos \omega, y + ct \sin \theta \sin \omega, z + \\ + ct \cos \theta) \sin \theta d\theta d\omega; \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

эта формула была дана Пуассоном<sup>1)</sup>.



Фиг. 76.

Простое приложение этих результатов представляет рассмотренная в § 280 специальная задача; в этой задаче начальное условие заключалось в том, что начальное возмущение  $s_0$  было постоянно внутри сферы с радиусом  $a$  (фиг. 76) и с центром в начале координат. Если сферическая поверхность с радиусом  $PQ = ct$  и с центром в точке  $P$ , лежащей вне первой сферы, пересекает сферу  $r = a$ , то расположенная внутри этой последней часть поверхности шара радиуса  $PQ$  будет равна  $2\pi PQ^2 (1 - \cos OPQ)$ , и среднее значение начальных значений  $s$  на всей поверхности шара  $4\pi PQ^2$  оказы-

вается равным

$$\frac{1}{2} (1 - \cos OPQ) s_0 = \frac{a^2 - (ct - r)^2}{4ctr} s_0. \quad (10)$$

где  $r = OP$ . Отсюда получается

$$\varphi_P = \frac{cs_0}{4r} [a^2 - (ct - r)^2], \quad (11)$$

как в (24) § 286.

В случае возмущения, продолжающегося лишь некоторое время и распространяющегося в неограниченном пространстве, среднее значе-

<sup>1)</sup> Poisson, Mémoire sur l'intégration de quelques équations linéaires aux différences partielles et particulièrement de l'équation général du mouvement des fluides élastiques, Mém. de l'Acad. des Sciences, III, 121 (1819). Другие доказательства имеются у Кирхгофа, *Mechanik*, гл. XXIII и Рэлея, *Theory of Sound*, § 273.

ние во времени коэффициента уплотнения  $s$  в каждой точке равно нулю. В самом деле, из (1) следует уравнение

$$c^2 \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} = - \frac{\partial u}{\partial t}$$

и два других аналогичных уравнения. Отсюда получается

$$\frac{\partial}{\partial x} \int s dt = - \left[ \frac{u}{c^2} \right] = 0 \text{ и т. д.,}$$

так как  $u, v, w = 0$  при обоих пределах интеграции по  $t$ . Интеграл  $\int s dt$  имеет поэтому для всех точек пространства одно и то же значение, и если мы рассмотрим бесконечно удаленные точки, в которых волны вследствие расхождения ослаблены, то увидим, что это значение есть нуль, ср. (15) § 285.

**§ 288.** Выражение для кинетической энергии жидкости, содержащейся в произвольной области, имеет вид

$$T = \frac{1}{2} e_0 \iiint \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz. \quad (1)$$

Отсюда

$$\frac{dT}{dt} = e_0 \iiint \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

где  $\dot{\varphi}$  стоит вместо  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ . На основании формулы Грина § 43 это соотношение может быть написано в виде

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= -e_0 \iint \dot{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS - e_0 \iiint \dot{\varphi} \Delta \varphi dx dy dz = \\ &= -e_0 \iint \dot{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS - \frac{e_0}{c^2} \iiint \dot{\varphi} \ddot{\varphi} dx dy dz. \end{aligned}$$

Отсюда, обозначая

$$W = \frac{1}{2} \kappa \iiint s^2 dx dy dz = \frac{1}{2} \frac{e_0}{c^2} \iiint \dot{\varphi}^2 dx dy dz, \quad (2)$$

имеем

$$\frac{d}{dt} (T + W) = -e_0 \iint \dot{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \quad (3)$$

Мы видели (§ 280), что при известных условиях  $W$  представляет внутреннюю энергию.

Полное истолкование формулы (3) мы предоставляем читателю. В различных важных случаях, как, например, в случае неподвижных  $\left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \right)$  или свободных границ  $(\dot{\varphi} = 0)$ , поверхностный интеграл будет исчезать, и мы будем иметь тогда равенство

$$T + W = \text{const.} \quad (4)$$

Этот результат позволяет дать доказательство однозначности определения движения по заданному начальному распределению скоростей и плотностей. В самом деле, если бы  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  были две различные формы потенциала скоростей, соответствующие одним и тем же начальным условиям, то для движения с потенциалом скоростей  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  сумма  $T + W$  должна была бы все время быть равной нулю, ибо она должна исчезать в начальный момент. Но так как каждый элемент в выражениях для  $T$  и  $W$  существенно положителен, то это требует, чтобы производные от  $\varphi$  по  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$  все исчезали, а это обозначает, что  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  могут различаться между собой только на абсолютное постоянное<sup>1)</sup>.

Этот ход доказательства годится, естественно, для всех тех случаев, для которых можно утверждать, что поверхностный интеграл в равенстве (3) исчезает.

### Простые гармонические колебания.

§ 289. В случае простого гармонического движения с множителем времени  $e^{i\omega t}$  уравнение (4) § 287 принимает вид

$$(\Delta + k^2)\varphi = 0, \quad (1)$$

где

$$k = \frac{\sigma}{c}. \quad (2)$$

Сравнение с § 280 показывает, что  $\frac{2\pi}{k}$  есть длина волны плоских волн с данным периодом  $\frac{2\pi}{\sigma}$ .

В случае симметрии относительно начала из уравнения (10) § 258 или после преобразования уравнения (1) будем иметь

$$\frac{\partial^2 r\varphi}{\partial r^2} + k^2 r\varphi = 0. \quad (3)$$

Решение этого уравнения можно написать в виде

$$\varphi = A \frac{\sin kr}{kr} + B \frac{\cos kr}{kr} \quad (4)$$

Если в начале координат источника нет, то должно быть  $B = 0$ , и выражение (4) приводится к виду

$$\varphi = A \frac{\sin kr}{kr}. \quad (5)$$

Следует заметить, что это решение можно получить наложением системы плоских волн с равномерно распределенными направлениями

<sup>1)</sup> Kirchhoff, *Mechanik*, гл. XXIII.

<sup>2)</sup> Множитель, зависящий от времени, здесь, как и в других случаях, ради краткости отброшен.

движения. В самом деле, для системы плоских волн, направление движения которых составляет с данным радиусом-вектором  $r$  угол  $\theta$ , имеем

$$\varphi = e^{-ikr \cos \theta}, \quad (6)$$

и среднее значение этой величины для всевозможных направлений, проходящих через начало, есть

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi e^{-ikr \cos \theta} 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{\sin kr}{kr}. \quad (7)$$

На основании выражения (5) мы можем вывести заключение относительно общего случая, для которого имеет место уравнение (1). Из уравнения (6) § 287 следует, что среднее значение функции  $\varphi$  на поверхности сферы с радиусом  $r$  и с произвольным центром  $O$  удовлетворяет уравнению вида (3). Поэтому будем иметь, пользуясь обозначениями § 287,

$$\bar{\varphi} = \frac{\sin kr}{kr} \varphi_0, \quad (8)$$

где  $\varphi_0$  — значение функции  $\varphi$  в точке  $O$ . При этом предполагается, что  $\varphi$  не имеет особенностей внутри сферы, к которой относится  $r$ <sup>1)</sup>, ср. § 38.

Возвращаясь к случаю симметрии, заметим, что решение (4) может быть также написано в виде

$$\varphi = C \frac{e^{-ikr}}{kr} + D \frac{e^{ikr}}{kr}. \quad (9)$$

Принимая во внимание равенство (13) § 285, тотчас же видим, что формула

$$\varphi = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \quad (10)$$

представляет систему расходящихся волн, происходящую от единичного источника в начале координат.

Чтобы вычислить энергию, излучаемую изолированным источником в свободное пространство, мы воспользуемся выражением в действительной форме

$$4\pi\varphi = \frac{\cos k(ct - r)}{r}. \quad (11)$$

Работа в единицу времени, произведенная над массой жидкости, находящеюся вне поверхности сферы радиуса  $r$ , равна

$$\left( p_0 + \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \left( - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) 4\pi r^2. \quad (12)$$

<sup>1)</sup> Этот результат был дан Г. Вебером, Crelle, LXIX (1868).

Если мы подставим сюда значение  $\varphi$  из формулы (11) и возьмем средние значения тригонометрических членов, то получим

$$\frac{e_0 k^4 c}{8\pi}. \quad (13)$$

Этот результат можно также получить из § 280, так как сферические волны с возрастанием радиуса приближаются по форме к плоским волнам <sup>1)</sup>.

Подобным же образом второй член в формуле (9) представляет сток, в котором энергия поглощается в количестве (13) в единицу времени. Однако, представление о стоке энергии является для акустики очень искусственным и в действительности не применяется.

Потенциал скоростей диполя можно получить на основании § 56. Так, например, если ось симметрии совпадает с осью  $x$ , то мы можем написать

$$4\pi\varphi = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (14)$$

или в действительной форме

$$4\pi\varphi = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\cos k(ct-r)}{r} = - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\cos k(ct-r)}{r} \cos \theta, \quad (15)$$

где  $\theta$  — угол наклона радиуса-вектора  $r$  к оси  $x$ . Для больших значений  $kr$  имеем приближенное равенство

$$4\pi\varphi = - \frac{k \sin k(ct-r)}{r} \cos \theta. \quad (16)$$

Среднее значение энергии, излучаемой в единицу времени, тогда будет равно

$$\frac{e_0 k^4 c}{24\pi}. \quad (17)$$

Это выражение можно получить или способом, указанным выше, или из теории плоских волн.

Напомним здесь, что эти вычисления имеют силу только в случае изолированного источника в свободном пространстве. Присутствие же препятствий в значительной степени может изменить приведенные результаты. Например, в случае простого источника, находящегося вблизи от бесконечной плоской стенки, амплитуда колебаний в любой точке удваивается вследствие отражения, и явление протекает таким образом, как если бы это отражение приходило от зеркального изображения источника, между тем как излучение энергии оказывается увеличившимся в четыре раза. Наоборот, источник, со всех сторон окруженный твердыми стенками, не производит вообще никакой работы, так как энергия газа остается постоянной.

<sup>1)</sup> Величина  $a$  в § 280 в этом случае равна  $\frac{1}{4\pi cr}$ . Подставляя это значение в формулу (9) § 280 и умножая на  $4\pi r^2$ , получим выражение (13).

§ 290. Общая теория функций, удовлетворяющих уравнению

$$(\Delta + k^2)\varphi = 0, \quad (1)$$

была развита Гельмгольцем <sup>1)</sup>, Рэлеем <sup>2)</sup> и другими авторами <sup>3)</sup>. Она во многих отношениях аналогична теории уравнения Лапласа  $\Delta\varphi = 0$ ; в самом деле, последнее уравнение есть специальный случай, который получается, если положить  $c = \infty$  или  $\sigma = 0$ .

Типичное решение уравнения (1), из которого можно получить все другие, есть решение, соответствующее единичному источнику, именно

$$\varphi = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}, \quad (2)$$

где  $r$  обозначает расстояние от источника.

На основании теоремы Грина получается следующее: если  $\varphi$ ,  $\varphi'$  — две произвольные функции, конечные и однозначные вместе со своими первыми и вторыми производными в какой-либо конечной области, то имеем

$$\iint \left( \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n} - \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS = \iiint (\varphi' \Delta \varphi - \varphi \Delta \varphi') dx dy dz. \quad (3)$$

Если, кроме того, как  $\varphi$ , так и  $\varphi'$  будут удовлетворять уравнению (1), то правая часть формулы (3) будет исчезать, и мы получим

$$\iint \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n} dS = \iint \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \quad (4)$$

Отсюда тем же способом <sup>4)</sup>, как в § 57, мы получаем формулу

$$\varphi_P = -\frac{1}{4\pi} \iint \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS + \frac{1}{4\pi} \iint \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS, \quad (5)$$

которая выражает значение  $\varphi$  в произвольной точке  $P$  области через значения  $\varphi$  и  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  на границе. Буква  $r$  обозначает здесь расстояния отдельных элементов поверхности от точки  $P$ , и мы видим, что значение  $\varphi$  получается таким, как если бы оно соответствовало некото-

<sup>1)</sup> Helmholtz, Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden, Crelle, LVII, 1 (1859) (Wiss. Abh., II, 303).

<sup>2)</sup> Rayleigh, Theorie of Sound, II.

<sup>3)</sup> Относительно новой математической теории см. Pockels, Über die partielle Differentialgleichung  $\Delta u + k^2 u = 0$ , Лейпциг, 1891 и Sommerfeld, см. выше стр. 83.

<sup>4)</sup> Это показывает, что мы полагаем  $\varphi' = \frac{e^{-ikr}}{r}$ , где  $r$  обозначает расстояние от некоторой постоянной точки, и исключаем эту точку (если она лежит в рассматриваемой области) при помощи некоторой сферы малого радиуса.

рому распределению простых источников и диполей <sup>1)</sup> на граничной поверхности.

Если далее  $r'$  обозначает расстояние от точки  $P'$ , лежащей вне области, то имеем

$$0 = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{e^{-ikr'}}{r'} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS + \frac{1}{4\pi} \iiint \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-ikr'}}{r'} dS. \quad (6)$$

Следует заметить, что, как и в § 58, какое-то частное распределение источников на границе, выражаемое формулой (5), представляет только одно из бесконечного числа возможных распределений, которые дают точно такое же значение функции  $\varphi$  для *внутренних* точек области. Так, например, в результате сложения равенств (5) и (6) мы получим другое подобное же распределение, которое, кроме того, может быть изменено бесчисленным множеством способов путем изменения положения точки  $P'^2$ ).

Формулы (5) и (6) сохраняют также силу для бесконечной области, ограниченной изнутри одной или несколькими замкнутыми поверхностями, в предположении, что функция  $\varphi$  с увеличением расстояния  $R$  от начала приближается к виду

$$\varphi = C \frac{e^{-ikR}}{R}. \quad (7)$$

Эта формула выражает то обстоятельство, что в бесконечности мы не имеем никаких источников звука.

Можно при некоторых условиях несколько далее провести аналогию с теорией обыкновенного потенциала и выразить значение  $\varphi$  в произвольной точке заданной области при помощи распределения только одних простых источников или только одних диполей по границе; в самом деле имеем

$$\varphi_P = -\frac{1}{4\pi} \iint \frac{e^{-ikr}}{r} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{\partial \varphi'}{\partial n'} \right) dS, \quad (8)$$

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi} \iint (\varphi - \varphi') \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS, \quad (9)$$

где вспомогательная функция  $\varphi'$  вместе со своими первыми и вторыми производными предполагается конечной и удовлетворяющей уравнению (1) внутри остальной области, являющейся внешней и заданной, тогда как на границе в зависимости от случая должно быть

$$\varphi' = \varphi \quad \text{или} \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}. \quad (10)$$

Также предполагается, что  $\varphi'$  стремится асимптотически к виду (7), когда область, к которой она относится, расширяется до бесконеч-

<sup>1)</sup> Helmholtz, см. выше, стр. 628.

<sup>2)</sup> Lagrange, см. выше, стр. 82.



ности. Нет необходимости доказывать это, так как это доказательство повторяло бы ход рассуждений § 58.

Было бы, однако, неправильно считать, что так же, как в случае обыкновенного потенциала, необходимо должна существовать функция  $\varphi$ , которая удовлетворяет уравнению (1) внутри заданной конечной области и в то же время удовлетворяет условию, что  $\varphi$  или  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  на границе должны принимать произвольные заданные значения. Хотя приведенная теорема существования обычно имеет место, однако, она теряет силу для ряда определенных значений  $k$ , отвечающих нормальным колебаниям воздушной массы, заполняющей некоторую область, если граничные условия имеют вид соответственно  $\varphi = 0$  или  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ .

На том же основании формулы (8) и (9) нельзя применять без каких-либо ограничений к случаю бесконечной области, так как определение вспомогательной функции может оказаться невозможным.

Для иллюстрации этих результатов положим, что внутри шара с радиусом  $a$  и с центром в начале  $O$  мы имеем

$$\varphi = \frac{\sin kR}{R}, \quad (11)$$

где  $R$  обозначает теперь расстояние от точки  $O$ . Если для внешней области положим

$$\varphi' = \frac{e^{-ik(R-a)}}{R} \sin ka, \quad (12)$$

то условия применимости формулы (8) будут выполнены, и мы находим

$$\varphi = \frac{ke^{ika}}{4\pi a} \iint \frac{e^{-ikr}}{r} dS. \quad (13)$$

Легко показать a posteriori, что при  $R < a$  эта формула равносильна формуле (11), а при  $R > a$  — формуле (12).

Найдем теперь поверхностное распределение простых источников, которое дает для пространства, лежащего вне сферы, значение  $\varphi$  в виде

$$\varphi = \frac{e^{-ikR}}{R}. \quad (14)$$

Значение  $\varphi'$  для внутренней области, совпадающее на границе с значением (14), равно

$$\varphi' = \frac{e^{-ika}}{\sin ka} \cdot \frac{\sin kR}{R}, \quad (15)$$

и мы получаем

$$\varphi' = \frac{k}{4\pi a \sin ka} \iint \frac{e^{-ikr}}{r} dS. \quad (16)$$

Однако определение  $\varphi'$  становится невозможным, когда  $k$  есть корень уравнения  $\sin ka = 0$ . В самом деле, оказывается, что в этом случае равномерное распределение простых источников по поверхности шара с радиусом  $a$  не оказывает никакого действия на внешние точки.

Частный случай будем иметь, когда рассматриваемая область является полубесконечной, будучи ограничена плоскостью. Предположим, что это будет область на положительной стороне от плоскости  $x=0$ . Если мы примем  $\varphi'(-x, y, z) = \varphi(x, y, z)$ , то на границе  $\varphi' = \varphi$  и  $\frac{\partial \varphi'}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ , так что формула (8) приводится к виду

$$\varphi_P = -\frac{1}{2\pi} \iint \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \quad (17)$$

С другой стороны, если мы предположим  $\varphi'(-x, y, z) = -\varphi(x, y, z)$ , то на границе  $\varphi' = -\varphi$ ,  $\frac{\partial \varphi'}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$  и, следовательно,

$$\varphi_P = \frac{1}{2\pi} \iint \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS. \quad (18)$$

Если все размеры рассматриваемой области малы по сравнению с длиной волны, то мы можем в формуле (5) приближенно положить  $e^{-ikr} = 1$ , и формула, как в § 57, принимает вид

$$\varphi_P = -\frac{1}{4\pi} \iint \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS + \frac{1}{4\pi} \iint \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS. \quad (19)$$

Таким образом, для расстояний, малых по сравнению с длиной волны, можно вычислять изменения  $\varphi$  так, как если бы удовлетворялось уравнение  $\Delta \varphi = 0$ . Это правило оказывается очень полезным для приближенного решения различных акустических задач (ср. §§ 299–300).

Заметим, наконец, что формула (8) после введения множителя, зависящего от времени, может быть написана в виде

$$\varphi_P = -\frac{1}{4\pi} \iint \frac{e^{i\sigma(t-\frac{r}{c})}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS + \frac{1}{4\pi} \iint \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{i\sigma(t-\frac{r}{c})}}{r} dS. \quad (20)$$

Этот результат можно обобщить, применяя теорему Фурье о двойном интеграле, которую мы можем представить в виде

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) e^{i\sigma(t-\tau)} d\tau. \quad (21)$$

Обозначая через  $\varphi(t)$  значение  $\varphi$  в точке  $(x, y, z)$  на границе области в момент  $t$  и через  $f(t)$  соответствующее значение  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ , получим значение  $\varphi$  для внутренней точки  $P$

$$\varphi_P(t) = -\frac{1}{4\pi} \iint \frac{f(t-\frac{r}{c})}{r} dS + \frac{1}{4\pi} \iint \frac{\partial}{\partial n} \frac{\varphi(t-\frac{r}{c})}{r} dS, \quad (22)$$

причем в последнем члене пространственное дифференцирование относится только к явно входящему  $r$ . Эта замечательная формула выражает значение  $\varphi$  в точке  $P$  для произвольного момента времени через предшествующие значения  $\varphi$  и  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  в точках поверхности, заключающей внутри себя точку  $P$ ; она была получена первоначально Кирхгофом<sup>1)</sup> другим путем из общего уравнения (4) § 287.

Некоторые авторы считали, что эта формула содержит точную математическую формулировку „принципа Гюйгенса“ в акустике; однако, как мы это заметили уже в связи со специальным случаем (5), представление функции таким способом оказывается в значительной степени произвольным и неопределенным.

§ 291. Авторы, названные на стр. 623, исследовали также решение уравнения

$$(\Delta + k^2)\varphi = \Phi, \quad (1)$$

где  $\Phi$  обозначает данную функцию от  $x, y, z$ , исчезающую вне некоторой конечной области.

Решение это может быть получено на основании аналогии с теорией обыкновенного потенциала притяжения. Уравнению удовлетворяет функция

$$\varphi_P = -\frac{1}{4\pi} \iiint \Phi' \frac{e^{-ikr}}{r} dx' dy' dz'; \quad (2)$$

здесь  $\Phi'$ —значение  $\Phi$  в точке  $(x', y', z')$ ,  $r$ —расстояние этой точки от точки  $P$ , для которой отыскивается значение  $\varphi$ , и интеграция распространяется на область  $\Sigma$ . Если точка  $P$  лежит вне области  $\Sigma$ , то непосредственно видно, что правая часть формулы (2) представляет собой потенциал простых источников, распределенных в области  $\Sigma$  с объемной плотностью —  $\Phi$ . Чтобы проверить решение для случая, когда точка  $P$  лежит внутри области  $\Sigma$ , разделим область  $\Sigma$  на две части  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , из которых одна, например,  $\Sigma_2$ , пусть содержит внутри себя точку  $P$  и по своим линейным размерам в конце концов может сделаться бесконечно малой (по сравнению с  $k^{-1}$ ). Так как  $P$  лежит вне  $\Sigma_1$ , то мы должны в интеграле (2) принимать во внимание только те элементы, которые относятся к пространству внутри  $\Sigma_2$ . Для этих элементов получаем после разложения в ряд показательной функции

$$\varphi_P = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\Phi'}{r} dx', dy' dz' + \frac{ik}{4\pi} \iiint \Phi' dx' dy' dz' + \dots \quad (3)$$

Как и в случае обыкновенного потенциала, первый член удовлетворяет уравнению  $\Delta\varphi = \Phi$ , но значение его может сделаться как

<sup>1)</sup> Kirchhoff, Zur Theorie der Lichtstrahlen, Berl. Ber., 1882, стр. 641 (Ges. Abh., II, 22). Некоторые другие доказательства были даны: сравнить Лапшог, см. выше стр. 82 и Love, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 1, 37 (1903).

угодно малым. Второй и следующий члены не дают при предельном переходе никаких прибавок к значению  $\varphi$  или  $\Delta\varphi$ .

Можно показать, что функция (2) есть единственное решение уравнения (1), годное для всех точек пространства и исчезающее в бесконечности. В случае ограниченной области мы можем присоединить еще произвольное решение уравнения  $(\Delta + k^2)\varphi = 0$ ; благодаря этому оказывается возможным удовлетворить граничным условиям.

Мы можем воспользоваться изложенной здесь теорией, чтобы определить эффект, производимый действующими на среду периодическими внешними силами  $(X, Y, Z)$ . Уравнения движения получаются в результате очевидного обобщения уравнений (4) и (5) § 277; таким способом мы получаем уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial s}{\partial x} + X, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial s}{\partial y} + Y, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial s}{\partial z} + Z \quad (4)$$

вместе с уравнением

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right). \quad (5)$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \Delta s - \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \quad (6)$$

или, если принять в качестве множителя, зависящего от времени,  $e^{ikt}$ .

$$(\Delta + k^2)s = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right). \quad (7)$$

Для случая неограниченной области решение принимает вид

$$s = -\frac{1}{4\pi c^2} \iiint \left(\frac{\partial X'}{\partial x'} + \frac{\partial Y'}{\partial y'} + \frac{\partial Z'}{\partial z'}\right) \frac{e^{-ikr}}{r} dx' dy' dz', \quad (8)$$

причем предполагается, что  $X, Y, Z$  исчезают для расстояний от начала, превосходящих некоторое определенное конечное значение. Так как

$$\frac{\partial}{\partial x'} r^{-1} = -\frac{\partial}{\partial x} \cdot r^{-1} \text{ и т. д.,}$$

то формула (8) принимает следующий вид:

$$s = \frac{1}{4\pi c^2} \iiint \left(X' \frac{\partial}{\partial x'} + Y' \frac{\partial}{\partial y'} + Z' \frac{\partial}{\partial z'}\right) \frac{e^{-ikr}}{r} dx' dy' dz'. \quad (9)$$

Обращаясь к уравнениям (4), мы видим, что движение *вне* области, в которой действуют силы, свободно от вихрей и имеет потенциал скоростей

$$\varphi = -\frac{ics}{k}; \quad (10)$$

такой потенциал скоростей можно получить в результате некоторого распределения диполей.

Если мы предположим, например, что силы действуют на бесконечно малую область около начала и параллельны оси  $x$ , и обозначим

$$F = e \iiint X' dx' dy' dz', \quad (11)$$

то получим

$$\varphi = -\frac{iF}{4\pi k c \rho} \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad (12)$$

где  $r$  обозначает расстояние от начала. Сосредоточенная сила  $F e^{i k c t}$  таким образом эквивалентна диполю интенсивности  $\frac{iF}{k c \rho}$ .

Из формул (9) и (11) мы получаем, вводя опять множитель, зависящий от времени,

$$s = \frac{F}{4\pi \rho c^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{i\sigma \left(t - \frac{r}{c}\right)}}{r}, \quad (13)$$

что соответствует силе  $F e^{i\sigma t}$ . Этот результат можно так обобщить, что он окажется годным для произвольного закона силы как функции от времени. Если мы обозначим этот закон через  $F(t)$ , то получим

$$s = \frac{1}{4\pi \rho c^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{F \left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}. \quad (14)$$

### Приложения сферических функций.

§ 292. Если граничные условия относятся к сферическим поверхностям, то решение уравнения

$$(\Delta + k^2) \varphi = 0 \quad (1)$$

можно получить следующим способом.

Мы можем предположить, что значение  $\varphi$  на произвольной сферической поверхности радиуса  $r$  с центром в начале координат разлагается в ряд поверхностных сферических функций, коэффициенты которого суть функции  $r$ . Мы можем, следовательно, написать

$$\varphi = \sum R_n \varphi_n, \quad (2)$$

где  $\varphi_n$  есть объемная сферическая функция степени  $n$  и  $R_n$  есть функция только  $r$ .

Тогда будем иметь

$$\Delta(R_n \varphi_n) = \Delta R_n \varphi_n + 2 \left( \frac{\partial R_n}{\partial x} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + \frac{\partial R_n}{\partial y} \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} + \frac{\partial R_n}{\partial z} \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \right) + R_n \Delta \varphi_n$$

или

$$\Delta(R_n \varphi_n) = \Delta R_n \varphi_n + \frac{2}{r} \frac{dR_n}{dr} \left( x \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \right) + R_n \Delta \varphi_n, \quad (3)$$

но согласно определению объемной сферической функции

$$\Delta \varphi_n = 0$$

и

$$x \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = n \varphi_n.$$