

шие результаты для значений  $\omega$ , превышающих некоторый предел. Из (12) следует

$$\frac{\zeta}{h} = -\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\pi \left( \frac{A}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \sigma t + \frac{B}{b} \cos \frac{\pi y}{b} \sin \sigma t \right). \quad (13)$$

Отсюда получаем

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{1}{8} \rho h a b (A^2 + B^2), \\ Q &= \frac{4 \rho \omega h a b}{\pi^2} A B, \\ R &= \frac{1}{8} \pi^2 g \rho h^2 \left( \frac{b}{a} A^2 + \frac{a}{b} B^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Уравнение (8) принимает теперь вид

$$\left( \sigma^2 - \frac{\pi^2 c^2}{a^2} \right) A^2 + \frac{32 \omega \sigma}{\pi^2} A B + \left( \sigma^2 - \frac{\pi^2 c^2}{b^2} \right) B^2 = 0, \quad (15)$$

где, как и раньше,  $c^2 = gh$ . Стационарные значения  $\sigma$  определяются, таким образом, из уравнения

$$(\sigma^2 - \sigma_1^2)(\sigma^2 - \sigma_2^2) = \frac{256 \omega^2 \sigma^2}{\pi^4}, \quad (16)$$

где  $\sigma_1, \sigma_2$  представляют те значения  $\sigma$ , которые соответствуют колебаниям, параллельным соответственно оси  $x$  и оси  $y$  при отсутствии вращения.

Если  $\omega$  будет малым и  $a$  и  $b$  заведомо не равны между собой, то в том типе колебаний, при котором  $\sigma$  близко к  $\sigma_1$ , будем иметь приближенно

$$\sigma - \sigma_1 = \frac{128 \omega^2 \sigma_1}{\pi^4 (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)}. \quad (17)$$

Соответствующее отношение  $B/A$  будет дано тогда уравнением

$$\frac{16 \omega \sigma_1}{\pi^2} A + (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) B = 0, \quad (18)$$

и оно будет малым, как и следовало ожидать.

Для квадратного бассейна  $a = b$ ; тогда уравнение (16) даст

$$\sigma^2 - \sigma_1^2 = \pm \frac{16 \omega \sigma}{\pi^2}, \quad (19)$$

или приблизительно

$$\sigma - \sigma_1 = \pm \frac{8 \omega}{\pi^2}. \quad (20)$$

В таком случае будет  $B/A = \pm 1$ .

### Приливы на вращающемся шаре

**§ 213.** Мы переходим теперь к изложению оснований проблемы Лапласа о приливных колебаниях океана, который обладает сравнительно небольшой глубиной и покрывает вращающийся шар <sup>1)</sup>. Чтобы

<sup>1)</sup> Laplace, Recherches sur quelques points du Système du monde, Mém. de l'Acad. roy. de Sciences, 1775 [1778] и 1776 [1779] [Oeuvres Complètes, IX, 88, 187]. Это исследование с различными изменениями перепечатано в Mécanique céleste, кн. 4, гл. I (1779).

сделать более ясной сущность применяемых приближенных методов, основания которых различны, мы при выводе основных уравнений выберем путь, несколько уклоняющийся от обычного.

Если имеет место относительное равновесие, то свободная поверхность есть, конечно, поверхность уровня по отношению к силе тяжести и центробежной силе; предположим, что эта поверхность есть поверхность вращения вокруг полярной оси и что сжатие не обязательно мало.

Примем эту равновесную форму свободной поверхности за поверхность отсчета и обозначим соответственно через  $\theta$  и  $\varphi$  полюсное расстояние (т. е. угол между нормалью и полярной осью) и долготу лежащей на ней точки. Через  $z$  обозначим высоту точки над этой поверхностью, отсчитываемую вдоль нормали наружу.

Так как относительное положение частицы жидкости определяется тремя ортогональными координатами  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $z$ , то кинетическая энергия единицы массы будет

$$2T = (R+z)^2 \dot{\theta}^2 + \tilde{\omega}^2 (\omega + \dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2, \quad (1)$$

где  $R$  обозначает радиус кривизны меридионального сечения координатной поверхности и  $\tilde{\omega}$  — расстояние частицы от полярной оси. Необходимо заметить, что  $R$  зависит только от  $\theta$ , в то время как  $\tilde{\omega}$  есть функция от  $\theta$  и  $z$ ; из геометрических соображений непосредственно следует

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\omega}}{(R+z) \partial \theta} &= \cos \theta, \\ \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial z} &= \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Компоненты ускорения получим сразу из (1) с помощью уравнений Лагранжа. Ограничиваясь бесконечно малыми движениями и пренебрегая членами второго порядка, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R+z} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) &= (R+z) \ddot{\theta} - \frac{1}{R+z} (\omega^2 + 2\omega\dot{\varphi}) \tilde{\omega} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \theta}, \\ \frac{1}{\tilde{\omega}} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) &= \tilde{\omega} \ddot{\varphi} + 2\omega \left( \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial z} \dot{z} \right), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial T}{\partial z} &= \ddot{z} - (\omega^2 + 2\omega\dot{\varphi}) \tilde{\omega} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Если обозначим через  $u$ ,  $v$ ,  $w$  компоненты относительной скорости частицы, т. е.

$$\left. \begin{aligned} u &= (R+z) \dot{\theta}, \\ v &= \tilde{\omega} \dot{\varphi}, \\ w &= \dot{z}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

и используем уравнение (2), то гидродинамические уравнения можно привести к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v \cos \theta &= -\frac{1}{R+z} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{p}{\rho} + \Psi - \frac{1}{2} \omega^2 \tilde{\omega}^2 + \Omega \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u \cos \theta + 2\omega w \sin \theta &= -\frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{p}{\rho} + \Psi - \frac{1}{2} \omega^2 \tilde{\omega}^2 + \Omega \right), \\ \frac{\partial w}{\partial t} - 2\omega u \sin \theta &= -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{\rho} + \Psi - \frac{1}{2} \omega^2 \tilde{\omega}^2 + \Omega \right), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где  $\Psi$  обозначает потенциал сил, обусловленных притяжением Земли, а  $\Omega$  есть потенциал возмущающих сил.

До сих пор единственная неточность состояла в отбрасывании в левой части уравнений (5) членов второго порядка относительно  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Так как в рассматриваемом случае глубина моря мала сравнительно с размерами земного шара, то мы можем  $R+z$  заменить через  $R$ . Далее мы предположим, что вертикальная компонента скорости  $w$  мала сравнительно с горизонтальными компонентами  $u$ ,  $v$  и что величиной  $\frac{\partial w}{\partial t}$

можно пренебречь сравнительно с  $wv$ . Как и в теории „длинных“ волн, подобные допущения оправдываются *a posteriori* и здесь, если убедиться, что результаты, найденные на основании этих допущений, не находятся в противоречии с самими допущениями (ср. § 172)<sup>1)</sup>.

Проинтегрируем теперь третье из уравнений (5) между пределами  $z$  и  $\zeta$ , где  $\zeta$  обозначает возвышение возмущенной поверхности над уровнем поверхности отсчета. На поверхности отсчета ( $z=0$ ) согласно предположению мы имеем

$$\Psi - \frac{1}{2} \omega^2 \tilde{\omega}^2 = \text{const.}$$

и, следовательно, на свободной поверхности ( $z=\zeta$ ) приближенно будем иметь

$$\Psi - \frac{1}{2} \omega^2 \tilde{\omega}^2 = \text{const.} + g\zeta,$$

при условии, что

$$g = \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \Psi - \frac{1}{2} \omega^2 \tilde{\omega}^2 \right) \right]_{z=0}. \quad (6)$$

Здесь  $g$  есть значение кажущейся тяжести на поверхности отсчета, которое, вообще говоря, есть, конечно, функция от  $\theta$ ; изменением его, зависящим от изменения  $z$ , мы пренебрежем.

<sup>1)</sup> Так, например, при упрощенных условиях § 219, 220  $w/\omega v$  оказывается порядка  $m \left( = \frac{\omega^2 a}{g} \right)$ .

Пренебрегая изменением потенциала возмущающих сил  $\Omega$  в зависимости от изменения  $z$  по сравнению с  $g$  и интегрируя, получим

$$\frac{p}{\rho} + \Psi - \frac{1}{2} \omega^2 \tilde{\omega}^2 = \text{const.} + g\zeta + 2\omega \sin \theta \int_z^{\zeta} v dz. \quad (7)$$

Последний член есть порядка  $\omega h v \sin \theta$ , где  $h$  обозначает глубину жидкости, и можно показать, что в последующих рассуждениях он будет порядка  $\frac{h}{a}$  по сравнению с  $g\zeta$ <sup>1)</sup>. Сделав подстановку в первые два уравнения (5), получим с рассматриваемой точностью приближения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v \cos \theta &= -\frac{\partial}{R \partial \theta} g(\zeta - \bar{\zeta}), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u \cos \theta &= -\frac{\partial}{\tilde{\omega} \partial \varphi} g(\zeta - \bar{\zeta}), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где

$$\bar{\zeta} = -\frac{\Omega}{g}; \quad (9)$$

Эти уравнения являются независимыми от  $z$ , так что можно предположить, что горизонтальное движение для всех частиц одной и той же вертикали в существенном будет одинаковым.

Как в § 198, это предположение существенно упрощает уравнение неразрывности. Для рассматриваемого случая без труда можно получить

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{\omega} \left\{ \frac{\partial (\tilde{\omega} u)}{R \partial \theta} + \frac{\partial (h v)}{\partial \varphi} \right\}. \quad (10)$$

Необходимо подчеркнуть, что вышенаписанные уравнения не включают никаких других допущений, кроме указанных выше; в частности, отсутствует ограничение относительно эллиптичности меридиана, сжатие которого может быть совершенно произвольно.

**§ 214.** Чтобы, однако, упростить задачу насколько возможно, не пренебрегая ее существенными чертами, воспользуемся тем обстоятельством, что в действительности эллиптичность Земли есть величина малая, так как она сравнима с отношением  $\frac{\omega^2 a}{g}$  центробежной силы к силе тяжести на экваторе, а это отношение, как известно, приблизительно равно  $\frac{1}{289}$ .

С ошибкой того же порядка можно положить

$$R = a, \quad \tilde{\omega} = a \sin \theta, \quad g = \text{const.},$$

<sup>1)</sup> Это, кроме того, можно и проверить в тех же случаях. Конечный результат есть тот, что вертикальным ускорением пренебрегаем, как и в теории длинных волн.

где  $a$  обозначает средний радиус Земли. Мы получим тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v \cos \theta &= -\frac{g}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} (\zeta - \bar{\zeta}), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u \cos \theta &= -\frac{g}{a} \frac{\partial}{\sin \theta \partial \varphi} (\zeta - \bar{\zeta}) \end{aligned} \quad (1)$$

и

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{a \sin \theta} \left\{ \frac{\partial (hu \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (hv)}{\partial \varphi} \right\} \quad (2)$$

Это последнее уравнение тождественно с (1) § 198<sup>1)</sup>.

Некоторые интересные следствия получаются тотчас же уже из самого вида уравнений (1). Если обозначить через  $u$ ,  $v$  скорости, соответственно параллельные и перпендикулярные к произвольному горизонтальному направлению  $s$ , то легко найти при помощи преобразования координат

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v \cos \theta = -g \frac{\partial}{\partial s} (\zeta - \bar{\zeta}). \quad (3)$$

В случае узкого канала поперечная скорость  $v$  будет равна нулю и уравнение (3) принимает тот же вид, как в случае отсутствия вращения; это уже было заранее принято в § 183. Единственное влияние вращения в подобных случаях состоит в образовании небольшого наклона гребней и впадин волны в поперечном направлении канала, как найдено в § 208. В общем случае из разложения на компоненты в направлении относительной скорости  $q$  и перпендикулярно к ней видно, что частица жидкости, помимо ускорения, зависящего от действия сил, обладает кажущимся ускорением  $2\omega q \cos \theta$ , отклоняющим частицу направо от своего пути.

Далее, сравнивая (1) с (5) § 207, мы видим, что колебания слоя воды сравнительно малых размеров в направлении полюсного углового расстояния  $\theta$  подчиняются тем же законам, как и колебания плоского слоя, который вращается около перпендикулярной к нему оси с угловой скоростью  $\omega \cos \theta$ .

Как и в § 207, при определенных условиях возможны свободные стационарные движения. Если положить  $\bar{\zeta} = 0$ , то мы видим, что уравнения (1) и (2) удовлетворяются постоянными во времени значениями  $u$ ,  $v$ ,  $\zeta$ , если только

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{g}{2\omega a \sin \theta \cos \theta} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi}, \\ v &= -\frac{g}{2\omega a \cos \theta} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

и

$$\frac{\partial (h \sec \theta, \zeta)}{\partial (\theta, \varphi)} = 0. \quad (5)$$

<sup>1)</sup> Если не обращать внимания на обозначения, то это суть уравнения, найденные Лапласом, см. примечание, стр. 414

Этому последнему условию можно удовлетворить любым допущением вида

$$\zeta = f(h \sec \theta); \quad (6)$$

уравнения (4) дают тогда соответствующие значения  $u$ ,  $v$ . Из (4) следует, что скорость при этих стационарных движениях всюду будет параллельна линиям уровня возмущенной поверхности.

Если  $h$  постоянно или есть функция только широты, то единственное условие, которому удовлетворяет  $\zeta$ , состоит в том, что  $\zeta$  не должно зависеть от  $\varphi$ ; другими словами, возвышение должно быть симметрично относительно полярной оси.

§ 215. Начиная с этого момента, мы будем предполагать, что глубина  $h$  есть функция только от  $\theta$  и что возможные границы моря, если они есть, совпадают с кругами широты.

Рассмотрим сначала случай, когда возмущенная форма поверхности воды есть поверхность вращения около полярной оси. Если отбросить члены, содержащие  $\varphi$ , то уравнения (1) и (2) предыдущего параграфа принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v \cos \theta &= -\frac{g}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} (\zeta - \bar{\zeta}), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u \cos \theta &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

и

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial (hu \sin \theta)}{a \sin \theta \partial \theta}. \quad (2)$$

Предполагая, что время входит в эти уравнения только множителем  $e^{i\sigma t}$ , и разрешая их относительно  $u$ ,  $v$ , получим

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{i\sigma g}{\sigma^2 - 4\omega^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\zeta - \bar{\zeta}), \\ v &= -\frac{2\omega g \cos \theta}{\sigma^2 - 4\omega^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\zeta - \bar{\zeta}) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

и

$$i\sigma \zeta = -\frac{\partial (hu \sin \theta)}{a \sin \theta \partial \theta}. \quad (4)$$

Формулы для составляющих смещения  $(\xi, \eta)$  могут быть получены из соотношений  $u = \dot{\xi}$ ,  $v = \dot{\eta}$ , или  $u = i\sigma \xi$ ,  $v = i\sigma \eta$ . Отсюда получается, что частицы жидкости описывают эллипсы, главные оси которых совпадают соответственно с меридианами и кругами широты; отношение обеих осей равно  $\frac{\sigma}{2\omega} \sec \theta$ . При *вынужденных* колебаниях рассматриваемого типа отношение  $\frac{\sigma}{2\omega}$  будет очень мало, так что эллипсы будут очень вытянуты в направлении с востока на запад; исключение будут представлять области вблизи экватора.

Если исключить  $u$  и  $v$  из (3) и (4) и положить для краткости

$$\left. \begin{aligned} \zeta - \bar{\zeta} &= \zeta', \\ \frac{\sigma}{2\omega} &= f, \\ \frac{\omega^2 a}{g} &= m, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

то получим

$$\frac{\partial}{a \sin \theta \partial \theta} \left( \frac{h \sin \theta}{f^2 - \cos^2 \theta} \frac{\partial \zeta'}{\partial \theta} \right) + 4m\zeta' = -4m\bar{\zeta}. \quad (6)$$

Если глубина будет постоянной, то это уравнение напишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{1 - \mu^2}{f^2 - \mu^2} \frac{\partial \zeta'}{\partial \mu} \right) + \beta \zeta' = -\beta \bar{\zeta}, \quad (7)$$

где

$$\mu = \cos \theta$$

и

$$\beta = \frac{4ma}{h} = \frac{4\omega^2 a^2}{gh}. \quad (8)$$

**§ 216.** Рассмотрим сначала свободные колебания. Полагая  $\bar{\zeta} = 0$ , будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{1 - \mu^2}{f^2 - \mu^2} \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} \right) + \beta \zeta = 0; \quad (9)$$

заметим, что при отсутствии вращения это уравнение содержится в (1) § 199, в чем можно убедиться, положив

$$\beta f^2 = \frac{\sigma^2 a^2}{gh}, \quad f = \infty.$$

Общее решение уравнения (9) должно иметь следующий вид:

$$\zeta = AF(\mu) + Bf(\mu), \quad (10)$$

где  $F(\mu)$  есть четная, а  $f(\mu)$  нечетная функция от  $\mu$  и постоянные  $A$  и  $B$  произвольны. Для зонального моря, ограниченного двумя кругами широты, отношение  $\frac{A}{B}$  и допустимые значения  $f$  (и, следовательно, частоты  $\frac{\sigma}{2\pi}$ ) определяются условием, что для каждого из этих кругов должно быть  $u = 0$ . Если эти границы лежат симметрично по обе стороны экватора, то имеется два класса колебаний: в первом  $B = 0$ , во втором  $A = 0$ . Вообразив, что границы стянуты к точкам на полюсах, мы получим случай безграничного океана, и тогда допустимые значения  $f$  определяются условием, что  $u$  для  $\mu = \pm 1$  должно быть конечно. Доказательство здесь в существенных чертах такое же, как в § 201, но применение этого последнего условия теперь более затруднительно вследствие несколько необычной формы, в которой получено решение дифференциального уравнения.

В случае симметрии по отношению к экватору полагаем, следуя Кельвину <sup>1)</sup> и Дарвину <sup>2)</sup>:

$$\frac{1}{\mu^2 - f^2} \frac{\partial \zeta'}{\partial \mu} = B_1 \mu + B_3 \mu^3 + \dots + B_{2j+1} \mu^{2j+1} + \dots \quad (11)$$

Это дает

$$\begin{aligned} \zeta' = A - \frac{1}{2} f^2 B_1 \mu^2 + \frac{1}{4} (B_1 - f^2 B_3) \mu^4 + \dots \\ \dots + \frac{1}{2j} (B_{2j-2} - f^2 B_{2j-1}) \mu^{2j} + \dots, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $A$  произвольно; далее имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{1 - \mu^2}{\mu^2 - f^2} \frac{\partial \zeta'}{\partial \mu} \right) = B_1 + 3(B_3 - B_1) \mu^2 + \dots \\ \dots + (2j + 1)(B_{2j+1} - B_{2j-1}) \mu^{2j} + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

Если сделать подстановку в (9) и сравнить коэффициенты различных степеней  $\mu$ , то найдем

$$B_1 - \beta A = 0, \quad (14)$$

$$B_3 - \left(1 - \frac{\beta f^2}{2 \cdot 3}\right) B_1 = 0, \quad (15)$$

а затем далее

$$B_{2j+1} - \left(1 - \frac{\beta f^2}{2j(2j+1)}\right) B_{2j-1} - \frac{\beta}{2j(2j+1)} B_{2j-3} = 0. \quad (16)$$

Эти уравнения определяют последовательно величины  $B_1, B_3, \dots, B_{2j+1}$ , выраженные через  $A$ ; решение, найденное таким образом, должно подходить, как сказано, для зонального моря, ограниченного двумя параллельными кругами, отвечающим соответственно одинаковым северной и южной широтам. Если бы море покрывало весь земной шар, то это решение дало бы, как мы докажем, бесконечные скорости на полюсах, за исключением тех случаев, когда  $f$  принимает определенные значения.

Напишем

$$\frac{B_{2j+1}}{B_{2j-1}} = N_{j+1}. \quad (17)$$

Мы сначала покажем, что  $N_j$  с возрастанием  $j$  стремится либо к пределу 0, либо к пределу 1. Уравнение (16) может быть написано так:

$$N_{j+1} = 1 - \frac{\beta f^2}{2j(2j+1)} + \frac{\beta}{2j(2j+1)} \frac{1}{N_j}. \quad (18)$$

<sup>1)</sup> Thomson W., Note on the Oscillations of the First Species in Laplace's Theory of the Tides, Phil. Mag. (4), L, 279 (1875) [Papers, IV, 248].

<sup>2)</sup> Darwin, On the Dynamical Theory of the Tides, of Long Period, Proc. Roy. Soc., XLI, 337 (1886) [Papers, I, 336].



Отсюда следует для достаточно большого  $j$  либо

$$N_j = -\frac{\beta}{2j(2j+1)} \quad (19)$$

приближенно, либо  $N_{j+1}$  не будет малым; во втором случае  $N_{j+2}$  близко к 1 и значения  $N_{j+3}$ ,  $N_{j+4}$ , ... все более и более приближаются к 1, причем имеет место приближенная формула

$$N_{j+1} = 1 - \frac{\beta(f^2 - 1)}{2j(2j+1)}. \quad (20)$$

Таким образом  $N_j$  с возрастанием  $j$  приближается к одной из двух форм, (19) или (20).

В первом случае (19) ряд (11) сходится для  $\mu = \pm 1$  и решение будет законным для всего шара.

Во втором случае (20) произведение  $N_3, N_4, \dots, N_{j+1}$  и, следовательно, также коэффициент  $B_{2j+1}$  с возрастающим  $j$  приближается к конечному, отличному от 0, пределу. Ряд (11), начиная с некоторого члена, будет сравним с рядом

$$1 + \mu^2 + \mu^4 + \dots, \text{ или } (1 - \mu^2)^{-1},$$

так что мы можем написать

$$\frac{1}{\mu^2 - f^2} \frac{\partial \zeta'}{\partial \mu} = L + \frac{M}{1 - \mu^2}, \quad (21)$$

где  $L$  и  $M$  суть функции от  $\mu$ , которые остаются конечными для  $\mu = \pm 1$ . Таким образом из (3) следует

$$\begin{aligned} u &= -\frac{i\sigma}{4m} \frac{(1 - \mu^2)^{1/2}}{\mu^2 - f^2} \frac{\partial \zeta'}{\partial \mu} = \\ &= -\frac{i\sigma}{4m} \{(1 - \mu^2)^{1/2} L + (1 - \mu^2)^{-1/2} M\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Отсюда следует, что  $u$  на полюсах бесконечно.

Мы видим, таким образом, что условия нашей задачи могут быть выполнены только тогда, когда  $N_j$  приближается к пределу нуль; это обстоятельство заставляет нас ограничиться, как будет показано, определенным рядом значений  $f$ .

Соотношение (18) можно привести к виду

$$N_j = \frac{-\frac{\beta}{2j(2j+1)}}{1 - \frac{\beta f^2}{2j(2j+1)} - N_{j+1}}; \quad (23)$$

последовательным применением этой формулы мы получаем  $N_j$  в виде непрерывной дроби

$$N_j = \frac{\frac{\beta}{2j(2j+1)}}{1 - \frac{\beta f^2}{2j(2j+1)}} \left| + \frac{\frac{\beta}{(2j+2)(2j+3)}}{1 - \frac{\beta f^2}{(2j+2)(2j+3)}} \right| + \frac{\frac{\beta}{(2j+4)(2j+5)}}{1 - \frac{\beta f^2}{(2j+4)(2j+5)}} \left| + \dots \right. \quad (24)$$

которая сходится при рассматриваемом допущении, что  $N_{j+k}$  с возрастанием  $k$  стремится к нулю, как видно из (19). В частности, формула (24) определяет значение  $N_2$ . Но из (15) мы должны иметь

$$N_2 = 1 - \frac{\beta f^2}{2 \cdot 3}, \quad (25)$$

а отсюда получаем равенство

$$1 - \frac{\beta f^2}{2 \cdot 3} + \frac{\frac{\beta}{4 \cdot 5}}{1 - \frac{\beta f^2}{4 \cdot 5}} \left| + \frac{\frac{\beta}{6 \cdot 7}}{1 - \frac{\beta f^2}{6 \cdot 7}} \right| + \dots = 0, \quad (26)$$

которое равнозначно с  $N_1 = \infty$ . Это уравнение определяет допустимые значения для  $f = \frac{\sigma}{2\omega}$ . Постоянные в (11) определяются из соотношений

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= \beta A, \\ B_3 &= N_2 \beta A, \\ B_5 &= N_2 N_3 \beta A, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

где  $A$  произвольно.

Легко видеть, что для бесконечно малого  $\beta$  корни уравнения (26) даются формулой

$$\frac{\sigma^2 a^2}{gh} = \beta f^2 = n(n+1), \quad (28)$$

где  $n$  есть целое четное число (ср. § 199).

Необходимо отметить арифметически замечательный момент. При первом взгляде можно было бы подумать, что если значение  $f$  найдено из равенства (26), то находить последовательно коэффициенты  $B_3$ ,  $B_5$ ,  $B_7$  можно из формул (15) и (16) или с помощью равнозначной формулы (18). Однако это рассуждение будет ошибочным, так как оно требовало бы, чтобы мы исходили *в точности* из верного значения  $f$  и сохраняли бы абсолютную точность при всех последующих шагах. Вышеизложенное доказательство в действительности показывает, что всякое другое значение, которое, как угодно мало отличается от истинного, взятое как исходное для вычисления, в

конце концов неизбежно приводит к значениям  $N_j$ , которые стремятся к пределу 1<sup>1)</sup>.

Можно попытаться приближенно получить самый длинный период свободных колебаний методом § 205 b.

Если обозначить через  $\xi$ ,  $\eta$  соответственно отклонения на юг и восток, то мы будем иметь в обозначениях названного параграфа

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \pi \rho h a^2 \int_0^\pi (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) \sin \theta \, d\theta, \\ M' &= 2\pi \rho h a^2 \int_0^\pi (\xi \cos \theta \dot{\eta} - \eta \dot{\xi} \cos \theta) \sin \theta \, d\theta, \\ V - T_0 &= \pi \rho g a^2 \int_0^\pi \zeta^2 \sin \theta \, d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Предположим, что, как и при отсутствии вращения, возвышение поверхности может быть представлено зональной сферической функцией второго порядка. Формулы (3) § 215 подсказывают при применении этого метода исходить из следующего типа:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= A \sin \theta \cos \theta \cos \sigma t, \\ \eta &= B \sin \theta \cos^2 \theta \sin \sigma t, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

а это дает

$$\zeta = -\frac{a}{a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\xi \sin \theta) = -\frac{h}{a} (3 \cos^2 \theta - 1) A \cos \sigma t. \quad (31)$$

Тогда получаем

$$\left. \begin{aligned} P &= \pi \rho h a^2 \left( \frac{2}{15} A^2 + \frac{2}{35} B^2 \right), \\ Q &= \frac{8}{35} \pi \rho \omega h a^2 A B, \\ R &= \frac{4}{5} \pi \rho g h^2 A^2. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Уравнение (10) § 205b переходит в

$$(x^2 - 6) A^2 + \sqrt{\beta} \frac{6}{7} x A B + \frac{3}{7} B^2 x^2 = 0, \quad (33)$$

где

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\sigma a}{\sqrt{gh}}, \\ \beta &= \frac{4\omega^2 a^2}{gh}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Стационарные значения  $x$  определяются из

$$x^2 = 6 + \frac{3}{7} \beta. \quad (35)$$

<sup>1)</sup> Thompson W., см. сноску на стр. 421.

Если мы возьмем, например,  $\beta = 5$ , что для Земли соответствует глубине в 17 700 метров, то мы найдем

$$\frac{\sigma a}{\sqrt{gh}} = 2,854, \quad \frac{\omega}{\sigma} = 0,3917.$$

Второе число выражает период через звездные сутки, т. е. в звездном исчислении  $\frac{2\pi}{\sigma} = 9$  ч. 24 м. Истинный же период, как вычислил Хауф (см. § 222), равен 9 ч. 52 м.; разница объясняется взаимным притяжением возмущенной воды, которым мы пренебрегали.

Однако легко ввести поправку. Так как мы пренебрегаем влиянием центробежной силы на силу тяжести, то можно пренебречь влиянием  $T_0$  в (29), в то время как значение  $V$  изменяем в отношении

$$1 - \frac{3}{5} \frac{\rho_1}{\rho_0} = 0,892, \quad (36)$$

где  $\frac{\rho_1}{\rho_0}$  ( $= 0,18$ ) равно отношению плотности воды к средней плотности Земли (см. § 200). В результате необходимо уравнение (35) заменить следующим

$$x^2 = 5,352 + \frac{3}{7} \beta.$$

Для  $\beta = 5$  это дает период 9 ч. 48 м. с хорошим приближением к значению, полученному Хауфом.

Для больших значений  $\beta$ , т. е. для более малых глубин океана или больших скоростей вращения приближение будет менее удовлетворительным, чем мы могли бы ожидать от природы взятого нами типа приближения.

**§ 217.** В приложении к этой главе будет показано, что потенциал приливообразующих сил состоит из членов тройного вида, если разложить его по простым гармоническим функциям времени.

Статическое значение высоты прилива, соответствующее членам первого вида, определяется формулой

$$\bar{\zeta} = H' \left( \frac{1}{3} - \cos^2 \theta \right) \cos (\sigma t + \varepsilon)^1. \quad (37)$$

Соответствующие вынужденные волны согласно Лапласу называются „колебаниями первого рода“; они включают в себя четырнадцатидневный лунный прилив и полугодовой солнечный прилив, а также вообще все приливы длинного периода. Для них характерна симметрия относительно полярной оси. Эти колебания представляют важнейший случай вынужденных колебаний рассматриваемого типа.

Если подставить  $\bar{\zeta}$  из (37) в (7) и взять для

$$\frac{1 - \mu^2}{\mu^2 - f^2} \frac{\partial \zeta'}{\partial \mu} \text{ и } \zeta'$$

<sup>1)</sup> Строго говоря,  $\theta$  обозначает здесь геоцентрическую широту, т. е. широту по отношению к центру Земли, но разностью между этой и географической широтой можно пренебречь вследствие предположений, сделанных в § 214.

выражения вида (11) и (12), то вместо уравнений (14) и (15) будем иметь

$$B_1 - \frac{1}{3} \beta H' - \beta A = 0, \quad (38)$$

$$B_3 - \left(1 - \frac{\beta f^2}{2 \cdot 3}\right) B_1 + \frac{1}{3} \beta H' = 0, \quad (39)$$

в то время как уравнение (16) с его следствиями сохраняет свою силу для всех последующих коэффициентов. Необходимо отметить, что (39) есть частный случай общей формулы (16), если положить

$$B_{-1} = -2H'.$$

Рассуждением, подобным сделанному ранее, получим, что единственное допускаемое решение для моря, покрывающего земной шар, это то, которое дает  $N_\infty = 0$ , и что поэтому  $N_j$  должно иметь значение, даваемое непрерывной дробью (24), где  $f$  будет задано теперь частотой возмущающих сил.

В частности, эта формула определяет значение  $N_1$ . Мы имеем теперь

$$B_1 = N_1 B_{-1} = -2N_1 H',$$

и уравнение (38) дает тогда

$$A = -\frac{1}{3} H' - \frac{2}{\beta} N_1 H'; \quad (40)$$

другими словами, это есть единственное значение  $A$ , которое совместимо с предельным значением нуль для  $N_j$  и, следовательно, с конечной скоростью на полюсах. Если взять какое-либо другое значение  $A$  за исходное для последовательного вычисления  $B_1, B_3, B_5, \dots$  с помощью (38), (39) и (16), то мы получим в конце концов значения для  $N_j$ , которые приближаются к пределу 1. Более того, так как для избежания этого безусловно необходима была бы абсолютная точность в первоначальном выборе  $A$  и в последующих вычислениях, то единственный осуществимый метод для вычисления коэффициентов состоит в применении формул

$$\left. \begin{aligned} \frac{B_1}{H'} = -2N_1, \quad B_3 = N_2 B_1, \quad B_5 = N_3 B_3, \dots, \\ \text{или} \\ \frac{B_1}{H'} = -2N_1, \quad \frac{B_3}{H'} = -2N_1 N_2, \quad \frac{B_5}{H'} = -2N_1 N_2 N_3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

где значения  $N_1, N_2, N_3$  вычисляются из непрерывной дроби (24). А posteriori ясно теперь, что решение, полученное таким образом, будет удовлетворять всем условиям задачи и что ряд (12) будет сходиться очень быстро. Для наиболее удобного вычисления нужно взять грубое приближенное значение, даваемое формулой (19) для

какого-либо  $N_j$  с достаточно большим  $j$  и затем последовательно вычислить

$$N_{j-1}, N_{j-2}, \dots, N_2, N_1$$

с помощью формулы (23). Значения постоянных  $A, B_1, B_2, \dots$  в формуле (12) будут даны тогда формулами (40) и (41). Для высоты прилива получим

$$\begin{aligned} \frac{\zeta}{H'} = & -\frac{2N_1}{\beta} - (1 - f^2 N_1) \mu^2 - \frac{1}{2} N_1 (1 - f^2 N_2) \mu^4 - \dots \\ & \dots - \frac{1}{j} N_1 N_2 \dots N_{j-1} (1 - f^2 N_j) \mu^{2j} - \dots \end{aligned} \quad (42)$$

В случае четырнадцатидневного лунного прилива  $f$  есть отношение звездных суток к лунному месяцу и, следовательно, равно приблизительно  $1/28$ , или, точнее, 0,0365. Это дает  $f^2 = 0,00133$ . Очевидно, положив  $f = 0$ , мы получим достаточно точное представление этого прилива и тем более полугодового солнечного прилива, а также остальных приливов с длинными периодами; это существенно укорачивает вычисления.

Результаты вычислений будут содержать множитель

$$\beta = \frac{4\omega^2 a^3}{gh}.$$

Для  $\beta = 40$ , что соответствует глубине 2210 метров, этим путем получается

$$\begin{aligned} \frac{\zeta}{H'} = & 0,1515 - 1,0000 \mu^2 + 1,5153 \mu^4 - 1,2120 \mu^6 + \\ & + 0,6063 \mu^8 - 0,2076 \mu^{10} + 0,0516 \mu^{12} - 0,0097 \mu^{14} + \\ & + 0,0018 \mu^{16} - 0,0002 \mu^{18}. \end{aligned} \quad (43)^1$$

Следовательно, на полюсах ( $\mu = \pm 1$ )

$$\zeta = -\frac{2}{3} H' \cdot 0,154$$

и на экваторе ( $\mu = 0$ )

$$\zeta = \frac{1}{3} H' \cdot 0,455.$$

Далее, для  $\beta = 10$  или для глубины 8850 метров получаем

$$\begin{aligned} \frac{\zeta}{H'} = & 0,2359 - 1,0000 \mu^2 + 0,5898 \mu^4 - 0,1623 \mu^6 + \\ & + 0,0258 \mu^8 - 0,0026 \mu^{10} + 0,0002 \mu^{12}. \end{aligned} \quad (44)$$

Это дает для полюсов

$$\zeta = -\frac{2}{3} H' \cdot 0,470$$

<sup>1)</sup> Коэффициенты в (43) и (44) отличаются только немного от численных значений, которые получил Дарвин для случая  $f = 0,0365$ .

и для экватора

$$\zeta = \frac{1}{3} H' \cdot 0,708.$$

Для  $\beta = 5$  или для глубины 17 700 метров мы находим

$$\begin{aligned} \frac{\zeta}{H'} = 0,2723 - 1,0000 \mu^2 + 0,3404 \mu^4 - 0,0509 \mu^6 + \\ + 0,0043 \mu^8 - 0,0004 \mu^{10}. \end{aligned} \quad (45)$$

Это дает для полюсов

$$\zeta = -\frac{2}{3} H' \cdot 0,651$$

и для экватора

$$\zeta = \frac{1}{3} H' \cdot 0,817.$$

Так как высоты приливов согласно статической теории для полюсов и для экватора соответственно равны  $-\frac{2}{3}H'$  и  $\frac{1}{3}H'$ , то эти результаты показывают, что для рассматриваемых глубин приливы с длинными периодами, вообще говоря, будут *прямыми*, хотя круглые узловые линии, конечно, отклоняются более или менее от положений, в которых они должны находиться согласно статической теории. Кроме того, оказывается, что при глубинах, сравнимых с действительной морской глубиной, прилив достигает меньше половины статической величины. По виду уравнения (7) легко заключить, что с возрастанием глубины и следующего отсюда уменьшения  $\beta$  высота прилива все больше и больше приближается к статической величине. Эта тенденция иллюстрируется приведенными выше числовыми данными.

Необходимо отметить, что сам Лаплас не занимался кинетической теорией приливов и длинными периодами, будучи убежден, что эти приливы вследствие трения практически должны иметь значения, даваемые статической теорией. Он и на самом деле показал, что силы трения имеют подобного рода тенденцию, однако Дарвин <sup>1)</sup> заметил, что в случае четырнадцатидневного прилива по меньшей мере сомнительно, чтобы это действие было примерно так велико, как думал Лаплас. К этому вопросу мы вернемся еще позднее.

**§ 218.** Если мы отбросим ограничение, что возмущение симметрично относительно полярной оси, то должны вернуться к общим уравнениям (1) и (2) § 214. Мы сохраним, однако, допущения относительно закона глубин и природы границ, которые сделали в § 215.

Если мы допустим, что величины  $\Omega$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $\zeta$  все содержат множитель  $e^{i(st + \epsilon t + \alpha)}$ , зависящий от времени, где  $s$  — целое число, то на-

<sup>1)</sup> См. сноску на стр. 421.

званные уравнения дают

$$\left. \begin{aligned} i\sigma u - 2\omega v \cos \theta &= -\frac{\xi}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} (\zeta - \bar{\zeta}), \\ i\sigma v + 2\omega u \cos \theta &= -\frac{i s g}{a \sin \theta} (\zeta - \bar{\zeta}) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и

$$i\sigma \zeta = -\frac{1}{a \sin \theta} \left\{ \frac{\partial (hu \sin \theta)}{\partial \theta} + ihs v \right\}. \quad (2)$$

Если мы решим эти уравнения относительно  $u$  и  $v$ , то найдем

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{i\sigma}{4m(f^2 - \cos^2 \theta)} \left( \frac{\partial \zeta'}{\partial \theta} + \frac{s}{f} \zeta' \operatorname{ctg} \theta \right), \\ v &= -\frac{\sigma}{4m(f^2 - \cos^2 \theta)} \left( \frac{\cos \theta}{f} \frac{\partial \zeta'}{\partial \theta} + s \zeta' \operatorname{cosec} \theta \right), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где, как и раньше,

$$\left. \begin{aligned} \zeta - \bar{\zeta} &= \zeta', \\ \frac{\sigma}{2\omega} &= f, \\ \frac{\omega^2 a}{g} &= m. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Из уравнений (3) следует, что при всяком простом гармоническом колебании частицы жидкости описывают эллипсы, оси которых лежат соответственно вдоль меридианов и параллелей.

Если сделать подстановку из (3) в (2), то получим дифференциальное уравнение для  $\zeta'$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\sin \theta \partial \theta} \left\{ \frac{h \sin \theta}{f^2 - \cos^2 \theta} \left( \frac{\partial \zeta'}{\partial \theta} + \frac{s}{f} \zeta' \operatorname{ctg} \theta \right) \right\} - \\ - \frac{h}{f^2 - \cos^2 \theta} \left( \frac{s}{f} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \zeta'}{\partial \theta} + s^2 \zeta' \operatorname{cosec}^2 \theta \right) + \\ + 4ma \zeta' = -4ma \bar{\zeta}. \end{aligned} \quad (5)$$

§ 219. Случай  $s = 1$  обнимает в качестве вынужденных колебаний также „колебания второго рода“ Лапласа, где возмущающий потенциал есть тессеральная сферическая поверхностная функция второго порядка, именно

$$\bar{\zeta} = H'' \sin \theta \cos \theta \cos(\sigma t + \varphi + \epsilon), \quad (1)$$

причем  $\sigma$  не очень отличается от  $\omega$ . К этим колебаниям принадлежат суточные лунные и солнечные приливы.

В случае, когда собственным движением возмущающего тела можно пренебречь,  $\sigma = \omega$  в точности и, следовательно,  $f = 1/2$ . В случае Луны собственное движение настолько быстро, что истинный период важнейшего суточного лунного прилива будет значительно длиннее



звездных суток <sup>1)</sup>; однако допущение  $f = 1/2$  настолько упрощает формулы, что мы и при дальнейших исследованиях положим его в основу <sup>2)</sup>. Мы увидим, что оно позволяет нам вычислять вынужденные колебания, когда глубина подчиняется закону

$$h = (1 - q \cos^2 \theta) h_0, \quad (2)$$

где  $q$  есть какая-то данная постоянная.

Если мы возьмем показательный множитель  $e^{i(\omega t + \varphi + s)}$  и соответственно этому в (3) § 218 положим  $s = 1$ ,  $f = 1/2$  и затем напишем

$$\zeta' = C \sin \theta \cos \theta, \quad (3)$$

то найдем

$$\left. \begin{aligned} u &= -i\sigma \frac{C}{m}, \\ v &= \sigma \frac{C}{m} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Подставив в уравнение неразрывности [(2), § 218], получим

$$\zeta' + \bar{\zeta} = \frac{C}{ma} \frac{dh}{d\theta}, \quad (5)$$

а это согласуется с законом глубин (2), если

$$C = - \frac{1}{1 - \frac{2qh_0}{ma}} H''. \quad (6)$$

Отсюда получаем

$$\zeta = - \frac{\frac{2qh_0}{ma}}{1 - \frac{2qh_0}{ma}} \bar{\zeta}. \quad (7)$$

Замечательное следствие формулы (7) заключается в том, что в случае постоянной глубины суточный прилив в виде поднятия и опускания поверхности будет отсутствовать. Этот результат был (другим путем) впервые найден Лапласом, который считал его очень важным, ибо он показывал, что его кинетическая теория способна объяснить сравнительно малые значения высоты суточного прилива; это обстоятельство было известно (хотя и неточно) из наблюдений, которые находились в странном противоречии с результатами статической теории.

<sup>1)</sup> Необходимо, однако, заметить, что в гармоническом разложении  $\Omega$  встречается важный член, для которого в точности  $\sigma = \omega$ , если пренебречь изменениями плоскости орбиты возмущающего тела. Эти периоды одинаковы как для Солнца, так и для Луны, и два образовавшихся таким образом частных прилива соединяются в один суточный прилив, который называется „луно-солнечный прилив“.

<sup>2)</sup> Это с незначительными изменениями заимствовано из работы Algy, *Tides and Waves*, § 95 ... и Darwin, *Encycl. Brit.*, 9-е изд., XXIII, 359.

Однако, если при постоянной глубине и нет поднятия и опускания, то все же приливные течения имеют место. Из уравнений (4) следует, что каждая частица описывает эллипс, большая ось которого направлена по меридиану и имеет для всех широт одинаковую длину. Отношение малой оси к большой равно  $\cos \theta$  и пробегает, следовательно, значения от 1 на полюсах до 0 на экваторе, где движение происходит в точности в направлении с севера на юг.

§ 220. В случае  $s=2$  важнейшие вынужденные колебания суть те, у которых потенциал возмущающей силы есть секторная сферическая поверхностная функция второго порядка. Эти колебания образуют „колебания третьего рода“ Лапласа; для них имеем

$$\bar{\zeta} = H''' \sin^2 \theta \cos(\sigma t + 2\varphi + \epsilon), \quad (1)$$

где  $\sigma$  приблизительно равно  $2\omega$ . Сюда принадлежат наиболее важные из всех приливов, именно: полусуточные лунный и солнечный приливы.

Если бы собственное движение возмущающего тела было бесконечно медленное, то мы имели бы  $\sigma = 2\omega$  и, следовательно,  $f=1$ ; для простоты будем следовать Лапласу и положим в основу это допущение, хотя оно в случае наиболее важного лунного прилива не совсем точно <sup>1)</sup>.

Решение, подобное решению предыдущего параграфа, можно получить для специального закона изменения глубины <sup>2)</sup>

$$h = h_0 \sin^2 \theta. \quad (2)$$

Если взять показательный множитель в виде  $e^{i(2\omega t + 2\varphi + \epsilon)}$  и положить затем  $f=1$ ,  $s=2$ , то уравнения (3) § 218 при допущении

$$\zeta' = C \sin^2 \theta \quad (3)$$

дадут

$$u = \frac{i\sigma}{m} C \operatorname{ctg} \theta, \quad v = -\frac{\sigma}{2m} C \frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin \theta}; \quad (4)$$

отсюда, подставив в уравнение (2) § 218, получаем

$$\zeta = \frac{2h_0}{ma} C \sin^2 \theta. \quad (5)$$

Если положить

$$\zeta = \zeta' + \bar{\zeta}$$

и подставить из (1) в (3), то найдем

$$C = -\frac{1}{1 - \frac{2h_0}{ma}} H''' \quad (6)$$

<sup>1)</sup> Существует, однако, полусуточный „лунно-солнечный прилив“, угловая скорость которого в точности равна  $2\omega$ , если пренебречь изменениями плоскости орбиты (ср. сноску 1, стр. 430).

<sup>2)</sup> Ср. Airy и Darwin, см. выше.

и, следовательно,

$$\zeta = - \frac{\frac{2h_0}{ma}}{1 - \frac{2h_0}{ma}} \bar{\zeta}. \quad (7)$$

Для тех глубин, которые в действительности встречаются в море,  $2h_0 < ma$  и поэтому прилив обратный. Необходимо отметить, что формулы (4) дают бесконечно большую скорость на полюсах, что и следовало ожидать, так как глубина там равна нулю.

§ 221. Для всякого другого закона глубин решение может быть получено лишь в виде ряда. В случае постоянной глубины, если положить в (5) § 218  $s=2$ ,  $f=1$ ,  $\frac{4ma}{h} = \beta$ , то найдем

$$(1 - \mu^2)^2 \frac{d^2 \zeta'}{d\mu^2} + \{\beta(1 - \mu^2)^2 - 2\mu^2 - 6\} \zeta' = -\beta(1 - \mu^2)^2 \bar{\zeta}, \quad (8)$$

где  $\mu = \cos \theta$ . В таком виде исследовать это уравнение трудно, так как оно содержит члены четырех различных измерений относительно  $\mu$ . Однако оно немного упрощается, если взять за независимую переменную

$$v = (1 - \mu^2)^{1/2} = \sin \theta;$$

в этом случае получим

$$v^2(1 - v^2) \frac{d^2 \zeta'}{dv^2} - v \frac{d\zeta'}{dv} - (8 - 2v^2 - \beta v^4) \zeta' = -\beta v^4 \bar{\zeta} = -\beta H''' v^6; \quad (9)$$

в этом уравнении встречаются члены только *трех* различных измерений относительно  $v$ .

Чтобы получить решение для случая моря, покрывающего земной шар, положим

$$\zeta' = B_0 + B_2 v^2 + B_4 v^4 + \dots + B_{2j} v^{2j} + \dots \quad (10)$$

Подставляя в (9) и сравнивая коэффициенты, мы найдем

$$B_0 = 0, \quad B_2 = 0, \quad 0 \cdot B_4 = 0, \quad (11)$$

$$16B_6 - 10B_4 + \beta H''' = 0 \quad (12)$$

и, далее,

$$2j(2j+6)B_{2j+4} - 2j(2j+3)B_{2j+2} + \beta B_{2j} = 0. \quad (13)$$

Эти уравнения дают последовательно  $B_6, B_8, \dots, B_{2j}, \dots$ , выраженные через  $B_4$ ; само же  $B_4$  пока не определено. Однако из существа задачи ясно, что решение должно быть единственным, за исключением определенных частных значений  $h$  (и, следовательно,  $\beta$ ), которые допускают свободные колебания соответствующего рода  $s=2$  с частотой  $2\omega$ . Мы, далее, увидим, что, действительно, до тех пор, пока  $B_4$  не будет принимать определенных значений, приведен-

ное выше решение будет давать в направлении меридиана компоненту скорости  $u$  с разрывом на экваторе <sup>1)</sup>.

Ход доказательства в некотором смысле подобен доказательству в § 217. Если обозначить через  $N_j$  отношение  $\frac{B_{2j+2}}{B_{2j}}$  двух последовательных коэффициентов, то согласно (13) будем иметь

$$N_{j+1} = \frac{2j+3}{2j+6} - \frac{\beta}{2j(2j+6)} \frac{1}{N_j}; \quad (14)$$

отсюда получается, что  $N_j$  с возрастанием  $j$  приближается либо к пределу 0, либо к пределу 1. Выражаясь точнее, если предел  $N_j$  не равен нулю, то  $N_{j+1}$  для больших значений  $j$  приближенно будет равно

$$\frac{2j+3}{2j+6} \quad \text{или} \quad 1 - \frac{3}{2j}.$$

Второй вид тождествен с асимптотическим значением отношения коэффициентов  $v^{2j}$  и  $v^{2j-2}$  в разложении  $(1-v^2)^{1/2}$ . Мы заключаем отсюда, что члены ряда (10) в конце концов делаются сравнимыми с членами ряда  $(1-v^2)^{1/2}$ , если только  $B_4$  не имеет значения, которое дает  $N_\infty = 0$ ; таким образом мы можем положить

$$\zeta' = L + (1-v^2)^{1/2} M, \quad (15)$$

где  $L$ ,  $M$  обозначают функции от  $v$ , которые не обращаются в нуль для  $v=1$ . Вблизи экватора ( $v=1$ ) это дает

$$\frac{d\zeta'}{d\theta} = \mp (1-v^2)^{1/2} \frac{d\zeta'}{dv} = \pm M. \quad (16)$$

Согласно (3) § 218 при пересечении экватора  $u$  должно, не изменяя своей абсолютной величины, изменить свой знак на противоположный.

Поэтому для нашей цели существенно выбрать такое значение для  $B_4$ , для которого  $N_\infty = 0$ . Это достигается таким же способом, как в § 217. Представляя (13) в виде

$$N_j = \frac{\frac{\beta}{2j(2j+6)}}{\frac{2j+3}{2j+6} - N_{j+1}}, \quad (17)$$

<sup>1)</sup> Для моря, лежащего на полюсе и ограниченного параллелью, радиус которой, выраженный в угловой мере, меньше  $1/2\pi$ , значение  $B$  определяется из условия, что  $u=0$  или  $\frac{\partial \zeta'}{\partial v} = 0$  на границе.

мы видим, что  $N_j$  должно быть задано следующей сходящейся непрерывной дробью

$$N_j = \frac{\frac{\beta}{2j(2j+6)}}{\frac{2j+3}{2j+6}} \left| - \frac{\frac{\beta}{(2j+2)(2j+8)}}{\frac{2j+5}{2j+8}} \right| - \frac{\frac{\beta}{(2j+4)(2j+10)}}{\frac{2j+7}{2j+10}} \left| - \dots \right. \quad (18)$$

Это имеет место для  $j \geq 2$ , но из (12) следует, что оно будет давать теперь также и значение  $N_1$  (которое до сих пор не было определено), если обозначить этим символом  $\frac{B_4}{H''''}$ . Мы будем иметь тогда

$$B_4 = N_1 H''''', \quad B_6 = N_2 B_4, \quad B_8 = N_3 B_6, \dots$$

В конце концов получим, если положить  $\zeta = \bar{\zeta} + \zeta'$ ,

$$\frac{\zeta}{H''''} = y^2 + N_1 y^4 + N_1 N_2 y^6 + N_1 N_2 N_3 y^8 \dots \quad (19)$$

Как и в § 217 практический способ проведения вычисления состоит в том, чтобы взять приближенные значения для  $N_{j+1}$ , где  $j$  есть не слишком большое число, и затем отсюда последовательно вычислять с помощью формулы (17) значения  $N_j, N_{j-1}, \dots, N_2, N_1$ .

Это исследование в существенных чертах заимствовано из замечательной работы, написанной Кельвином <sup>1)</sup> в защиту данного Лапласом в его Небесной механике способа трактовки задачи. В соответствующем месте Лаплас определяет константу  $B_4$  с помощью непрерывной дроби  $N_1$ , правда, не давая удовлетворительного обоснования этому способу, и поэтому законность этого приема была подвергнута сомнению Эри <sup>2)</sup> и позднее Феррелем <sup>3)</sup>.

Лаплас, к сожалению, не имел обыкновения давать точные указания источников, так что, повидимому, немногим из его читателей было знакомо первоначальное изложение <sup>4)</sup> кинетической теории; именно там дано решение этого случая в очень убедительной, хотя и несколько иной форме. Пытаясь сначала получить приближенные решения с помощью *конечного* ряда:

$$\zeta' = B_2 y^4 + B_4 y^6 + \dots + B_{2k+2} y^{2k+2}, \quad (20)$$

<sup>1)</sup> Thomson W., On an Alleged Error in Laplace's Theory of the Tides, Phil. Mag. (4), L, 227 (1875) [Papers, IV, 231].

<sup>2)</sup> Airy, Tides and Waves, § 111.

<sup>3)</sup> Ferrel, Tidal Researches, U. S. Coast Survey Rep., 1874, стр. 154.

<sup>4)</sup> Laplace, Recherches, sur quelques points du système du monde, Mém. de l'Acad. roy. des Sciences, 1776 (1779) [Oeuvres, IX, 187].



Последняя строка дает значение  $\frac{\zeta}{H'''} для  $\nu = 1$ , т. е. отношение амплитуды на экваторе к ее значению в равновесии. На полюсах ( $\nu = 0$ ) прилив имеет всегда свое статическое значение, именно нуль.$

	$\beta = 40$	$\beta = 20$	$\beta = 10$	$\beta = 5$	$\beta = 1$
$\nu^2$	+ 1,0000	+1,0000	+1,0000	+1,0000	+1,0000
$\nu^4$	+20,1862	-0,2491	+6,1915	+0,7504	+0,1062
$\nu^6$	+10,1164	-1,4056	+3,2447	+0,1566	+0,0039
$\nu^8$	-13,1047	-0,8594	+0,7234	+0,0157	+0,0001
$\nu^{10}$	-15,4488	-0,2511	+0,0919	+0,0009	
$\nu^{12}$	- 7,4581	-0,0462	+0,0076		
$\nu^{14}$	- 2,1975	-0,0058	+0,0004		
$\nu^{16}$	- 0,4501	-0,0006			
$\nu^{18}$	- 0,0687				
$\nu^{20}$	- 0,0082				
$\nu^{22}$	- 0,0008				
$\nu^{24}$	- 0,0001				
	- 7,434	-1,821	+11,259	+1,924	+1,110

Приведенные числовые результаты мы можем использовать для проведения оценки погрешности приближений в каждом отдельном случае. Например, когда  $\beta = 40$ , Лаплас нашел  $B_{24} = 0,000004 H'''$ ; прибавка, которую необходимо ввести к возмущающей силе, чтобы сделать решение точным, будет тогда  $-0,00002 H''' \nu^{26}$  и, следовательно, будет находиться в отношении  $-0,00002 \nu^{26}$  к действительной силе.

Из уравнения (19) следует, что вблизи полюсов, где  $\nu$  очень мало, приливы во всех случаях будут прямыми. Для достаточно больших глубин  $\beta$  делается очень малым, и тогда формулы (17) и (19) показывают, что приливы имеют повсюду величины, даваемые практически статической теорией, так как коэффициенты все будут малыми, за исключением первого, который равен 1. С уменьшением  $h$  значение  $\beta$  возрастает и формула (17) показывает, что каждое из отношений  $N_j$  будет непрерывно возрастать, кроме случая, когда оно при переходе через значение  $\infty$  меняет положительный знак на отрицательный. Переход  $N_j$  через  $\infty$  не сопровождается особенностью в решении, исключая случай  $N_1$ , потому, что, как легко видеть, произведение  $N_{j-1}N_j$  остается конечным и поэтому коэффициенты в (19) все конечны. Если же  $N_1 = \infty$ , то выражение для  $\zeta$  делается бесконечным, и тогда оказывается, что глубина имеет одно из критических значений, ранее указанных.

Вышеприведенная таблица показывает, что для глубин, начиная с 8 850 метров и выше, приливы будут всюду прямыми, но что существует некоторая критическая глубина между 8 850 и 4 430 метрами, при которой прилив на экваторе перестает быть прямым и стано-

вится обратным. Тот факт, что второй коэффициент в случае  $\beta = 40$  велик, указывает на то, что для глубины, немного меньшей 2210 метров, достигается второе критическое значение.

Когда прилив на экваторе будет обратным, то должны существовать одна или несколько пар круговых узловых линий ( $\zeta = 0$ ), которые лежат симметрично с обеих сторон экватора. Для случая  $\beta = 40$  положение круговых узловых линий приближенно дается значениями  $\nu = 0,95$  или  $\theta = 90^\circ \pm 18^\circ$ <sup>1)</sup>.

§ 222. Динамическая теория приливов для моря, покрывающего весь земной шар таким образом, что вдоль каждой параллели глубина постоянна, была значительно улучшена и разработана Хауфом<sup>2)</sup>; он воспользовался отвергнутым приемом Лапласа и ввел разложения по сферическим функциям взамен рядов, расположенных по степеням  $\mu$  (или  $\nu$ ). Эти разложения имеют преимущество быстрее сходиться, в особенности, как и следует ожидать, в случаях, когда влияние вращения сравнительно мало; этот способ позволяет также принять во внимание взаимное притяжение частиц воды, которое ни в коей мере не является незначительным, как мы уже видели в более простой задаче § 200.

Когда возвышение поверхности  $\zeta$  и соответствующая статической теории высота прилива  $\bar{\zeta}$  (при которой влияние взаимного притяжения не принимается во внимание) будут разложены в ряд по сферическим функциям

$$\zeta = \sum \zeta_n, \quad \bar{\zeta} = \sum \bar{\zeta}_n, \quad (1)$$

то полное выражение для потенциала возмущающих сил будет

$$\Omega = -g \sum \left( \bar{\zeta}_n + \frac{3}{2n+1} \frac{e}{e_0} \zeta_n \right);$$

ср. § 200. Множитель при  $-g$  в этом выражении надлежит вставить вместо  $\bar{\zeta}$  в уравнения § 214...; это требует при изменении способа обозначения (5) § 215 или (4) § 218 положить

$$\zeta' = \sum (a_n \zeta_n - \bar{\zeta}_n), \quad (2)$$

где

$$a_n = 1 - \frac{3}{2n+1} \frac{e}{e_0}. \quad (3)$$

При колебаниях „первого рода“ дифференциальное уравнение может быть написано в виде

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{1-\mu^2}{1^2-\mu^2} \frac{\partial \zeta'}{\partial \mu} \right) + \beta \zeta = 0. \quad (4)$$

<sup>1)</sup> Более полное рассмотрение этих вопросов находится в оригинальных исследованиях Лапласа и в работах Кельвина.

<sup>2)</sup> Hough, On the Application of Harmonic Analysis to the Dynamical Theory of the Tides, Phil. Trans. A. CLXXXIX, 201, и CXCI, 139 (1897) (см. также Darwin, Papers, I, 349).



Если положить

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \sum C_n P_n(\mu), \\ \bar{\zeta} &= \sum \gamma_n P_n(\mu), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

то мы будем иметь

$$\zeta' = \sum (\alpha_n C_n - \gamma_n) P_n(\mu). \quad (6)$$

Подставляя в (4) и интегрируя между пределами  $-1$  и  $\mu$ , получим

$$\begin{aligned} \sum (\alpha_n C_n - \gamma_n) (1 - \mu^2) \frac{dP_n}{d\mu} + \\ + \sum \beta_n C_n \{(\beta^2 - 1) + (1 - \mu^2)\} \int_{-1}^{\mu} P_n d\mu = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Согласно известным формулам зональных сферических функций <sup>1)</sup> имеем

$$\int_{-1}^{\mu} P_n d\mu = -\frac{1}{n(n+1)} (1 - \mu^2) \frac{dP_n}{d\mu} \quad (8)$$

и

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{\mu} P_n d\mu &= \frac{1}{2n+1} (P_{n+1} - P_{n-1}) = \\ &= \frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{1}{2n+3} \left( \frac{dP_{n+2}}{d\mu} - \frac{dP_n}{d\mu} \right) - \frac{1}{2n-1} \left( \frac{dP_n}{d\mu} - \frac{dP_{n-2}}{d\mu} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \frac{dP_{n+2}}{d\mu} - \frac{2}{(2n-1)(2n+3)} \frac{dP_n}{d\mu} + \\ &\quad + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \frac{dP_{n-2}}{d\mu}. \end{aligned} \quad (9)$$

Если подставить в (7) и положить коэффициент при  $(1 - \mu^2) \frac{dP_n}{d\mu}$  равным нулю, то мы найдем

$$\frac{1}{(2n+3)(2n+5)} C_{n+2} - L_n C_n + \frac{1}{(2n-3)(2n-1)} C_{n-2} = \frac{\gamma_n}{\beta}, \quad (10)$$

где

$$L_n = \frac{\beta^2 - 1}{n(n+1)} + \frac{2}{(2n-1)(2n+3)} - \frac{\alpha_n}{\beta}. \quad (11)$$

Соотношение (10) годится, начиная от  $n=1$ , если положить

$$C_{-1} = 0, \quad C_0 = 0.$$

<sup>1)</sup> См. Todhunter, Functions of Laplace etc., ra. V; Whittaker's. Watson, Modern Analysis, стр. 306.

Дальнейший ход теории будет основываться в существенных чертах на данном в § 221 рассуждении Лапласа и будет иметь мало общего с исследованиями §§ 216, 217, 221.

Для свободных колебаний мы имеем  $\gamma_n = 0$ , и допускаемые значения  $f$  будут определяться трансцендентным уравнением

$$L_2 - \frac{1}{5 \cdot 7^2 \cdot 9} \left| - \frac{1}{9 \cdot 11^2 \cdot 13} \right| - \text{и т. д.} = 0 \quad (12)$$

или уравнением

$$L_1 - \frac{1}{3 \cdot 5^2 \cdot 7} \left| - \frac{1}{7 \cdot 9^2 \cdot 11} \right| - \text{и т. д.} = 0, \quad (13)$$

смотря по тому, будет ли вид колебаний симметричным или несимметричным относительно экватора.

Хауф установил различные виды для уравнения периодов, которые будут пригодны для вычисления высших корней, и показал, что хорошее приближение достигается уравнениями

$$L_n = 0,$$

или

$$\frac{\sigma^2}{4\omega^2} = 1 + n(n+1) \left\{ \left( 1 - \frac{3}{2n+1} \frac{e}{e_0} \right) \frac{gh}{4\omega^2 a^2} - \frac{2}{(2n-1)(2n+3)} \right\}, \quad (14)$$

за исключением первых двух или трех значений  $n^{*1}$ .

Следующая таблица дает периоды (по звездному времени) самого медленного симметрического колебания [т. е. такого, при котором возвышение поверхности изменяется как  $P_2(\mu)$  при отсутствии вращения] для различных глубин <sup>2)</sup>.

$\beta$	Глубина ( $m$ )	$\frac{\sigma^2}{4\omega^2}$	Период		Период для $\omega = 0$	
			часы	мин.	часы	мин.
40	2210	0,44155	18	3,5	32	49
20	4430	0,62473	15	11,0	23	12
10	8850	0,92506	12	28,6	16	25
5	17700	1,4785	9	52,1	11	35

Результаты, которые получаются для вынужденных колебаний „первого рода“, очень похожи на результаты § 217. Предельная

<sup>1)</sup> Мы указываем также Poole, Proc. Lond. Mat. Soc. (2), XIX, 299.

<sup>2)</sup> Самый медленный, несимметрический вид колебаний имеет более длинный период. Он обуславливает смещение центра тяжести воды, так что необходимо внести исправление в том случае, когда ядро будет свободным, ср. § 199.

форма приливов длинного периода, когда  $\sigma = 0$ , может быть получена из следующей таблицы.

$\beta$	$\frac{e}{e_0} = 0,181$		$\frac{e}{e_0} = 0$	
	полюс	экватор	полюс	экватор
40	0,140	0,426	0,154	0,455
20	0,266	0,551		
10	0,443	0,681	0,470	0,708
5	0,628	0,796	0,651	0,817

Второй и третий столбцы дают отношение приливов на полюсе и на экваторе к их значениям согласно статической теории <sup>1)</sup>. Числа в четвертом и пятом столбцах повторены из § 217. Сравнение показывает, что влияние взаимного притяжения частиц воды сводится к уменьшению амплитуды.

§ 223. В более общем случае, в котором не предполагается симметрии около оси, Хауф разлагает возвышение поверхности  $\zeta$  в ряд по тессеральным сферическим функциям типа

$$P_n^s(\mu) e^{i(\sigma t + s\varphi + \epsilon)}. \quad (1)$$

Для теории приливов наиболее важны те случаи, в которых потенциал возмущающих сил имеет вид (1), а  $n = 2$ , причем  $s = 1$  или  $s = 2$ .

Вычисления становятся по необходимости несколько сложными <sup>2)</sup>, и будет достаточно привести здесь только некоторые из наиболее интересных результатов, показывающих, как должны быть заполнены пробелы в прежних исследованиях.

Чтобы понять природу свободных колебаний, самое лучшее начать со случая ( $\omega = 0$ ), в котором не имеет места вращение. Когда  $\omega$  будет увеличиваться, то пары равных по абсолютной величине и противоположных по знаку значений  $\sigma$ , которые мы получили в § 199; начинают различаться по абсолютной величине, и именно то значение

<sup>1)</sup> Числа подсчитаны на основании результатов Хауфа. В названной работе рассматриваются также другие интересные вопросы, как, например, исследование некоторых случаев переменной глубины с численными примерами.

<sup>2)</sup> Упрощение сделано Love, Notes on the Dynamical Theory of the Tides, Proc. Lond. Mat. Soc., (2), XII, 309 (1913). Он полагает

$$u = -\frac{\partial \chi}{a \partial \theta} - \frac{\partial \varphi}{a \sin \theta \partial \varphi},$$

$$v = -\frac{\partial \chi}{a \sin \theta \partial \varphi} + \frac{\partial \varphi}{a \partial \theta};$$

ср. (1) § 154. Выражения для  $\chi$ ,  $\varphi$  разлагаются по сферическим функциям.

будет больше, которое имеет одинаковый знак с  $\omega$ . Характер основных колебаний меняется также постепенно. Эти колебания называются колебаниями „первого класса“.

В то же время некоторые стационарные движения, которые возможны при отсутствии вращения без изменения уровня, превращаются в колебания с длинными периодами с изменением уровня, причем частоты будут сравнимы в начале с  $\omega$ . Соответствующие колебания называются колебаниями „второго класса“ <sup>1)</sup>; ср. § 206.

Следующая таблица дает частоты  $\sigma$  и соответствующие периоды, выраженные в звездном времени, для тех колебаний первого класса, которые наиболее важны по отношению к суточным и полусуточным приливам. Последняя колонна дает соответствующие периоды для случая отсутствия вращения, вычисленные из формулы (15) § 200.

Второй род ( $s = 1$ )				Третий род ( $s = 2$ )				
Глубина в метрах	$\frac{\sigma}{\omega}$	Период		$\frac{\sigma}{\omega}$	Период		Период для $\omega = 0$	
		часы	мин.		часы	мин.	часы	мин.
2 210	1,6337	14	41	1,3347	17	59	} 32	49
	-0,9834	24	24	-0,6221	38	34		
4 430	1,8677	12	51	1,6133	14	52	} 23	12
	-1,2450	19	16	-0,8922	26	54		
8 850	2,1641	11	5	1,9968	12	1	} 16	25
	-1,6170	14	50	-1,2855	18	40		
17 700	2,6288	9	8	2,5535	9	24	} 21	35
	-2,1611	11	6	-1,8575	12	55		

Наиболее быстрое колебание второго класса имеет в каждом случае период более длинный, чем одни сутки; периоды остальных еще длиннее.

Что касается *вынужденных* колебаний „второго рода“, то все еще имеет место заключение Лапласа, что суточный прилив в случае постоянной глубины исчезает (когда в точности  $\sigma = \omega$ ). Вычисление для самого важного случая суточного лунного прилива, для которого  $\frac{\sigma}{\omega} = 0,922700$ , показывает, что для рассматриваемых глубин возвышения будут малы сравнительно с высотами по статической теории и что приливы большей частью будут обратными.

Из вынужденных колебаний „третьего рода“ упомянем, во-первых, полусуточный солнечный прилив, для которого с достаточной точностью  $\sigma = 2\omega$ . Для четырех глубин, рассмотренных в наших табли-

<sup>1)</sup> Эти оба класса колебаний встречались нам уже при плоской задаче § 212.

цах, найдены следующие значения отношения динамической высоты прилива к соответствующей высоте прилива по статической теории на экваторе:

$$7,9548, \quad -1,5016, \quad -234,87, \quad +2,1389.$$

„Очень большие коэффициенты, которые встречаются для  $\frac{hg}{4\omega^2 a^2} = \frac{1}{10}$ , указывают на то, что для этой глубины существует свободное колебание полусуточного типа, период которого очень мало отличается от полусуток. Из таблиц видно, что этот период в действительности равен 12 часам 1 минуте, в то время как в случае  $\frac{hg}{4\omega^2 a^2} = \frac{1}{40}$  для периода получалось 12 часов 5 минут<sup>1)</sup>. Когда период вынужденного колебания отличается от периода свободного колебания только немного менее чем на одну минуту, то может случиться, что вынужденный прилив приблизительно в 250 раз больше прилива, полученного согласно статической теории, между тем как разность в 5 минут между этими периодами будет достаточна, чтобы свести прилив к меньшему, чем соответствующий десятикратный статический прилив. Отсюда следует, что приливы не имеют тенденции делаться чрезмерно большими, кроме случая, когда имеет место очень точное совпадение с одним из периодов свободных колебаний“.

„Критические глубины, при которых рассмотренные здесь вынужденные приливы делаются бесконечными, это — те, для которых период свободного колебания равен в точности 12 часам. Можно найти эти глубины, если в уравнении частот свободных колебаний положить  $\sigma = 2\omega$  и рассматривать полученное таким образом уравнение как уравнение для определения  $h$ . Критические глубины, соответствующие двум наибольшим корням, приблизительно будут равны 8894 метрам и 2248 метрам“.

„Легко видеть, что в трех из четырех рассмотренных здесь случаев влияние взаимного притяжения частиц воды выражается в увеличении отношения прилива к статическому приливу (ср. § 221). В двух случаях изменяется также знак. Это есть, конечно, следствие того факта, что для  $\frac{e}{e_1} = 0,18093$  один из периодов свободных колебаний несколько больше 12 часов, а для  $\frac{e}{e_1} = 0$  меньше 12 часов<sup>2)</sup>“.

Хауф вычислил также полусуточные лунные приливы, для которых

$$\frac{\sigma}{2\omega} = 0,96350.$$

<sup>1)</sup> Этот период принадлежит к колебанию, которое следует после колебания с периодом 17 ч. 59 мин.

<sup>2)</sup> Hough, Phil. Trans. A. CXCI, 178, 179.

Для четырех рассмотренных глубин отношения экваториальных высот прилива к их значениям согласно статической теории оказываются равными соответственно

$$-2,4187, \quad -1,8000, \quad +11,0725, \quad +1,9225.$$

Если сравнить эти числа с теми, которые мы получили для солнечных приливов, то видно, что для глубины 2210 метров солнечные приливы будут прямыми, а лунные приливы — обратными, в то время как для глубины 8850 метров происходит противоположное. Это, конечно, есть следствие того факта, что в каждом из этих случаев имеет место свободное колебание, период которого лежит между 12 солнечными часами (или, точнее, звездными часами) и 12 лунными часами. Критические глубины, для которых лунные приливы делаются бесконечными, равняются 7938 метрам и 1965 метрам.

Это явление, таким образом, будет встречаться, когда глубина моря лежит между 8894 и 7938 метрами или между 2248 и 1965 метрами. Важное следствие состоит в том, что для глубин между этими пределами обыкновенные явления внезапного и малого морских приливов меняются местами так, что более высокие приливы наступают, когда Луна находится в квадратуре (в четверти), а более низкие при новолунии и полнолунии <sup>1)</sup>.

§ 223а. Некоторые важные дополнения в динамическую теорию были внесены Гольдсброу <sup>2)</sup>. Рассматривая приливы для моря постоянной глубины, ограниченного одним или двумя параллельными кругами, он нашел, что для полярного бассейна с углом в 30°, например, для таких глубин, какие были рассмотрены в § 217, 221, приливы с длинными периодами и полусуточные приливы мало отклоняются от статически вычисленных значений, которые исправлены по способу, изложенному в приложении. Однако этот случай существенно отличается от суточных приливов, которые сильно меняются в зависимости от формы и глубины бассейна и вообще являются значительными, в то время как для моря, покрывающего равномерно земной шар, ими можно пренебречь.

Для экваториального пояса приливы с длинными периодами опять приближаются к своим статическим значениям, между тем как суточные и полусуточные приливы значительно отклоняются от них, и мера этого отклонения значительно меняется в зависимости от положения границ.

Имеют место и различия, несомненно, обусловленные связью между вынужденным периодом и естественным периодом свободных колебаний. Этот вопрос был изучен Гольдсброу по отношению к полусуточным приливам Атлантического океана, который более или менее

<sup>1)</sup> Hough, см. выше, где есть указания на Kelvin, Popular Lectures and Addresses, London, 1894, II, 22 (1868).

<sup>2)</sup> Goldsborough, The Dynamical Theory of the Tides in a Polar Basin, Proc. Lond. Math. Soc. (2) XIV, 31, (1913); The Dynamical Theory of the Tides in a Zonal Ocean, XIV, 207 (1914).

образует ограниченную и изолированную систему. Рассматривая случай океана, ограниченного двумя меридианами по обе стороны от меридиана в  $60^\circ$ , и предполагая закон глубины в виде

$$h = h_0 \sin^2 \theta,$$

он нашел, что будут иметь место свободные колебания с частотой  $\sigma = 2\omega$  в точности, при условии, что  $h_0 = 7\,076$  метрам, что дает среднюю глубину в  $4\,727,5$  метра. Если же  $h_0 = 7\,722,6$  метра или средняя глубина будет  $5\,148,6$  метра, то он нашел, что вынужденный прилив указанной выше частоты все еще будет большим по сравнению со значением по статической теории.

В более недавней работе <sup>1)</sup> Гольдсброу и Кольборна глубина взята постоянной и равной средней оценочной глубине ( $3\,873,5$  м) Атлантического океана. За частоту вынужденных колебаний они принимали частоту главной полусуточной составляющей (обычно обозначаемой через  $\mu_2$ ) возмущающей силы Луны ( $\frac{\sigma}{2\omega} = 0,9625$ ). Амплитуды, хотя и не такие большие, как прежде, но значительно превышают значения статической теории. Суточные приливы в океане этого же типа были исследованы Кольборном <sup>2)</sup>.

§ 224. Трудно оценить, кроме как совершенно грубым образом, в какой мере предыдущие заключения динамической теории должны быть изменены, если будут приняты во внимание действительные свойства океана с его неправильными очертаниями и изменяющимися глубинами <sup>3)</sup>. Однако кое-что об этом должно быть сказано.

Во-первых, формулы (1) § 206 позволяют утверждать, что при всяком данном приливе имеется налицо изменяющаяся от места к месту разность фаз между приливной высокой водой и возмущающей силой <sup>4)</sup>. Например, в случае полусуточного лунного прилива высокий или низкий уровень воды не должны совпадать по времени с прохождением Луны или противолуны через меридиан. Выражаясь точнее, это значит: для случая возмущающей силы данного типа, для которой статически вычисленные значения высоты прилива в определенном месте выражаются формулой

$$\bar{\zeta} = a \cos \sigma t, \quad (1)$$

динамическое значение высоты прилива определяется из

$$\zeta = A \cos (\sigma t - \varepsilon), \quad (2)$$

<sup>1)</sup> Goldsborough u. Colborne, Proc. Roy. Soc. A, CXVII, 692 (1927).

<sup>2)</sup> Proc. Roy. Soc. A, CXXXI, 38 (1931).

<sup>3)</sup> Решение математической проблемы имеется у Poincaré, Sur l'équilibre et les mouvements des mers, Liouville (5), II, 57, 217 (1896) и в его Leçons de mécanique Céleste, III.

<sup>4)</sup> Это иллюстрируется проблемой канала, § 184.

где отношение  $\frac{A}{a}$  и разность фаз  $\varepsilon$  суть функции как  $\sigma$ , так и положения места.

Рассмотрим, далее, наложение двух колебаний одинакового типа, но с несколько различными частотами, например, полусуточные лунные и солнечные приливы. Если начало отсчета времени  $t$  совместить с временем новолуния или полнолуния, то будем иметь

$$\bar{\zeta} = a \cos \sigma t + a' \cos \sigma' t \quad (3)$$

и

$$\zeta = A \cos (\sigma t - \varepsilon) + A' \cos (\sigma' t - \varepsilon'). \quad (4)$$

Это можно написать также в следующем виде:

$$\zeta = (A + A' \cos \varphi) \cos (\sigma t - \varepsilon) + A' \sin \varphi \sin (\sigma t - \varepsilon'), \quad (5)$$

где

$$\varphi = (\sigma - \sigma') t - \varepsilon + \varepsilon'. \quad (6)$$

Если первый член правой части формулы (4) представляет лунный прилив, а второй — солнечный прилив, то будем иметь  $\sigma < \sigma'$ ,  $A > A'$ . Положив

$$\left. \begin{aligned} A + A' \cos \varphi &= C \cos \alpha, \\ A' \sin \varphi &= C \sin \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

получим

$$\zeta = C \cos (\sigma t - \varepsilon - \alpha), \quad (8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} C &= (A^2 + 2AA' \cos \varphi + A'^2)^{1/2}, \\ \alpha &= \operatorname{arctg} \frac{A' \sin \varphi}{A + A' \cos \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Это можно рассматривать как простое гармоническое колебание с медленно изменяющейся амплитудой и фазой. Амплитуда изменяется между пределами  $A - A'$  и  $A + A'$ , между тем как  $\alpha$  можно взять всегда между  $-\frac{1}{2}\pi$  и  $+\frac{1}{2}\pi$ . Частота  $\sigma$  также должна быть рассматриваема как переменная; можно найти, что

$$\frac{d}{dt} (\sigma t - \alpha) = \frac{\sigma A^2 + (\sigma + \sigma') AA' \cos \varphi + \sigma' A'^2}{A^2 + 2AA' \cos \varphi + A'^2}. \quad (10)$$

Это выражение заключено между пределами

$$\frac{A\sigma + A'\sigma'}{A + A'} \quad \text{и} \quad \frac{A\sigma - A'\sigma'}{A - A'}. \quad (11)^1$$

Приведенное рассуждение представляет хорошо известное объяснение явлений внезапного морского прилива и малого прилива<sup>2)</sup>, но нас теперь будет интересовать только вопрос относительно фазы.

<sup>1)</sup> Helmholtz, Lehre von den Tonempfindungen, 2-е изд., Braunschweig, 1870, стр. 622.

<sup>2)</sup> Ср. Thomson a. Tait, § 60.



Согласно статической теории максимумы амплитуды наступают, когда

$$(\sigma' - \sigma) t = 2n\pi,$$

где  $n$  обозначает целое число. По динамической же теории соответствующие моменты максимумов определяются уравнением

$$(\sigma' - \sigma) t - (\varepsilon' - \varepsilon) = 2n\pi,$$

т. е. динамические максимумы отделены от статических промежутком времени <sup>1)</sup>

$$\frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\sigma' - \sigma}.$$

Если бы разность между  $\sigma'$  и  $\sigma$  была бесконечно малой, то эта разница во времени равнялась бы  $\frac{d\varepsilon}{d\sigma}$ .

Тот факт, что момент высокой воды даже во время новолуния и полнолуния может на несколько часов предшествовать прохождению Луны или противолуны или следовать за ним позднее на несколько часов, хорошо известен <sup>2)</sup>. Этот интервал, если рассматривать его как запаздывание, обыкновенно для полусуточных солнечных приливов больше, чем для полусуточных лунных приливов; отсюда следует, что внезапные морские приливы во многих местах будут более высокими через день или через два дня после соответствующего новолуния и полнолуния. Это обстоятельство было приписано <sup>3)</sup> влиянию приливного трения (см. гл. XI), однако ясно, что нельзя игнорировать в этой связи разностью фаз, которые получаются из полной динамической теории даже при отсутствии трения. И есть некоторые основания считать их более важными причинами, чем те, которые обусловлены приливным трением.

Наконец, в § 206, 217 было показано, что приливы с длинным периодом могут очень сильно отклоняться от значений, данных статической теорией, вследствие возможности определенных стационарных движений при отсутствии возмущений. Рэлей <sup>4)</sup> показал, что эти стационарные движения невозможны в некоторых случаях, когда море ограничено перпендикулярными стенками. В самом деле: из (б) § 214 получается следующее: если глубина  $h$  всюду одинакова, то при стационарном движении  $\zeta$  должна быть функцией только полюсного расстояния. Вследствие этого из (4) того же параграфа получается, что направленная на восток скорость  $v$  должна быть постоянной вдоль каждой параллели. Однако это несовместимо с наличием

<sup>1)</sup> Этот интервал может быть, конечно, и отрицательным.

<sup>2)</sup> Величины запаздываний (мы обозначили их через  $\varepsilon$ ) для различных компонент приливов были вычислены Бэрдом и Дарвином для ряда гаваней Results of the Harmonic Analysis of Tidal Observations, Proc. R. S., XXXIX, 135 (1885), и Darwin, Second Series of Results. . . , Proc. R. S., XLV, 556 (1889).

<sup>3)</sup> Airy, Tides and Waves, § 459.

<sup>4)</sup> Rayleigh, Note on the Theory of the Fortnightly Tide, Phil Mag. (6), V, 136 (1903) [Papers, IV, 84].

перпендикулярной перегородки вдоль меридиана. Но это противоречие может и не иметь места для моря, глубина которого постепенно уменьшается от середины в направлении к границам<sup>1)</sup>.

§ 225. Мы можем дополнить исследование § 200 некоторыми краткими замечаниями по вопросу об устойчивости океана, принимая во внимание вращение Земли.

В § 205 было показано, что условие для вековой устойчивости состоит в том, что  $V - T_0$  должно быть минимумом в случае равновесия. Пренебрегая взаимным притяжением поднятых частиц воды легко применить это условие к настоящей задаче. Избыток величины  $V - T_0$  над ее значением в невозмущенном состоянии, очевидно, равен

$$\iint \left\{ \int_0^{\zeta} \left( \Psi - \frac{1}{2} \omega^2 \tilde{\omega}^2 \right) dz \right\} dS, \quad (1)$$

где  $\Psi$  означает потенциал земного притяжения,  $\delta S$  — элемент поверхности моря, а остальные обозначения остаются прежними. Так как  $\Psi - \frac{1}{2} \omega^2 \tilde{\omega}^2$  на всем невозмущенном уровне ( $z=0$ ) постоянно, то его значение для малой высоты  $z$  может быть положено равным  $gz + \text{const.}$ , где, как в § 213,

$$g = \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \Psi - \frac{1}{2} \omega^2 \tilde{\omega}^2 \right) \right]_{z=0}. \quad (2)$$

Так как вследствие постоянства объема  $\iint \zeta dS = 0$ , то из (1) получается для приращения разности  $V - T_0$  следующее значение:

$$\frac{1}{2} \iint g \zeta^2 dS. \quad (3)$$

Эта величина существенно положительна, и поэтому равновесие вековым образом устойчиво<sup>2)</sup>.

Необходимо отметить, что этот способ доказательства не содержит никакого ограничения как относительно глубины жидкости, так и малости эллиптичности, а также относительно симметрии невозмущенной поверхности по отношению к оси вращения.

Если мы хотим принять во внимание взаимное притяжение частиц воды, то задача может быть решена без затруднений только тогда, когда невозмущенная поверхность близка к сферической поверхности и когда пренебрегают изменением  $g$ . Вопрос (о вековой устойчивости) тогда в точности такой же, как и при отсутствии вращения. Вычисление для этого случая найдет свое место в следующей главе (§ 264). Результат, каковой мы могли предусмотреть и из § 200,

<sup>1)</sup> Теория предельных форм приливов с длинным периодом в различных типах морей была разработана Proudman, Proc. Lond. Mat. Soc. (2), XIII, 273 (1913).

<sup>2)</sup> Ср. Laplace, Mécanique céleste, кн. IV, § 13, 14.

показывает, что необходимое и достаточное условие устойчивости океана состоит в том, что его плотность должна быть меньше, чем средняя плотность Земли <sup>1)</sup>).

§ 226. Быть может, здесь уместно будет сделать некоторые дополнительные замечания по общему вопросу об устойчивости динамических систем. В общем мы следуем обычному способу и рассматриваем положение равновесия или стационарное движение как устойчивое или неустойчивое, смотря по характеру решения приближенного уравнения для возмущенного движения. Если это решение состоит из ряда, члены которого имеют вид  $Ce^{\pm \lambda t}$ , то обычно называют невозмущенное состояние устойчивым, когда все значения  $\lambda$  будут чисто мнимыми (т. е. вида  $i\sigma$ ); если же, напротив, одно из значений  $\lambda$  будет действительным, то невозмущенное состояние называется неустойчивым. В случае возмущенного равновесия, это математически приводит к употребительному критерию устойчивости, согласно которому необходимое и достаточное условие для этого заключается в существовании минимума функции  $V$ .

В последнее время это заключение было поставлено под вопросом, оправдывается ли оно с практической точки зрения. Было указано на следующее: так как приближенные динамические уравнения делаются все более неточными, по мере того как возрастает отклонение от положения равновесия, то еще вопрос, в какой мере вообще могут быть выведены из этих уравнений строгие заключения об окончательном значении отклонения <sup>2)</sup>).

Доказательство Дирихле было уже упомянуто; согласно ему достижение минимального значения  $V$  есть достаточное условие устойчивости в практическом смысле. Но не существует столь же простого доказательства, которое без дополнительных ограничений показало бы, что это условие также и необходимо. Если, однако, принять во внимание силы трения, которые появляются при всяком произвольном движении системы, то доказательство можно провести так, как в § 205.

После небольшого размышления можно видеть, что большая часть неясностей в этом вопросе обусловлена тем, что не существует достаточно строгого математического определения для понятия „устойчивость“. Возникает в еще большей степени та же трудность, если перейти к вопросу об устойчивости движения. Определения, предложенные различными авторами, были подвергнуты критическому разбору Клейном и Зоммерфельдом в их книге по теории волчка <sup>3)</sup>. Отвергая прежние определения, они основывают свой критерий на виде изменений, вызываемых малыми произвольными возмущающими импульсами в траектории системы. Если невозмущенная траектория представляет предельное положение возмущенных траекторий при

<sup>1)</sup> Ср. Laplace, см. примечание выше.

<sup>2)</sup> См. работы Ляпунова и Адамара, Liouville (5), III (1897).

<sup>3)</sup> Klein u. Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels, Leipzig, 1897, стр. 342.

бесконечном уменьшении импульса, то она называется устойчивой, в противном случае — неустойчивой. Например, вертикальное падение частицы под действием силы тяжести следует рассматривать как устойчивое, хотя для произвольно данного как угодно малого импульсивного возмущения отклонение положения частицы в какой-то момент  $t$  от ее положения в первоначальном движении возрастает неограниченно вместе с  $t$ . Даже этот критерий, как признают сами названные авторы, только тогда не лишен смысла, когда выражение „предельное положение“, примененное к траектории, является вполне точно определенным. Кроме того, оказывается, что математически строгое определение не во всех случаях может быть легко приведено в согласие с наглядными геометрическими представлениями<sup>1)</sup>.

Эти соображения относятся, естественно, к вопросу об „обыкновенной“ устойчивости. Более важная теория „вековой“ устойчивости (§ 205) при этом не затрагивается. Мы встретимся с критерием для нее в несколько измененной форме на более поздней ступени наших исследований<sup>2)</sup>.

## ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛАВЕ ВОСЬМОЙ

### ПРИЛИВООБРАЗУЮЩИЕ СИЛЫ

а) Если обозначить на фиг. 50 через  $O$  и  $C$  центры Земли и возмущающего тела (например, Луны), то потенциал лунного притяжения для точки  $P$  вблизи земной поверхности будет равен  $-\frac{\gamma M}{CP}$ , где  $M$  обозначает массу Луны, а  $\gamma$  — постоянную тяготения.

Если положить

$$OC = D, \quad OP = r$$



Фиг. 50.

и обозначить (геоцентрическое) зенитное расстояние Луны в точке  $P$ , именно угол  $POC$ , через  $\theta$ , то этот потенциал равен

$$-\frac{\gamma M}{(D^2 - 2rD \cos \theta + r^2)^{3/2}}$$

<sup>1)</sup> Некоторые хорошие иллюстрации можно найти в динамике материальной точки. Так, частица, которая описывает окружность под влиянием центральной силы, обратно пропорциональной кубу расстояния, при малом возмущении будет двигаться либо к центру, либо в бесконечность, причем в каждом из этих случаев она будет описывать спираль с бесконечным числом завитков. Каждая из этих спиралей математически имеет окружность в качестве „предельного положения“, хотя движение по этой окружности естественно рассматривать как неустойчивое.

Ср. Korteweg, Wiener. Ber., май 20, 1886.

Более узкое определение было дано Love и применено Bromwich ко многим динамическим и гидродинамическим задачам; см. Proc. Lond. Mat. Soc. (1), XXXIII, 325 (1901).

<sup>2)</sup> Это изложение в существенном взято из статьи автора *Dynamics Analytical* в Encycl. Brit., 10-е изд., XXVII, 566 (1902), и изд. 11-е, VIII, 756 (1910).

Однако нас интересует не абсолютное ускорение в точке  $P$ , а относительное ускорение по отношению к Земле. Луна сообщает при этом всей массе Земли ускорение  $\frac{\gamma M}{D^2}$ <sup>1)</sup> параллельно к  $OC$ ; потенциал однородного силового поля такой интенсивности, очевидно, будет равен

$$-\frac{\gamma M}{D^2} r \cos \theta.$$

Вычитая это выражение из нашего прежнего результата, получим потенциал относительного притяжения в точке  $P$ .

$$\Omega = -\frac{\gamma M}{(D^2 - 2rD \cos \theta + r^2)^{1/2}} + \frac{\gamma M}{D^2} r \cos \theta. \quad (1)$$

Эта функция  $\Omega$  тождественна с „пертурбационной функцией“ в теории планет.

Разлагая  $\Omega$  по степеням величины  $\frac{r}{D}$ , которая в настоящем случае есть малая величина, и сохраняя затем только важнейший член, мы найдем

$$\Omega = \frac{3}{2} \frac{\gamma M r^2}{D^3} \left( \frac{1}{3} - \cos^2 \theta \right). \quad (2)$$

Если рассматривать (2) как функцию положения точки  $P$ , то имеем зональную сферическую функцию второго порядка с  $OC$  в качестве оси.

Читатель сам легко может показать, что  $\Omega$  при этой степени приближения равна общему потенциалу двух масс, из которых каждая равна  $\frac{1}{2} M$  и из которых одна находится в  $C$ , а другая — в  $C'$ , где  $C'$  лежит на продолжении  $CO$  и  $OC' = OC$ <sup>2)</sup>.

б) В статической теории приливов допускают, что свободная поверхность во всякий момент времени принимает ту форму равновесия, которая сохранилась с того момента, когда возмущающее тело принуждено было сохранить неизменным свое мгновенное положение по отношению к вращающейся Земле. Другими словами, предполагают, что свободная поверхность есть поверхность уровня для совместного действия силы тяжести, центробежной силы и возмущающей силы. Уравнение для этой поверхности уровня есть

$$\Psi - \frac{1}{2} \omega^2 \tilde{\omega}^2 + \Omega = \text{const.}, \quad (3)$$

где  $\omega$  обозначает угловую скорость вращения,  $\tilde{\omega}$  — расстояние произвольной точки от земной оси и  $\Psi$  — потенциал земного притяжения. Если обозначить квадратными скобками  $[\ ]$  значения заключенных в скобках величин на невозмущенной поверхности и через  $\bar{\zeta}$  — возвышение воды над этим невозмущенным уровнем, происходящее от возмущающего потенциала, то вышенаписанное уравнение в приближенном виде будет

$$\left[ \Psi - \frac{1}{2} \omega^2 \tilde{\omega}^2 \right] + \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \Psi - \frac{1}{2} \omega^2 \tilde{\omega}^2 \right) \right] \bar{\zeta} + \Omega = \text{const.}, \quad (4)$$

<sup>1)</sup> Ее влияние проявляется в образовании месячной неодинаковости в движении центра Земли около Солнца. Амплитуда этого колебания радиуса-вектора равна приблизительно 5600 километров; колебание же по долготе равно приблизительно  $7''$ , см. Laplace, Mécanique céleste, 6-я книга, § 30 и 13-я книга, § 10.

<sup>2)</sup> Thomson a. Tait § 804. Эти два фиктивные тела принято обозначать как „луна“ и „противолуна“.

где  $\frac{\partial}{\partial z}$  обозначает пространственное дифференцирование вдоль нормали, направленной наружу. Первый член левой части, конечно, постоянен, и мы будем иметь, следовательно,

$$\bar{\zeta} = -\frac{\Omega}{g} + C, \quad (5)$$

где, как в § 213,

$$g = \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \Psi - \frac{1}{2} \omega^2 \tilde{\omega}^2 \right) \right]. \quad (6)$$

Очевидно,  $g$  имеет здесь значение „кажущегося тяготения“; оно меняется, конечно, более или менее в зависимости от положения точки  $P$  на поверхности Земли.

Однако в теории приливов принято пренебрегать малыми колебаниями значения  $g$  и влиянием эллиптичности невозмущенного уровня на значение  $\Omega$  на поверхности. Таким образом, если положить

$$r = a, \quad g = \frac{\gamma E}{a^2},$$

где  $E$  обозначает массу Земли, а  $a$  — средний радиус на поверхности Земли, то согласно (2) и (5)

$$\bar{\zeta} = H \left( \cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) + C, \quad (7)$$

где

$$H = \frac{3}{2} \frac{M}{E} \left( \frac{a}{D} \right)^3 a, \quad (8)$$

как в § 180. Таким образом форма равновесия свободной поверхности есть гармонический сфероид второго порядка зонального типа, ось которого проходит через возмущающее тело.

с) Вследствие суточного вращения, а также вследствие собственного движения возмущающего тела то и дело изменяется положение приливного сфероида по отношению к Земле, так что уровень воды в каком-либо месте беспрестанно поднимается и падает. Мы исследуем характер этих изменений; пусть для определенного места  $P$   $\theta$  обозначает полюсное угловое расстояние, а  $\varphi$  — долготу на восток, считая от некоторого данного меридиана; через  $\Delta$  обозначим угловое расстояние возмущающего тела от северного полюса и через  $\alpha$  — часовой угол, считая на запад от того же самого меридиана. Тогда будем иметь

$$\cos \theta = \cos \Delta \cos \theta + \sin \Delta \sin \theta \cos (\alpha + \varphi) \quad (9)$$

и, следовательно, согласно (7)

$$\begin{aligned} \bar{\zeta} = \frac{3}{2} H \left( \cos^2 \Delta - \frac{1}{3} \right) \left( \cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} H \sin 2\Delta \sin 2\theta \cos (\alpha + \varphi) + \\ + \frac{1}{2} H \sin^2 \Delta \sin^2 \theta \cos 2(\alpha + \varphi) + C. \end{aligned} \quad (10)$$

Каждый из членов в правой части этого уравнения можно рассматривать как представляющий частный прилив; действия этих приливов налагаются друг на друга.

Первый член есть зональная сферическая функция второго порядка и дает приливный сфероид, симметричный относительно земной оси и имеющий в качестве узловых линий круги параллелей, для которых

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{3}, \text{ или } \theta = 90^\circ \pm 35^\circ 16'.$$

Высоты приливов для отдельных широт меняются, как  $\cos^2 \Delta - 1/3$ . Для Луны главное колебание этого вида имеет период, равный приблизительно 14 суткам, следовательно, этому члену соответствует „четырнадцатисуточный лунный прилив“, или „прилив по склонению“. Если возмущающее тело есть Солнце, то мы будем иметь „полугодовой солнечный прилив“. Необходимо отметить, что среднее значение от  $\cos^2 \Delta - 1/3$  по отношению к времени не равно нулю и наклон орбиты возмущающего тела к экватору вызывает как следствие постоянное изменение среднего уровня; ср. § 183.

Второй член правой части (10) есть сферическая функция такого типа, который мы получили из (7) § 86, полагая  $n=2$ ,  $s=1$ . Соответствующий приливный сфероид имеет в качестве узловых линий экватор и тот меридиан, который удален от возмущающего тела на  $90^\circ$ . Возмущение уровня имеет наибольшее значение в меридиане возмущающего тела в широтах, которые на  $45^\circ$  севернее и южнее экватора. Колебание в каком-нибудь месте завершает свой период одновременно с часовым углом  $\alpha$ , т. е. в течение лунных или солнечных суток. Однако амплитуда не постоянна, а меняется медленно вместе с  $\Delta$ , причем она меняет знак, когда возмущающее тело пересекает экватор. Этот член представляет „суточные“ лунный и солнечный приливы.

Третий член есть секториальная сферическая функция  $n=2$ ,  $s=2$  и дает приливный сфероид, имеющий узловыми линиями те меридианы, которые лежат на  $45^\circ$  восточнее и западнее от возмущающего тела. Колебание в каком-либо месте завершает свой период одновременно с  $2\alpha$ , т. е. в течение половины (лунных или солнечных) суток, а амплитуда, будучи пропорциональна  $\sin^2 \Delta$ , достигает своего наибольшего значения, когда возмущающее тело находится над экватором. Следовательно, третий член представляет полусуточные лунный и солнечный приливы.

„Постоянная“  $C$  определяется из того рассуждения, что вследствие неизменности объема мы должны иметь

$$\iint \zeta \, dS = 0, \quad (11)$$

где интегрирование распространяется на полную поверхность моря. Если море покрывает весь земной шар, то согласно общему свойству сферических поверхностных функций, указанному в § 87,  $C=0$ . Тогда из (7) следует, что наибольшее возвышение над невозмущенным уровнем имеет место в точках  $\theta=0$ ,  $\theta=180^\circ$ , т. е. в тех точках, где возмущающее тело находится в зените или в надире; это наибольшее возвышение равно  $2/3 H$ . Наибольшее опускание будет там, где  $\theta=90^\circ$ , т. е. тогда, когда возмущающее тело находится на горизонте, и оно равно  $1/3 H$ . Наибольшая разность уровней равна таким образом  $H$ .

В случае ограниченного моря  $C$  не обращается в нуль и имеет во всякий момент времени определенное значение, зависящее от положения возмущающего тела по отношению к Земле. Это значение может быть легко выведено из уравнений (10) и (11). Оно равно сумме сферических функций второго порядка от  $\Delta$  и  $\alpha$  с постоянными коэффициентами в форме интегралов по поверхности, значения которых зависят от распределения суши и воды на земном шаре. Колебания значения  $C$ , зависящие от относительного движения возмущающего тела, вызывают общее повышение и падение свободной поверхности с четырнадцатисуточным (для случая Луны), суточным и полусуточным периодами. Это уточнение статической теории, приведенное в обычной форме, было исследовано впервые полностью Томсоном и

тэтом <sup>1)</sup>. Необходимость подобного уточнения для ограниченного моря была однако, осознана еще Даниилом Бернулли <sup>2)</sup>.

Эта поправка имеет влияние на момент наступления высокой воды, который уже более не будет совпадать с моментом максимума возмущающей силы. Более того, интервал времени, на который высокая вода будет опаздывать или опережать, меняется в зависимости от места <sup>3)</sup>.

д) До сих пор мы пренебрегали взаимным притяжением частиц воды. Чтобы ввести их в вычисления, мы должны к возмущающему потенциалу  $\Omega$  прибавить еще потенциал тяготения поднятой воды. Для океана, покрывающего весь земной шар, корректирование легко сделать, как в § 200. Если положить  $n=2$  в формулах указанного параграфа, то мы должны увеличить значение  $\Omega$  на  $-\frac{3}{5} \frac{e}{e_0} g \bar{\zeta}$ ; отсюда легко найти

$$\bar{\zeta} = \frac{H}{1 - \frac{3}{5} \frac{e}{e_0}} \left( \cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right); \quad (12)$$

следовательно, все приливы увеличены в  $\left( 1 - \frac{3}{5} \frac{e}{e_0} \right)^{-1}$  раз. При  $\frac{e}{e_0} = 0,18$  это равно 1,12.

е) Вот все о статической теории. Для исследований кинетической теории § 213—224 необходимо значение величины  $\bar{\zeta}$ , даваемое формулой (10), предполагая разложенной в ряд простых гармонических функций от времени. Действительное разложение, при котором принимаются во внимание изменения  $\Delta$  и  $\alpha$  и изменения расстояния  $D$  возмущающего тела (последнее входит в выражение для  $H$ ), есть довольно сложная задача физической астрономии, которой мы не будем касаться <sup>4)</sup>.

Если не принимать во внимание константу  $C$ , которая исчезает в динамических уравнениях (1) § 215, так как неизменяемость объема обеспечена теперь уравнением неразрывности (2), то легко видеть, что члены формулы (10) будут тройкого рода.

Во-первых, мы имеем приливы длинного периода, для которых

$$\bar{\zeta} = H' \left( \cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) \cos(\sigma t + \epsilon). \quad (13)$$

Наиболее важные приливы этого рода суть „четырнадцатисуточные лунные приливы“, для которых выраженная в угловых градусах  $\sigma = 1,098^\circ$  в средний солнечный час, и „полугодовые солнечные приливы“, для которых  $\sigma = 0,082^\circ$ .

<sup>1)</sup> Thomson a. Tait, Natural Philosophy, § 808; см. также Darwin. On the Correction to the Equilibrium Theory of the Tides for the Continents, Proc. Roy. Soc., 1 апреля 1886 [Paper, I, 328]. Из числовых изысканий проф. Н. Н. Тунгет, приложенных к этой работе, следует, что при имеющемся в действительности распределении суши и воды эта поправка совершенно незначительна.

<sup>2)</sup> Bernoulli D., Traité sur le Flux et Reflux de la Mer, гл. XI (1740). Эта работа, так же как и цитированные на стр. 386 работа Маклорена и сочинение Эйлера по тому же самому предмету перепечатаны в Principia Ньютона, изданных Le Seur и Jacques.

<sup>3)</sup> Thomson a. Tait, § 810. Это положение иллюстрируется формулой (3) § 184.

<sup>4)</sup> Мы указываем на Laplace, Mécanique céleste, кн. XIII, § 2. Более полное разложение, которое служило основанием всем новейшим точным работам о приливах, принадлежит Дарвину и напечатано в его Papers, I. Это разложение является только квазигармоническим, причем некоторые элементы, которые изменяются только медленно, рассматриваются как постоянные, но время от времени они корректируются. Строгое гармоническое разложение проведено в последнее время Dodson, Proc. Roy. Soc. A. C., 305 (1921).



Во-вторых, мы имеем суточные приливы, для которых

$$\bar{\zeta} = H'' \sin \theta \cos \theta \cos (\sigma t + \varphi + \varepsilon), \quad (14)$$

где  $\sigma$  только немного отличается от угловой скорости  $\omega$  вращения Земли. К этим приливам принадлежат „суточные лунные приливы“ ( $\sigma = 13,943^\circ$ ), „суточные солнечные приливы“ ( $\sigma = 14,959^\circ$ ) и „суточные лунно-солнечные приливы“ ( $\sigma = \omega = 15,041^\circ$ ).

Наконец, мы имеем еще полусуточные приливы, для которых

$$\bar{\zeta} = H''' \sin^2 \theta \cos (\sigma t + 2\varphi + \varepsilon)^1), \quad (15)$$

где  $\sigma$  только немного отличается от  $2\omega$ . Последние включают „полусуточный лунный прилив“ ( $\sigma = 28,984^\circ$ ), „полусуточный солнечный прилив“ ( $\sigma = 30^\circ$ ) и „полусуточные лунно-солнечные приливы“ ( $\sigma = \omega = 30,082^\circ$ ).

Более полное перечисление важнейших частных приливов и значения коэффициентов  $H'$ ,  $H''$ ,  $H'''$  в различных случаях можно найти в уже цитированных исследованиях Дарвина. При гармоническом анализе наблюдений приливов, который составляет специальную тему рассматриваемых исследований, применяется только одна теорема динамической теории, именно общая теорема, что высота прилива в произвольном месте равна сумме ряда простых гармонических функций от времени, которые имеют такие же периоды, как различные члены в разложении возмущающего потенциала, так что эти периоды известны a priori. Амплитуды и фазы различных частных приливов для определенной гавани получаются тогда из сравнения наблюдений приливов за довольно длинный промежуток времени<sup>2)</sup>. Так получают вполне пригодное для практических целей выражение, которое применяется к систематическому предсказанию приливов в соответствующей гавани.

f) Особенно интересно при гармоническом анализе определение приливов длинного периода. Уже было указано, что под влиянием сил трения они должны приближаться более или менее близко к своим значениям по статической теории. Для моря, покрывающего земной шар, по меньшей мере сомнительно, достаточно ли будет сил трения, чтобы вызвать заметное влияние в указанном направлении. Можно ожидать, следовательно, согласно рассмотренным в § 206, 214 динамическим основаниям, что амплитуды будут меньше, чем по статической теории. С другой стороны, эти соображения не годятся для действительного океана<sup>3)</sup>, так как там влияние трения значительно больше. Таким образом мы можем принять, что приливы длинного периода должны были бы иметь свои полные статические значения, если бы Земля была абсолютно твердой. Однако в действительности четырнадцатидневный лунный прилив, амплитуду которого только и можно получить вообще с некоторой уверенностью из наблюдений, приблизительно на одну треть меньше, чем дает значение, вычисленное согласно статической теории. Это противоречие объясняется упругой податливостью твердой оболочки Земли влиянию приливовозмущающих сил, происходящих от Луны.

<sup>1)</sup> Для малой, лежащей вблизи полюса части поверхности, которая практически может рассматриваться как плоская, из формул (14) и (15) очевидно следует, что  $\bar{\zeta}$  будет пропорциональна  $r \cos (\sigma t + \varphi + \varepsilon)$  и  $\bar{\zeta}$  — пропорциональна  $r^2 \cos (\sigma t + 2\varphi + \varepsilon)$  соответственно, где  $r$  и  $\omega$  представляют полярные координаты на плоскости. Выражения этого вида были уже заранее использованы в § 211, 212.

<sup>2)</sup> В связи с § 187 интересно, что измерители прилива, которые находятся в сравнительно мелкой воде, заметно подвергаются влиянию некоторых приливов второго порядка, которые поэтому должны быть приняты во внимание в общей схеме гармонического анализа.

<sup>3)</sup> См. цитированную на стр. 446 работу Рэлея.

## ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

## ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ

§ 227. Будем теперь рассматривать движение волн в жидкости в том случае, когда уже больше нельзя будет пренебрегать вертикальным ускорением. Наиболее важный случай, который не был охвачен предшествующей теорией, есть движение волн на сравнительно глубокой воде, амплитуда которых, как мы увидим, очень быстро убывает с глубиной. Однако, как это будет выяснено, существует непрерывный переход к тем случаям, которые исследовались в предыдущей главе, если горизонтальное движение жидкости, начиная от поверхности вплоть до дна, будет в основном одинаковым.

Мы начнем с колебаний горизонтального слоя воды и ограничимся сначала случаями, при которых движение происходит в двух измерениях: в горизонтальном направлении ( $x$ ) и в вертикальном направлении ( $y$ ). Возвышения и опускания свободной поверхности представляют тогда ряд параллельных прямолинейных гребней и впадин, перпендикулярных к плоскости  $xu$ .

Предположим, что движение образовалось первоначально из состояния покоя под действием консервативной системы сил; в таком случае движение будет непременно безвихревым и потенциал скоростей  $\varphi$  будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

с условием на неподвижной границе

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0. \quad (2)$$

Чтобы найти условия, которым надо удовлетворить на свободной поверхности ( $p = \text{const.}$ ), возьмем начало координат на невозмущенном уровне и ось  $Oy$  направим вертикально вверх. Если положить  $\Omega = gy$  в формуле (4) § 20 и, предполагая движение бесконечно малым, пренебречь квадратом скорости  $q$ , то получим

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - gy + F(t). \quad (3)$$

Пусть  $\eta$  обозначает возвышение поверхности над точкой  $(x, 0)$  в момент  $t$ . Так как давление постоянно, то, включая функцию  $F(t)$  и аддитивную постоянную в значение  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ , будем иметь

$$\eta = \frac{1}{g} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_{y=\eta}. \quad (4)$$

С ошибкой порядка величин, которыми мы пренебрегаем, можно уравнение (4) написать в следующем виде:

$$\eta = \frac{1}{g} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_{y=0}. \quad (5)$$

Так как нормаль к свободной поверхности составляет бесконечно малый угол  $\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$  с вертикалью, то условие, что нормальная компонента скорости жидкости на свободной поверхности равна нормальной компоненте скорости самой поверхности, с достаточным приближением выражается в виде

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{y=0}. \quad (6)$$

Действительно, это есть вид, который принимает общее условие на поверхности (3) § 9, если положить

$$F(x, y, z, t) = y - \eta$$

и пренебречь малыми величинами второго порядка.

Исключая  $\eta$  из уравнений (5) и (6), получим условие

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad (7)$$

которое должно удовлетворяться для  $y = 0$ . Оно равнозначно с условием

$$\frac{Dp}{Dt} = 0.$$

Для простых гармонических колебаний с временным множителем  $e^{i(\sigma t + \epsilon)}$  условие (7) принимает вид

$$\sigma^2 \varphi = g \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (8)$$

**§ 228.** Применим эти результаты к свободным колебаниям слоя воды или воды в прямолинейном канале постоянной глубины  $h$ . Пусть жидкость, неограниченная в направлении оси  $x$ , ограничена вертикальными плоскостями, параллельными плоскости  $xu$ .

Так как для всех значений  $x$  граничные условия одинаковы, то проще всего предположить, что  $\varphi$  есть простая гармоническая функция от  $x$ ; наиболее общий случай, совместимый с вышеизложенными условиями, может быть получен отсюда по теореме Фурье с помощью наложения.

Мы предположим, следовательно,

$$\varphi = P \cos kx \cdot e^{i(\sigma t + \epsilon)}, \quad (1)$$

где  $P$  есть функция только  $y$ . Уравнение (1) § 227 дает

$$\frac{d^2 P}{dy^2} - k^2 P = 0, \quad (2)$$

а отсюда следует

$$P = A e^{ky} + B e^{-ky}. \quad (3)$$

Условие, что на дне нет вертикального движения, будет иметь вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{для} \quad y = -h;$$

откуда

$$Ae^{-kh} = Be^{kh} = \frac{1}{2} C.$$

Это приводит к формуле

$$\varphi = C \operatorname{ch} k(y+h) \cos kx \cdot e^{i(\sigma t + \varepsilon)}. \quad (4)$$

Значение  $\sigma$  определяется из уравнения (8) § 227, которое дает

$$\sigma^2 = gk \operatorname{th} kh. \quad (5)$$

Если подставить (4) в (5) § 227, то найдем

$$\eta = \frac{i\sigma C}{g} \operatorname{ch} kh \cos kx \cdot e^{i(\sigma t + \varepsilon)} \quad (6)$$

или, если положить

$$a = -\frac{\sigma C}{g} \operatorname{ch} kh$$

и сохранить только действительную часть (6), то получим

$$\eta = a \cos kx \sin(\sigma t + \varepsilon). \quad (7)$$

Эта формула представляет систему стоячих волн с длиной волны  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  и вертикальной амплитудой  $a$ . Период  $\left(\frac{2\pi}{\sigma}\right)$  и длина волны связаны формулой (5). Числовые примеры для этого соотношения будут даны в ближайшем параграфе.

Выразив  $\varphi$  через  $a$ , будем иметь

$$\varphi = -\frac{ga}{\sigma} \frac{\operatorname{ch} k(y+h)}{\operatorname{ch} kh} \cos kx \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (8)$$

и из § 62 легко убедиться, что соответствующая функция тока будет

$$\psi = \frac{ga}{\sigma} \frac{\operatorname{sh} k(y+h)}{\operatorname{ch} kh} \sin kx \cos(\sigma t + \varepsilon). \quad (9)$$

Обозначая через  $x$ ,  $y$  координаты частицы по отношению к ее среднему положению  $(x, y)$  и пренебрегая разностями между компонентами скорости в точках  $(x, y)$  и  $(x+x, y+y)$ , как величинами второго порядка малости, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Сделав теперь подстановку из (8) и интегрируя по  $t$ , после незначительных упрощений согласно (5) найдем

$$\left. \begin{aligned} x &= -a \frac{\operatorname{ch} k(y+h)}{\operatorname{sh} kh} \sin kx \sin(\sigma t + \varepsilon), \\ y &= a \frac{\operatorname{sh} k(y+h)}{\operatorname{sh} kh} \cos kx \sin(\sigma t + \varepsilon). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Движение каждой частицы будет прямолинейным и простым гармоническим; направление движения изменяется от вертикального в пучностях ( $kx = m\pi$ ) до горизонтального в узлах ( $kx = (m + 1/2)\pi$ ). Амплитуда вертикального движения падает от  $a \cos kx$  на поверхности до 0 на дне, в то время как амплитуда горизонтального движения уменьшается в отношении  $\operatorname{ch} kh : 1$ .

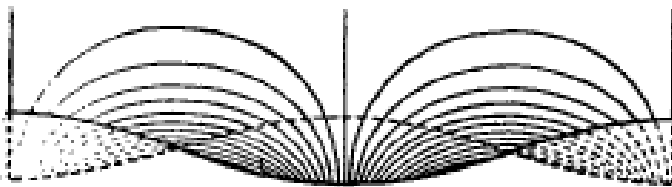
Если длина волны очень мала сравнительно с глубиной, то  $kh$  велико и, следовательно,  $\operatorname{th} kh = 1$  \*). Формулы (11) сводятся тогда к

$$\left. \begin{aligned} x &= -ae^{ky} \sin kx \sin(\sigma t + \varepsilon), \\ y &= ae^{ky} \cos kx \sin(\sigma t + \varepsilon), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где

$$\sigma^2 = gk. \quad (13)$$

Движение убывает от поверхности по направлению ко дну очень быстро; на глубине длины волны амплитуда уменьшается в отношении  $e^{-2\pi}$ , или 1:535. Вид линий тока  $\psi = \text{const.}$  (колебательного движения) для этого случая пред-



Фиг. 51.

ставлен на фиг. 51.

При вышеизложенном исследовании мы предполагали, что жидкость простирается в направлении  $x$  в бесконечность, и поэтому на значение  $k$

не накладывалось никаких ограничений. Однако формулы дают также продольные колебания и в канале конечной длины, если только для  $k$  подобрать подходящее значение. Если, например, жидкость ограничена вертикальными плоскостями

$$x = 0, \quad x = l,$$

то условие  $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$  выполняется на обоих концах, если

$$\sin kl = 0 \quad \text{или} \quad kl = m\pi,$$

где  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Длины волн нормальных колебаний даны, следовательно, формулой  $\lambda = \frac{2l}{m}$ ; ср. § 178.

**§ 229.** В предыдущих параграфах мы рассматривали „стоячие“ волны, и было естественно дать их на первом месте, так как они представляют непосредственное применение обычного метода исследования свободных колебаний системы около положения равновесия.

\*) Этот случай, конечно, легко исследовать совершенно независимо.

Если слой воды или канал постоянной глубины безграничен в обоих направлениях оси  $x$ , то наложением двух систем стоячих волн одинаковой длины волны мы получим систему прогрессивных волн, движущихся поступательно без изменения с постоянной скоростью. Для этого необходимо, чтобы гребни и впадины одной системы совпадали с узлами другой системы, чтобы амплитуды обеих систем были равны и, наконец, чтобы их фазы отличались на четверть периода. Следовательно, положив

$$\eta = \eta_1 \pm \eta_2, \quad (1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= a \sin kx \cos \sigma t, \\ \eta_2 &= a \cos kx \sin \sigma t, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

мы получим

$$\eta = a \sin (kx \pm \sigma t), \quad (3)$$

а это представляет бесконечную цепь волн, которые распространяются в отрицательном или положительном направлении оси  $x$  со скоростью

$$c = \frac{\sigma}{k} = \left( \frac{g}{k} \operatorname{th} kh \right)^{1/2}, \quad (4)$$

где  $\sigma$  определено из формулы (5) § 228. Выражая скорость через длину волны ( $\lambda$ ), будем иметь

$$c = \left( \frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi h}{\lambda} \right)^{1/2}. \quad (5)$$

Когда длина волны будет меньше удвоенной глубины, тогда с достаточной точностью будем иметь  $\operatorname{th} kh = 1$  и, следовательно<sup>1)</sup>,

$$c = \left( \frac{g}{k} \right)^{1/2} = \left( \frac{g\lambda}{2\pi} \right)^{1/2}. \quad (6)$$

Если, с другой стороны,  $\lambda$  только немногим будет больше, чем  $h$ , то приближенно  $\operatorname{th} kh = kh$  и скорость волны не будет зависеть от ее длины и, как в § 170, будет равна

$$c = (gh)^{1/2}. \quad (7)$$

Мы получили этот результат при допущении, что профиль волны есть синусоида; теорема Фурье показывает, однако, что это ограничение в значительной степени не является необходимым.

Если изобразим кривую  $y = \frac{\operatorname{th} x}{x}$  или рассмотрим числовые значения данной на стр. 462 таблицы, то увидим, что для данной глубины  $h$  скорость волн все время возрастает с длиной волны от 0 до асимптотического значения (7).

<sup>1)</sup> Green, Note on the Motion of Waves in Canals, Camb. Trans. t. VII (1889) [Papers, стр. 279].

Рассмотрим для определенности цепь простых гармонических волн, распространяющихся в положительном направлении, т. е. возьмем нижний знак в формулах (1) и (3). Из сравнения с формулой (7) § 228 можно убедиться, что  $\eta_1$  найдется, если положить  $\varepsilon = \frac{1}{2}\pi$  и отнять  $\frac{1}{2}\pi$  от значения  $kx^1$ ;  $\eta_2$  найдется легко, если положить  $\varepsilon = 0$ . Этим самым доказываются условия, которые мы наложили выше на обе системы стоячих волн; так же мы можем написать сразу соответствующие изменения остальных формул предыдущего параграфа.

Таким способом мы найдем для компонент смещения частицы

$$\left. \begin{aligned} x = x_1 - x_2 &= a \frac{\operatorname{ch} k(y+h)}{\operatorname{sh} kh} \cos(kx - \sigma t), \\ y = y_1 - y_2 &= a \frac{\operatorname{sh} k(y+h)}{\operatorname{sh} kh} \sin(kx - \sigma t). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Это показывает, что каждая частица имеет эллиптическое колебание, период которого  $\left(\frac{2\pi}{\sigma} = \frac{\lambda}{c}\right)$  равен времени, в течение которого возмущение передвигается на длину волны. Горизонтальные и вертикальные полуоси эллиптических орбит будут

$$a \frac{\operatorname{ch} k(y+h)}{\operatorname{sh} kh} \quad \text{и} \quad a \frac{\operatorname{sh} k(y+h)}{\operatorname{sh} kh}.$$

Обе убывают от поверхности до дна ( $y = -h$ ); на дне второе выражение обращается в нуль. Расстояние между фокусами для всех эллипсов одинаково и равно  $\lambda \operatorname{cosech} kh$ . Сравнивая уравнения (8) и (3), легко видеть, что частица, находящаяся на поверхности, движется в направлении распространения волны, когда она находится на гребне, и в противоположном направлении, когда она находится во впадине<sup>2)</sup>.

Если глубина превосходит половину длины волны, то  $e^{-kh}$  будет очень малым, и формулы (8) сводятся к

$$\left. \begin{aligned} x &= ae^{ky} \cos(kx - \sigma t), \\ y &= ae^{ky} \sin(kx - \sigma t), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

так что каждая частица описывает окружность с постоянной угловой скоростью  $\sigma = \left(\frac{2\pi g}{\lambda}\right)^{1/2}$  \*). Радиусы этих кругов равны  $ae^{ky}$  и, следовательно, очень быстро убывают с глубиной.

В первой из следующих таблиц второй столбец дает значения  $\operatorname{sech} kh$ , соответствующие различным значениям отношения  $\frac{h}{\lambda}$ . Эти зна-

<sup>1)</sup> Это означает не что иное, как смещение начальной точки, от которой отсчитывается  $x$ .

<sup>2)</sup> Результаты § 228—229 для случая конечной глубины в существенном принадлежат Airy, *Tides and Waves*, § 160 (1845).

\*) Ггееп. см. выше.

чения выражают отношение горизонтального движения на дне к горизонтальному движению на поверхности. Третий столбец дает отношение вертикального диаметра к горизонтальному для эллиптической орбиты частицы на поверхности. Четвертый и пятый столбцы дают отношения скорости волны к скорости волн той же длины, но на бесконечной глубине, а также к скорости длинных волн при действительных глубинах.

Таблицы абсолютных значений периодов и скоростей волн (вторая и третья из нижеследующих таблиц) заимствованы из сочинения Эри<sup>1)</sup>. Значение  $g$ , взятое им, равно  $9,802 \text{ м/сек}^2$ .

Возможность прогрессивных волн, движущихся вперед без изменения формы, ограничена теоретически случаем постоянной глубины; числовые результаты показывают, однако, что изменение глубины не оказывает заметного влияния, когда глубина всюду (приблизительно) превосходит половину длины волны.

$\frac{h}{\lambda}$	$\text{sech } kh$	$\text{th } kh$	$\frac{c}{\sqrt{gk^{-1}}}$	$\frac{c}{\sqrt{gh}}$
0,00	1,000	0,000	0,000	1,000
0,01	0,998	0,063	0,250	0,999
0,02	0,992	0,125	0,354	0,997
0,03	0,983	0,186	0,432	0,994
0,04	0,969	0,246	0,496	0,990
0,05	0,953	0,304	0,552	0,984
0,06	0,933	0,360	0,600	0,977
0,07	0,911	0,413	0,643	0,970
0,08	0,886	0,464	0,681	0,961
0,09	0,859	0,512	0,715	0,951
0,10	0,831	0,557	0,746	0,941
0,20	0,527	0,850	0,922	0,823
0,30	0,297	0,955	0,977	0,712
0,40	0,161	0,987	0,993	0,627
0,50	0,086	0,996	0,998	0,563
0,60	0,046	0,999	0,999	0,515
0,70	0,025	1,000	1,000	0,477
0,80	0,013	1,000	1,000	0,446
0,90	0,007	1,000	1,000	0,421
1,00	0,004	1,000	1,000	0,399
$\infty$	0,000	1,000	1,000	0,000

<sup>1)</sup> Airy, Tides and Waves, § 169, 170.



Для следующих таблиц отметим, что один английский фут равен 0,30479 м

Глубина воды в английских футах	Длина волны в английских футах				
	1	10	100	1000	10 000
	Период в секундах				
1	0,442	1,873	17,645	176,33	1763,3
10	0,442	1,398	5,923	55,80	557,62
100	0,442	1,398	4,420	18,73	176,45
1000	0,442	1,398	4,420	13,98	59,23
10000	0,442	1,398	4,420	13,98	44,20

Глубина воды в английских футах	Длина волны в английских футах					
	1	10	100	1000	10000	$\infty$
	Скорость волны в английских футах и секундах					
1	2,262	5,399	5,667	5,671	5,671	5,671
10	2,262	7,154	16,88	17,92	17,93	17,93
100	2,262	7,154	22,62	53,39	56,67	56,71
1000	2,262	7,154	22,62	71,54	168,8	179,3
10 000	2,262	7,154	22,62	71,54	226,2	567,1

Наконец, заметим еще, что теория прогрессивных волн может быть получена непосредственно, не опираясь на теорию стоячих волн, если вместо формулы (1) § 228 принять сразу

$$\varphi = Pe^{i(\sigma t - kx)}, \quad (10)$$

где  $P$  должно удовлетворять тем же условиям, как раньше. Легко получить в действительной форме

$$\eta = a \sin(kx - \sigma t), \quad (11)$$

$$\varphi = \frac{ga}{\sigma} \frac{\operatorname{ch} k(y+h)}{\operatorname{ch} kh} \cos(kx - \sigma t), \quad (12)$$

где  $\sigma$  имеет прежнее значение. Из уравнения (12) без труда получаются все прежние результаты о движении одной частицы.

**§ 230.** Энергию системы стоячих волн простого гармонического типа легко найти. Если мы вообразим две вертикальные плоскости, параллельные плоскости  $xu$ , на расстоянии единицы длины друг от друга, то потенциальная энергия жидкости, заключенной между этими плоскостями, на длине волны будет равна

$$\frac{1}{2} g \rho \int_0^\lambda \eta^2 dx.$$

Подставив значение  $\eta$  из (7) § 228, получим

$$\frac{1}{4} g \rho a^2 \lambda \sin^2(\sigma t + \varepsilon). \quad (1)$$

Кинетическая же энергия согласно (1) § 61 равна

$$\frac{1}{2} \rho \int_0^{\lambda} \left[ \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{y=0} dx.$$

Сделав подстановку из (8) § 228 и принимая во внимание соотношение между  $\sigma$  и  $k$ , получим

$$\frac{1}{4} g \rho a^2 \lambda \cos^2(\sigma t + \varepsilon). \quad (2)$$

Полная энергия, будучи равной сумме (1) и (2), имеет постоянное значение  $\frac{1}{4} g \rho a^2 \lambda$ . Это можно выразить и так, что полная энергия на единицу поверхности воды равна  $\frac{1}{4} g \rho a^2$ .

Подобное вычисление можно провести и для прогрессивных волн или же можно применить более общий метод, изложенный в § 174. При помощи каждого из этих методов мы найдем, что в каждый момент времени энергия есть наполовину потенциальная и наполовину кинетическая и что их полная сумма на единицу площади равна  $\frac{1}{2} g \rho a^2$ . Другими словами, энергия системы прогрессивных волн амплитуды  $a$  равна работе, которая необходима, чтобы поднять слой жидкости толщины  $a$  на высоту  $\frac{1}{2} a$ .

**§ 231.** Рассмотрим колебания поверхности раздела двух расположенных друг над другом жидкостей, которые в остальных направлениях безграничны.

Если мы возьмем начало на среднем уровне поверхности раздела, то можем написать

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= G e^{ky} \cos kx e^{i\sigma t}, \\ \varphi' &= C' e^{-ky} \cos kx e^{i\sigma t}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где штрихи относятся к верхней жидкости. Эти выражения удовлетворяют уравнению (1) § 227 и обращаются в нуль соответственно для  $y = -\infty$  и для  $y = +\infty$ . Написав уравнение возмущенной поверхности в виде

$$\eta = a \cos kx e^{i\sigma t}, \quad (2)$$

мы должны иметь согласно (6) § 227

$$-kC = kC' = i\sigma a. \quad (3)$$

Из формул

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} - gy, \\ \frac{p'}{\rho'} &= \frac{\partial \varphi'}{\partial t} - gy \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

получаем условие для непрерывности давления на поверхности раздела:

$$\rho(i\sigma C - ga) = \rho'(i\sigma C' - ga). \quad (5)$$

Подставив значения  $C$  и  $C'$  из (3), будем иметь

$$\sigma^2 = gk \frac{e - e'}{e + e'}. \quad (6)$$

Скорость распространения волн длины  $\frac{2\pi}{k}$  определяется, следовательно, формулой

$$C^2 = \frac{g}{k} \frac{e - e'}{e + e'}. \quad (7)$$

Присутствие верхней жидкости вызывает, таким образом, уменьшение скорости распространения волн произвольной длины в отношении  $\left\{\frac{1-s}{1+s}\right\}^{1/2}$ , где  $s$  обозначает отношение плотности верхней жидкости к плотности нижней. Это уменьшение скорости имеет двойное основание: потенциальная энергия деформации поверхности раздела уменьшается в отношении  $1-s$ , в то время как инерция возрастает в отношении  $1+s$ <sup>1)</sup>. В качестве числового примера можно указать, что для слоя воды, лежащего над ртутью ( $s^{-1} = 13,6$ ), скорость волн уменьшается в отношении 0,929.

Необходимо заметить, что в этой и других подобных задачах на поверхности раздела имеет место разрывность движения. Нормальная компонента  $\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$  скорости, конечно, непрерывна, но тангенциальная компонента  $\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$  меняет свой знак, когда пересекается поверхность раздела; другими словами, мы имеем перед собой (§ 151) вихревой слой. Это представляет прекрасный пример для сделанного в § 17 замечания, что свободные колебания жидкости переменной плотности не должны быть обязательно свободными от вихрей.

1) Это объясняет, почему собственные периоды колебаний поверхности раздела двух жидкостей приблизительно одинаковой плотности по сравнению с периодами колебаний свободной поверхности, простирающейся аналогично, очень длинны. Этот факт был замечен Веньямином Франклином для масла и воды, см. письмо, относящееся к 1762 г. [Complete Works, London, II, 142].

Вблизи устья некоторых норвежских фиордов находится слой пресной воды над соленой водой. Вследствие сравнительно небольшой потенциальной энергии, которая обусловлена данной деформацией поверхности раздела, на этой пограничной поверхности легко развиваются волны значительной высоты. Этой причиной объясняют ненормальное сопротивление, которое иногда испытывают суда в этих водах. См. Ekman, On Dead-Water, Scientific Results of the Norwegian North Polar Expedition, часть XV, Christiania, 1904. Укажем также на работу автора On Waves due to a Travelling Disturbance with an application to Waves in Superposed Fluids, Phil. Mag. (6), XXXI, 3 (1916).

В действительности, если бы разрыв мог когда либо образоваться, он будет немедленно уничтожаться вязкостью, а вихревая пленка будет замещаться вихревым слоем <sup>1)</sup>.

Если  $\rho < \rho'$ , то значение  $\sigma$  будет мнимым. Невозмущенная конфигурация равновесия тогда неустойчива.

Если обе жидкости заключены между двумя неподвижными горизонтальными плоскостями

$$y = -h, \quad y = h',$$

то вместо (1) мы примем

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= C \operatorname{ch} k (y + h) \cos kx e^{i\sigma t}, \\ \varphi' &= C' \operatorname{ch} k (y - h') \cos kx e^{i\sigma t}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

так как эти выражения дают на этих плоскостях соответственно

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial y} = 0.$$

Отсюда следует

$$-kC \operatorname{sh} kh = kC' \operatorname{sh} kh' = i\sigma a. \quad (9)$$

Из непрерывности давления следует

$$\rho (i\sigma C \operatorname{ch} kh - ga) = \rho' (i\sigma C' \operatorname{ch} kh' - ga). \quad (10)$$

Исключая  $C$  и  $C'$ , получим

$$\sigma^2 = \frac{gk(\rho - \rho')}{\rho \operatorname{cth} kh + \rho' \operatorname{cth} kh'}. \quad (11)$$

Когда  $kh$  и  $kh'$  оба очень велики, то это выражение приводится к виду (6). Когда  $kh'$  велико, а  $kh$  мало, то будем иметь приближенно

$$C^2 = \frac{\sigma^2}{k^2} = \left(1 - \frac{\rho'}{\rho}\right) gh. \quad (12)$$

Главное влияние наличия верхней жидкости заключается в уменьшении потенциальной энергии деформации. Кинетическая энергия верхней жидкости будет малой по сравнению с кинетической энергией нижней жидкости.

Когда верхняя поверхность верхней жидкости является свободной, то мы можем написать

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= C \operatorname{ch} k (y + h) \cos kx e^{i\sigma t}, \\ \varphi' &= (A \operatorname{ch} ky + B \operatorname{sh} ky) \cos kx e^{i\sigma t}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Кинематическое условие тогда будет иметь вид

$$-kC \operatorname{sh} kh = -B = i\sigma a. \quad (14)$$

Условие непрерывности давления на пограничной поверхности будет

$$\rho (i\sigma C \operatorname{ch} kh - ga) = \rho' (i\sigma A - ga). \quad (15)$$

Условие постоянства давления на свободной поверхности дается формулой (8) § 227, если только после дифференцирования положить  $y = h'$ . Таким образом мы получаем

$$\sigma^2 (A \operatorname{ch} kh' + B \operatorname{sh} kh') = gk (A \operatorname{sh} kh' + B \operatorname{ch} kh'). \quad (16)$$

<sup>1)</sup> Решение с учетом вязкости было дано Harrison, Proc. Lond. Math. Soc. (2), VI, 396 (1908).

Исключив  $A, B, C$  из (14), (15), (16), получим

$$\sigma^4 (e \operatorname{cth} kh \operatorname{cth} kh' + e') - \sigma^2 e (\operatorname{cth} kh' + \operatorname{cth} kh) gk + (e - e') g^2 k^3 = 0. \quad (17)$$

Так как это уравнение является квадратным относительно  $\sigma^2$ , то для каждого данного периода  $\left(\frac{2\pi}{\sigma}\right)$  имеются две возможные системы волн. Этого и следовало ожидать, так как система имеет при заданной длине волны две степени свободы, так что возможны два независимые друг от друга вида колебаний около положения равновесия. Для предельного случая, например, когда  $\frac{e'}{e}$  мало, один вид состоит главным образом в колебании верхней жидкости, которое происходит почти таким образом, как если бы нижняя жидкость отвердела; другое колебание можно рассматривать как колебание нижней жидкости, которое происходит почти таким образом, как если бы поверхность раздела была свободной поверхностью.

Для отношения амплитуды на верхней свободной пограничной поверхности к амплитуде на поверхности раздела получаем

$$\frac{kc^2}{kc^2 \operatorname{ch} kh' - g \operatorname{sh} kh'}. \quad (18)$$

Из различных возможных частных случаев наиболее интересный тот, при котором  $kh$  велико, т. е. при котором глубина нижней жидкости по сравнению с длиной волны велика. Если положить  $\operatorname{cth} kh = 1$ , то увидим, что один корень уравнения (17) будет равен

$$\sigma^2 = gk, \quad (19)$$

т. е. в точности тому же, как в случае одной жидкости бесконечной глубины, и что отношение амплитуд будет равно  $e^{kh'}$ . Это есть ни более ни менее, как только частный случай общей установленной в конце § 233 теоремы; действительно, можно показать, что на поверхности раздела обеих жидкостей в этом случае скольжение уже не будет иметь места.

Второй корень уравнения (17) при том же самом предположении будет равен

$$\sigma^2 = \frac{e - e'}{e \operatorname{cth} kh' + e'} gk, \quad (20)$$

и для него отношение (18) получает следующее значение:

$$-\left(\frac{e}{e'} - 1\right) e^{-kh'}. \quad (21)$$

Если в формулах (20) и (21) положить  $kh' = \infty$ , то придем к одному из прежних случаев. Если же, с другой стороны, будем считать  $kh'$  малым то получим

$$\frac{\sigma^2}{k^2} = \left(1 - \frac{e'}{e}\right) gh, \quad (22)$$

и отношение амплитуд будет равно

$$-\left(\frac{e}{e'} - 1\right). \quad (23)$$

Эти задачи впервые были исследованы Стоксом <sup>1)</sup>. Случай произвольно большого числа лежащих друг под другом слоев различной плотности был рассмотрен Веббом <sup>2)</sup> и Гринхиллем <sup>3)</sup>.

**§ 232.** Предположим, что две жидкости с плотностями  $\rho$ ,  $\rho'$  движутся друг над другом со скоростями  $U$ ,  $U'$ , параллельными оси  $x$ , причем поверхность раздела (в невозмущенном состоянии) является плоской и горизонтальной. Это есть фактически задача малых колебаний около состояния установившегося движения.

Положим

$$\varphi = -Ux + \varphi_1, \quad \varphi' = -U'x + \varphi'_1, \quad (1)$$

где  $\varphi_1$ ,  $\varphi'_1$  предполагаем малыми.

Скорость каждой из жидкостей на поверхности раздела может рассматриваться как составленная из скорости самой поверхности и из скорости жидкости по отношению к поверхности. Если обозначить через  $\eta$  ординату возмущенной поверхности, то мы найдем при рассмотрении вертикальных компонент уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + U' \frac{\partial \eta}{\partial x} &= -\frac{\partial \varphi'}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (2)^4$$

в качестве кинематических условий, которые выполняются для  $y=0$ .

Уравнение давления для нижней жидкости будет

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{1}{2} \left\{ \left( U - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 \right\} - gy + \dots$$

или

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - gy + \dots, \quad (3)$$

причем мы опустили все члены, которые являются либо членами второго порядка, либо не имеют значения для рассматриваемого вопроса. Таким образом условие непрерывности давления имеет следующий вид:

$$\rho \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - g\eta \right) = \rho' \left( \frac{\partial \varphi'_1}{\partial t} + U' \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x} - g\eta \right). \quad (4)$$

Мы уже видели при различных случаях, что при колебаниях около стационарного движения не обязательно должна иметь место одинаковость фаз внутри всей системы, а в рассматриваемом случае

<sup>1)</sup> Stokes, On the Theory of Oscillatory Waves, Camb. Trans, VIII (1847) [Papers, I, 212].

<sup>2)</sup> Webb, Math. Tripos. Papers, 1884.

<sup>3)</sup> Greenhill, Wave Motion in Hydrodynamics, Amer. Journ. of Math., IX (1887).

<sup>4)</sup> Эти уравнения представляют частные случаи общего пограничного условия (3) § 9, как легко заметить, если положить  $F = y - \eta$  и пренебречь малыми членами второго порядка.

при подобном допущении невозможно удовлетворить наличным условиям. Предполагая, что глубины обеих жидкостей неограниченны, мы должны положить

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= C e^{ky+i(\sigma t-kx)}, \\ \varphi_1' &= C' e^{-ky+i(\sigma t-kx)},\end{aligned}\quad (5)$$

и

$$\eta = a e^{i(\sigma t-kx)}. \quad (6)$$

Условия (2) дают тогда

$$\left. \begin{aligned}i(\sigma - kU)a &= -kC, \\ i(\sigma - kU')a &= kC'\end{aligned} \right\} \quad (7)$$

в то время как из (4) следует

$$e \{i(\sigma - kU)C - ga\} = e' \{i(\sigma - kU')C' - ga\}. \quad (8)$$

Отсюда следует

$$e(\sigma - kU)^2 + e'(\sigma - kU')^2 = gk(e - e'), \quad (9)$$

или

$$\frac{\sigma}{k} = \frac{eU + e'U'}{e + e'} \pm \left\{ \frac{g}{k} \frac{e - e'}{e + e'} - \frac{ee'}{(e + e')^2} (U - U')^2 \right\}^{1/2}. \quad (10)$$

Первый член в правой части этого уравнения можно назвать средней скоростью обоих течений. Относительно этой средней скорости волны обладают скоростями распространения  $\pm c$ , которые даны формулой

$$c^2 = C_0^2 - \frac{ee'}{(e + e')^2} (U - U')^2, \quad (11)$$

где  $c_0$  обозначает скорость волны при отсутствии течений (§ 231). Необходимо отметить, однако, что значения  $\sigma$ , данные формулой (9), будут мнимыми, когда

$$(U - U')^2 > \frac{g}{k} \frac{e^2 - e'^2}{ee'}. \quad (12)$$

Таким образом общая граница при достаточно малых длинах волны является неустойчивой. Это показывает, что, при отсутствии других влияний, даже при небольшом дуновении ветра на поверхности воды будет появляться рябь. В дальнейшем мы дадим более полное исследование этой проблемы, при котором будут приняты во внимание капиллярные силы, влияющие в сторону устойчивости. Если  $e = e'$  или если  $g = 0$ , то плоская форма поверхности (согласно нашему теперешнему рассуждению) будет неустойчивой для всех длин волны. Это иллюстрирует положение, высказанное в § 79, относительно неустойчивости поверхностей разрыва <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Эта неустойчивость была впервые замечена Гельмгольцем, см. примечание на стр. 38.

Случай  $\varrho = \varrho'$  при  $U = U'$  представляет интерес, потому что он объясняет, как развеваются паруса и флаги <sup>1)</sup>. Удобнее упростить задачу, положив  $U = U' = 0$ ; произвольная общая скорость в случае необходимости может быть наложена потом. При этих предположениях уравнение (8) сводится к уравнению  $\sigma^2 = 0$ . Благодаря двойному корню решение нужно дополнить, согласно обыкновенным методам решения дифференциальных уравнений, излагаемым в учебниках. Таким путем мы получаем два независимых решения

$$\eta = ae^{ikh}, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_1' = 0, \quad (13)$$

и

$$\eta = ate^{ikh}, \quad \varphi_1 = -\frac{a}{k} e^{ky} e^{ikh}, \quad \varphi_1' = \frac{a}{k} e^{-ky} e^{ikh}. \quad (14)$$

Первое решение представляет состояние равновесия, второе решение дает систему стационарных волн, амплитуда которых растет пропорционально времени. При таком виде проблемы сначала не имеется физической поверхности раздела, но если произвести искусственно небольшой разрыв движения, например, подействовать импульсом на тонкую мембрану, мыслимую затем опять как жидкую мембрану, то разрыв сохранится, и высота желобков, как мы видели, будет непрерывно возрастать.

Представляет интерес применение того же метода к случаю струи толщины  $2b$ , протекающей внутри покоящейся жидкости той же плотности <sup>2)</sup>. Выбирая начало в средней плоскости, мы принимаем для возмущенной струи  $\varphi = -Ux + \varphi_0$ , а для жидкости с обеих сторон  $\varphi = \varphi_1$  для  $y > b$  и  $\varphi = \varphi_2$  для  $y < -b$ . Обозначим смещения по нормальям к обеим поверхностям  $y = b$  и  $y = -b$  соответственно через  $\eta_1$  и  $\eta_2$ . В таком случае подойдут следующие предположения:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 e^{-ky} e^{i(\sigma t - kx)}, & \varphi_2 &= A_2 e^{ky} e^{i(\sigma t - kx)}, \\ \eta_1 &= C_1 e^{i(\sigma t - kx)}, & \eta_2 &= C_2 e^{i(\sigma t - kx)}, \\ \varphi_0 &= (A_0 \operatorname{ch} ky + B_0 \operatorname{sh} ky) e^{i(\sigma t - kx)}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Очевидно, имеются два типа возмущений: при одном из них  $\eta_1 = \eta_2$ , а при втором  $\eta_1 = -\eta_2$ . В первом случае мы будем иметь  $C_1 = C_2$ ,  $A_0 = 0$ ,  $A_2 = -A_1$ . Кинематические условия (2) на поверхности  $y = b$  тогда дают

$$i\sigma C_1 = kA_1 e^{-kh}, \quad i(\sigma - kU) C = -kB_0 \operatorname{ch} kh, \quad (16)$$

тогда как, если опустить влияние силы тяжести, непрерывность давления требует выполнения соотношения

$$(\sigma - kU) B_0 \operatorname{sh} kh = \sigma A_1 e^{-kh}. \quad (17)$$

Отсюда

$$(\sigma - kU)^2 \operatorname{tgh} kh + \sigma^2 = 0. \quad (18)$$

Если толщина  $2b$  будет мала в сравнении с длиной волны возмущения, то приближенно будем иметь

$$\sigma = \pm ikU \sqrt{kh}, \quad (19)$$

что указывает на сильно возрастающую неустойчивость, как это в действительности часто можно наблюдать на примере струйки дыма от папиросы.

<sup>1)</sup> Rayleigh, Proc. Lond. Math. Soc. (1), X, 4 (1879) [Papers, I, 361].

<sup>2)</sup> Rayleigh, см. примечание выше.



В симметричном случае ( $\eta_1 = -\eta_2$ ) вместо соотношения (18) будет иметь место соотношение

$$(\sigma - kU)^2 \operatorname{ctgh} kh + \sigma^2 = 0. \quad (20)$$

§ 233. Теорию прогрессивных волн можно также изложить в очень сжатой форме при помощи метода § 175 <sup>1)</sup>.

Обозначая через  $\varphi$ ,  $\psi$  функцию скоростей и функцию тока, после того как задача сведена к установившемуся движению, положим

$$\frac{\varphi + i\psi}{c} = -(x + iy) + i\alpha e^{ik(x+iy)} + i\beta e^{-ik(x+iy)};$$

откуда следует

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varphi}{c} &= -x - (\alpha e^{-ky} - \beta e^{ky}) \sin kx, \\ \frac{\psi}{c} &= -y + (\alpha e^{-ky} + \beta e^{ky}) \cos kx. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Эти формулы представляют равномерное течение со скоростью  $c$ , на которое наложено движение, периодическое относительно  $x$ . Мы предполагаем, что  $k\alpha$  и  $k\beta$  суть величины малые, другими словами, амплитуда возмущения мала сравнительно с длиной волны.

Профиль свободной поверхности должен быть линией тока. Пусть для нее будет  $\psi = 0$ . Ее вид определяется тогда формулой (1), и в первом приближении мы будем иметь, следовательно,

$$y = (\alpha + \beta) \cos kx. \quad (2)$$

Это уравнение показывает, что начало лежит на среднем уровне свободной поверхности. Далее, на дне ( $y = -h$ ) мы также должны иметь  $\psi = \text{const}$ ; это требует, чтобы

$$\alpha e^{kh} + \beta e^{-kh} = 0.$$

Уравнения (1) в таком случае представятся в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varphi}{c} &= -x + C \operatorname{ch} k(y+h) \sin kx, \\ \frac{\psi}{c} &= -y + C \operatorname{sh} k(y+h) \cos kx. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Формула же для давления будет

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= \text{const} - gy - \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right\} = \\ &= \text{const} - gy - \frac{c^2}{2} (1 - 2kC \operatorname{ch} k(y+h) \cos kx), \end{aligned}$$

если пренебречь  $k^2 C^2$ . Так как для линии тока  $\psi = 0$  приближенно имеем

$$y = C \operatorname{sh} kh \cos kx, \quad (4)$$

<sup>1)</sup> Rayleigh, см. примечание на стр. 328.

то вдоль этой линии будет

$$\frac{p}{\rho} = \text{const} + (kc^2 \operatorname{ctgh} kh - g) y.$$

Условие для свободной поверхности таким образом будет выполнено, если

$$c^2 = gh \frac{\operatorname{tgh} kh}{kh}. \quad (5)$$

Это соотношение определяет длину волны  $\left(\frac{2\pi}{k}\right)$  возможных стационарных волн в потоке данной постоянной глубины  $h$  и данной скорости  $c$ . Легко видеть, что значение  $kh$  будет действительно или мнимо, смотря по тому, будет ли  $c$  меньше или больше чем  $(gh)^{1/2}$ .

Если мы сообщим всему потоку скорость  $c$  параллельно оси  $x$ , то получим прогрессивные волны на спокойной воде; уравнение (5) дает тогда формулу для скорости волны, как в § 229.

Если отношение глубины к длине волны достаточно велико, то формулы (1) при небольшой погрешности принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varphi}{c} &= -x + \beta e^{ky} \sin kx, \\ \frac{\psi}{c} &= -y + \beta e^{ky} \cos kx \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

и дают

$$\frac{p}{\rho} = \text{const.} - gy - \frac{c^2}{2} \{1 - 2k\beta e^{ky} \cos kx + k^2 \beta^2 e^{2ky}\}. \quad (7)$$

Пренебрегая  $k^2 \beta^2$ , последнее уравнение можно написать в виде

$$\frac{p}{\rho} = \text{const.} + (kc^2 - g) y + kc\psi. \quad (8)$$

Отсюда, если

$$c^2 = \frac{g}{k}, \quad (9)$$

давление будет постоянным не только на верхней поверхности, но также и вдоль каждой линии тока  $\psi = \text{const}$ <sup>1)</sup>. Это представляет довольно важную теорему; в самом деле она показывает, что решение, данное с помощью выражений (6) и (8), можно также применить к произвольному числу жидкостей различных плотностей, расположенных в горизонтальных слоях друг над другом, при условии, что верхняя ограничивающая поверхность есть свободная поверхность, а общая глубина бесконечна. Так как толщина слоев ничем не ограничивается, то решение пригодно и для неоднородной, несжимаемой жидкости, плотность которой непрерывно меняется с глубиной; ср. § 235.

<sup>1)</sup> Необходимо заметить, что это заключение, впервые высказанное Пуассоном (ср. цитату стр. 481), ограничивается случаем бесконечной глубины.

Чтобы найти скорость распространения волн на горизонтальной поверхности раздела двух в остальном неограниченных жидкостей, мы полагаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\psi}{c} &= -y + \beta e^{ky} \cos kx, \\ \frac{\psi'}{c} &= -y + \beta e^{-ky} \cos kx, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где штрихи относятся к верхней жидкости. При этих допущениях условие для безвихревого движения удовлетворяется:  $\Delta\psi = 0$ , и они дают постоянную скорость  $c$  на большом расстоянии ниже и выше поверхности раздела, на которой  $\psi - \psi' = 0$ , и, следовательно, приближенно  $y = \beta \cos kx$ .

Уравнения давления будут

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= \text{const.} - gy - \frac{c^2}{2} (1 - 2k\beta e^{ky} \cos kx), \\ \frac{p'}{\rho'} &= \text{const.} - gy - \frac{c^2}{2} (1 + 2k\beta e^{-ky} \cos kx), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

и на поверхности раздела с обычным приближением мы получим из них

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= \text{const.} - (g - kc^2) y, \\ \frac{p'}{\rho'} &= \text{const.} - (g + kc^2) y. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Так как на этой поверхности  $p = p'$ , то получаем, как в § 231,

$$c^2 = \frac{g}{k} \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'}. \quad (13)$$

**§ 234.** В качестве следующего примера применения данного метода рассмотрим два течения, расположенные друг над другом, которые мы уже изучали прямым методом в § 232.

Предположим, что жидкости в вертикальном направлении не ограничены, и допустим

$$\left. \begin{aligned} \psi &= -U \{y - \beta e^{ky} \cos kx\}, \\ \psi' &= -U' \{y - \beta e^{-ky} \cos kx\} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

соответственно для нижней и верхней жидкости. Начало берем на среднем уровне поверхности раздела, причем последнюю мы считаем стационарной и определяемой уравнением

$$y = \beta \cos kx. \quad (2)$$

Уравнения давления дают

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= \text{const.} - gy - \frac{1}{2} U^2 (1 - 2k\beta e^{ky} \cos kx), \\ \frac{p'}{\rho'} &= \text{const.} - gy - \frac{1}{2} U'^2 (1 + 2k\beta e^{-ky} \cos kx); \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

отсюда следует для поверхности раздела

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{e} &= \text{const.} + (kU^2 - g)y, \\ \frac{p'}{e'} &= \text{const.} - (kU'^2 + g)y. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Так как на этой поверхности должно быть  $p = p'$ , то будем иметь

$$eU^2 + e'U'^2 = \frac{g}{k}(e - e'). \quad (5)$$

Это есть условие для стационарных волн на поверхности раздела обоих течений  $U$  и  $U'$ . Оно может быть написано в виде

$$\left( \frac{eU + e'U'}{e + e'} \right)^2 = \frac{g}{k} \frac{e - e'}{e + e'} - \frac{ee'}{(e + e')^2} (U - U')^2, \quad (6)$$

эквивалентность которого с (10) § 232 легко заметить.

Если оба течения будут ограничены неподвижными горизонтальными плоскостями

$$y = -h, \quad y = h',$$

то мы принимаем

$$\left. \begin{aligned} \psi &= -U \left\{ y - \beta \frac{\text{sh } k(y+h)}{\text{sh } kh} \cos kx, \right. \\ \psi' &= -U' \left\{ y + \beta \frac{\text{sh } k(y-h')}{\text{sh } kh'} \cos kx \right. \end{aligned} \right\}. \quad (7)$$

В качестве условия для стационарных волн на поверхности раздела тогда получается

$$eU^2 \text{ctgh } kh + e'U'^2 \text{ctgh } kh' = \frac{g}{k}(e - e'). \quad (8)^1$$

**§ 235.** Рассмотрим кратко теорию волн в *неоднородной* жидкости ради сравнения ее с случаем *однородной* жидкости.

В состоянии равновесия значение плотности  $e_0$  должно зависеть только от вертикальной координаты  $y$ .

Поэтому мы полагаем

$$p = p_0 + p', \quad e = e_0 + e', \quad (1)$$

где  $p_0$  обозначает статическое давление; уравнения движения

$$\left. \begin{aligned} e \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ e \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial y} - ge, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} + v \frac{\partial e}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

<sup>1)</sup> Greenhill, см. выше, стр. 467.

принимают тогда вид

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial p'}{\partial x}, \\ \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial p'}{\partial y} = g\varrho', \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} + v \frac{\partial \varrho_0}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

если опустить малые величины второго порядка. Так как жидкость несжимаема, то уравнение неразрывности сохраняет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (6)$$

и мы можем написать

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (7)$$

Исключая  $p'$  и  $\varrho'$ , можно найти <sup>1)</sup>

$$\Delta \ddot{\varphi} + \frac{1}{\varrho_0} \frac{d\varrho_0}{dy} \left\{ \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial y} - g \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right\} = 0. \quad (8)$$

На свободной поверхности должно иметь место

$$\frac{Dp}{Dt} = 0.$$

или

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = -v \frac{\partial \rho_0}{\partial y} = g\varrho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (9)$$

Отсюда и из (4) следует, что на этой поверхности должно быть

$$\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial y} = g \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (10)$$

Чтобы рассмотреть волновое движение, положим

$$\varphi \text{ пропорционально } e^{i(\sigma t - kx)}. \quad (11)$$

Уравнение (8) принимает тогда вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - k^2 \varphi + \frac{1}{\varrho_0} \frac{d\varrho_0}{dy} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{gk^2}{\sigma^2} \varphi \right) = 0, \quad (12)$$

а условие на поверхности будет

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{gk^2}{\sigma^2} \varphi = 0. \quad (13)$$

Эти уравнения при всяком вертикальном распределении плотности будут удовлетворены допущением, что  $\varphi$  пропорционально  $e^{ky}$  и при этом

$$\sigma^2 = gk. \quad (14)$$

Тогда для жидкости с бесконечной глубиной соотношение между длиной волны и периодом будет тем же самым, как и в однородной жидкости (ср. § 229), и само движение будет безвихревым.

<sup>1)</sup> Ср. Love, Wave Motion in a Heterogeneous Heavy Liquid, Proc. Lond. Math. Soc., XXII, 307 (1891).

Для дальнейших исследований необходимо сделать некоторые предположения относительно зависимости между  $\rho_0$  и  $y$ . Простейшее состоит в том, что

$$\rho_0 \text{ пропорционально } e^{-\beta y}. \quad (15)$$

В этом случае уравнение (12) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - k^2 \psi - \beta \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial k^2}{\sigma^2} \psi \right) = 0. \quad (16)$$

Решение его будет

$$\psi = (Ae^{\lambda_1 y} + Be^{\lambda_2 y}) e^{i(\sigma t - kx)}, \quad (17)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  обозначают корни уравнения

$$\lambda^2 - \beta \lambda + \left( \frac{g\beta}{\sigma^2} - 1 \right) k^2 = 0. \quad (18)$$

Мы вначале применим это к колебаниям жидкости, наполняющей замкнутый прямоугольный сосуд <sup>1)</sup>. Величина  $k$  может быть произвольным кратным от  $\frac{\pi}{l}$ , где  $l$  обозначает длину. Если написать уравнения для горизонтальных границ

$$y = 0, \quad y = h,$$

то условие  $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$  дает

$$A + B = 0, \quad Ae^{\lambda_1 h} + Be^{\lambda_2 h} = 0, \quad (19)$$

откуда

$$e^{(\lambda_1 - \lambda_2)h} = 1 \text{ или } \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{2is\pi}{h} \quad (20)$$

где  $s$  есть целое число. Отсюда и из (18) следует

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \beta + \frac{is\pi}{h}, \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \beta - \frac{is\pi}{h} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

и, следовательно,

$$\left( \frac{g\beta}{\sigma^2} - 1 \right) k^2 = \lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{4} \beta^2 + \frac{s^2 \pi^2}{h^2}. \quad (22)$$

Отсюда мы замечаем, что  $\sigma$  будет действительным или мнимым, т. е. конфигурация равновесия будет устойчивой или неустойчивой, смотря по тому, будет ли  $\beta$  положительно или отрицательно, или, что то же самое, смотря по тому, уменьшается или увеличивается плотность снизу вверх <sup>2)</sup>.

Случай, когда жидкость (глубины  $h$ ) имеет свободную поверхность, может служить в качестве иллюстрации теории тепловых сейшей в озерах <sup>3)</sup>. Предполагая корни уравнения (18) комплексными, скажем

$$\lambda = \frac{1}{2} \beta \pm im. \quad (23)$$

<sup>1)</sup> Rayleigh, Investigation of the Character of the Equilibrium of an Incompressible Heavy Liquid of Variable Density, Proc. Lond. Math. Soc. (1). XIV, 170 [Papers, II, 200]. Необходимо также указать на работу автора On Atmospheric Oscillation, Proc. Roy. Soc. LXXXIV, 566, (571) (1910), где был исследован другой закон плотности.

<sup>2)</sup> Волны в жидкости конечной глубины были рассмотрены Лявом, см. примечание выше; см. также Burnside, On the Small Wave-Motions of a Heterogeneous Fluid under Gravity, Proc. Lond. Math. Soc. (1). XX, 392 (1889).

<sup>3)</sup> Исследовались Wedderburn, Trans. R. S. Edin, XLVII, 619 (1910) и XLVIII (1912).

где

$$m^2 = \left( \frac{g\beta}{\sigma^2} - 1 \right) k^2 - \frac{\beta^2}{4}; \quad (24)$$

мы будем иметь

$$\varphi = C e^{1/4 \beta y} \sin my, \quad (25)$$

причем начало взято на дне. Условие (13) на поверхности даст

$$\frac{1}{2} \beta \sin mh + m \cos mh = \frac{gk^2}{\sigma^2} \sin mh. \quad (26)$$

Пользуясь равенством (24), последнее можно представить в виде

$$\operatorname{tg} mh = \beta h \frac{mh}{m^2 h^2 + k^2 h^2 - \frac{1}{4} \beta^2 h^2}, \quad (27)$$

откуда можно определить значения  $mh$ . Они могут быть получены графически из пересечений кривых

$$y = \operatorname{tg} x, \quad y = \frac{\mu x}{x^2 a^2}, \quad (28)$$

где  $\mu = \beta h$ ,  $a^2 = k^2 h^2 - \frac{1}{4} \beta^2 h^2$ . Интерес представляет только тот случай, когда  $\beta h$  будет мало. В этом случае приближенно мы имеем  $mh = s\pi$  и, следовательно,

$$\sigma^2 = g\beta \frac{k^2 h^2}{s^2 \pi^2 + k^2 h^2}. \quad (29)$$

Последнее соотношение будет совпадать с (22), если пренебречь квадратом от  $\beta h$ . На самом деле, из (25) вытекает, что вертикальное движение на свободной поверхности будет очень слабым. Наибольшее вертикальное возмущение будет на уровне  $y = (s - 1/4)\pi$ .

В случае, когда корни (18) будут действительными, можно будет установить только небольшую поправку к формуле  $\sigma^2 = gk \operatorname{tgh} kh$ , которая имеет место для однородной жидкости.

**§ 236.** Исследования § 227—234 касаются частного типа волн, когда профиль просто гармонический и волны простираются в бесконечность по обоим направлениям. Но так как все наши уравнения (до тех пор, пока мы ограничиваемся первым приближением) являются линейными, то мы можем, согласно теореме Фурье, наложением получить решение, обусловленное произвольными начальными условиями. Так как результирующее движение, вообще говоря, будет составлено из систем волн всех возможных длин, распространяющихся в том и в другом направлении, причем всякая отдельная волна распространяется со скоростью, свойственной ее длине, то форма свободной поверхности будет постоянно меняться. Единственное исключение представляет случай, когда длина волны каждой системы заметной амплитуды велика сравнительно с глубиной жидкости. Скорость распространения, именно  $\sqrt{gh}$ , не зависит тогда от длины волны, так что в случае волн, которые распространяются только в одном направлении, профиль волны во время своего движения вперед остается неизменным (§ 170).

Мы исследуем сейчас влияние местного возмущения поверхности для случая бесконечной глубины; однако сначала следует ввести очень важное понятие „групповой скорости“, которое имеет применение не только для волн жидкости, но также и для всякого волнового движения, при котором скорость распространения простой гармонической цепи меняется с длиной волны.

Часто замечали, что в случае, когда изолированная группа волн с приблизительно одинаковой длиной распространяется на сравнительно глубокой воде, скорость группы как целого меньше, чем скорость отдельных волн, ее составляющих. Если наблюдать отдельную волну, то можно заметить, что она перемещается внутри группы, постепенно уменьшая свою высоту по мере приближения ее к передней стороне группы, тогда как ее прежние места в группе занимают теперь последовательно другие волны, которые идут от задней стороны <sup>1)</sup> вперед.

Простейшее аналитическое представление подобной группы можно получить наложением двух систем волн с одинаковой амплитудой и с приблизительно, но не вполне, равной длиной волны. Соответствующее уравнение свободной поверхности будет иметь вид

$$\eta = a \sin(kx - \sigma t) + a \sin(k'x - \sigma' t) = 2a \cos \left\{ \frac{1}{2}(k - k')x - \frac{1}{2}(\sigma - \sigma')t \right\} \sin \left\{ \frac{1}{2}(k + k')x - \frac{1}{2}(\sigma + \sigma')t \right\}. \quad (1)$$

Если  $k$  и  $k'$  приблизительно равны, то в этом выражении косинус меняется очень медленно вместе с  $x$ , так что профили отдельных волн в каждый момент времени приближенно имеют вид синусоидальных кривых, амплитуды которых колеблются между значениями 0 и  $2a$ . Поверхность представляет, таким образом, ряд групп волн, которые отделены равными полосами почти спокойной воды. Движение каждой группы тогда не испытывает заметного влияния от присутствия другой. Так как расстояние между серединами двух последовательных групп равно  $\frac{2\pi}{k - k'}$  и так как время, которое необходимо системе, чтобы продвинуться на это расстояние, равно  $\frac{2\pi}{\sigma - \sigma'}$ , то групповая скорость  $U$  имеет значение  $\frac{\sigma - \sigma'}{k - k'}$  или, окончательно,

$$U = \frac{d\sigma}{dk}. \quad (2)$$

Выражая это через длину волны  $\lambda \left( = \frac{2\pi}{k} \right)$ , мы будем иметь

$$U = \frac{d(kc)}{dk} = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}, \quad (3)$$

где  $c$  обозначает скорость волны.

<sup>1)</sup> Scott Russel, Report on Waves, Brit. Ass. Rep. 1844, стр. 369. Существует интересное письмо об этом предмете, принадлежащее Фруду; это письмо перепечатано у Stokes, Scientific Correspondence, Cambridge, 1907, II, 156.



Этот результат имеет место для любых волн, которые распространяются в однородной среде. В рассматриваемом случае имеем

$$c = \left( \frac{g}{k} \operatorname{tgh} kh \right)^{1/3}, \quad (4)$$

и, следовательно, для групповой скорости получим

$$\frac{d(kc)}{dk} = \frac{1}{2} c \left( 1 + \frac{2kh}{\operatorname{sh} 2kh} \right). \quad (5)$$

Отношение групповой скорости к скорости волны  $c$  возрастает, когда  $kh$  уменьшается; оно равно  $1/2$ , когда глубина велика, и равно 1, когда глубина очень мала по сравнению с длиной волны.

Повидимому, это изложение впервые было дано Стоксом <sup>1)</sup>. Распространение на более общий род групп было проведено Рэлеем <sup>2)</sup> и Гуйем <sup>3)</sup>.

Существует еще другой вывод формулы (3), может быть, более наглядный. В некоторой среде, такой же, как мы рассматривали, где скорость волны меняется с частотой, ограниченное начальное возмущение вызывает, вообще говоря, некоторую систему волн, в которой волны различной длины, распространяющиеся с различными скоростями, постепенно отделяются друг от друга (§ 238—239). Если мы будем рассматривать длину волны  $\lambda$  как функцию от  $x$  и  $t$ , то имеет место

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} + U \frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

так как  $\lambda$  вблизи некоторой геометрической точки, движущейся со скоростью  $U$ , не меняется; а это и есть в действительности определение  $U$ . Если мы, далее, вообразим другую геометрическую точку, которая движется вместе с волнами, то будем иметь

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} + c \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \lambda \frac{\partial c}{\partial x} = \lambda \frac{dc}{d\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x}; \quad (7)$$

второй член и представляет как раз величину скорости, с которой два следующие друг за другом гребня волны удаляются друг от друга. Если мы соединим уравнения (6) и (7), то снова получим формулу (3) <sup>4)</sup>.

<sup>1)</sup> Stokes, Smith's Prize Examination, 1876 [Papers, V, 362]; см. также Rayleigh, Theory of Sound, § 191.

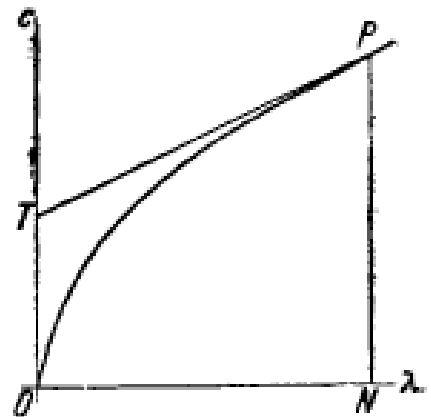
<sup>2)</sup> Rayleigh, Nature, XXV, 52 (1881) [Papers, I, 540].

<sup>3)</sup> Gouy, Sur la vitesse de la lumière, Ann. de Chim. et de Phys., XVI, 262 (1889). Недавно было найдено, что до известного предела теория была уже предвидена Гамильтоном, который в 1839 г. подошел к ней с точки зрения оптики; см. Havelock, Cambridge Tracts, № 17 (1914), стр. 6.

<sup>4)</sup> См. Lamb, On Group-Velocity, Proc. Lond. Math. Soc. (2), I, 473 (1904). Вопрос был исследован дальше Грином — G. Green, On Group-Velocity, and on the Propagation of Waves in a Dispersive Medium, Proc. R. S. Edin., XXIX, 445 (1909).

Формуле (3) можно дать простое геометрическое толкование <sup>1)</sup>. Если начертить кривую с абсциссой  $\lambda$  и ординатой  $c$ , то отрезок, отсекаемый касательной на оси  $c$ , и будет изображать групповую скорость. На фиг. 52  $PN$  представляет таким образом скорость волны для длины волны  $ON$ , а  $OT$  — групповую скорость. Заметим еще, что частота колебания представляется тангенсом угла  $PON$ .

Для тяжелых волн на глубокой воде  $c$  пропорционально  $\lambda^{3/2}$ ; кривая имеет формулу параболы  $y^2 = 4ax$  и  $OT = 1/2 PN$ ; это значит, что групповая скорость равна половине скорости волны.



Фиг. 52.

§ 237. Групповая скорость имеет помимо геометрического еще и динамический смысл. Это было впервые показано Осборном Рейнольдсом <sup>2)</sup> для волн на глубокой воде при помощи подсчета энергии, которая переносится через вертикальную плоскость. При бесконечной глубине потенциал скоростей, соответствующий просто гармоническим волнам

$$\eta = a \sin k(x - ct), \quad (8)$$

будет

$$\varphi = ace^{ky} \cos k(x - ct), \quad (9)$$

в чем легко убедиться, если принять во внимание, что должно быть  $\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$  для  $y = 0$ . Если пренебречь членами второго порядка, то переменная часть давления равна  $\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ . Таким образом работа, совершаемая в единицу времени над жидкостью, находящейся направо от плоскости  $x$ , равна

$$\begin{aligned} - \int_{-\infty}^0 \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy &= \rho a^2 k^2 c^3 \sin^2 k(x - ct) \int_{-\infty}^0 e^{2ky} dy = \\ &= \frac{1}{2} g \rho a^2 c \sin^2 k(x - ct), \end{aligned} \quad (10)$$

так как  $c^2 = \frac{g}{k}$ . Среднее значение этой работы равно  $1/4 g \rho a^2 c$ . Принимая во внимание сказанное в § 230, видим, что это есть в точности половина энергии тех волн, которые проходят рассматриваемую плоскость в единицу времени. В случае изолированной группы, следо-

<sup>1)</sup> Lamb. *Manch. Mem.*, XLIV, № 6 (1900).

<sup>2)</sup> Osborne Reynolds, *On the Rate of Progression of Groups of Waves, and the Rate at which Energy is Transmitted by Waves*, *Nature*, XVI, 343 (1877) [Papers, I, 198].

Рейнольдс построил также модель, которая очень отчетливо показывает разницу между скоростью волны и групповой скоростью для поперечных колебаний ряда одинаковых маятников, шары которых связаны одной нитью.

вательно, приток энергии только тогда будет достаточен, когда группа передвигается вперед с половинной скоростью отдельных волн.

Подобным же образом легко показать, что для случая конечной глубины  $h$  средняя энергия, переносимая в единицу времени, будет равна <sup>1)</sup>

$$\frac{1}{4} g \rho a^2 c \left( 1 + \frac{2kh}{\sin h 2kh} \right), \quad (11)$$

а это согласно (5) тождественно с

$$\frac{1}{2} g \rho a^2 \frac{d(kc)}{dk}. \quad (12)$$

Поэтому скорость переноса энергии пропорциональна групповой скорости  $\frac{d(kc)}{dk}$ , выражение для которой мы нашли другим независимым путем.

Это отождествление кинематической групповой скорости, о которой шла речь в предыдущем параграфе, со скоростью переноса энергии легко распространить на любой вид волн. Оно следует, в самом деле, из теории интерференционных групп (стр. 477), которая носит общий характер. Пусть  $P$  есть середина одной из этих групп,  $Q$  — середина той покоящейся области, которая лежит в направлении распространения  $P$ ; в течение промежутка времени  $\tau$ , превышающего несколько периодов, но не превосходящего времени прохождения группы, середина группы продвинется в точку  $P'$ , так что

$$PP' = U\tau,$$

и область между  $P$  и  $Q$  получит соответствующее количество энергии. Другой способ доказательства, который не использует понятия интерференции, был дан Рэлеем (см. выше).

С физической точки зрения групповая скорость, пожалуй, важнее, чем скорость волны. Последняя может быть больше или меньше, чем первая, и даже возможно представить такую среду, в которой обе имеют различное направление; это будет тогда означать, что какое-то возмущение могло бы распространяться из некоторой средней точки во внешнее пространство в виде группы, в то время как отдельные волны, из которых состоит группа, сами будут двигаться в обратном направлении, зарождаясь на передней стороне и затухая при приближении к задней стороне <sup>2)</sup>. Необходимо, кроме того, указать на то, что даже при наиболее простых явлениях акустики и оптики скорость волны, главным образом, постольку имеет значение, поскольку она совпадает с групповой скоростью. В случае необходимости более строгого различения мы можем заимствовать из новейшей физики термин „фазовая скорость“ для обозначения того, что мы в большей своей части в настоящем руководстве именуем скоростью волны.

<sup>1)</sup> Rayleigh, On Progressive Waves, Proc. Lond. Math. Soc. (1), IX, 21 (1877) [Papers, I, 322]; Theory of Sound, I. Прибавление.

<sup>2)</sup> Lamb, Proc. Lond. Math. Soc. (2), I, 473.

§ 238. Теория волн на глубокой воде, появившихся от местного возмущения свободной поверхности, была разработана Коши<sup>1)</sup> и Пуассоном<sup>2)</sup> в двух классических работах. Долгое время эту проблему считали трудной и даже неясной, но по меньшей мере в ее двухмерном виде эту теорию можно изложить сравнительно просто.

Из §§ 40, 41 следует, что начальное состояние жидкости будет вполне определено, если известна форма границы и граничные значения нормальной компоненты  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  скорости или граничные значения потенциала скоростей  $\varphi$ . Задачу можно поставить таким образом двойко: можно исходить из начального возвышения свободной поверхности без начальной скорости или же можно исходить из невозмущенной (и, следовательно, горизонтальной) поверхности и некоторого начального распределения импульсивных давлений на поверхности ( $p\varphi_0$ ).

Если начало лежит на невозмущенной поверхности, а ось  $y$  направлена вертикально вверх, то типичное решение для случая начального возвышения будет

$$\eta = \cos \sigma t \cos kx, \quad (1)$$

$$\varphi = g \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{ky} \cos kx, \quad (2)$$

где

$$\sigma^2 = gk, \quad (3)$$

в согласии с обыкновенной теорией „стоячих“ волн просто гармонического профиля (§ 228).

Если это обобщить с помощью интеграла Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(a) \cos k(x-a) da, \quad (4)$$

то согласно начальным условиям

$$\eta = f(x); \quad \varphi_0 = 0, \quad (5)$$

где индекс нуль соответствует значению на поверхности  $y=0$ , мы будем иметь

$$\eta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \sigma t dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(a) \cos k(x-a) da, \quad (6)$$

$$\varphi = \frac{g}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{ky} dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(a) \cos k(x-a) da. \quad (7)$$

<sup>1)</sup> Cauchy, см. примечание на стр. 33.

<sup>2)</sup> Poisson, Mémoire sur la théorie des ondes, Mém. de L'Acad. roy. des Sciences, 1 (1816).

Пусть начальное возвышение ограничено непосредственной близостью с началом, так что  $f(\alpha)$  обращается в нуль для всех небесконечно малых значений  $\alpha$ . Полагая

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) d\alpha = 1, \quad (8)$$

будем иметь

$$\varphi = \frac{g}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{ky} \cos kx dk. \quad (9)$$

Используя (3), можно выражение для  $\varphi$  разложить в ряд

$$\varphi = \frac{gt}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ 1 - \frac{gt^2}{3!} k + \frac{(gt^2)^2}{5!} k^2 - \dots \right\} e^{ky} \cos kx dk. \quad (10)$$

Положив

$$-y = r \cos \theta, \quad x = r \sin \theta, \quad (11)$$

будем иметь для отрицательного  $y$ <sup>1)</sup>

$$\int_0^{\infty} e^{ky} \cos kx k^n dk = \frac{n!}{r^{n+1}} \cos(n+1)\theta, \quad (12)$$

так что (10) примет вид

$$\varphi = \frac{gt}{\pi} \left\{ \frac{\cos \theta}{r} - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} gt^2 \right) \frac{\cos 2\theta}{r^2} + \frac{1}{3 \cdot 5} \left( \frac{1}{2} gt^2 \right)^2 \frac{\cos 3\theta}{r^3} - \dots \right\}, \quad (13)$$

что можно легко проверить. Отсюда, согласно (5) § 227 получим значение  $\eta$ , если положить  $\theta = \pm \frac{1}{2}\pi$ . Следовательно, для  $x > 0$

$$\eta = \frac{1}{\pi x} \left\{ \frac{gt^2}{2x} - \frac{1}{3 \cdot 5} \left( \frac{gt^2}{2x} \right)^3 + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \left( \frac{gt^2}{2x} \right)^5 - \dots \right\}. \quad (14)^2$$

Непосредственно видно, что каждая отдельная фаза возмущения поверхности, например, нулевое значение, максимум или минимум  $\eta$ , связана с определенным значением выражения  $\frac{1}{2} \frac{gt^2}{x}$ , и, следовательно, рассматриваемая фаза передвигается на поверхности с постоянным ускорением. Значение этого несколько удивительного результата сейчас обнаружится (§ 240).

<sup>1)</sup> Эту формулу можно опустить. Достаточно вычислить значение  $\varphi$  для точек вертикальной оси симметрии; значение для других точек можно тогда сразу написать с помощью известного свойства гармонических функций (ср. Thompson a. Tait, § 493).

<sup>2)</sup> Рассматривая размерности, можно предвидеть, что влияние сконцентрированного начального возвышения, площадь поперечного сечения которого равна  $Q$  представляется формулой

$$\eta = \frac{Q}{x} f\left(\frac{gt^2}{x}\right).$$

Ряд в формуле (14) по сути своей тождествен с рядом, встречающимся в теории интегралов Френеля, применяемых в теории дифракции; он обыкновенно обозначается через  $M^1$ ). В рассматриваемом виде он употребляется только тогда, когда мы ограничиваемся начальными стадиями возмущения. Когда  $\frac{1}{2} \frac{gt^2}{x}$  перестает быть малым, этот ряд сходится очень медленно. Другой вид решения можно получить следующим образом.

Значение  $\varphi$  на поверхности, согласно (9), будет

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{g}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \sigma t}{\sigma} \cos kx \, dk = \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \sin \left( \frac{\sigma^2 x}{g} + \sigma t \right) d\sigma - \int_0^{\infty} \sin \left( \frac{\sigma^2 x}{g} - \sigma t \right) d\sigma \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Если положить

$$\zeta = \frac{x^{1/2}}{g^{1/2}} \left( \sigma \pm \frac{gt}{2x} \right), \quad (16)$$

то получим

$$\int_0^{\infty} \sin \left( \frac{\sigma^2 x}{g} + \sigma t \right) d\sigma = \frac{g^{1/2}}{x^{1/2}} \int_{\omega}^{\infty} \sin (\zeta^2 - \omega^2) d\zeta, \quad (17)$$

$$\int_0^{\infty} \sin \left( \frac{\sigma^2 x}{g} - \sigma t \right) d\sigma = \frac{g^{1/2}}{x^{1/2}} \int_{-\omega}^{\infty} \sin (\zeta^2 - \omega^2) d\zeta, \quad (18)$$

где

$$\omega = \left( \frac{gt^2}{4x} \right)^{1/2}. \quad (19)$$

Следовательно, можно написать

$$\varphi_0 = -\frac{2g^{1/2}}{\pi x^{1/2}} \int_0^{\infty} \sin (\zeta^2 - \omega^2) d\zeta, \quad (20)$$

а отсюда согласно (5) § 227 можно получить  $\eta$ , именно

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{g^{1/2} t}{\pi x^{3/2}} \int_0^{\infty} \cos (\zeta^2 - \omega^2) d\zeta = \\ &= \frac{g^{1/2} t}{\pi x^{3/2}} \left\{ \cos \omega^2 \int_0^{\infty} \cos \zeta^2 d\zeta + \sin \omega^2 \int_0^{\infty} \sin \zeta^2 d\zeta \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Это совпадает с результатом, полученным Пуассоном. Определенные

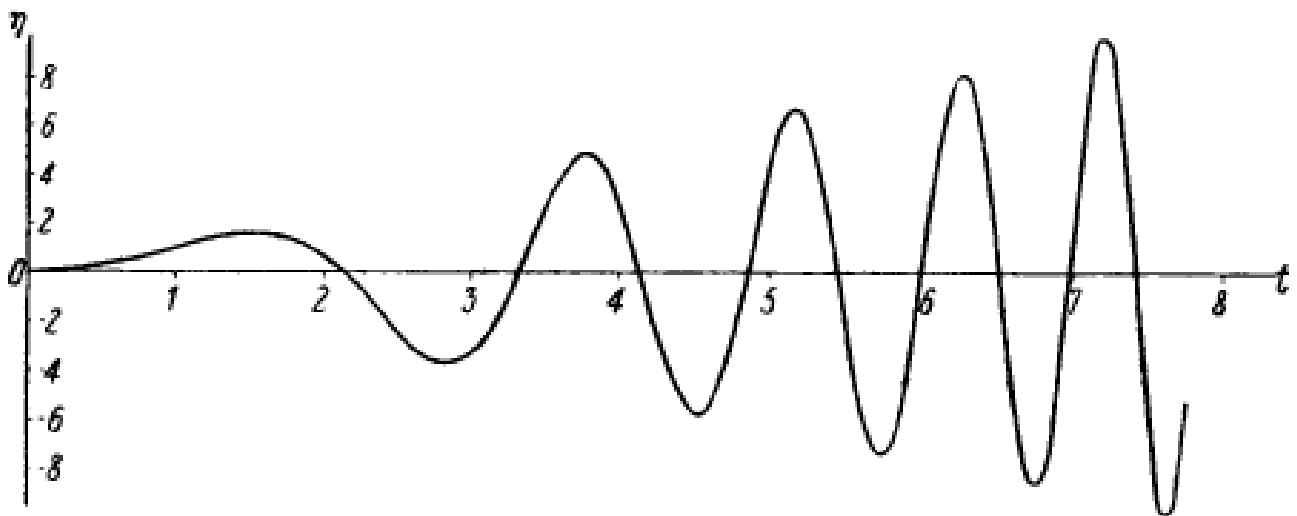
<sup>1)</sup> Ср. Rayleigh [Papers, III, 129].

интегралы практически являются интегралами вида Френеля<sup>1)</sup>, и, следовательно, могут рассматриваться как известные функции.

Ломмель в своих исследованиях о явлениях дифракции<sup>2)</sup> дает таблицу функции, встречающейся в (14):

$$1 - \frac{z^2}{3 \cdot 5} + \frac{z^4}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} - \dots, \quad (22)$$

для всех значений  $z$  между 0 и 60. Следовательно, мы в состоянии представить с большой легкостью первые девять или десять волн. Фиг. 53 показывает зависимость  $\eta$  от времени для определенного



Фиг. 53. За единицу горизонтального масштаба принято  $\sqrt{\frac{2x}{g}}$ , а вертикального  $\frac{Q}{\pi x}$ , где  $Q$  обозначает площадь поперечного сечения первоначально поднятой жидкости.

места. Для различных мест интервалы времени между двумя определенными фазами пропорциональны  $\sqrt{x}$ , в то время как соответствующие возвышения обратно пропорциональны  $x$ . Напротив, фиг. 54 показывает профиль волны в определенный момент времени; для различных моментов времени горизонтальные расстояния между соот-

<sup>1)</sup> В употребительном обозначении мы имеем

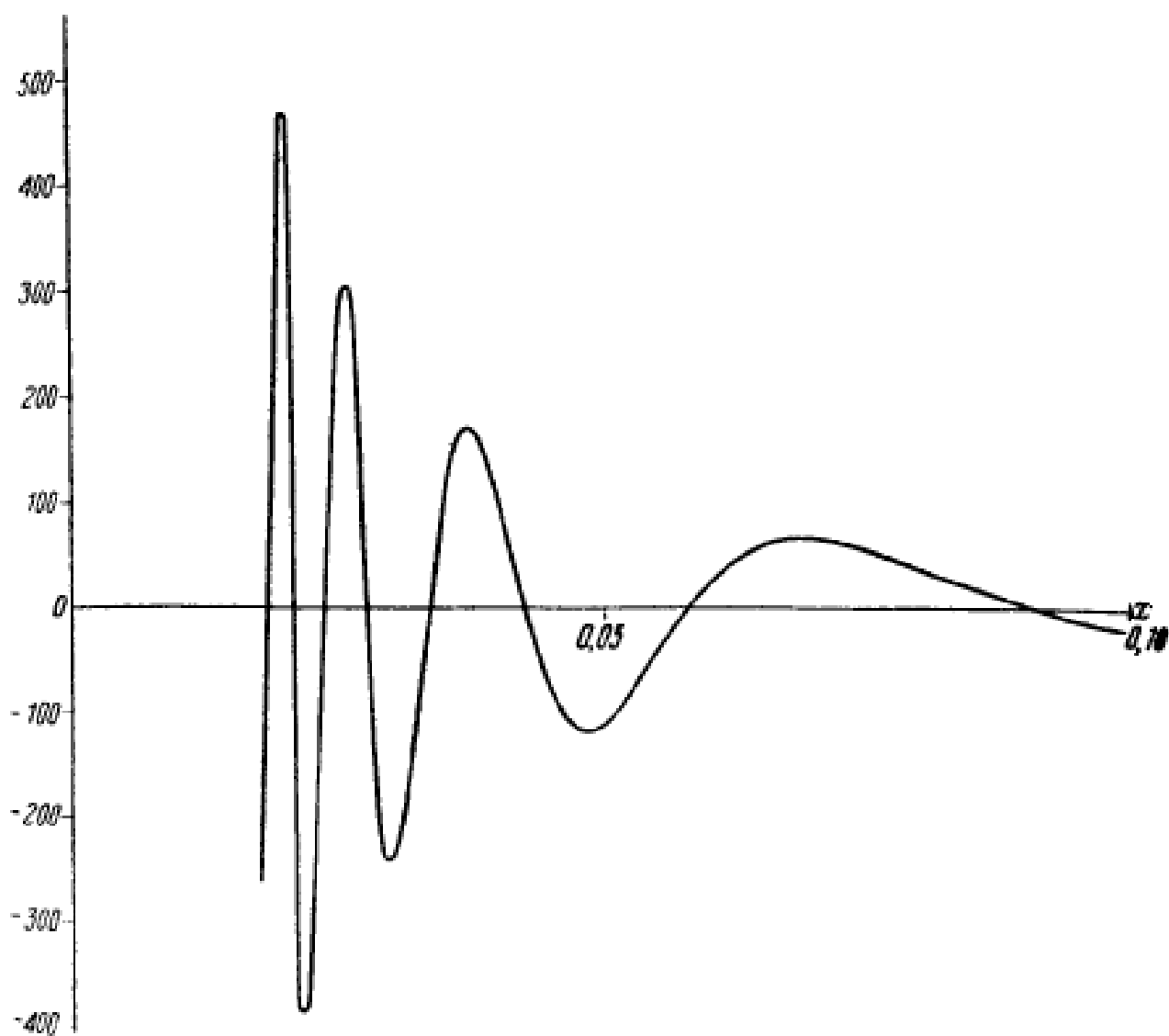
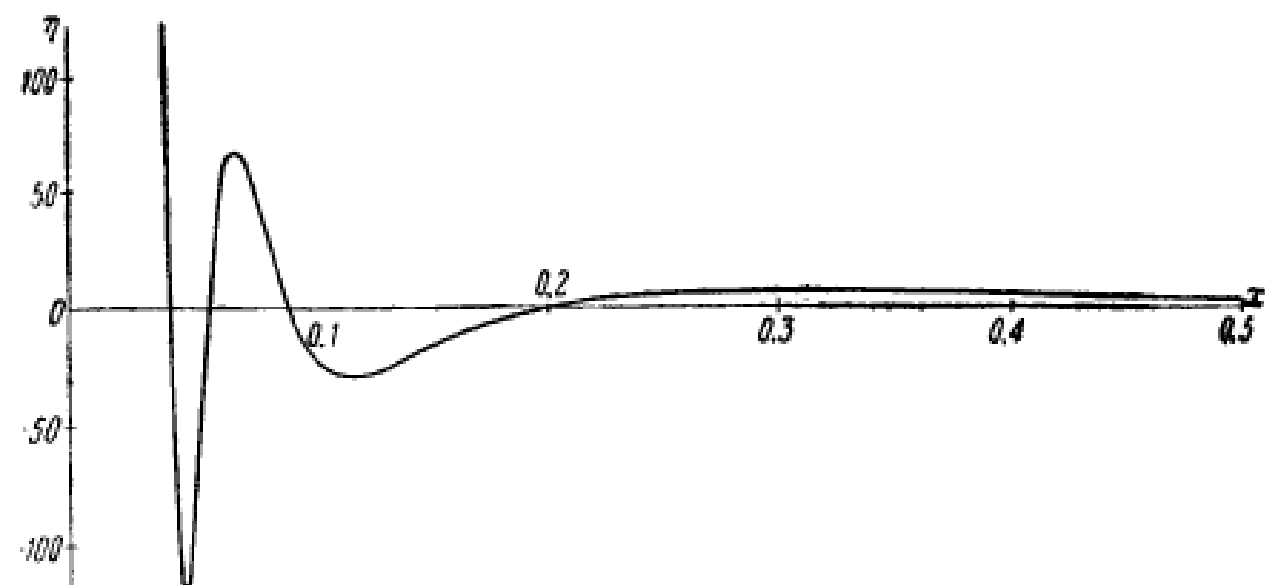
$$\int_0^{\infty} \cos \zeta^2 d\zeta = \sqrt{\frac{1}{2} \pi} C(u), \quad \int_0^{\infty} \sin \zeta^2 d\zeta = \sqrt{\frac{1}{2} \pi} S(u),$$

где

$$C(u) = \int_0^u \cos \frac{1}{2} \pi u^2 du, \quad S(u) = \int_0^u \sin \frac{1}{2} \pi u^2 du$$

с верхним пределом интеграла  $u = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega$ . Таблицы для  $C(u)$  и  $S(u)$ , вычисленные Гильбертом и другими, можно найти во многих книгах по физической оптике. Более обстоятельные таблицы, данные Ломмелем, перепечатаны Watson, *Theory of Bessel Functions*, стр. 744—745.

<sup>2)</sup> Lommel, *Die Beugungserscheinungen geradlinig begrenzter Schirme*, *Abb. d. k. Bayer Akad. d. Wiss.*, 2 Kl; XV (1886).



Фиг. 54. За единицу горизонтального масштаба принято  $\frac{1}{2}gt^2$ ,

а вертикального  $\frac{2Q}{\pi gt^2}$ .



ветствующими точками пропорциональны квадрату времени, протекавшему от начала возмущения, в то время как соответствующие возвышения обратно пропорциональны квадрату этого времени.

Если  $\frac{gt^2}{4x}$  будет велико, то мы возвращаемся снова к формуле (21), которая дает приближенно

$$\eta = \frac{g^{1/2} t}{2^{3/2} \pi^{1/2} x^{3/2}} \left( \cos \frac{gt^2}{4x} + \sin \frac{gt^2}{4x} \right), \quad (23)$$

что и было установлено Пуассоном и Коши. При этом были использованы известные формулы:

$$\int_0^{\infty} \cos \zeta^2 d\zeta = \int_0^{\infty} \sin \zeta^2 d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}. \quad (24)$$

Названные авторы дали также выражения для остатка. Таким образом по существу Пуассон получает полусходящееся разложение

$$\eta = \frac{g^{1/2} t}{2^{3/2} \pi^{1/2} x^{3/2}} \left( \cos \frac{gt^2}{4x} + \sin \frac{gt^2}{4x} \right) - \frac{1}{\pi x} \left\{ \frac{2x}{gt^2} - 1 \cdot 3 \cdot 5 \left( \frac{2x}{gt^2} \right)^3 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \left( \frac{2x}{gt^2} \right)^5 - \dots \right\}. \quad (25)$$

Это можно вывести следующим образом. Последовательным интегрированием по частям находим

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{i(\zeta^2 - \omega^2)} d\zeta &= \int_0^{\infty} e^{i(\zeta^2 - \omega^2)} d\zeta - \int_0^{\infty} e^{i(\zeta^2 - \omega^2)} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-i\left(\omega^2 - \frac{1}{4}\pi\right)} + \frac{1}{2i\omega} + \frac{1}{(2i)^2 \omega^3} + \frac{1 \cdot 3}{(2i)^3 \omega^5} + \dots, \end{aligned} \quad (26)$$

а подставив действительную часть этого выражения в (21), получим формулу (25).

**§ 239.** Когда на горизонтальную поверхность действуют начальные импульсы типичное решение будет

$$\varphi = \cos \sigma t e^{ky} \cos kx, \quad (27)$$

$$\eta = -\frac{\sigma}{ge} \sin \sigma t \cos kx, \quad (28)$$

где, как раньше,  $\sigma^2 = gk$ . Если, следовательно, начальные условия будут

$$\varphi_0 = F(x), \quad \eta = 0,$$

то мы будем иметь

$$\varphi = \frac{1}{\pi \rho} \int_0^{\infty} \cos \sigma t e^{k y} dk \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) \cos k(k - \alpha) d\alpha, \quad (30)$$

$$\eta = -\frac{1}{\pi \rho g} \int_0^{\infty} \sigma \sin \sigma t dk \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) \cos k(x - \alpha) d\alpha. \quad (31)$$

Для импульсивного давления, сконцентрированного в точке  $x = 0$  поверхности, положив

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) d\alpha = 1, \quad (32)$$

получим

$$\varphi = \frac{1}{\pi \rho} \int_0^{\infty} \cos \sigma t e^{k y} \cos kx dk. \quad (33)$$

Этот интеграл вычисляется подобным же образом, как (9), однако, ясно, что его можно получить также и непосредственно, если операцию  $\frac{1}{g\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial t}$  применить к результатам § 238. Таким образом из (13) и (14) получим

$$\varphi = \frac{1}{\pi \rho} \left\{ \frac{\cos \theta}{r} - \frac{1}{2} g t^2 \frac{\cos 2\theta}{r^2} + \frac{1}{1 \cdot 3} \left( \frac{1}{2} g t^2 \right)^2 \frac{\cos 3\theta}{r^3} - \dots \right\}, \quad (34)$$

$$\eta = \frac{t}{\pi \rho x^2} \left\{ \frac{1}{1} - \frac{3}{1 \cdot 3 \cdot 5} \left( \frac{g t^2}{2x} \right)^2 + \frac{5}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \left( \frac{g t^2}{2x} \right)^4 - \dots \right\}. \quad (35)^1$$

Ряд (35) связан с функцией

$$\frac{z}{1 \cdot 3} - \frac{z^2}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{z^4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} - \dots, \quad (36)$$

которая была также табулирована Ломмелем. Обозначив ряды (22) и (36) через  $\sum_1$  и  $\sum_2$ , получим

$$1 - \frac{3z^2}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{5z^4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} - \dots = \frac{1}{2} (1 + \sum_1 - z \sum_2), \quad (37)$$

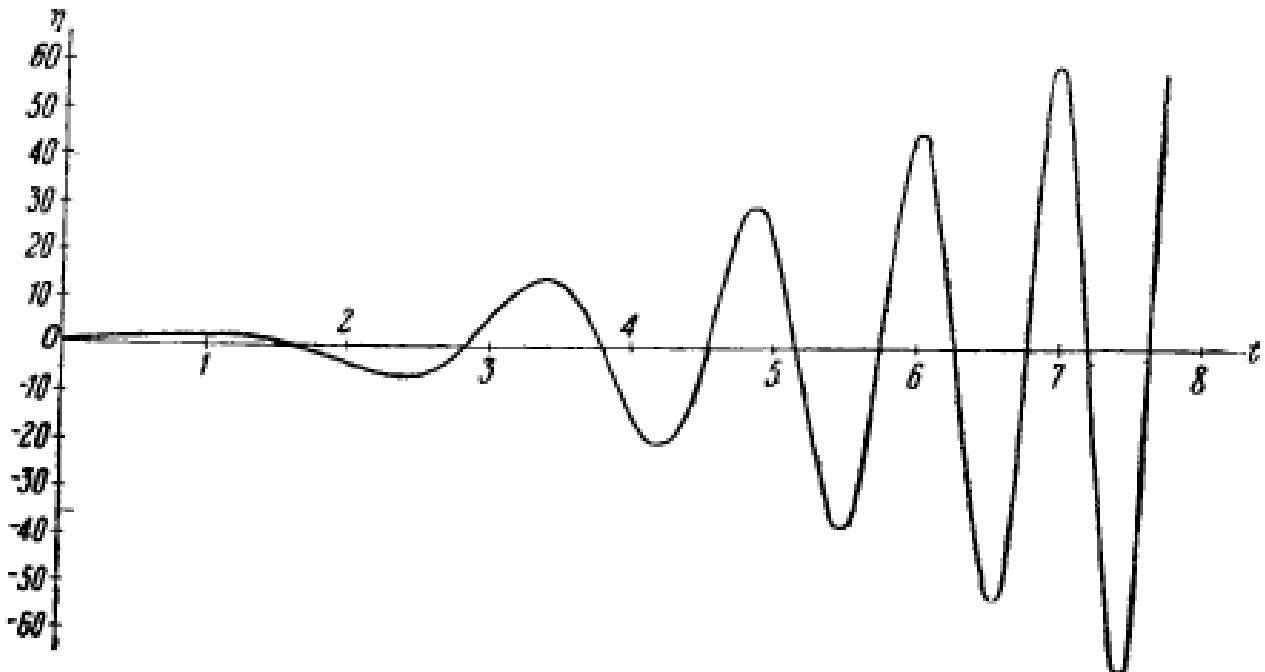
так что легко нарисовать вид нескольких первых волн.

Фиг. 55 показывает возвышения и понижения поверхности в определенном месте; для различных мест интервалы времени между двумя

<sup>1)</sup> С помощью теории „размерности“ а priori можно усмотреть, что влияние сконцентрированного начального импульса  $P$  (для единицы ширины) представляется обязательно в следующем виде:

$$\eta = \frac{Pt}{\rho x^2} f\left(\frac{gt^2}{x}\right).$$

определенными фазами относятся, как  $\sqrt{x}$ , так же как в предыдущем случае, соответствующие же возвышения обратно пропорциональны  $x^{3/2}$ . На фиг. 56, которая дает моментальное изображение профиля волны, горизонтальное расстояние между соответствующими



Фиг. 55. За единицу горизонтального масштаба принято  $\sqrt{\frac{2x}{g}}$ , а вертикального  $\frac{P}{\pi g x} \sqrt{\frac{2}{gx}}$ , где  $P$  — общий начальный импульс.

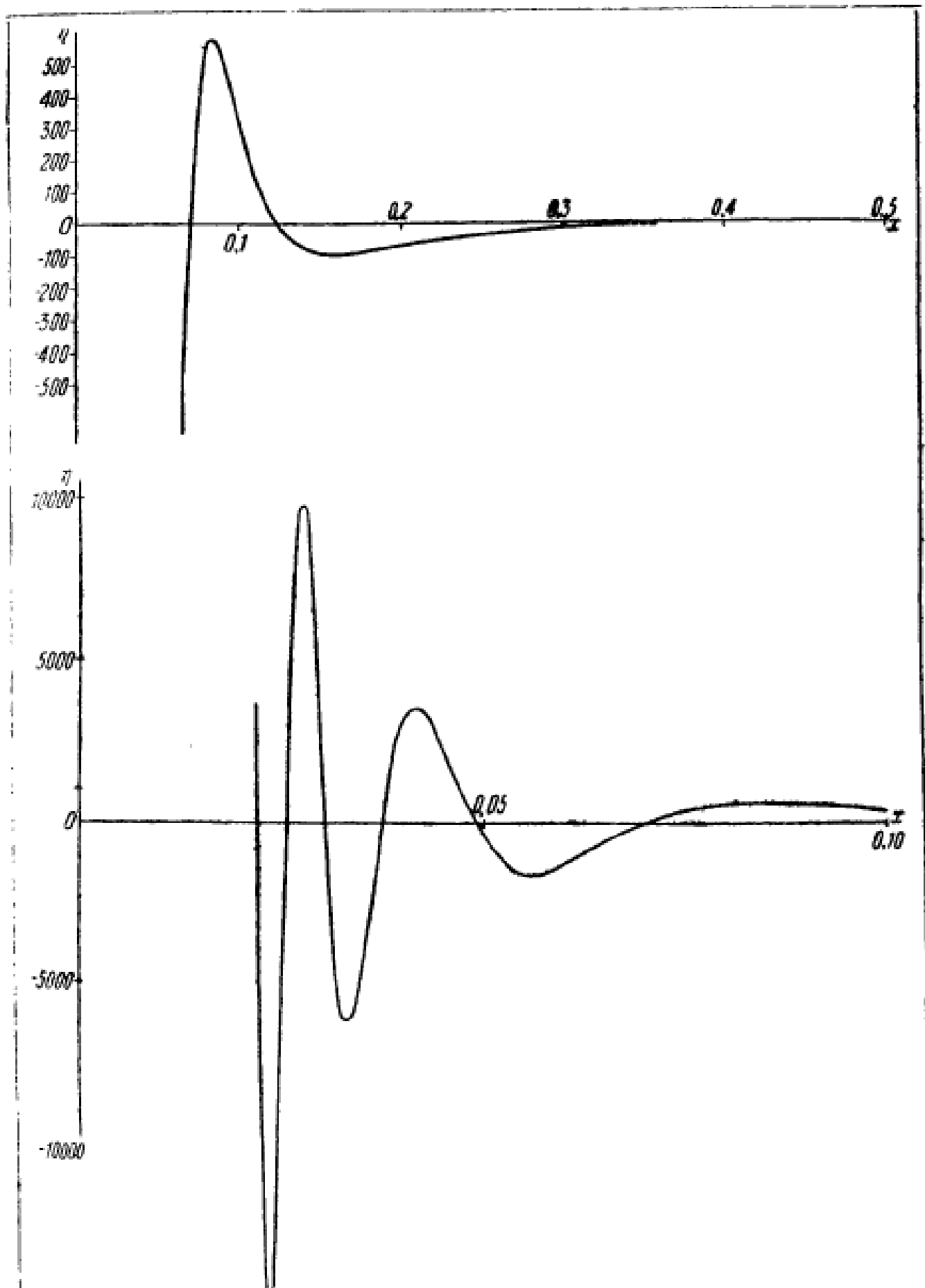
точками пропорционально квадрату времени, в то время как соответствующие ординаты обратно пропорциональны кубу времени.

Если мы к (23) применим операцию  $\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t}$ , то для больших значений  $\frac{1}{2} \frac{gt^2}{x}$  найдем приближенно

$$\eta = \frac{g^{1/2} t^2}{2^{5/2} \pi^{1/2} g^{1/2} x^{5/2}} \left( \cos \frac{gt^2}{4x} - \sin \frac{gt^2}{4x} \right). \quad (38)$$

**§ 240.** Остается рассмотреть значение и следствия полученных результатов. Достаточно рассмотреть главным образом случай § 238, где было принято, что первоначальное возвышение сосредоточено в одной точке поверхности в рассматриваемой плоскости.

Во всякий следующий момент  $t$  поверхность захватывается системой волн, наиболее продвинувшаяся вперед части которой изображены на фиг. 51. Для достаточно малых значений  $x$  вид волны дается формулой (23); следовательно, при приближении к началу волны непрерывно уменьшаются в длине и увеличиваются в высоте, причем то и другое происходит беспредельно.



Фиг. 56. За единицу горизонтального масштаба принято  $\frac{1}{2} gt^2$ , а вертикального  $\frac{4P}{\log^2 t^2}$ . Если продолжить верхнюю кривую вправо, то она пересечет ось  $x$  в точке, которую трудно отметить при выбранном масштабе.

Когда  $t$  растет, система волн растягивается в горизонтальном направлении пропорционально квадрату времени, а вертикальные ординаты укорачиваются в той же мере, так что площадь

$$\int \eta dx$$

между профилем волны, осью  $x$  и ординатами, соответствующими двум определенным фазам (т. е. двум определенным значениям  $\omega$ ), будет постоянной<sup>1)</sup>. Последнее утверждение следует непосредственно из вида выражений (14) или (21).

Колебания уровня в определенном месте представлены на фиг. 50. Они следуют друг за другом все быстрее с нарастающей амплитудой. Для достаточно больших значений  $t$  ход этих колебаний определяется формулой (23).

В области применимости этой формулы, длины и высоты от волны к волне, в каждый определенный момент, меняются очень медленно, и если взять значительное число следующих друг за другом волн, то они могут быть приближенно представлены синусоидой. Действительно, все соотношения воспроизводятся приближенно, когда  $\frac{gt^2}{4x}$  возрастает на

$$\Delta \frac{gt^2}{4x} = 2\pi. \quad (39)$$

Если, следовательно, будет меняться только  $t$  и если положить  $\Delta t = \tau$  то для периода колебаний получим

$$\tau = \frac{4\pi x}{gt}; \quad (40)$$

если же, наоборот, меняется только  $x$  и если положить  $\Delta x = -\lambda$  где  $\lambda$  обозначает длину волны, то мы находим

$$\lambda = \frac{8\pi x^2}{gt^2}. \quad (41)$$

Скорость волн определяется из уравнения

$$\Delta \frac{gt^2}{4x} = 0. \quad (42)$$

Это дает согласно (41)

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2x}{t} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \quad (43)$$

как в случае бесконечно длинного ряда просто гармонических волн длины  $\lambda$ .

<sup>1)</sup> Эта теорема не годится для случая начального импульса. Соответствующее заключение в этом случае будет:

$$\int \varphi_0 dx,$$

взятый между указанными значениями  $\omega$ , постоянен. Это следует из уравнения (34).

Мы видим теперь своего рода обоснование того факта, что каждая волна постоянно ускоряется. Передние волны длиннее, чем задние, и поэтому двигаются быстрее. Вследствие этого все волны вытягиваются по длине, так что их скорости распространения непрерывно возрастают по мере их продвижения. Однако, чем больше номер волны в их последовательности, тем меньше ее ускорение.

До сих пор мы исследовали распространение отдельных волн. Если мы теперь обратимся к *группе волн*, которая (приблизительно) характеризуется данной длиной волны  $\lambda$ , то увидим, что скорость этой группы определяется согласно (43) формулой

$$\frac{x}{t} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \quad (44)$$

т. е. группа распространяется с постоянной скоростью, равной *половине* скорости отдельных составляющих волн. Однако группа при своем распространении не сохраняет постоянной амплитуды; легко видеть из (23), что для данного значения  $\lambda$  амплитуда обратно пропорциональна  $\sqrt{x}$ .

Таким образом область в непосредственной близости от начала можно рассматривать как своего рода источник, который посылает в каждую сторону бесконечный ряд волн с постоянно растущей амплитудой и частотой; последующее движение этих волн регулируется выше рассмотренными законами. Предположение о такой продолжающейся деятельности источника следует из нашего допущения о начальном накоплении конечного объема поднятой жидкости на бесконечно узком основании, что обуславливает неограниченный запас энергии.

Практически, однако, начальное возвышение может распределяться на некоторой полосе конечной ширины  $l$ . Полное возмущение в некоторой точке  $P$  будет тогда состояться из частей, обусловленных различными элементами  $da$  ширины  $l$ ; эти части вычисляются по предыдущим формулам, а интегрируются по ширине полосы. В результате тогда исчезают как математически бесконечные, так и другие, лишённые смысла особенности, которые присущи допущению концентрированного линейного источника. Было бы легко дать соответственные формулы, но так как они не очень удобны и, кроме того, не дают ничего, что не содержалось бы в вышеизложенном, то мы от этого откажемся. Будет поучительнее разобрать в общем виде, как можно дополнить вышеизложенные результаты.

Начальные стадии возмущения на некотором расстоянии  $x$ , сравнительно большом с  $l$ , очевидно, будут в существенном теми же самыми, как при прежнем допущении; части возмущения, зависящие от различных элементов  $ad$ , будут просто взаимно усиливать друг друга, и результат можно достаточно хорошо представить с помощью (14) или (23), если мы умножим его на

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(a) da,$$

т. е. на площадь поперечного сечения первоначально поднято жидкости. В частности, формула (23) в случае, когда  $\frac{1}{2} \frac{gl^2}{x}$  велико, будет сохранять свою пригодность до тех пор, пока длина волны в рассматриваемой точке велика сравнительно с  $l$ , т. е., согласно (41), пока  $\frac{1}{2} \frac{gl^2}{x} \frac{l}{x}$  будет мало. Но когда длина волны в точке  $x$  при возрастающем  $l$  будет сравнима с  $l$  или меньше, чем  $l$ , то различные части  $l$  нельзя более рассматривать как имеющие приблизительно одинаковые фазы, и тогда мы будем иметь явление, аналогичное „интерференции“ в смысле оптики. Результат, конечно, будет зависеть от вида начального распределения значений  $f(u)$  на отрезке  $l^1$ , но ясно, что возрастание амплитуды должно когда-нибудь прекратиться, и возмущение в конце концов будет постепенно затухать.

То своеобразие, которое обычно имеют более поздние стадии, мы должны рассмотреть более углубленно, так как оно было причиной некоторых неясностей; дело идет о колебании амплитуды волны, которое легко может быть объяснено на основании принципов „интерференции“. В качестве примера достаточно рассмотреть случай, когда начальное возвышение равномерно распределено по ширине  $l$  и когда рассматриваемая стадия возмущения является настолько поздней, что значение  $\lambda$  вблизи рассматриваемой точки  $x$  становится малой сравнительно с  $l$ . Мы имеем тогда, очевидно, ряд групп волн, разделенных полосами сравнительно спокойной воды, причем середины этих полос имеют место там, где  $l$  есть кратное от  $\lambda$ , т. е.  $l = n\lambda$ . Если мы сделаем подстановку в (41), то найдем

$$\frac{x}{l} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{gl}{2n\pi}} \quad (45)$$

т. е. эти полосы движутся вперед с постоянной скоростью, которая в действительности и есть групповая скорость, соответствующая средней длине волны в окрестности рассматриваемого места<sup>2)</sup>:

<sup>1)</sup> Ср. Burnside, On Deep-water Waves resulting from a Limited Original Disturbance, Proc. Lond. Math. Soc. (1), XX, 22 (1888).

<sup>2)</sup> На это колебание впервые указал Пуассон, именно в частном случае, когда начальное возвышение (или быстрое опускание) имеет параболическое очертание.

Вышеизложенные исследования имеют значение, выходящее за пределы рассматриваемого предмета, так как они показывают, насколько сильно действия одного начального импульса в рассеивающей среде (т. е. в среде, в которой скорость волны зависит от длины волны) отличаются от тех, которые совершаются при звуковых волнах или при колебаниях твердого упругого тела. Рассмотренное выше исследование с некоторыми изменениями заимствовано из работы Lamb, On Deep-water Waves, Proc. Lond. Math. Soc. (2), II, 371 (1914), где также исследуется действие локального периодического давления.

Решение, данное в § 238, годное для идеального случая, ничего не говорит относительно того, что происходит в самом начале координат. Чтобы разрешить этот вопрос для какого-либо частного случая, предположим, что

$$f(a) = \frac{Q}{\pi} \frac{b}{b^2 + a^2}, \quad (46)$$

тогда по формуле (7)

$$\varphi = \frac{gQ}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{h(v-b)} \cos kx \, dk. \quad (47)$$

Возвышение поверхности в начале будет выражаться формулой

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{Q}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \sigma t e^{-hb} \, dk = \frac{2Q}{\pi g} \int_0^{\infty} \cos \sigma t e^{-\frac{\sigma^2 b}{g}} \sigma \, d\sigma = \\ &= \frac{2Q}{\pi g} \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} \sin \sigma t e^{-\frac{\sigma^2 b}{g}} \, d\sigma. \end{aligned} \quad (48)$$

По известной формуле имеем <sup>1)</sup>

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin 2\beta x \, dx = e^{-\beta^2} \int_0^{\beta} e^{x^2} \, dx. \quad (49)$$

Если мы положим

$$\omega^2 = \frac{gt^2}{4b}, \quad (50)$$

то получим

$$\eta = \frac{Q}{\pi b} \frac{d}{d\omega} e^{-\omega^2} \int_0^{\infty} e^{x^2} \, dx = \frac{Q}{\pi b} \left( 1 - 2\omega e^{-\omega^2} \int_0^{\infty} e^{x^2} \, dx \right). \quad (51)$$

Отсюда следует

$$\frac{d}{d\omega} (\eta e^{\omega^2}) = - \frac{2Q}{\pi b} \int_0^{\infty} e^{x^2} \, dx, \quad (52)$$

а это показывает, что  $\eta e^{\omega^2}$  с возрастанием  $t$  постоянно убывает. Таким образом  $\eta$  может менять знак только один раз. Вид интегралов в (49) показывает, что  $\eta$  в конце концов стремится к пределу нуль, и можно показать, что главный член его асимптотического значения равен  $-\frac{2Q}{\pi g t^2}$ .

<sup>1)</sup> Эта формула получается как побочный результат при вычислении интеграла

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2\beta x \, dx$$

с помощью интегрирования по контуру.

<sup>2)</sup> Определенный интеграл в уравнении (52) табулирован Dawson. Proc. Lond. Math. Soc. (1), XXIX, 519 (1898), а функция в уравнении (49) табулирована Terazawa, Science Reports of the Univ. of Tokio, VI, 171 (1917).



В вышезложенных задачах следует отметить то обстоятельство, что возмущение *мгновенно* распространяется от начала на любое расстояние, как бы велико оно ни было. Аналитически это объясняется тем, что мы имеем дело с совокупностью волн всех возможных длин, а для бесконечных длин скорость волны бесконечно велика. Однако Рэлеем<sup>1)</sup> было показано, что *мгновенный* характер дальнейшего продвижения сохраняется и в воде конечной глубины, несмотря на то, что в этом случае скорость волны имеет верхний предел. Физическое основание этой особенности состоит в несжимаемости рассматриваемой жидкости, так что изменения давления распространяются с бесконечной скоростью (ср. § 20). Если в вычислениях принять во внимание сжимаемость, то протекает конечный, хотя, быть может, и очень малый, промежуток времени, прежде чем возмущение появится в какой-либо другой точке<sup>2)</sup>.

**§ 241.** Обстоятельство, с которой мы провели вышезложенные исследования, оправдывается их историческим интересом и тем фактом, что вопрос в них шел об одной из немногих вполне разрешаемых проблем. Однако Кельвин показал, что можно получить приближенное представление о наиболее интересных особенностях этого явления более простым способом, который, помимо того, имеет достаточно общее применение<sup>3)</sup>.

Метод основывается на приближенном вычислении интегралов типа

$$u = \int_a^b \varphi(x) e^{if(x)} dx. \quad (1)$$

Предполагается, что тригонометрическая функция в промежутке интегрирования имеет большое число периодов, в то время как  $\varphi(x)$  меняется сравнительно медленно, или, более точно, предполагается, что когда  $f(x)$  меняется на  $2\pi$ , то  $\varphi(x)$  меняется только на малую дробь своего значения. При этих условиях различные элементы интеграла по большей части будут взаимно уничтожаться за исключением элементов вблизи тех значений  $x$ , — если таковые имеются, — для которых  $f(x)$  имеет стационарное значение. Полагая  $x = a + \xi$ , где  $a$  есть значение  $x$  внутри области интегрирования, для которой  $f'(a) = 0$ , мы для малых значений  $\xi$  получим приближенно

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2} \xi^2 f''(a). \quad (2)$$

<sup>1)</sup> Rayleigh, On the Instantaneous Propagation of Disturbance in a Dispersive Medium..., Phil. Mag. (6), XVIII, 1 (1909) [Papers, V, 514]; см. также Pidduck, On the Propagation of a Disturbance in a Fluid under Gravity, Proc. Roy. Soc. A, LXXXIII, 347 (1910).

<sup>2)</sup> Pidduck, The Wave-Problem of Cauchy and Poisson for Finite Depth and slightly Compressible Fluid, Proc. Roy. Soc. A, LXXXVI, 396 (1912).

<sup>3)</sup> W. Thomson, On the Waves produced by a Single Impulse in Water of any Depth, or in a Dispersive Medium, Proc. R. S., XLII, (80) (1887) [Papers, IV, 303]. Способ использовать интегралы типа (1) был, однако, предложен еще Стоксом в его работе Stokes, On the Numerical Calculation of a Class of Definite Integrals and Infinite Series, Camb. Trans, IX (1850) [Papers, II, 341, примечание].

Главная часть интеграла, соответствующая значениям  $x$  вблизи  $a$ , будет равна, следовательно, приближенно

$$\varphi(a) e^{if'(a)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{1/2 if''(a) \xi^2} d\xi; \quad (3)$$

расширение пределов до пределов от  $-\infty$  до  $+\infty$  вследствие колебания подинтегральной функции не повлечет заметной ошибки. Мы имеем теперь согласно известной формуле (24) § 238

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm im^2 \xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{m} \frac{1 \pm i}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{m} e^{\pm \frac{1}{4} i\pi}, \quad (4)$$

и, следовательно, формула (3) напишется

$$\frac{\sqrt{\pi} \varphi(a)}{\sqrt{\frac{1}{2} |f''(a)|}} e^{i \left\{ f(a) \pm \frac{1}{4} \pi \right\}}; \quad (5)$$

в показателе надо взять верхний или нижний знак, смотря по тому, будет ли  $f''(a)$  положительно или отрицательно.

Если  $a$  совпадает с одним из пределов интегрирования в формуле (1), то пределы в (3) нужно изменить на 0 и  $\infty$  или  $-\infty$  и 0 и результат (5) разделить пополам.

Если мы будем продолжать приближения в формуле (2), то получим следующий член в виде  $1/6 \xi^3 f'''(a)$ . Предыдущий метод таким образом только тогда будет законен, когда  $\xi \frac{f'''(a)}{f''(a)}$  будет мало, и даже тогда, когда  $\xi^2 f''(a)$  есть небольшое кратное от  $2\pi$ . Этого требует малость отношения

$$\frac{f'''(a)}{\{|f''(a)|\}^{3/2}}.$$

Предположим теперь, что в некоторой произвольной среде начальное, состоящее из некоторого импульса или из некоторого смещения, возмущение, по величине пропорциональное  $\cos kx$  на единицу длины, производит колебание типа

$$\eta = \varphi(k) \cos kx e^{i\sigma t}; \quad (6)$$

$\sigma$  обозначает здесь некоторую функцию от  $k$ , определенную согласно теории свободных волн. Влияние начального единичного возмущения, концентрированного на некоторой линии, определится формулой Фурье

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \varphi(k) e^{i(\sigma t - kx)} dk + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \varphi(k) e^{i(\sigma t + kx)} dk; \quad (7)$$

само собой понятно, что в конце вычислений мы должны оставить только действительную часть выражения (7).

Оба члена в правой части (7) представляют результат наложения движений при распространении ряда просто гармонических волн всех возможных длин как в положительном, так и отрицательном направлении оси  $x$ . Если мы, используя симметрию, ограничим наше внимание областью, лежащей направо от начала, то, как правило <sup>1)</sup>, только одна показательная функция в первом интеграле допускает стационарное значение (или значения), и именно тогда, когда

$$t \frac{d\sigma}{dk} = x. \quad (8)$$

Это уравнение определяет  $k$  и, следовательно,  $\sigma$ , как функции от  $x$  и  $t$ , и мы находим тогда в согласии с (5)

$$y = \frac{\varphi(k)}{\sqrt{\left| 2\pi t \frac{d^2\sigma}{dk^2} \right|}} \cos\left(\sigma t - kx \pm \frac{1}{4}\pi\right); \quad (9)$$

знак перед  $\frac{1}{4}\pi$  совпадает со знаком перед  $\frac{d^2\sigma}{dk^2}$ . Приближение предполагает малость отношения

$$\frac{d^2\sigma}{dk^2} : \sqrt{\left| t \frac{d^2\sigma}{dk^2} \right|^2}. \quad (10)$$

Так как согласно (8) имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\sigma t - kx) &= \left(t \frac{d\sigma}{dk} - x\right) \frac{\partial k}{\partial x} - k = -k, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\sigma t - kx) &= \left(t \frac{d\sigma}{dk} - x\right) \frac{\partial k}{\partial t} + \sigma = \sigma, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

то для длины волны и для периода вблизи точки  $x$  в момент  $t$  мы получим соответственно  $\frac{2\pi}{k}$  и  $\frac{2\pi}{\sigma}$ . Соотношение (8) показывает, что длина волны такова, что соответствующая *групповая* скорость (§ 236) имеет значение  $\frac{x}{t}$ .

Вышеизложенный процесс и результаты можно иллюстрировать различными графическими построениями <sup>2)</sup>. Легкое изменение фиг. 52 представляет с некоторой точки зрения наиболее простое построение. Мы строим (фиг. 57) кривую с абсциссой  $\lambda$  и ординатой  $ct$ , где  $t$  обозначает время, прошедшее от начала возмущения. Чтобы уяснить природу системы волн вблизи какой-нибудь точки  $x$ , нанесем отрезок  $OQ = x$  на ось ординат. Если  $PN$  есть ордината, соответствующая некоторой произвольной абсциссе  $\lambda$ , то фаза возмущения в  $x$ , происходящая от элементарного ряда волн с длиной  $\lambda$ , будет определяться углом наклона прямой  $QP$ ; в самом деле, проведя  $QR$  параллельно  $ON$ , будем иметь

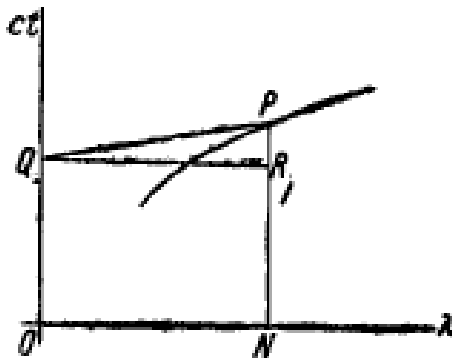
$$\frac{PR}{QR} = \frac{PN - OQ}{ON} = \frac{ct - x}{\lambda} = \frac{\sigma t - kx}{2\pi}. \quad (12)$$

<sup>1)</sup> Если групповая скорость будет отрицательной, как это и было в некоторых искусственных случаях § 237, то важнейшим будет второй интеграл.

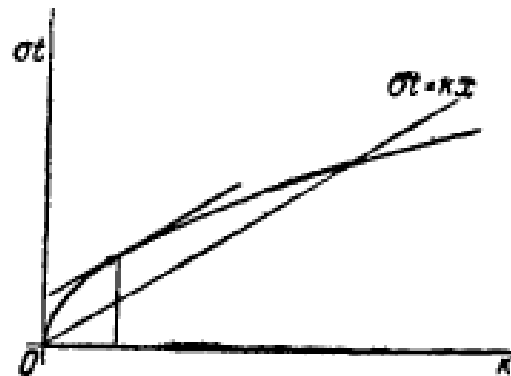
<sup>2)</sup> Lamb, Proc. of the 5th Intern. Congress of Mathematicians, Cambridge, 1912, том II, стр. 281.

Фаза таким образом будет стационарной, если  $QP$  есть касательная к кривой; преобладающие длины волн в точке  $x$  даются абсциссами точек, в которых различные возможные касательные, проведенные из  $Q$ , касаются кривой. Для этих точек характерно что в них групповая скорость имеет заданное значение  $\frac{x}{t}$ .

Вообразив точку  $Q$  двигающейся по прямой  $OQ$ , мы получим картину распределения длин волн в момент  $t$ , для которого кривая была начерчена. Если мы будем следить за изменениями, которые происходят с течением времени в некоторой данной точке  $x$ , то мы можем считать меняющимися или ординаты, соответственно различным временам, или же мы можем представить, что точка  $Q$  приближается к точке  $O$  таким образом, что  $OQ$  изменяется обратно пропорционально времени.



Фиг. 57.



Фиг. 58.

Только что проведенное построение имеет тот недостаток, что оно не дает никаких указаний относительно амплитуд в различных частях системы волн. Чтобы получить эти указания, начертим кривую, которая представляет зависимость между  $\sigma t$  как ординаты и  $k$  как абсциссы (фиг. 58). Если мы начертим прямую с наклоном  $x$ , проходящую через начало, то фаза  $\sigma t - kx$  происходящая от частного элементарного ряда волн, будет представляться разностью ординат кривой и прямой. Эта разность будет стационарной, когда касательная к кривой параллельна прямой, т. е. когда  $t \frac{d\sigma}{dk} = x$ , как это мы уже установили. Далее ясно, что разность фаз для элементарных рядов, длины волн которых мало различны, в конце концов будет пропорциональна квадрату приращения  $k$ . Ясно также, что ряд значений  $k$ , для которых фазы мало отличаются друг от друга, будет тем больше, и следовательно, получающееся возмущение будет тем интенсивнее, чем больше будет радиус кривизны кривой. Это объясняет появление величины  $t \frac{d^2\sigma}{dk^2}$  в знаменателе формулы (9).

В гидродинамической задаче § 238 мы имеем <sup>1)</sup>

$$\varphi(k) = 1, \quad \sigma^2 = gk, \quad (13)$$

<sup>1)</sup> Трудность доказательства сходимости в этом случае отпадает, если мы заметим, что по формуле (9) § 238

$$\eta = \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{ky} \cos \sigma t \cos kx dk,$$

где  $y$  перед переходом к пределу является отрицательным

откуда получается

$$\frac{d\sigma}{dk} = \frac{1}{2} g^{1/2} k^{-3/2}, \quad \frac{d^2\sigma}{dk^2} = -\frac{1}{4} g^{1/2} k^{-5/2}, \quad \frac{d^3\sigma}{dk^3} = \frac{3}{8} g^{1/2} k^{-7/2}. \quad (14)$$

Отсюда и из (8) следует

$$k = \frac{gt^2}{4x^2}, \quad \sigma = \frac{gt}{2x}, \quad (15)$$

и, следовательно,

$$\eta = \frac{g^{1/2} t}{\sqrt{2\pi x^{3/2}}} e^{i\left(\frac{gt}{4x} - \frac{1}{4}\pi\right)}$$

или, если отбросить мнимую часть,

$$\eta = \frac{g^{1/2} t}{(2\pi)^{1/2} x^{3/2}} \cos\left(\frac{gt}{4x} - \frac{1}{4}\pi\right). \quad (16)$$

Определив отношение (10), мы видим, что оно есть величина порядка  $\left(\frac{2x}{gt^2}\right)^{1/2}$ , следовательно, приближение годится только для тех времен и мест, для которых  $\frac{1}{2} gt^2$  велико сравнительно с  $x$ .

Эти результаты согласуются с более полными исследованиями § 238. Случай § 239 трактуется подобным же образом.

Из (16) или из приведенного выше геометрического построения (причем кривая здесь есть парабола, как в § 236) следует, что при распространении волн длина волны в некоторый произвольный момент непрерывно уменьшается при переходе от передней стороны к задней и что волны, проходящие через произвольно заданную точку, имеют постоянно убывающие длины<sup>1)</sup>.

**§ 242.** Теперь мы можем вычислить действие произвольного, но установившегося давления, приложенного к поверхности некоторого потока. Мы рассмотрим только состояние стационарного движения, которое наступает в конце концов под влиянием сил трения, как бы малы они ни были<sup>2)</sup>. Сначала мы рассмотрим вопрос прямо; более краткий способ получить главнейшие результаты изложен в § 248.

Необходимо отметить, что при отсутствии сил трения задача до известной степени является неопределенной, так как мы можем всегда

<sup>1)</sup> Дальнейшие применения см. Havelock, *The Propagation of Waves in Dispersive Media...*, Proc. Roy. Soc., LXXI, 398 (1908).

<sup>2)</sup> Первые шаги данного исследования заимствованы из работы Rayleigh, *The Form of Standing Waves on the Surface of Running Water*, Proc. Lond. Math. Soc., XV, 69 (1883) [Papers, II, 258], но упрощены тем, что пока не принята во внимание капиллярность. Встречающиеся определенные интегралы рассматриваются, однако, в несколько общем виде, и обсуждение результатов поэтому проводится с различных точек зрения. Эта задача еще рассматривалась Поповым, *Solution d'un problème sur les ondes permanentes*, Liouville (2), III, 251 (1858); его анализ безупречен, только не отмечена неопределенность задачи (при отсутствии сил трения), и результаты поэтому не доводятся до практического толкования.

наложить бесконечный ряд свободных волн, имеющих произвольную амплитуду, и длина которых выбрана таким образом, что их скорость по отношению к воде равна и противоположна скорости потока, так что они сохраняют в пространстве неизменное положение. Чтобы избежать этой неопределенности, мы воспользуемся приемом, принадлежащим Рэлею, и предположим, что отклонения частицы жидкости из состояния установившегося потока тормозятся силой, пропорциональной относительной скорости.

Этот закон трения совершенно не претендует быть вполне тождественным с действительностью, но он достаточен для того, чтобы грубо охарактеризовать влияние малых сил трения, и имеет математическое преимущество, так как не нарушает безвихревого характера движения. Действительно, подставив в уравнение § 6

$$\left. \begin{aligned} X &= -\mu(u - c), \\ Y &= -g - \mu w, \\ Z &= -\mu w, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $c$  обозначает скорость потока в направлении положительной оси  $x$ , и применяя метод § 33 к замкнутой кривой, получим

$$\left(\frac{D}{Dt} + \mu\right) \int (u dx + v dy + w dz) = 0, \quad (2)$$

откуда следует

$$\int (u dx + v dy + w dz) = C e^{-\mu t}. \quad (3)$$

Если, следовательно, циркуляция по некоторой замкнутой кривой, движущейся вместе с жидкостью, делается хоть раз равной нулю, то она всегда будет равна нулю. Мы имеем теперь

$$\frac{p}{\rho} = \text{const.} - gy + \mu(cx + \varphi) - \frac{1}{2} q^2, \quad (4)$$

а это есть тот вид, который принимает формула (2) § 21, если положить

$$\Omega = gy - \mu(cx + \varphi) \quad (5)$$

в согласии с формулой (1).

Чтобы вычислить действие простого гармонического распределения давлений, положим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varphi}{c} &= -x + \beta e^{ky} \sin kx, \\ \frac{\varphi}{c} &= -y + \beta e^{ky} \cos kx. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Если пренебречь квадратом  $k\beta$ , то уравнение (4) будет иметь вид

$$\frac{p}{\rho} = \dots - gy + \beta e^{ky} (kc^2 \cos kx + \mu c \sin kx). \quad (7)$$

Следовательно, на поверхности ( $\psi = 0$ ) переменная часть давления будет равна

$$p_0 = \rho\beta \{ (kc^2 - g) \cos kx + \mu c \sin kx \}, \quad (8)$$

а это равно действительной части от  $\rho\beta (kc^2 - g - i\mu c) e^{ikx}$ . Полагая коэффициент при  $e^{ikx}$  равным  $C$ , можно сказать, что давлению

$$p_0 = Ce^{ikx} \quad (9)$$

соответствует форма поверхности

$$g\varrho y = \frac{\kappa}{k - \kappa - i\mu_1} Ce^{ikx}, \quad (10)$$

где для краткости мы полагаем  $\frac{\mu}{c} = \mu_1$  и  $\kappa = \frac{g}{c^2}$ ; следовательно,  $\frac{2\pi}{\kappa}$  есть длина тех свободных волн, которые могут удержаться на месте, противостоя течению.

Если взять действительные части, то мы найдем, что давление на поверхности

$$p_0 = C \cos kx \quad (11)$$

производит форму волны

$$g\varrho y = \kappa C \frac{(k - \kappa) \cos kx - \mu_1 \sin kx}{(k - \kappa)^2 + \mu_1^2}. \quad (12)$$

Это показывает, что для малого  $\mu$  в местах наибольшего давления на поверхности находятся гребни волн, а в местах наименьшего давления — углубления, если длина волны меньше чем  $\frac{2\pi}{\kappa}$ ; в противоположном случае будет иметь место обратное. Это находится в согласии с общим принципом. Если всему потоку сообщить скорость  $-c$ , параллельную оси  $x$ , то результат, — как видно, если в (12) положить  $\mu_1 = 0$ , — есть частный случай (14) § 168.

В критическом случае  $k = \kappa$  будем иметь

$$g\varrho y = -\frac{\kappa C}{\mu_1} \sin kx, \quad (13)$$

а это показывает, что избыток давления находится теперь на тех склонах волн, которые идут вниз по течению. Это грубым образом объясняет, как при помощи подходящим образом выбранного распределения давления на склонах система прогрессивных волн может сохраняться, противостоя взятым нами силам трения.

**§ 243.** Решение, выраженное формулой (12), можно обобщить, во-первых, прибавлением произвольной постоянной к  $x$  и, во-вторых, суммированием по  $k$ . Таким образом мы можем представить действие любого распределения давления

$$p_0 = f(x) \quad (14)$$

с помощью теоремы Фурье [§ 238 (4)].

Предположим, что  $f(x)$  обращается в нуль для всех не бесконечно малых значений  $x$ , а для бесконечно малых значений обращается в бесконечность таким образом, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = P; \quad (15)$$

это дает нам действие полного давления  $P$ , которое концентрируется на бесконечно малую полосу поверхности около начала. Заменяя  $C$  в уравнении (12) через  $\frac{P}{\pi} \delta k$  и интегрируя по  $k$  между пределами 0 и  $\infty$ , получим

$$gey = \frac{\pi P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(k-x) \cos kx - \mu_1 \sin kx}{(k-x)^2 + \mu_1^2} dk. \quad (16)$$

Если положить  $\zeta = k + im$ , где  $k$  и  $m$  обозначают прямоугольные координаты переменной точки на плоскости, то свойства выражения (16) содержатся в свойствах комплексного интеграла

$$\int \frac{e^{ix\zeta}}{\zeta - c} d\zeta. \quad (17)$$

Как известно, этот интеграл обращается в нуль, если интегрировать по контуру произвольной области, не заключающей особой точки ( $\zeta = c$ ). В рассматриваемом случае  $c = x + i\mu_1$ , где  $x$  и  $\mu_1$  оба положительны.

Предположим, что  $x$  положительно, и применим вышеуказанную теорему к области, которая ограничена снаружи прямой  $m = 0$  и бесконечно большим полукругом, имеющим центр в начале и для которого  $m > 0$ , а внутри малым кругом вокруг точки  $(x, \mu_1)$ . Интеграл, взятый по бесконечно большому полукругу, очевидно, исчезает, и легко показать, положив  $\zeta - c = re^{i\theta}$ , что интеграл, взятый по малому кругу, равен

$$-2\pi i e^{i(x+i\mu_1)x},$$

причем направление интегрирования выбрано в согласии с § 32. Таким образом мы получаем

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{ikx}}{k - (x + i\mu_1)} dk + \int_0^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k - (x + i\mu_1)} dk - 2\pi i e^{i(x+i\mu_1)x} = 0,$$

а это равносильно

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k - (x + i\mu_1)} dk = 2\pi i e^{i(x+i\mu_1)x} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{k + (x + i\mu_1)} dk. \quad (18)$$

Если же  $x$  отрицательно, то мы можем интеграл (17) взять вдоль замкнутой кривой, образованной прямой  $m = 0$  и бесконечно большим полукругом, лежащим на той стороне, для которой  $m < 0$ . Это дает такой результат, как раньше, с той разницей, что теперь исчезает член, зависящий от особой



точки, так как эта точка лежит вне контура. Таким образом для отрицательного  $x$  получается

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k - (\kappa + i\mu_1)} dk = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{k + (\kappa + i\mu_1)} dk. \quad (19)$$

Другая форма последнего члена формулы (18) получается, если интегрировать вдоль замкнутой кривой, которая образована из отрицательной части оси  $k$ , положительной части оси  $m$  и бесконечно большой дуги четверти круга. Таким образом мы находим

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{ikx}}{k - (\kappa + i\mu_1)} dk + \int_0^{\infty} \frac{e^{-mx}}{im - (\kappa + i\mu_1)} i dm = 0,$$

а это равносильно

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{k + (\kappa + i\mu_1)} dk = \int_0^{\infty} \frac{e^{-mx}}{m - \mu_1 + i\kappa} dm. \quad (20)$$

Это годится для положительного  $x$ . Для отрицательного  $x$  мы должны взять в качестве пути интегрирования отрицательные части осей  $k$  и  $m$  и бесконечно большую дугу четверти круга. Это дает

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{k + (\kappa + i\mu_1)} dk = \int_0^{\infty} \frac{e^{mx}}{m + \mu_1 - i\kappa} dm, \quad (21)$$

что является преобразованием правой части (19).

При этих выводах  $\mu_1$  было положительно. Соответствующие результаты для интеграла

$$\int \frac{e^{ix\zeta}}{\zeta - (\kappa - i\mu_1)} d\zeta \quad (22)$$

для наших настоящих целей не нужны, однако мы их дадим, чтобы иметь возможность ими пользоваться впоследствии. Для положительного  $x$  мы находим

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k - (\kappa - i\mu_1)} dk = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{k + (\kappa - i\mu_1)} dk = \int_0^{\infty} \frac{e^{-mx}}{m + \mu_1 + i\kappa} dm, \quad (23)$$

а для отрицательного  $x$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k - (\kappa - i\mu_1)} dk &= -2\pi i e^{i(\kappa - i\mu_1)x} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{k + (\kappa - i\mu_1)} dk = \\ &= -2\pi i e^{i(\kappa - i\mu_1)x} + \int_0^{\infty} \frac{e^{mx}}{m - \mu_1 - i\kappa} dm; \end{aligned} \quad (24)$$

поверку мы предоставляем читателю <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Другую трактовку этих интегралов можно найти у Dirichlet, Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen (изд. Arendt), Braunschweig, 1904, стр. 170.

Если взять действительные части формул (18), (20), а также (19), (21), то получим следующие результаты.

Формула (16) для положительного  $x$  равносильна выражению

$$\begin{aligned} \frac{\pi g \rho}{\kappa P} y &= -2\pi e^{-\mu_1 x} \sin \kappa x + \int_0^{\infty} \frac{(k + \kappa) \cos kx - \mu_1 \sin kx}{(k + \kappa)^2 + \mu_1^2} dk = \\ &= -2\pi e^{-\mu_1 x} \sin \kappa x + \int_0^{\infty} \frac{(m - \mu_1) e^{-mx}}{(m - \mu_1)^2 + \kappa^2} dm, \end{aligned} \quad (25)$$

а для отрицательного  $x$

$$\frac{\pi g \rho}{\kappa P} y = \int_0^{\infty} \frac{(m + \mu_1) e^{mx}}{(m + \mu_1)^2 + \kappa^2} dm. \quad (26)$$

Истолкование этих результатов достаточно простое. Первый член в формуле (25) представляет ряд просто гармонических волн, простирающихся от начала в направлении течения; длина волны равна  $\frac{2\pi c^2}{g}$ , а амплитуды убывают постепенно по закону  $e^{-\mu_1 x}$ . Дополнительная часть деформации свободной поверхности, которая выражается определенными интегралами в формулах (25) и (26), будучи для малых значений  $x$  очень большой, очень быстро убывает по мере возрастания абсолютного значения  $x$ , как бы ни был мал коэффициент трения  $\mu_1$ .

Если  $\mu_1$  бесконечно мало, то наши результаты примут следующую более простую форму:

$$\begin{aligned} \frac{\pi g \rho}{\kappa P} y &= -2\pi \sin \kappa x + \int_0^{\infty} \frac{\cos kx}{k + \kappa} dk = \\ &= -2\pi \sin \kappa x + \int_0^{\infty} \frac{m e^{-mx}}{m^2 + \kappa^2} dm, \end{aligned} \quad (27)$$

для положительного  $x$  и

$$\frac{\pi g \rho}{\kappa P} y = \int_0^{\infty} \frac{\cos kx}{k + \kappa} dk = \int_0^{\infty} \frac{m e^{mx}}{m^2 + \kappa^2} dm \quad (28)$$

для отрицательного  $x$ . Та часть возмущения уровня, которая представлена в этих выражениях определенными интегралами, является теперь симметричной по отношению к началу, и она непрерывно убывает с возрастанием расстояния от начала. Если  $\kappa x$  не слишком велико, то обычными методами можно установить полусходящееся разложение

$$\int_0^{\infty} \frac{m e^{-mx}}{m^2 + \kappa^2} dm = \frac{1}{\kappa^2 x^2} - \frac{3!}{\kappa^4 x^4} + \frac{5!}{\kappa^6 x^6} - \dots \quad (29)$$

Тогда оказывается, что на расстоянии приблизительно половины длины волны в направлении течения, считая от начала, мы будем иметь вполне установившийся гармонический профиль волны.

Определенные интегралы в (27) и (28) можно свести к известным функциям. Положив  $(k + \kappa)x = u$ , для положительного  $x$  будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\cos kx}{k + \kappa} dk &= \int_{\kappa x}^{\infty} \frac{\cos(\kappa x - u)}{u} du = \\ &= -\text{Ci } \kappa x \cos \kappa x + \left( \frac{1}{2} \pi - \text{Si } \kappa x \right) \sin \kappa x, \end{aligned} \quad (30)$$

где в согласии с употребительными обозначениями мы полагаем

$$\text{Ci } u = - \int_u^{\infty} \frac{\cos u}{u} du, \quad \text{Si } u = \int_0^u \frac{\sin u}{u} du. \quad (31)$$

Функции  $\text{Ci } u$  и  $\text{Si } u$  табулированы Глезером <sup>1)</sup>. Оказывается, что они, начиная от нуля, очень быстро приближаются соответственно к своим предельным значениям 0 и  $\frac{1}{2} \pi$  с возрастанием  $u$ . Для малых значений  $u$  мы имеем

$$\text{Ci } u = \gamma + \ln u - \frac{u^2}{2 \cdot 2!} + \frac{u^4}{4 \cdot 4!} - \dots,$$

$$\text{Si } u = u - \frac{u^3}{3 \cdot 3!} + \frac{u^5}{5 \cdot 5!} - \dots,$$

где  $\gamma$  обозначает эйлерову постоянную 0,5772...

Из (25) и (26) легко видеть, что для бесконечно малых значений  $\mu_1$  полное опускание поверхности будет равно

$$- \int_{-\infty}^{\infty} y dx = \frac{P}{ge}, \quad (33)$$

так же, как если бы жидкость была в покое.

**§ 244.** Выражения (25), (26), а также (27), (28) дают бесконечно большое возвышение в начале, однако это затруднение отпадет, если распределить давление по полосе конечной ширины, вместо того чтобы, как мы делали, концентрировать его на математической линии поверхности.

<sup>1)</sup> Glaisher, Tables of the Numerical Values of the Sine-Integral, Cosine-Integral and Exponential-Integral, Phil. Trans., 1870; извлечения отсюда были даны Dale и Jahnpke und Emden. Вычисления последнего интеграла в (27) через интегральный синус и интегральный косинус было проведено Шлемильхом иным способом, чем изложено здесь, Sur l'intégrale définie

$\int_0^{\infty} \frac{d\theta}{\theta + a^2} e^{-x\theta}$ , Crelle, XXXIII (1846); см. также De Morgan, Differential and Integral Calculus, London, 1842, стр. 654, и Dirichlet, Vorlesungen стр. 208.

Чтобы вычислить действительное распределенного давления

$$p_0 = f(x), \quad (34)$$

мы должны только поставить в (27) и (28)  $x - a$  вместо  $x$ , заменить  $P$  через  $f(a) da$  и полученное значение  $y$  проинтегрировать по  $a$  между соответствующими пределами. Из известных теорем интегрального исчисления следует тогда, что для конечного  $p_0$  интеграл будет конечным для всех значений  $x$ .

Если на часть поверхности, простирающуюся от  $-\infty$  до начала, приложено постоянное давление, то с помощью интегрирования (25) для  $x > 0$  можно легко установить

$$g\varrho y = -2p_0 \cos kx + \frac{k p_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-mx}}{m^2 + k^2} dm, \quad (35)$$

причем  $\mu_1$  было положено равным нулю. Если же давление  $p_0$  распределено по той части поверхности, которая простирается от 0 до  $+\infty$ , то для  $x < 0$  найдем

$$g\varrho y = \frac{k p_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{mx}}{m^2 + k^2} dm. \quad (36)$$

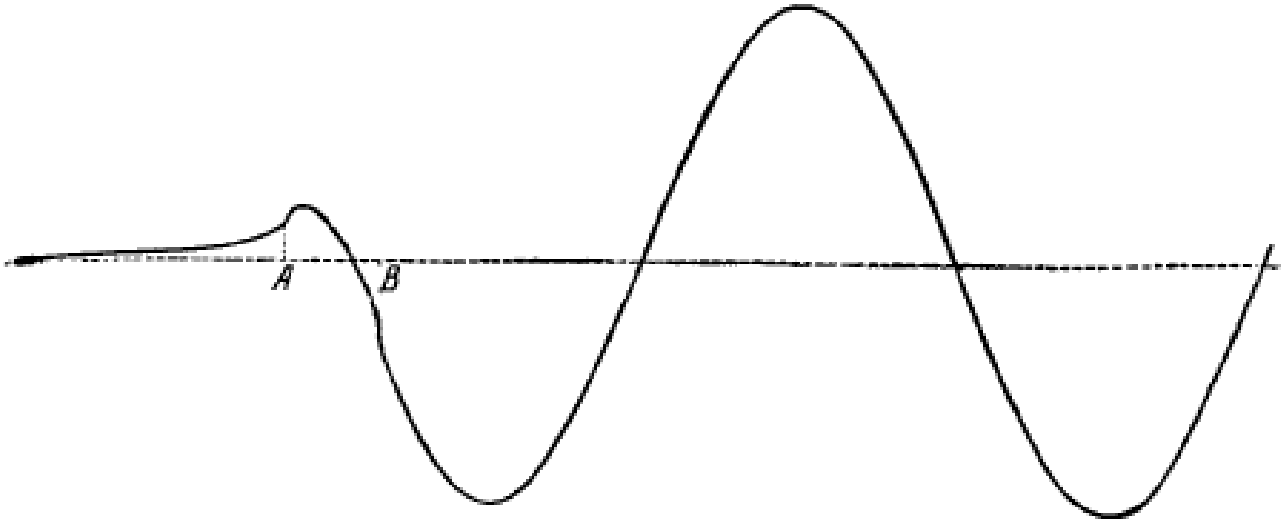
Из этих результатов легко можно вывести соответственные формулы для случая, когда давление равномерно распределено по полосе конечной ширины. Определенные интегралы в (35) и (36) можно выразить через функции  $Ci u$ ,  $Si u$ ; например, для интеграла в (35) получаем выражение

$$\begin{aligned} k \int_0^{\infty} \frac{e^{-mx}}{m^2 + k^2} dm &= \int_0^{\infty} \frac{\sin kx}{k + m} dk = \\ &= \left( \frac{1}{2} \pi - Si kx \right) \cos kx + Ci kx \sin kx. \end{aligned} \quad (37)$$

Этим способом построена фиг. 59, которая представляет случай, когда полоса ( $AB$ ) имеет ширину  $k^{-1}$  или 0,159 части длины стоячей волны.

Подобный случай приблизительно осуществляется, если погрузить ребро легко наклоненной доски внутрь поверхности потока; различие будет состоять в том, что давление на смоченную часть доски не будет равномерным, оно будет убывать от средних частей к краям. Чтобы обеспечить равномерное распределение давления, доска должна быть искривлена у краев и именно по форме тех частей профиля волны, которые примыкают к точкам  $A$ ,  $B$  фиг. 59.

Следует заметить, что если ширина полосы есть точное кратное длины волны  $\left(\frac{2\pi}{\kappa}\right)$ , то на некотором расстоянии от источника возмущения потока как в направлении течения, так и против течения возвышение поверхности будет равно нулю.



Фиг. 59.

Фиг. 59 выявляет в точках  $A, B$  некоторые особенности, происходящие от разрыва приложенного давления. Более естественный способ представления локального давления будем иметь, если положим

$$p_0 = \frac{P}{\pi} \frac{b}{b^2 + x^2}. \quad (38)$$

Мы можем представить это в виде

$$p_0 = \frac{P}{\pi} \frac{1}{b - ix} = \frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-kb + ikx} dk, \quad (39)$$

при условии, что в конце будет сохраняться только действительная часть. Пользуясь формулами (9) и (10) § 242, видим, что соответствующее возвышение свободной поверхности будет представляться в виде

$$g\eta y = \frac{\kappa P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-kb + ikx}}{k - \kappa - i\mu_1} dk. \quad (40)$$

Методом § 243 мы находим, что для  $x > 0$  это равносильно

$$g\eta y = \frac{\kappa P}{\pi} \left\{ 2\pi i e^{(\kappa + i\mu_1)(ix - b)} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-imb - mx}}{m - \mu_1 + ix} dm \right\}, \quad (41)$$

а для  $x < 0$

$$g\eta y = \frac{\kappa P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{imb + mx}}{m + \mu_1 - ix} dm. \quad (42)$$

Отсюда, беря действительные части и полагая  $\mu_1 = 0$ , получим

$$g\varrho y = -2\kappa P e^{-\kappa b} \sin \kappa x + \\ + \frac{\kappa P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{m \cos mb - \kappa \sin mb}{m^2 + \kappa^2} e^{-mx} dm, \quad [x > 0], \quad (43)$$

$$g\varrho y = \frac{\kappa P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{m \cos mb - \kappa \sin mb}{m^2 + \kappa^2} e^{mx} dm \quad [x < 0]. \quad (44)$$

Множитель  $e^{-\kappa b}$  в первом члене правой части (43) показывает влияние того обстоятельства, что давление распределено на конечную область. Легко доказать, что значения  $y$ , данные формулами (43) и (44), а также значения  $\frac{dy}{dx}$  для  $x = 0$  совпадают <sup>1)</sup>.

§ 245. Если в задаче § 242 мы примем глубину конечной и равной  $h$ , то, при отсутствии сил трения, задача будет неопределенной или определенной, смотря по тому, будет ли скорость потока  $c$  меньше или больше, чем  $(gh)^{1/2}$ , т. е. максимальной скорости волны для данной глубины; см. § 229. В первом случае получающиеся затруднения могут быть избегнуты введением малых сил трения; но, согласно прежним исследованиям, мы можем уже заранее предвидеть, что главный эффект этих сил трения будет состоять в том, чтобы уничтожить возвышение поверхности на некотором расстоянии в направлении, обратном течению, от области распределенного давления; поэтому, если мы примем это с самого начала, то не будет необходимости усложнять наши уравнения сохранением членов, зависящих от трения <sup>2)</sup>.

Для случая просто гармонического распределения давления мы полагаем, как в (3) § 233

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varphi}{c} &= -x + \beta \operatorname{ch} k(y+h) \sin kx, \\ \frac{\psi}{c} &= -y + \beta \operatorname{sh} k(y+h) \cos kx. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

На поверхности

$$y = \beta \operatorname{sh} kh \cos kx \quad (2)$$

мы будем иметь тогда

$$\frac{p_0}{\varrho} = -gy - \frac{1}{2}(q^2 - c^2) = \beta(kc^2 \operatorname{ch} kh - q \operatorname{sh} kh) \cos kx, \quad (3)$$

так что наложенному давлению

$$p_0 = C \cos kx \quad (4)$$

<sup>1)</sup> Другой способ трактовки проблемы § 243, 244 можно найти в работе Kelvin, Deep Water Ship-Waves, Proc. R. S. Edin, XXV, 562 (1905) [Papers, IV, 368].

<sup>2)</sup> Для малых сил трения не особенно трудно будет видоизменить исследование таким образом, чтобы эти силы были учтены.

будет соответствовать форма поверхности

$$y = \frac{C}{\rho} \frac{\operatorname{sh} kh}{kc^2 \operatorname{ch} kh - g \operatorname{sh} kh} \cos kx. \quad (5)$$

Так же, как в § 242, давление на впадинах волны будет наибольшим, а на гребнях волны наименьшим, или наоборот, в зависимости от того, будет ли длина волны больше или меньше, чем длина той волны, которая соответствует скорости  $c$ ; это находится в согласии с общей теорией.

Обобщая формулу (5) по методу Фурье, получим формулу

$$y = \frac{P}{\pi \rho} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} kh \cos kx}{kc^2 \operatorname{ch} kh - g \operatorname{sh} kh} dk, \quad (6)$$

представляющую эффект того давления, которое распределено по узкой полосе поверхности около начала и полная величина которого равна  $P$ . Это выражение может быть написано также и в форме

$$\frac{\pi \rho c^2}{P} y = \int_0^{\infty} \frac{\cos \frac{xu}{h}}{u \operatorname{ctgh} u - \frac{gh}{c^2}} du. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь комплексный интеграл

$$\int \frac{e^{\frac{ix\zeta}{h}}}{\zeta \operatorname{ctgh} \zeta - \frac{gh}{c^2}} d\zeta, \quad (8)$$

где  $\zeta = u + iv$ . Функция под знаком интеграла будет иметь в точке  $\zeta = \mp i\alpha$  особую точку или нет, смотря по тому, будет ли  $x$  положительным или отрицательным; остальные особые точки даются корнями уравнения

$$\frac{\operatorname{tg} h\zeta}{\zeta} = \frac{c^2}{gh}. \quad (9)$$

Так как (6) есть четная функция от  $x$ , то достаточно рассмотреть случай положительных  $x$ .

Предположим сначала  $c^2 > gh$ . Корни уравнения (9) будут тогда все чисто мнимыми, вида  $\pm i\beta$ , где  $\beta$  есть корень уравнения

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\beta} = \frac{c^2}{gh}. \quad (10)$$

Наименьший положительный корень этого уравнения лежит между 0 и  $\frac{1}{2}\pi$ , а большие корни стремятся со все более растущим приближением к значению  $(s + \frac{1}{2})\pi$ , где  $s$  есть целое число. Мы обозначим эти корни через  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots$ , располагая их по величине. Распространим интеграл (8) по замкнутой кривой, образованной осью  $u$ , бесконечно большим полукругом на положительной стороне этой оси и рядом малых кругов, окружающих особые точки  $\zeta = i\beta_0, i\beta_1, i\beta_2, \dots$ . Часть, соответствующая бесконечно большому полукругу, очевидно, будет исчезать. Далее, известно следующее: если  $\alpha$  есть простой корень  $f(\zeta) = 0$ , то значение интеграла

$$\int \frac{F(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta,$$

взятого в положительном направлении вдоль малого круга, заключающего точку  $\zeta = a$ , равно

$$2\pi i \frac{F(a)}{f'(a)}; \quad (11)$$

В нашем случае для (8) имеет место

$$f'(a) = \operatorname{ctgh} a - a(\operatorname{ctgh}^2 a - 1) = \frac{1}{a} \left\{ \frac{gh}{c^2} \left(1 - \frac{gh}{c^2}\right) + a^2 \right\}; \quad (12)$$

отсюда следует, если положить  $a = i\beta_s$ , что выражение (11) принимает вид

$$2\pi B_s e^{-\beta_s \frac{x}{h}}, \quad (13)$$

где

$$B_s = \frac{\beta_s}{\beta_s^2 - \frac{gh}{c^2} \left(1 - \frac{gh}{c^2}\right)}. \quad (14)$$

Теорема, что интеграл обращается в нуль, когда он распространен по замкнутому контуру области, внутри которой подынтегральная функция комплексного переменного не имеет особых точек, дает

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{\frac{ixu}{h}}}{u \operatorname{ctgh} u - \frac{gh}{c^2}} du + \int_0^{\infty} \frac{e^{\frac{ixu}{h}}}{u \operatorname{ctgh} u - \frac{gh}{c^2}} du - 2\pi \sum_0^{\infty} B_s e^{-\beta_s \frac{x}{h}} = 0. \quad (15)$$

Если в первом интеграле написать  $-u$  вместо  $u$ , то получим

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \frac{xu}{h}}{u \operatorname{ctgh} u - \frac{gh}{c^2}} du = \pi \sum_0^{\infty} B_s e^{-\beta_s \frac{x}{h}}. \quad (16)$$

Вид свободной поверхности дается тогда уравнением

$$y = \frac{P}{\rho c^2} \sum_0^{\infty} B_s e^{-\beta_s \frac{x}{h}}. \quad (17)$$

Оказывается, что возвышение поверхности (которое симметрично относительно начала) на известном расстоянии от места возмущения уже будет незаметным.

С другой стороны, если  $c^2 < gh$ , то уравнение (9) будет иметь пару действительных корней (пусть они равны  $\pm a$ ) соответственно наименьшим корням ( $\pm \beta_0$ ) уравнения (10), которые сами теперь перестают быть действительными. Интеграл (7) становится тогда несобственным, так как функция под знаком интеграла внутри области интегрирования становится бесконечной. Одно из значений этого интеграла, именно „главное значение“ в смысле Коши, можно, однако, определить тем же самым методом, как раньше, причем точки  $\zeta = \pm a$  исключаются из пути интегрирования с помощью малых полуокружностей радиуса  $\epsilon$ , лежащих на той стороне, где  $v$  положительно.



Части комплексного интеграла (8), соответствующие этим полуокружностям, будут

$$-i\pi \frac{e^{\pm i \frac{\alpha x}{h}}}{f'(\pm a)},$$

где  $f'(a)$  дается формулой (12); их сумма, следовательно, будет равна

$$2\pi A \sin \frac{\alpha x}{h}, \quad (18)$$

где

$$A = \frac{a}{a^2 - \frac{gh}{c^2} \left( \frac{gh}{c^2} - 1 \right)}. \quad (19)$$

Уравнение, соответствующее (16), принимает теперь вид

$$\left\{ \int_0^{a-s} + \int_{a+s}^{\infty} \right\} \frac{\cos \frac{xu}{h}}{u \operatorname{ctgh} u - \frac{gh}{c^2}} du = -\pi A \sin \frac{\alpha x}{h} + \pi \sum_1^{\infty} B_s e^{-\beta_s \frac{x}{h}}, \quad (20)$$

так что если мы возьмем главное значение интеграла в формуле (7), то форма поверхности на той стороне, на которой  $x$  положительно, будет дана уравнением

$$y = -\frac{P}{\rho c^2} A \sin \frac{\alpha x}{h} + \frac{P}{\rho c^2} \sum_1^{\infty} B_s e^{-\beta_s \frac{x}{h}}. \quad (21)$$

Таким образом на некотором расстоянии от начала деформация поверхности будет состоять из простого гармонического ряда волн длины  $\frac{2\pi h}{\alpha}$ , представленного первым членом; эта длина волны соответствует скорости распространения  $c$  по отношению к спокойной воде.

Так как функция (7) симметрична по отношению к началу, то соответствующий результат для отрицательных значений  $x$  напишется в виде

$$y = \frac{P}{\rho c^2} A \sin \frac{\alpha x}{h} + \frac{P}{\rho c^2} \sum_1^{\infty} B_s e^{\beta_s \frac{x}{h}}. \quad (22)$$

Общее решение нашей неопределенной задачи мы получим, если прибавим к выражениям (21) и (22) члены вида

$$C \cos \frac{\alpha x}{h} + D \sin \frac{\alpha x}{h}; \quad (23)$$

если мы выберем эти члены таким образом, что деформация поверхности на некотором расстоянии против течения станет незаметной, то получим практически годное решение, в котором принято во внимание влияние бесконечно малых сил трения. Таким путем мы в конце концов для положительных значений  $x$  получим

$$y = -\frac{2P}{\rho c^2} A \sin \frac{\alpha x}{h} + \frac{P}{\rho c^2} \sum_1^{\infty} B_s e^{-\beta_s \frac{x}{h}}, \quad (24)$$

а для отрицательных значений:

$$y = \frac{P}{\rho c^2} \sum_1^{\infty} B_s e^{\beta_s \frac{x}{h}}. \quad (25)$$

За другим способом изучения определенного интеграла в нашей задаче мы должны отослать к уже названной работе Кельвина.

§ 246. Тот же самый метод может быть применен для исследования влияния небольших неровностей дна на равномерное течение <sup>1)</sup>.

Для случая дна, гофрированного по гармоническому закону:

$$y = -h + \gamma \cos kx, \quad (1)$$

причем начало, как обычно, лежит на невозмущенной поверхности, мы принимаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varphi}{c} &= -x (a \operatorname{ch} ky + \beta \operatorname{sh} ky) \sin kx, \\ \frac{\psi}{c} &= -y + (a \operatorname{sh} ky + \beta \operatorname{ch} ky) \cos kx. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Условие того, что (1) должно быть линией тока, напишется в виде

$$\gamma = -a \operatorname{sh} kh + \beta \operatorname{ch} kh. \quad (3)$$

Формула давления в приближенном виде будет

$$\frac{P}{e} = \operatorname{const.} - g\gamma + kc^2 (a \operatorname{ch} ky + \beta \operatorname{sh} ky) \cos kx, \quad (4)$$

следовательно, вдоль линии тока  $\varphi = 0$  будем иметь

$$\frac{P}{e} = \operatorname{const.} + (kc^2 a - g\beta) \cos kx,$$

так что условие для свободной поверхности дает

$$kc^2 a - g\beta = 0. \quad (5)$$

Уравнения (3) и (5) определяют  $a$  и  $\beta$ . Профиль свободной поверхности дается уравнением

$$y = \beta \cos kx = \frac{\gamma}{\operatorname{ch} kh - \frac{g}{kc^2} \operatorname{sh} kh} \cos kx. \quad (6)$$

Если скорость потока будет меньше, чем определенная формулой (4) § 229 скорость волн, распространяющихся в спокойной воде постоянной глубины  $h$ , длина которых в точности равна расстоянию гофр друг от друга, то знаменатель будет отрицательным. В этом случае возвышения и опускания свободной поверхности будут как раз соответствовать опусканиям и возвышениям дна. В противоположном случае возвышения и опускания свободной поверхности будут соответствовать возвышениям и опусканиям дна, но с различными по величине амплитудами. Если  $c$  имеет в точности значение, даваемое формулой (4) § 229, то решение становится невозможным, как и следовало ожидать, так как знаменатель обращается в нуль. Чтобы получить и для этого случая результат, имеющий смысл, мы принуждены принять во внимание особо диссипативные силы трения.

Вышеизложенное решение можно по теореме Фурье обобщить так, чтобы оно годилось для случая, когда неровности дна следуют произвольному закону. Так, если профиль дна дается уравнением

$$y = -h + f(x) = -h + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos k(x - \xi) d\xi, \quad (7)$$

<sup>1)</sup> Sir. W. Thomson, On Stationary Waves in Flowing Water, Phil. Mag. (5). XXV, 353, 445, 517 (1886); XXIII, 52 (1887) [Papers, IV, 270]. Влияние резкого изменения уровня дна исследовалось Wien, Hydrodynamik. стр. 201.

то форму свободной поверхности мы получим с помощью наложения членов типа (6), соответствующих различным элементам интеграла Фурье; таким образом мы будем иметь

$$y = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi) \cos k(x - \xi)}{\operatorname{ch} kh - \frac{g}{kc^2} \operatorname{sh} kh} d\xi. \quad (8)$$

В случае единственной изолированной неровности на дне в точке, лежащей вертикально под началом, это приводится к

$$y = \frac{Q}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos kx}{\operatorname{ch} kh - \frac{g}{kc^2} \operatorname{sh} kh} dk = \frac{Q}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{u \cos \frac{xu}{h}}{u \operatorname{ch} u - \frac{gh}{c^2} \operatorname{sh} u} du, \quad (9)$$

где  $Q$  представляет величину площади, ограниченной профилем неровности и общим уровнем дна. Для случая понижения  $Q$ , конечно, будет отрицательным.

Исследование интеграла

$$\int \frac{\zeta e^{\frac{ix\zeta}{h}} d\zeta}{\zeta \operatorname{ch} \zeta - \frac{gh}{c^2} \operatorname{sh} \zeta} \quad (10)$$

проводится в точности, как в § 245. Подынтегральная функция отличается только множителем  $\frac{\zeta}{\operatorname{sh} \zeta}$ ; особые точки, следовательно, суть такие же, как и раньше, и мы можем поэтому сразу написать результат.

Таким образом для  $c^2 > gh$  форма поверхности будет

$$y = \frac{Q}{h} \sum_0^{\infty} B_s \frac{\beta_s}{\sin \beta_s} e^{\mp \beta_s \frac{x}{h}}, \quad (11)$$

причем верхний или нижний знак ставится, смотря потому, будет ли  $x$  положительным или отрицательным.

Если же  $c^2 < gh$ , то практически удобное решение для положительного  $x$  напишется в виде

$$y = -\frac{2Q}{h} A \frac{a}{\operatorname{sh} a} \sin \frac{ax}{h} + \frac{Q}{h} \sum_1^{\infty} B_s \frac{\beta_s}{\sin \beta_s} e^{-\beta_s \frac{x}{h}}, \quad (12)$$

а для отрицательного  $x$

$$y = \frac{Q}{h} \sum_1^{\infty} B_s \frac{\beta_s}{\sin \beta_s} e^{\beta_s \frac{x}{h}}. \quad (13)$$

Символы  $a$ ,  $\beta_s$ ,  $A_1$ ,  $B_s$  имеют то же значение, как в § 245<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Очень интересный рисунок профиля волны, обусловленного изолированной неровностью русла, встречается в работе Кельвина, *Phil. Mag.* (5) XXII, 517 (1886) [Papers, IV]. Влияние различного рода неровностей исследовано Чизотти в новых томах *Rend. della R. Accad. dei Lincei* в предположении, что  $c^2$  настолько больше  $gh$ , что можно пренебречь влиянием тяжести. Эти задачи имеют такой же характер, как в § 73.

§ 247. Подобным же образом мы можем вычислить то возмущение, которое возникает в равномерном потоке вследствие погружения цилиндрического препятствия, ось которого горизонтальна и перпендикулярна к направлению потока, при условии, что радиус  $l$  цилиндра мал<sup>1)</sup> сравнительно с глубиной  $f$  погружения оси.

Мы пишем

$$\varphi = -cx \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) + \chi, \quad (1)$$

где  $c$ , как и раньше, обозначает общую скорость потока, а  $r$  — расстояние от оси цилиндра, именно

$$r = \sqrt{x^2 + (y + f)^2}; \quad (2)$$

начало лежит здесь на невозмущенном уровне поверхности и как раз вертикально над осью. Это выражение дает

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad \text{для} \quad r = b,$$

если предположить, что значением  $\chi$  в окрестности цилиндра можно пренебречь.

Положим

$$\chi = \int_0^{\infty} a(k) e^{ky} \sin kx \, dk, \quad (3)$$

где  $a(k)$  есть функция  $k$ , которая должна быть определена более точно. Для уравнения свободной поверхности, рассматриваемой как стационарная, положим

$$\eta = \int_0^{\infty} \beta(k) \cos kx \, dk. \quad (4)$$

Геометрическое условие, которое должно быть выполнено на свободной поверхности, имеет вид

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial y} = c \frac{d\eta}{dx}, \quad (5)$$

где надо положить  $y = 0$ . Так как выражение (1) для положительных значений  $y + f$  равносильно выражению

$$\varphi = -cx - b^2 c \int_0^{\infty} e^{-k(y+f)} \sin kx \, dk + \chi, \quad (6)$$

то условие (5) будет выполняться, если

$$b^2 c e^{-kf} + a(k) = c\beta(k). \quad (7)$$

<sup>1)</sup> Это исследование заимствовано из работы Lamb, On Some cases of Wave-Motion on Deep Water, Ann. di matematica (3), XXI, 237 (1913). Я установил, что эта проблема была предложена Кельвином. Phil. Mag. (6), IX, 733 (1905) [Papers, IV, 369 (1904)].

Далее, для переменной части давления на свободной поверхности имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= -gy - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2; \\ \frac{p}{\rho} &= -g\eta - \frac{1}{2} c^2 - b^2 c^2 \int_0^{\infty} e^{-kf} \cos kx dk + c \frac{\partial \chi}{\partial x}; \\ \frac{p}{\rho} &= -g\eta - \frac{1}{2} c^2 - b^2 c^2 \int_0^{\infty} e^{-kf} \cos kx dk + \\ &\quad + c \int_0^{\infty} a(k) \cos kx dk, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где члены второго порядка относительно возмущения опущены. Это выражение не будет зависеть от  $x$ , если

$$g\beta(k) + kb^2 c^2 e^{-kf} - kca(k) = 0. \quad (9)$$

Отсюда и из (7) будем иметь

$$a(k) = \frac{k + \kappa}{k - \kappa} b^2 c e^{-kf}, \quad \beta(k) = \frac{2b^2 k e^{-kf}}{k - \kappa}, \quad (10)$$

где, как в § 242,

$$\kappa = \frac{g}{c^2}. \quad (11)$$

Следовательно,

$$\eta = 2b^2 \int_0^{\infty} \frac{ke^{-kf} \cos kx dk}{k - \kappa} = \frac{2b^2 f}{x^2 + f^2} + 2\kappa b^2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-kf} \cos kx dk}{k - \kappa}. \quad (12)$$

Интеграл будет несобственным, однако для положительного  $x$  его главное значение равно действительной части выражения

$$i\pi e^{-\kappa f + i\kappa x} + i \int_0^{\infty} \frac{e^{-mf - mx}}{im - \kappa} dm. \quad (13)$$

Если мы этим воспользуемся, то будем иметь

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{2b^2 f}{x^2 + f^2} - 2\pi\kappa b^2 e^{-\kappa f} \sin \kappa x - \\ &\quad - 2\kappa b^2 \int_0^{\infty} \frac{(\kappa \sin mf - m \cos mf) e^{-mx}}{m^2 + \kappa^2} dm. \end{aligned} \quad (14)$$

Для больших значений  $x$  будет иметь значение только вторая член.

Так как значение  $\eta$  в (12) есть четная функция от  $x$ , то для отрицательного  $x$  мы должны иметь

$$\eta = \frac{2b^2f}{x^2 + f^2} + 2\pi\kappa b^2 e^{-\kappa f} \sin \kappa x - 2\pi b^2 \int_0^{\infty} \frac{(\kappa \sin mf - m \cos mf) e^{m\kappa x}}{m^2 + \kappa^2} dm. \quad (15)$$

На возмущения, представленные этими формулами, можно наложить произвольную систему стационарных волн длиной  $\frac{2\pi}{\kappa}$ , так как они могут сохранять свое положение в пространстве и при наличии течения; если выбрать добавочную систему в виде

$$\eta = -2\pi\kappa b^2 e^{-\kappa f} \sin \kappa x, \quad (16)$$

то благодаря этому на некотором расстоянии вверх по течению ( $x < 0$ ) возмущение становится незаметным, как это и необходимо для физически пригодного решения. Результат тогда будет

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{2b^2f}{x^2 + f^2} - 4\pi\kappa b^2 e^{-\kappa f} \sin \kappa x + \text{и т. д. } [x > 0], \\ \eta &= \frac{2b^2f}{x^2 + f^2} + \text{и т. д. } [x < 0]. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Получается, таким образом, что непосредственно над препятствием возникает локальное возмущение, за которым вниз по течению следует ряд волн длиной  $\frac{2\pi c^2}{g}$  1).

Данное исследование легко приспособить к случаю, когда сечение цилиндра имеет произвольную форму. Принятое выше допущение означает в первом приближении то, что на достаточном расстоянии влияние цилиндра эквивалентно влиянию соответственно подобранного диполя. Обращаясь к § 72а, в общем случае мы можем принять

$$\varphi = -cx + \varphi_1 + \chi, \quad (18)$$

где

$$\varphi_1 = -\frac{(A+Q)x + H(y+f)}{2\pi \{x^2 + (y+f)^2\}} c. \quad (19)$$

Удобнее иметь дело с комплексными величинами, поэтому положим

$$\varphi_1 = C \int_0^{\infty} e^{-k(y+f)} \cos kx \, dk, \quad (20)$$

где

$$C = -\frac{i(A+Q) - H}{2\pi} c. \quad (21)$$

1) Если мы исследуем асимптотическое разложение определенного интеграла в (13) для большого значения  $\kappa f$ , то мы найдем после подстановки в (12), что важнейший член дает выражение  $-\frac{2b^2f}{x^2 + f^2}$ ; и он будет сокращаться с первым членом вышенаписанного выражения  $\eta$ . Это приближение было продолжено, далее, для средних значений  $\kappa f$  *Navelock, Proc. Roy. Soc. A, CXV, 274 (1927).*

В конце вычислений должна быть сохранена, конечно, только действительная часть функции (20). Отдельные вычисления могут быть проведены самим читателем. Конечный результат для больших значений  $|x|$  будет

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{(A+Q)f - Hx}{\pi(f^2 + x^2)} - \left\{ 2(A+Q)\kappa \sin \kappa x + \right. \\ &\quad \left. + 2\kappa H \cos \kappa x \right\} e^{-\kappa f} + \text{и т. д. } [x > 0], \\ \eta &= \frac{(A+Q)f - Hx}{\pi(f^2 + x^2)} + \text{и т. д. } [x < 0]. \end{aligned} \right\} (22)$$

Местное возмущение вблизи начала не будет симметричным, если  $H$  отлично от нуля.

Для случая эллиптического сечения, большая ось которого составляет угол  $\alpha$  с направлением течения, мы будем иметь

$$A = \pi(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha), \quad Q = \pi ab, \quad H = \pi(a^2 - b^2) \sin \alpha \cos \alpha. \quad (23)$$

В этом случае квадрат амплитуды волн будет

$$4\kappa^2(A+Q)^2 + 4\kappa^2 H^2 = 4\pi^2 \kappa^2 (a+b)^2 (a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha). \quad (24)$$

**§ 248.** Если мы в задачах §§ 243, 245 наложим на поток в целом скорость —  $c$ , параллельную оси  $x$ , то получим случай возмущающего давления, перемещающегося с постоянной скоростью  $c$  по поверхности в остальной спокойной воды. При такой постановке задачи легко понять в общем виде причину образования ряда волн, следующего за возмущением.

Например, если на ряд бесконечно близких равноотстоящих параллельных прямых на поверхности через равные промежутки времени действуют последовательно одинаковые бесконечно малые импульсы, то каждый импульс сам по себе производит систему волн исследованного в § 239 типа. Системы, возникшие от различных импульсов, накладываются друг на друга, и результат, очевидно, будет такой: отдельные части, с длиной волны, соответствующей скорости  $c$ , с какой возмущение распространяется по поверхности и направление распространения которых совпадает с направлением возмущения, будут усиливать друг друга. Исследования §§ 236, 237 показывают, что группы волн рассматриваемой частной длины будут постоянно оставаться сзади возмущения. Последнее заключение по необходимости будет видоизменено, когда будут рассматриваться капиллярные волны.

Проблема может трактоваться также с общей точки зрения независимо от особого рода рассмотренных волн, именно следующим образом<sup>1)</sup>.

За начало мы возьмем мгновенное положение возмущающего воздействия, относительно которого предполагаем, что оно движется со скоростью  $c$  в направлении отрицательной оси  $x$ . Эффект импульса  $\delta t$ , который был сообщен в предшествующий момент  $t$ , будет представляться формулой (7) § 241, если заменить  $x$  через  $ct - x$  и

<sup>1)</sup> L a m b, Phil. Mag. (6), XXXI, 386 (1916).

умножить на  $\delta t$ . Вводя малое трение, пропорциональное скорости, и интегрируя от  $t=0$  до  $t=\infty$ , получим

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \varphi(k) e^{i\sigma t - ik(ct-x)} dk + \int_0^{\infty} \varphi(k) e^{i\sigma t + ik(ct-x)} dk \right\} e^{-1/2 \mu t} dt. \quad (1)$$

Интегрирование по  $t$  дает

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(k) e^{ikx} dk}{\frac{1}{2} \mu - i(\sigma - kc)} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(k) e^{-ikx} dk}{\frac{1}{2} \mu - i(\sigma + kc)}. \quad (2)$$

Величина  $\mu$  по предположению мала и в пределе обращается в нуль. Главная часть результата таким образом будет зависеть от тех значений  $k$  в первом интеграле, для которых приближенно

$$\sigma = kc. \quad (3)$$

Если положить  $k = \varkappa + k'$ , где  $\varkappa$  есть корень этого уравнения, то приближенно будем иметь

$$\sigma - kc = \left( \frac{d\sigma}{dk} - c \right) k' = (U - c) k', \quad (4)$$

где  $U$  обозначает групповую скорость, соответствующую длине волны  $\frac{2\pi}{\varkappa}$ . Главная часть (2) будет равна, следовательно,

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \varphi(\varkappa) e^{i\varkappa x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik'x} \partial k'}{\frac{1}{2} \mu - i(U - c) k'} dk', \quad (5)$$

ибо существенных изменений не произойдет, если интеграл распространить до  $k' = \pm \infty$ . Для положительного  $a$  будем иметь<sup>1)</sup>

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx} dm}{a + im} = \begin{cases} 2\pi e^{-ax} & [x > 0], \\ 0 & [x < 0], \end{cases} \quad (6)$$

в то время как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx} dm}{a - im} = \begin{cases} 0 & [x > 0], \\ 2\pi e^{ax} & [x < 0]. \end{cases} \quad (7)$$

<sup>1)</sup> Приведенные результаты равносильны с известными формулами

$$a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx dm}{a^2 + m^2} = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m \sin mx dm}{a^2 + m^2} = \pi e^{\mp ax}$$

(где надо взять верхний или нижний знак, смотря по тому, будет ли  $x$  положительным или отрицательным); их можно, однако, получить и прямо путем интегрирования по контуру.



Отсюда следует для  $U < c$

$$\eta = \frac{\varphi(k) e^{ikx}}{c-U} e^{-\frac{1}{2} \frac{\mu x}{c-U}} \quad \text{или} \quad \eta = 0, \quad (8)$$

смотря по тому  $x \gtrless 0$ ; для  $U > c$  будем иметь

$$\eta = 0 \quad \text{или} \quad \eta = \frac{\varphi(k) e^{ikx}}{U-c} e^{-\frac{1}{2} \frac{\mu x}{U-c}} \quad (9)$$

в соответствующих случаях. Если  $\mu$  будет стремиться к нулю, то для ряда волн, вызываемых перемещающимся возмущением, получим простое выражение

$$\eta = \frac{\varphi(k) e^{ikx}}{|c-U|}. \quad (10)$$

Этот ряд волн следует за возмущением или предшествует ему, смотря по тому  $U \gtrless c$ . Примерами этих случаев являются соответственно тяжелые волны на воде и капиллярные волны (§§ 236, 266).

Принятое приближение в (4) только тогда будет законным, когда отношение:

$$\frac{d^2\sigma}{dk^2} k' : (U - c), \quad (11)$$

будет малым даже тогда, когда  $k'x$  есть небольшое кратное  $2\pi$ . Для этого необходимо, чтобы

$$\frac{d^2\sigma}{dk^2} : (U - c)x \quad (12)$$

было мало. За исключением случая, когда в точности  $U = c$ , это условие всегда будет выполняться для достаточно больших  $x$ . Можем прибавить к этому, что результаты (8) и (9) будут точными в том смысле, что они представляют главные члены при вычислении (2) по методу вычетов Коши; ср. § 242.

В случае волн на глубокой воде, образовавшихся вследствие концентрированного давления, полная величина которого равна  $P$ , мы полагаем для согласования с формулой (28) § 239

$$\varphi(k) = \frac{i\sigma P}{ge}. \quad (13)$$

Так как  $U = \frac{1}{2} c$ , то, взяв действительную часть, получим в согласии с (27) § 243<sup>1)</sup>

$$\eta = -\frac{2P\mu}{ge} \sin kx. \quad (14)$$

Если имеется несколько значений  $k$ , удовлетворяющих условию (3), то для каждого такого значения существует член типа (10). Этот

<sup>1)</sup> Из (2) можно без труда получить упомянутую полную формулу.

случай имеет место для волн воды, возникающих от совместного действия тяжести и капиллярности (§ 269), о чем мы будем сейчас говорить в случае, когда жидкости расположены друг над другом.

§ 249. Предыдущие результаты имеют значение для проблемы „волнового сопротивления“. Рассматривая плоскую задачу, представим две неподвижные вертикальные плоскости, проведенные одна перед, а вторая позади возмущающего тела. Если  $U < c$ , то область между плоскостями получает в единицу времени прирост энергии  $cE$ , где  $E$  есть средняя энергия единицы площади свободной поверхности. Этот прирост частично обусловлен работой сил давления на задней плоскости с мощностью  $UE$  (§ 237), а частично восполняется реакцией возмущающего тела. Таким образом, если  $R$  есть сопротивление, испытываемое возмущающим телом вследствие образования волн, то мы будем иметь

$$Rc + UE = cE, \quad \text{или} \quad R = \frac{c-U}{c} E. \quad (1)$$

Если же  $U > c$ , т. е. ряд волн опережает тело, то область между плоскостями теряет энергию в единицу времени  $cE$ . Так как потеря на первой плоскости есть  $UE$ , то будем иметь

$$Rc - UE = -cE, \quad \text{или} \quad R = \frac{U-c}{c} E. \quad (2)$$

Таким способом мы найдем, используя результаты § 237, для случая возмущения, перемещающегося со скоростью  $c < \sqrt{gh}$  по спокойной воде глубины  $h$ :

$$R = \frac{1}{4} g \rho a^2 \left( 1 - \frac{2\kappa h}{\text{sh } 2\kappa h} \right), \quad (3)$$

где  $a$  обозначает амплитуду волн. Если  $c$  возрастает от 0 до  $\sqrt{gh}$ , то  $\kappa h$  убывает от  $\infty$  до 0, так что  $R$  убывает от  $\frac{1}{4} g \rho a^2$  до 0. Если  $c > \sqrt{gh}$ , то эффект будет чисто местным, и мы будем иметь  $R = 0$ <sup>1)</sup>. Однако необходимо заметить, что амплитуда  $a$ , вызванная возмущением данного типа, будет также зависеть от  $c$ . Например, в случае погруженного цилиндра (43) § 244  $a$  будет пропорционально  $\kappa e^{-\kappa b}$ , где  $\kappa = \frac{g}{c^2}$ , а глубина берется бесконечной. В этом случае

$$R \text{ пропорционально } c^{-4} e^{-\frac{2gb}{c^2}} \text{ *).} \quad (4)$$

<sup>1)</sup> Ср. Sir. W. Thomson, On Ship Waves, Proc. Inst. Mech. Eng., 3 августа 1887 [Popular Lectures and Adresses, London, 1889—1894, III, 450]. Формула, равносильная с (3), имеется в работе того же автора, Phil. Mag. (5), XXII, 451. [Papers, IV, 279].

\* ) Вертикальная сила на цилиндр была вычислена Havelock, Proc. Roy. Soc. A, CXXII, 387 (1928).

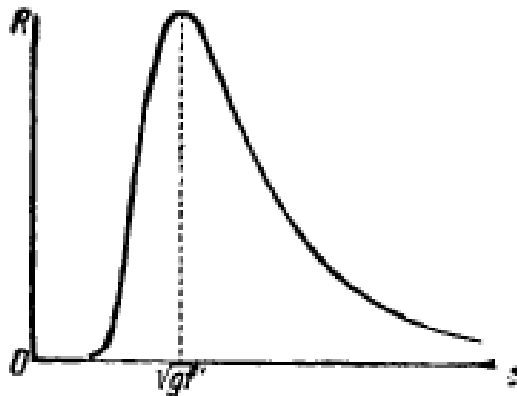
Интересный вариант общего случая мы будем иметь, когда слой жидкости наложен на другой слой, немного большей плотности. Если  $\rho$ ,  $\rho'$  обозначают соответственно плотности нижней и верхней жидкости и если глубина верхней жидкости равна  $h'$ , в то время как глубина нижней практически бесконечна, то рассмотренные в § 231 результаты Стокса показывают, что могут быть образованы две системы волн, длины которых  $\frac{2\pi}{\kappa}$  связаны со скоростью возмущения формулами

$$c^2 = \frac{g}{\kappa}, \quad c^2 = \frac{\rho - \rho'}{\rho \operatorname{ctgh} \kappa h' + \rho'} \frac{g}{\kappa}. \quad (5)$$

Легко показать, что определяемое вторым уравнением значение  $\kappa$  только тогда будет действительным, когда

$$c^2 < \frac{\rho - \rho'}{\rho} gh'. \quad (6)$$

Если  $c$  превосходит данное здесь критическое значение, то образуется только одна система волн, и, если разница плотностей будет малой, то сопротивление волн будет практически тем же самым, как в случае только одной жидкости. Если же, наоборот,  $c$  будет меньше критического значения, то может возникнуть второй тип волн, при котором амплитуда на поверхности раздела значительно превосходит амплитуду на верхней поверхности. С этими волнами связано „сопротивление мертвой воды“, на которое было указано в § 231<sup>1)</sup>.



Фиг. 60.

Задача о погруженном цилиндре (§ 247) представляет пример, в котором может быть вычислено волновое сопротивление движению твердого тела.

Средняя энергия волн, представленных

вторым членом в (14) § 247, отнесенная к единице площади поверхности воды, будет равна

$$E = \frac{1}{2} g \rho (4\pi \kappa b^2 e^{-\kappa f})^2.$$

Так как  $U = \frac{1}{2} c$ , то из (1) следует

$$R = 4\pi^2 g \rho b^4 \kappa^2 e^{-2\kappa f}. \quad (7)$$

Для данной глубины погружения ( $f$ )  $R$  имеет наибольшее значение, если  $\kappa f = 1$  или

$$c = \sqrt{gf}. \quad (8)$$

Выражая это через скорость  $c$ , получим

$$R = 4\pi^2 g^2 \rho b^4 c^{-4} e^{-\frac{2gf}{c^2}}. \quad (9)$$

Фиг. 60 показывает нам  $R$ , как функцию  $c^2$ .

<sup>1)</sup> E k t a n, см. примечание на стр. 464; см. также цитированную там же работу Ламба.

<sup>2)</sup> L a m b, Ann. di Mat., см. примечание выше. Тот же самый закон, который дает сопротивление как функцию скорости  $c$ , получил Хавелок для различных типов возмущений поверхности в работе Ship Resistance, Proc. R. S., LXXXIX, 489 (1913). Укажем также на более раннюю работу этого автора, The Wave-Making Resistance of Ships . . . , Proc. R. S., LXXXII, 276 (1909).