

На основании этого соображения уравнения движения могут быть проинтегрированы тогда, когда внешние силы имеют потенциал и p есть функция только от q . Мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2v\zeta + 2w\eta &= \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + \left(u \frac{\partial \lambda}{\partial x} + v \frac{\partial \lambda}{\partial y} + w \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x} - \left(u \frac{\partial \mu}{\partial x} + v \frac{\partial \mu}{\partial y} + w \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial t} \right) + \frac{D\lambda}{Dt} \frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{D\mu}{Dt} \frac{\partial \lambda}{\partial x}. \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда следует, при сделанном предположении, что $\frac{D\lambda}{Dt} = 0$, $\frac{D\mu}{Dt} = 0$, и согласно (5), (6) § 146 получим

$$\int \frac{dq}{q} + \frac{1}{2} q^2 + \Omega = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \lambda. \quad (12)$$

Произвольная функция от t предполагается включенной в $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$.

Если на λ и μ не наложены вышеуказанные условия, то, полагая

$$H = \int \frac{dp}{q} + \frac{1}{2} q^2 + \Omega - \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial t}, \quad (13)$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{D\lambda}{Dt} \frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{D\mu}{Dt} \frac{\partial \lambda}{\partial x} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \frac{D\lambda}{Dt} \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{D\mu}{Dt} \frac{\partial \lambda}{\partial y} &= -\frac{\partial H}{\partial y}, \\ \frac{D\lambda}{Dt} \frac{\partial \mu}{\partial z} - \frac{D\mu}{Dt} \frac{\partial \lambda}{\partial z} &= -\frac{\partial H}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial (H, \lambda, \mu)}{\partial (x, y, z)} = 0, \quad (15)$$

а это показывает, что H есть выражение вида $f(\lambda, \mu, t)$ и

$$\frac{D\lambda}{Dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mu}, \quad \frac{D\mu}{Dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad ^1). \quad (16)$$

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ПРИЛИВНЫЕ ВОЛНЫ

§ 168. Одно из наиболее интересных и плодотворных применений гидродинамической теории представляют малые колебания, которые совершает жидкость со свободной поверхностью под действием тяжести. В некоторых случаях, которые с теоретической точки зрения представляют до некоторой степени частные случаи, но практически особенно важны, эти колебания могут в комбинации образовать прогрессивные волны, которые (в первом приближении), не меняя своего вида, движутся поступательно на поверхности.

¹⁾ Автору было сообщено, что эти уравнения были даны в диссертации F. Stuart (Dublin, 1900).

Выражение „приливные волны“ применялось в различном смысле, но наиболее естественно ограничить его применение теми колебаниями, зависящими от тяжести, которые обладают характерными чертами морских приливов, происходящих под влиянием солнца и луны. Поэтому указанное выражение мы и выбрали в качестве заглавия настоящей главы, где будут рассматриваться волны, при которых движение жидкости происходит в основном горизонтально и, следовательно (как мы это увидим), для всех частиц, лежащих на одной и той же вертикали, практически будет одинаковым. Это последнее обстоятельство существенно упрощает теорию.

Необходимо напомнить сначала некоторые теоремы общей теории малых колебаний, которые в последующих исследованиях постоянно будут находить свое применение¹⁾. Теория относится главным образом к системе с конечным числом степеней свободы, но результаты сохраняют свое значение (если их соответственно истолковать) также и при отсутствии этого ограничения²⁾.

Пусть q_1, q_2, \dots, q_n суть обобщенные координаты, определяющие положение динамической системы, и пусть они выбраны таким образом, что для положения равновесия они обращаются в нуль. Кинетическая энергия есть однородная квадратичная функция обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$:

$$2T = a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2 + \dots + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dots, \quad (1)$$

где коэффициенты в общем случае суть функции координат q_1, q_2, \dots, q_n , а в случае *малых* движений могут рассматриваться как постоянные, имеющие как раз те значения, которые соответствуют $q_1, q_2, \dots, q_n = 0$. Далее, если система, как мы и будем считать, „консервативна“, то потенциальная энергия V малого перемещения есть однородная квадратичная функция компонент перемещения q_1, q_2, \dots, q_n

$$2V = c_{11}q_1^2 + c_{22}q_2^2 + \dots + 2c_{12}q_1q_2 + \dots, \quad (2)$$

причем коэффициенты в том же смысле, как и выше величины a_{ik} , могут рассматриваться как постоянные.

При помощи действительного³⁾ линейного преобразования координат q_1, q_2, \dots, q_n можно представить T и V одновременно как суммы квадратов; новые координаты, введенные таким образом, назы-

¹⁾ Более полное изложение теории можно найти у Thomson a. Tait, § 337, ..., Релей, Теория звука, т. I, гл. IV; Routh, Elementary Rigid Dynamics, 6-е изд., London, 1897 (по-немецки — Leipzig, 1898), гл. IX; Уиттекер, Аналитическая динамика, гл. VII, ОНТИ, 1937 г.; Г. Ламб, Теоретическая механика, том третий, Москва, 1936 г.

²⁾ Путь, по которому возможен точный переход к случаю бесконечно большого числа степеней свободы, указан Hilbert, Gött. Nachr., 1904.

³⁾ Алгебраическое доказательство этого основывается на предположении, что по крайней мере одна из функций T, V существенно положительна. В настоящем случае этому условию удовлетворяет, конечно, T .

ваются нормальными координатами системы. С помощью этих координат будем иметь

$$2T = a_1 \dot{q}_1^2 + a_2 \dot{q}_2^2 + \dots + a_n \dot{q}_n^2, \quad (3)$$

$$2V = c_1 q_1^2 + c_2 q_2^2 + \dots + c_n q_n^2. \quad (4)$$

Коэффициенты a_1, a_2, \dots, a_n называются главными коэффициентами инерции; они обязательно положительны. Коэффициенты c_1, c_2, \dots, c_n могут быть названы главными коэффициентами устойчивости; они все будут положительными, если только невозмущенная конфигурация устойчива.

Если на систему действуют заданные внешние силы, то работа их при произвольном малом перемещении $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ может быть выражена в таком виде:

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n. \quad (5)$$

Коэффициенты Q_1, Q_2, \dots, Q_n называются тогда нормальными компонентами возмущающей силы.

Уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = - \frac{\partial V}{\partial q_r} + Q_r \quad [r = 1, 2, \dots, n] \quad (6)$$

для случая бесконечно малых движений принимают вид

$$a_{1r} \ddot{q}_1 + a_{2r} \ddot{q}_2 + \dots + c_{1r} q_1 + c_{2r} q_2 + \dots = Q_r \quad (7)$$

или, после введения нормальных координат,

$$a_r \ddot{q}_r + c_r q_r = Q_r. \quad (8)$$

Отсюда видно, что нормальные координаты характеризуются динамически следующими свойствами:

1. Импульс, соответствующий какой-нибудь нормальной координате, вызывает начальное движение *только* относительно той же самой координаты.

2. Возмущающая непрерывно действующая сила, соответствующая некоторой нормальной координате, вызывает статическое перемещение *только* относительно этой же координаты.

Чтобы получить *свободные* колебания системы, полагаем $Q_r = 0$. Решая уравнение (8), находим

$$q_r = A_r \cos(\sigma_r t + \varepsilon_r), \quad (9)$$

где

$$\sigma_r = \left(\frac{c_r}{a_r} \right)^{1/2} \quad (10)$$

и A_r , ε_r суть произвольные постоянные¹⁾. Таким образом возможен тип свободных колебаний, при котором изменяется только одна какая-то нормальная координата q_r , и движение каждой частицы системы, в силу того, что оно линейно зависит от q_r , будет представлять простое гармоническое колебание с периодом $\frac{2\pi}{\sigma_r}$; более того, частицы, двигаясь с одинаковой фазой, одновременно проходят через положение равновесия. Различные типы движения, обладающие указанными признаками, называются нормальными колебаниями системы; их число равно числу степеней свободы, и любое свободное колебание системы может быть получено из них при помощи сложения при соответствующем выборе амплитуд (A_r) и фаз (ε_r). Из выражения (10) можно видеть, что при всяком нормальном колебании средние значения (относительно времени) кинетической и потенциальной энергии равны друг другу.

В некоторых случаях, именно, когда два или несколько свободных периодов $\frac{2\pi}{\sigma}$ системы равны между собой, нормальные координаты остаются до известной степени неопределенными, т. е. они могут быть выбраны бесконечно большим числом способов. Сложение соответствующих колебаний с произвольными амплитудами и фазами дает малое колебание, при котором движение каждой частицы есть результирующее простых гармонических колебаний различного направления и есть, следовательно, вообще эллиптическое колебание с тем же периодом. Примером этого является сферический маятник; важный пример из нашей рассматриваемой здесь области представляют прогрессивные волны в глубокой воде (IX гл.).

Если один из коэффициентов устойчивости (c_r) будет отрицательным, то значение σ_r будет чисто мнимым. Тригонометрическую функцию в выражении (9) можно заменить тогда через действительные показательные функции, и произвольное перемещение будет вообще возрастать, а тогда предположения, на которых основывается приближенное уравнение (8), сделаются несостоятельными. Невозмущенное положение следует в этом случае рассматривать как неустойчивое. Необходимое и достаточное условие для устойчивости (в этом смысле) состоит в том, что потенциальная энергия V в положении равновесия должна быть минимальна.

Чтобы найти действие периодических возмущающих сил, достаточно рассмотреть случай, когда Q_r есть простая тригонометрическая функция времени, например,

$$Q_r = C_r \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (11)$$

¹⁾ Отношение $\frac{\sigma}{2\pi}$ дает частоту колебаний. Для самой величины σ рекомендуется ввести отдельное название; Кельвин и Дарвин в своих исследованиях о приливах употребляли для этого выражение „быстрота“ (Speed). Немцамид я σ предложен термин „круговая частота“ (Kreisfrequenz).

где значение σ задано. Этот случай не только наиболее интересен сам по себе, но, как мы знаем из теории рядов Фурье, как бы Q_r ни зависело от времени, оно может быть выражено рядом, члены которого имеют вид (11). Частный интеграл уравнения (8) имеет тогда вид

$$q_r = \frac{C_r}{c_r - \sigma^2 a_r} \cos(\sigma t + \varepsilon). \quad (12)$$

Это представляет вынужденное колебание, вызываемое периодической силой Q_r . При таком колебании движение каждой частицы есть периодическое с заданным периодом $\frac{2\pi}{\sigma}$, и наибольшие значения перемещений совпадают по времени с максимумом и минимумом силы.

Постоянная сила, равная мгновенному значению действующей силы (11), вызывает перемещение

$$\bar{q}_r = \frac{C_r}{c_r} \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (13)$$

т. е. то самое, конечно, которое имело бы место, если бы коэффициент инерции a_r равнялся нулю. Поэтому выражение (12) может быть представлено в форме

$$q_r = \frac{1}{1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_r^2}} \bar{q}_r, \quad (14)$$

где σ_r имеет значение, данное формулой (10). Это очень удобная формула; она позволяет выразить действие периодической силы, если мы знаем статическое действие силы того же самого типа. Необходимо заметить, что q_r и Q_r имеют одинаковые или противоположные фазы, смотря по тому $\sigma \lesseqgtr \sigma_r$, т. е. будет ли период возмущающей силы больше или меньше периода свободного колебания. Простой пример этого представляет простой маятник, на который действует периодическая горизонтальная сила. Другие важные примеры будут даны в теории приливов¹⁾.

Если σ очень велико по сравнению с σ_r , то из выражения (12) мы получаем

$$q_r = - \frac{C_r}{\sigma^2 a_r} \cos(\sigma t + \varepsilon); \quad (15)$$

перемещение имеет теперь постоянно противоположную фазу сравнительно с силой и зависит только от инерции системы.

Если период силы, действующей на систему, приблизительно равен периоду нормального колебания порядка r , то амплитуда вынужденного колебания согласно формуле (14) будет очень велика

¹⁾ Ср. Т. Young, A Theorie of Tides, Nicholson's Journal, XXXV (1813) [Miscellaneous Works, London, 1854, II, 262].

сравнительно с \bar{q}_r . В случае полного равенства решение (12) не годится и должно быть заменено выражением

$$q_r = \frac{C_r t}{2\sigma a_r} \sin(\sigma t + \varepsilon). \quad (16)$$

Это выражение дает колебание с непрерывно возрастающей амплитудой и может поэтому служить только для представления начальных стадий возмущения.

Мы упомянем еще другое важное свойство нормальных колебаний. Пусть вследствие наложения связей без трения система вынуждена колебаться каким-то заранее заданным образом, так что ее положение во всякий момент может быть выражено при помощи одной переменной, которую мы обозначим через θ ; в таком случае мы получаем

$$q_r = B_r \theta,$$

где величины B_r суть определенные постоянные. Отсюда получаем

$$2T = (B_1^2 a_1 + B_2^2 a_2 + \dots + B_n^2 a_n) \theta^2, \quad (17)$$

$$2V = (B_1^2 c_1 + B_2^2 c_2 + \dots + B_n^2 c_n) \theta^2. \quad (18)$$

Если θ пропорционально $\cos(\sigma t + \varepsilon)$, то постоянство энергии ($T + V$) требует, чтобы

$$\sigma^2 = \frac{B_1^2 c_1 + B_2^2 c_2 + \dots + B_n^2 c_n}{B_1^2 a_1 + B_2^2 a_2 + \dots + B_n^2 a_n}; \quad (19)$$

σ^2 есть, таким образом, промежуточное значение между наибольшим и наименьшим значением величин $\frac{c_r}{a_r}$; другими словами, частота колебания с на-

ложенными связями лежит между наибольшей и наименьшей частотами, соответствующими нормальным колебаниям системы. В частности, следует, что когда на систему накладывается связь, частота самого медленного свободного колебания *увеличивается*. Более того, если система со связью мало уклоняется в отношении нормальной координаты (r), то σ^2 отличается

от $\frac{c_r}{a_r}$ на малую величину *второго порядка*. Это дает метод для приближен-

ной оценки частоты в тех случаях, когда нормальные типы колебаний не могут быть точно определены ¹⁾. Примеры этого можно будет найти в §§ 191, 259. Далее можно показать, что в случае наложения одной связи, которая только сводит число степеней свободы с n на $n - 1$, периоды измененной системы заключаются между периодами первоначальной ²⁾.

Еще Лагранж ³⁾ заметил следующее: если в уравнениях типа (7), где координаты не обязательно нормальные, положить $Q_r = 0$ и принять

$$q_r = A_r \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (20)$$

¹⁾ Rayleigh, Some General Theorems relating to Vibrations, Proc. Lond. Math. Soc., IV, 357 (1874) [Papers, I, 170] и Theory of Sound, гл. IV. Метод был разработан Ritz, Journ. für Math., CXXXV, 1 (1908) и Ann. d. Physik, XXVIII (1909) [Gesammelte Werke, Paris, 1911, стр. 192, 265].

²⁾ Routh, Elementary Rigid Dynamics, § 67; Rayleigh, Theory of Sound, 2-е изд., § 92a; Унттекер, Аналитическая динамика, ОНТИ, 1937.

³⁾ Лагранж, Аналитическая механика, т. I, ОНТИ, 1939. Mécanique Analytique (изд. Бертрана), I, 331 [Oeuvres, XI, 380].

то результирующие уравнения тождественны с теми, которые определяют стационарные значения, например, выражения

$$\sigma^2 = \frac{c_{11}A_1^2 + c_{22}A_2^2 + \dots + 2c_{12}A_1A_2 + \dots}{a_{11}A_1^2 + a_{22}A_2^2 + \dots + 2a_{12}A_1A_2 + \dots} = \frac{V(A, A)}{T(A, A)}. \quad (21)$$

Так как $T(A, A)$ есть определенная положительная форма, то знаменатель не может обратиться в нуль, следовательно, это выражение должно иметь минимум. Более того, исходя из этого свойства, можно построить доказательство, что n значений σ^2 все будут действительными¹⁾. Они, очевидно, все будут положительными, когда V будет существенно положительной.

Теорема Рэлея, таким образом, родственна гамильтоновой формуле (§ 135, что можно видеть, если принять

$$q_r = A_r \sin \sigma t \quad (22)$$

и положить $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{2\pi}{\sigma}$; ср. § 205з.

Изменения, вводимые в теорию малых колебаний при учете сил трения, будут рассмотрены в главе XI.

Длинные волны в каналах

§ 169. Переходя теперь к специальной задаче этой главы, начнем со случая волн, распространяющихся вдоль прямолинейного канала с горизонтальным руслом и параллельными вертикальными стенками.

Пусть ось x будет параллельна длине канала, а ось y направлена вертикально вверх; будем предполагать, что движение происходит в этих двух измерениях x , y . Ординату свободной поверхности, соответствующую в момент t абсциссе x , обозначим через $y_0 + \eta$, где y_0 означает ординату в невозмущенном состоянии.

Как уже сказано, при всех исследованиях этой главы мы будем предполагать, что можно пренебречь вертикальным ускорением частиц жидкости или, выражаясь точнее, что давление в произвольной точке (x, y) практически будет равно статическому давлению, обусловленному глубиной под свободной поверхностью; следовательно, будет выполняться уравнение

$$p - p_0 = g\varrho (y_0 + \eta - y), \quad (1)$$

где p_0 есть постоянное давление на свободной поверхности. Отсюда имеем

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g\varrho \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (2)$$

Это уравнение не зависит от y , так что горизонтальное ускорение для всех частиц жидкости, расположенных в плоскости, перпендикулярной к оси x , имеет одно и то же значение. Отсюда следует, что все частицы, которые в некоторый момент времени лежат в ука-

¹⁾ См. Poincaré, Journal de Math. (5), II, 83 (1896); Ламб, Теоретическая механика, том III, § 92.

занной плоскости, и в дальнейшем будут лежать в такой же плоскости, другими словами, горизонтальная скорость u есть функция только от x и t .

В уравнении горизонтального движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

можно в случае бесконечно малых движений опустить член второго порядка $u \frac{\partial u}{\partial x}$; тогда мы получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (3)$$

Пусть теперь

$$\xi = \int u dt,$$

т. е. ξ есть интеграл по времени от перемещения вдоль плоскости x за время t . В случае *малых движений* он будет равен, если пренебречь малыми величинами выше первого порядка, перемещению частиц, которые лежали первоначально в этой плоскости, или перемещению частиц, которые в момент t фактически в ней лежат. Уравнение (3) перейдет теперь в следующее:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (4)$$

Уравнение неразрывности можно получить, вычисляя объем жидкости, который войдет в момент t в пространство между плоскостями x и $x + \delta x$; если h обозначает глубину и b ширину канала, то будем иметь

$$-\frac{\partial}{\partial x} (\xi h b) \delta x = \eta b \delta x$$

или

$$\eta = -h \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (5)$$

Тот же самый результат получается из обыкновенной формы уравнения неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

Из этого уравнения следует

$$v = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy = -y \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (7)$$

если начало перенести на момент на дно канала. Эта формула представляет интерес потому, что она показывает как следствие нашего первоначального допущения, что вертикальная скорость частицы пропорциональна первой степени ее высоты от дна. На свободной поверхности будем иметь

$$y = h + \eta, \quad v = \frac{\partial \eta}{\partial t};$$

отсюда следует, если пренебречь произведением малых величин,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -h \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t}. \quad (8)$$

Интегрируя уравнение (8) по t , получим уравнение (5).

Исключив η из уравнений (4) и (5), получим

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (9)$$

Исключение же ξ дает уравнение того же вида, именно

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \quad (10)$$

Только что приведенное исследование можно непосредственно распространить на случай канала с произвольной, но постоянной по длине формой поперечного сечения¹⁾. Если поперечное сечение невозмущенной жидкости имеет площадь S , а ширина свободной поверхности есть b , то уравнение неразрывности будет

$$-\frac{\partial}{\partial x} (\xi S) \delta x = \eta b \delta x; \quad (11)$$

отсюда следует, как и выше,

$$\eta = -h \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (12)$$

предполагая, что $h = \frac{S}{b}$, т. е. h означает теперь среднюю глубину канала. Уравнение движения (4) остается, конечно, без изменения.

§ 170. Уравнение (9) имеет хорошо знакомый вид, который встречается при различных физических проблемах, например, при поперечных колебаниях струн и при движении звука в одном измерении.

Чтобы интегрировать это уравнение, напомним для краткости

$$c = \sqrt{gh} \quad (13)$$

и

$$x - ct = x_1, \quad x + ct = x_2.$$

Если ввести x_1 и x_2 в качестве независимых переменных, то уравнение (9) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Общее решение его будет

$$\xi = F(x - ct) + f(x + ct), \quad (14)$$

где F и f суть произвольные функции.

¹⁾ Kelland, Trans R. S. Edin., XIV (1839).

Соответствующие значения для скорости какой-либо частицы жидкости и для возвышения поверхности будут

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi}{c} &= -F'(x-ct) + f'(x+ct), \\ \frac{\eta}{h} &= -F'(x-ct) - f'(x+ct). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Истолкование этого результата очень просто. Рассмотрим сначала движение, представленное только первым членом правой части уравнения (14). Так как $F(x-ct)$ не меняется, если t и x возрастают соответственно на τ и на $c\tau$, то, очевидно, возмущение, которое в момент t было в точке x , в момент $t+\tau$ переносится в точку $x+c\tau$. Возмущение перемещается таким образом, не изменяясь, с постоянной скоростью c вдоль канала. Другими словами, мы имеем здесь прогрессивную волну, которая перемещается со скоростью c вдоль положительного направления оси x . Точно так же второй член правой части (14) представляет прогрессивную волну, которая распространяется со скоростью c в отрицательном направлении оси x . Так как (14) есть *общее* решение (9), то всякое произвольное движение жидкости, которое удовлетворяет условиям предыдущего параграфа, может рассматриваться состоящим из двух аналогичных волн.

Скорость распространения c согласно (13) есть скорость, соответствующая свободному падению с высоты, равной половине глубины невозмущенной жидкости¹⁾.

Следующая таблица дает скорость распространения волн для различных глубин; она будет иметь интерес позднее в связи с теорией приливов.

h м	c м/сек	c км/час	$\frac{2\pi a}{c}$ (часы)
97,5	31	111	360
390	62	222	180
1560	123	444	90
3510 ²⁾	185	667	60
6240	247	889	45

Последний столбец дает время, которое потребовалось бы для волны, чтобы пройти расстояние, равное длине земного экватора ($2\pi a$). Чтобы «длинная» волна могла пройти это расстояние в 24 часа, глубина должна равняться приблизительно 22 км. Не следует забывать, что эти числовые результаты годятся только для волн, удовлетворяющих вышеизложенным условиям.

Значение этих условий более полно будет выяснено в § 172.

¹⁾ Lagrange, Nouv. mém. d. l'Acad. de Berlin, 1781 [Oeuvres, I, 747].

²⁾ Это число, вероятно, сравнимо с порядком средней глубины океанов.

§ 171. Чтобы исследовать действие произвольного начального возмущения, предположим, что для $t=0$ имеем

$$\frac{\dot{\xi}}{c} = \varphi(x), \quad \frac{\eta}{h} = \psi(x). \quad (16)$$

Функции F' и f' выражения (15) будут тогда иметь вид

$$\left. \begin{aligned} F'(x) &= -\frac{1}{2} \{ \varphi(x) + \psi(x) \}, \\ f'(x) &= \frac{1}{2} \{ \varphi(x) - \psi(x) \}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Следовательно, если провести кривые

$$y = \eta_1, \quad y = \eta_2,$$

где

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{2} h \{ \psi(x) + \varphi(x) \}, \\ \eta_2 &= \frac{1}{2} h \{ \psi(x) - \varphi(x) \}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

то можно будет найти профиль волны во всякий следующий момент t . Для этого надо смещать эти кривые параллельно оси x на отрезки $\pm ct$ и складывать (алгебраически) соответствующие ординаты. Если, например, начальное возмущение было ограничено длиной l оси x , то оно по истечении времени, равного $\frac{l}{2c}$, будет переходить в две прогрессивные волны длины l , перемещающиеся в противоположных направлениях.

Для частного случая, когда в начальном состоянии $\dot{\xi} = 0$ и, следовательно, $\varphi(x) = 0$, будем иметь $\eta_1 = \eta_2$; возвышение в каждой из образовавшихся волн будет тогда равно в точности половине того возвышения, которое было в соответствующих точках при первоначальном возмущении.

Если первоначальное возмущение таково, что $\dot{\xi} = \pm \frac{\eta}{h} c$, то из уравнений (16) и (17) следует, что движение будет состоять из системы волн, распространяющихся только в одном направлении, так как одна из двух функций F' и f' будет тогда равна нулю.

Легко представить движение частицы поверхности в то время, когда прогрессивная волна одного из двух видов проходит мимо нее. Возьмем, например,

$$\dot{\xi} = F(x - ct) \quad (19)$$

и, следовательно,

$$\dot{\xi} = c \frac{\eta}{h}. \quad (20)$$

Частица будет находиться в покое до тех пор, пока ее не достигла волна, а затем она будет двигаться вперед со скоростью, которая

во всякий момент времени пропорциональна возвышению над средним уровнем; скорость частицы при этом будет меньше скорости волны c , и их отношение равно отношению возвышения поверхности к глубине жидкости. Полное перемещение в некоторый произвольный момент будет равно

$$\xi = \frac{1}{h} \int \eta c dt.$$

Этот интеграл при ширине канала, равной единице, измеряет объем той части волны, которая к рассматриваемому моменту прошла через частицу. Когда, наконец, волна прошла, то частица приходит опять в положение равновесия, расстояние которого от первоначального положения будет равно полному объему поднятой воды, деленному на площадь поперечного сечения канала.

§ 172. Мы можем исследовать теперь, при каких условиях решение, данное формулой (14), будет совместимо с теми предварительными допущениями, которые были приняты в § 169.

Точное уравнение для вертикального движения

$$e \frac{Dv}{Dt} = - \frac{\partial p}{\partial y} - g e$$

после интегрирования по y дает

$$p - p_0 = g e (y_0 + \eta - y) - e \int_y^{y_0 + \eta} \frac{Dv}{Dt} dy. \quad (21)$$

Если βh будет мало сравнительно с $g\eta$, то это уравнение можно заменить приближенным уравнением (1), причем β обозначает максимум вертикального ускорения. В самом деле, если расстояние между двумя последовательными узловыми точками прогрессивной волны (т. е. точками, в которых профиль волны встречает невозмущенный уровень) обозначить через λ , то время, которое требуется соответствующей части волны, чтобы пройти это расстояние, будет равно $\frac{\lambda}{c}$; следовательно, если предположить, что градиент $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ всюду мал, то вертикальная скорость будет величиной порядка $\frac{\eta c}{\lambda}$ ¹⁾, а вертикальное ускорение — порядка $\frac{\eta c^2}{\lambda^2}$, где η обозначает максимум возвышения или впадины. Таким образом, действительно βh будет мало сравнительно с $g\eta$ при условии, что $\frac{h^2}{\lambda^2}$ есть малая величина.

Пологие волны, длина λ которых велика по сравнению с глубиной жидкости, называются длинными волнами.

¹⁾ Если сравнить с уравнением (20), то мы увидим, что отношение максимума вертикальной скорости к максимуму горизонтальной есть величина порядка $\frac{h}{\lambda}$.

Далее, ограничение бесконечно малыми движениями, сделанное в уравнении (3), состояло в пренебрежении и $\frac{\partial u}{\partial x}$ по сравнению с $\frac{\partial u}{\partial t}$. В прогрессивной волне мы имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \pm c \frac{\partial u}{\partial x};$$

и должно, следовательно, быть мало по сравнению с c , и поэтому согласно (20) η также должно быть мало сравнительно с h . Необходимо заметить, что это условие совершенно отлично от предыдущего, которое может быть справедливо и в тех случаях, когда движение нельзя рассматривать как бесконечно малое (см. § 187).

Предыдущие условия будут выполнены, конечно, в общем случае, представленном уравнением (14), если только они выполнены для каждой из двух прогрессивных волн, на которые можно разложить возмущение.

§ 173. Существует еще другой, хотя в общем и менее удобный метод для исследования движения длинных волн, в котором применяется метод Лагранжа, т. е. координаты относятся к отдельным частицам жидкости. Ради простоты мы рассмотрим только случай канала с прямоугольным поперечным сечением¹⁾. Основное допущение, что можно пренебречь вертикальным ускорением, обуславливает, как и раньше, что горизонтальное движение всех частиц в плоскости, перпендикулярной к длине канала, должно быть одно и то же. Мы обозначим поэтому через $x + \xi$ абсциссу в момент t той плоскости частиц, невозмущенная абсцисса которой была x . Если η означает возвышение свободной поверхности в этой плоскости, то уравнение движения для слоя с шириной, равной единице, и длины (в невозмущенном состоянии) δx будет

$$\rho h \delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial p}{\partial x} \delta x (h + \eta),$$

где множитель $\frac{\partial p}{\partial x} \delta x$ означает разность давлений для каких-то двух, друг против друга лежащих по обеим сторонам слоя частиц x и $x + \delta x$, а множитель $h + \eta$ представляет площадь слоя. Так как мы предполагаем, что давление на частицу зависит только от глубины под свободной поверхностью, то мы можем положить

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

так что наше динамическое уравнение выразится следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \left(1 + \frac{\eta}{h} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (1)$$

¹⁾ Airy, *Encycl. Metrop., Tides and Waves*, § 192 (1845); см. также Stokes, *On Waves*, *Camb. and Dub. Math. Journ.*, IV (1849) [*Papers*, II, 222]. Случай канала с косыми стенками рассматривался Mc. Cowan, *On the Theorie of Long Waves*, *Phil. Mag.* (5), XXXV, 250 (1892).

Уравнение неразрывности получим, если приравняем друг другу объемы слоя, состоящего из тех же самых частиц в возмущенном и невозмущенном состоянии. Таким образом

$$\left(\delta x + \frac{\partial \xi}{\partial x} \delta x\right)(h + \eta) = h \delta x,$$

или

$$1 + \frac{\eta}{h} = \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{-1}. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) мы можем исключить η или ξ ; результат, выраженный через ξ , будет проще, именно

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = gh \frac{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}{\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^3}. \quad (3)$$

Это есть общее уравнение длинных волн в канале с постоянным по длине сечением и вертикальными стенками¹⁾.

До сих пор при нашем исследовании мы делали только одно допущение, что при вычислении давления можно пренебречь вертикальным ускорением частиц. Примем теперь, кроме того, что $\frac{\eta}{h}$ есть малая величина; тогда уравнения (2) и (3) сведутся к уравнениям

$$\eta = -h \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (4)$$

и

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (5)$$

Возвышение η удовлетворяет уравнению такого же вида:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \quad (6)$$

Эти уравнения согласуются с нашими прежними результатами; в самом деле, малость $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ обозначает, что относительное перемещение двух частиц всегда есть только малая дробь от расстояния между ними, следовательно, в первом приближении несущественно, относится ли x к неподвижной в пространстве плоскости или к плоскости, движущейся вместе с жидкостью.

§ 174. Потенциальная энергия волны или системы волн, зависящая от повышения или понижения жидкости над или под средним уровнем, выражается для единицы ширины интегралом

$$ge \iint y \, dx \, dy,$$

¹⁾ А ігу, см. выше

где интегрирование по y необходимо взять между пределами 0 и η , а по x — по всей длине системы волн. Выполнив первое интегрирование, получим

$$\frac{1}{2} g \rho \int \eta^2 dx. \quad (1)$$

Кинетическая же энергия будет равна

$$\frac{1}{2} \rho h \int \dot{\xi}^2 dx. \quad (2)$$

При системе волн, распространяющихся только в одном направлении, мы имеем

$$\dot{\xi} = \pm \frac{c}{h} \eta,$$

и, следовательно, выражения (1) и (2) будут равны; это означает, что полная энергия есть наполовину потенциальная и наполовину кинетическая.

Этот результат может быть получен в более общем виде следующим образом¹⁾. Всякую прогрессивную волну можно представить возникающей благодаря распадению на две волны, распространяющиеся в противоположных направлениях, некоторого начального возмущения, при котором скорость частиц всюду равна нулю, и, следовательно, полная энергия есть потенциальная энергия. Из § 171 следует, что обе волны, происшедшие таким образом, будут симметричны во всех отношениях, так что каждая из них должна содержать половину первоначального запаса энергии. Так как, однако, возвышение соответствующих точек обеих полученных волн в точности равно половине возвышения первоначального возмущения, то потенциальная энергия каждой волны согласно выражению (1) равна четверти первоначального запаса энергии. Остальная (кинетическая) часть энергии каждой полученной волны должна поэтому равняться также одной четверти первоначальной энергии.

§ 175. Если в каком-нибудь случае волны, распространяющейся только в одном направлении без изменения своей формы, мы сообщим всей массе жидкости скорость, равную и противоположную скорости распространения волн, то движение будет *установившимся* и в то же время силы, действующие на каждую частицу, остаются теми же, что и раньше. С помощью этого приема можно очень легко исследовать законы распространения волн²⁾. Например в рассматриваемом случае согласно (5) § 22 будем иметь на свободной поверхности

$$\frac{p}{\rho} = \text{const.} - g(h + \eta) - \frac{1}{2} q^2, \quad (1)$$

где q означает скорость. Если наклон профиля волны всюду незначителен и глубина h мала по сравнению с длиной волны, то можно

¹⁾ Rayleigh, On Waves, Phil. Mag. (5), I, 257 (1876) [Papers, I, 251].

²⁾ Rayleigh, см. выше.

принять, что горизонтальная скорость на протяжении всей глубины одна и та же и приблизительно равна q . Уравнение неразрывности тогда будет

$$q(h + \eta) = ch, \quad (2)$$

где c обозначает скорость установившегося движения в тех местах, в которых глубина потока одна и та же и равна h . Подставляя в уравнение (1) это значение q , мы получим

$$\frac{p}{\rho} = \text{const.} - gh \left(1 + \frac{\eta}{h}\right) - \frac{1}{2} c^2 \left(1 + \frac{\eta}{h}\right)^{-2}. \quad (3)$$

Следовательно, если $\frac{\eta}{h}$ мало, то условие для свободной поверхности $p = \text{const.}$ будет выполняться приближенно, при условии, что

$$c^2 = gh, \quad (4)$$

а это согласуется с нашим прежним результатом.

Этот метод позволяет также очень просто установить найденное уже в § 171 соотношение между скоростью частиц и возвышением поверхности. Согласно уравнению (2) приближенно будем иметь

$$q = c \left(1 - \frac{\eta}{h}\right). \quad (5)$$

Следовательно, в волновом движении скорость частиц в направлении распространения волн по отношению к невозмущенной воде равна $\frac{c\eta}{h}$.

Если возвышение η , хотя и мало по сравнению с длиной волны, но, однако, не может рассматриваться как бесконечно малое, то можно будет получить лучшее приближенное значение для скорости волны, заменив в уравнении (4) h через $\eta + h$. Это дает для скорости волны относительно жидкости в непосредственной близости от нее приближенное выражение

$$c_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\eta}{h}\right),$$

где $c_0 = \sqrt{gh}$. Так как жидкость сама имеет скорость $c_0 \frac{\eta}{h}$, то абсолютная скорость распространения волн приближенно будет равна

$$c_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h}\right). \quad (6)$$

Этот результат в основном принадлежит Эри¹⁾. Отсюда следует, что волна рассмотренного здесь типа не может распространяться совершенно без изменения профиля, так как скорость изменяется с высотой. Другое доказательство формулы (6) мы дадим, как только перейдем к специальному рассмотрению волн с конечной амплитудой (§ 187).

¹⁾ Airy, Tides and Waves, § 208.

§ 176. Из линейности наших приближенных уравнений следует, что в случае достаточно пологих волн можно наложить друг на друга любое число независимых решений. Пусть, например, дана волна произвольной формы, которая движется в некотором направлении; если мы наложим на нее движущееся в противоположном направлении зеркальное изображение ее относительно плоскости $x=0$, то в результирующем движении, очевидно, горизонтальная скорость в начале координат обратится в нуль; это значит, что условия таковы, как будто в этой точке находится неподвижная стенка. Мы можем таким образом наблюдать отражение волны от стенки; возвышения и впадины отражаются при этом без изменения, в то время как направление горизонтальной скорости меняется на обратное. Тот же самый результат следует из формулы

$$\xi = F(ct - x) - F(ct + x), \quad (1)$$

которая дает, очевидно, самое общее значение ξ , удовлетворяющее условию $\xi=0$ для $x=0$.

Нетрудно исследовать частичное отражение волны в том месте, в котором происходит внезапное изменение поперечного сечения канала. Если перенести начало координат в эту точку, то мы можем положить для отрицательной стороны

$$\eta_1 = F\left(t - \frac{x}{c_1}\right) + f\left(t + \frac{x}{c_1}\right), \quad u_1 = \frac{g}{c_1} F\left(t - \frac{x}{c_1}\right) = -\frac{g}{c_1} f\left(t + \frac{x}{c_1}\right) \quad (2)$$

и для положительной стороны

$$\eta_2 = \varphi\left(t - \frac{x}{c_2}\right), \quad u_2 = \frac{g}{c_2} \varphi\left(t - \frac{x}{c_2}\right), \quad (3)$$

где функция F представляет первоначальную волну, а f и φ — соответственно отраженную и проходящую части. Постоянство массы требует, чтобы в точке $x=0$ было

$$b_1 h_1 u_1 = b_2 h_2 u_2,$$

где b_1, b_2 обозначают ширину на поверхности, а h_1, h_2 обозначают средние глубины. В той же самой точке вследствие непрерывности давления мы должны, следовательно, иметь $\eta_1 = \eta_2$ ¹⁾.

Эти условия дают

$$\frac{b_1 h_1}{c_1} (F(t) - f(t)) = \frac{b_2 h_2}{c_2} \varphi(t), \quad F(t) + f(t) = \varphi(t).$$

¹⁾ Понятно, что вследствие быстрого изменения характера движения вблизи точки разрыва задача допускает только приближенное решение. Характер приближения, лежащий в основе вышесказанных допущений, становится более очевидным, если мы предположим, что индексы относятся к двум поперечным сечениям S_1 и S_2 по ту и другую сторону от начала O на таких расстояниях от него, которые очень малы по отношению к длине волны, но все еще являются небольшими кратными поперечных размеров канала. Движение жидкости в каждом из этих поперечных сечений будет практически равномерным и параллельным направлению длины. Допущение, указанное в тексте, сводится тогда к утверждению что между S_1 и S_2 не существует заметной разницы уровней.

Следовательно, отношения возвышений в соответствующих частях отраженной и падающей волны, а также проходящей и падающей волны, соответственно будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{l}{F} &= \frac{b_1 c_1 - b_2 c_2}{b_1 c_1 + b_2 c_2}, \\ \frac{\varphi}{F} &= \frac{2b_1 c_1}{b_1 c_1 + b_2 c_2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Читатель может легко сам убедиться в том, что сумма энергий отраженной и проходящей волн равна энергии падающей волны.

§ 177. До сих пор наши исследования относились к случаю свободных волн. Когда на жидкость действуют, кроме силы тяжести, малые возмущающие силы X , Y , то уравнения движения получаются следующим образом.

Мы предположим, что в пределах расстояния, сравнимого с порядком глубины h , эти силы изменяются только на малую дробь их полного значения. При этом предположении мы будем иметь вместо уравнения (1) § 169

$$\frac{p - p_0}{\rho} = (g - Y)(y_0 + \eta - y) \quad (1)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = (g - Y) \frac{\partial \eta}{\partial x} - (y_0 + \eta - y) \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Мы предполагаем далее, что Y мало сравнительно с g и что (исходя из указанных ранее оснований) $h \frac{\partial Y}{\partial x}$ будет мало по сравнению с X . Тогда уравнение горизонтального движения

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X \quad (2)$$

приводится с достаточным приближением к виду

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + X, \quad (3)$$

где X можно рассматривать как функцию только от x и t . Уравнение неразрывности, как и в § 169, будет

$$\eta = -h \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (4)$$

Из уравнений (3) и (4) после исключения η получаем

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + X. \quad (5)$$

Таким образом имеет значение только одна горизонтальная компонента возмущающей силы.

Если возмущающее влияние обусловлено переменным давлением p_0 на свободной поверхности, то уравнение (3) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{e} \frac{\partial p_0}{\partial x}, \quad (6)$$

а уравнение (4) остается без изменения. В случае перемещающегося давления, например,

$$\frac{p_0}{e} = f(Ut - x), \quad (7)$$

мы найдем

$$\frac{\eta}{h} = \frac{p_0}{e(U^2 - gh)}. \quad (8)$$

Понижение поверхности будет происходить вместе с давлением в тех же фазах или в противоположных в зависимости от того, будет ли $U \lesseqgtr \sqrt{gh}$.

Если же возмущающее влияние обусловлено колебаниями дна, то в уравнении (2) мы будем иметь $X = 0$, а уравнение неразрывности представится в виде

$$\eta - \eta_0 = -h \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (9)$$

где η_0 есть отклонение дна от некоторого среднего уровня. Так например, в случае сейсмической волны

$$\eta_0 = f(Ut - x) \quad (10)$$

мы получим

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \frac{U^2}{U^2 - gh}. \quad (11)$$

§ 178. Колебания воды в канале постоянного сечения, закрытого с обоих концов, можно получить, как и в соответствующей акустической задаче, наложением прогрессивных волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Однако, учитывая последующие более трудные исследования, поучительно рассмотреть эту задачу как пример применения общей теории § 168.

Мы должны определить ξ таким образом, чтобы оно удовлетворяло уравнению

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + X \quad (1)$$

и одновременно граничным условиям $\xi = 0$ для $x = 0$ и $x = l$.

Чтобы найти свободные колебания, положим $X = 0$ и допустим что ξ пропорционально $\cos(\sigma t + \epsilon)$, где σ должна быть определена. Подставляя, получим

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\sigma^2}{c^2} \xi = 0; \quad (2)$$

отсюда, опуская множитель, зависящий от времени, будем иметь

$$\xi = A \sin \frac{\sigma x}{c} + B \cos \frac{\sigma x}{c}.$$

Граничные условия дают $B = 0$ и

$$\sigma \frac{l}{c} = r\pi, \quad (3)$$

где r есть целое число. Следовательно, нормальное колебание порядка r выражается в виде

$$\xi = A_r \sin \frac{r\pi x}{l} \cos \left(\frac{r\pi c t}{l} + \varepsilon_r \right), \quad (4)$$

где амплитуда A_r и фаза ε_r произвольны.

В случае самого медленного колебания ($r = 1$) вода колеблется взад и вперед и при этом приливает попеременно к обоим концам, а в середине ($x = \frac{1}{2} l$) образуется узел. Период $\frac{2l}{c}$ равен времени, которое необходимо прогрессивной волне, чтобы дважды пробежать длину канала.

Периоды более высоких колебаний равны соответственно $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... от этого периода, однако мы должны помнить, что в этой задаче, как и в других подобных задачах, наша теория теряет свою применимость, как только длина $\frac{l}{r}$ полуволны станет величиной, сравнимой с глубиной h .

Сравнивая с общей теорией § 168, мы видим, что в рассматриваемом примере нормальные координаты q_1, q_2, \dots, q_n таковы, что при изменении только одной координаты, например q_r , перемещение системы выражается в виде

$$\xi = q_r \sin \frac{r\pi x}{l};$$

следовательно, самое общее перемещение системы при рассматриваемых условиях имеет вид

$$\xi = \sum q_r \sin \frac{r\pi x}{l}, \quad (5)$$

где q_1, q_2, \dots, q_n произвольны, что, конечно, находится в согласии с теоремой Фурье.

Выражения для T и V , будучи представлены через нормальные скорости и нормальные координаты, должны привести к суммам квадратов. В рассматриваемом случае это легко установить с помощью

формулы (5). Если S обозначает площадь поперечного сечения канала, то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} 2T &= \rho S \int_0^l \dot{\xi}^2 dx = \sum a_r \dot{q}_r^2, \\ 2V &= g\rho \frac{S}{h} \int_0^l r^2 dx = \sum c_r q_r^2, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где

$$a_r = \frac{1}{2} \rho S l, \quad c_r = \frac{1}{2} r^2 \pi^2 g \rho h \frac{S}{l}. \quad (7)$$

Из выражения (7) следует, что коэффициенты устойчивости c_r возрастают с глубиной.

Обратно, если, в согласии с теорией Фурье, мы примем, что формула (5) есть достаточно общее выражение для значения ξ в любой момент времени, то только что приведенное вычисление показывает, что коэффициенты q_r суть нормальные координаты; частоты могут быть тогда найдены с помощью общей формулы (10) § 168; именно в согласии с (3) будем иметь

$$\sigma_r = \left(\frac{c_r}{a_r} \right)^{1/2} = r\pi \frac{(gh)^{1/2}}{l}. \quad (8)$$

§ 179. В качестве примера вынужденных волн рассмотрим случай действия горизонтальной силы, зависящей только от времени

$$X = f \cos(\sigma t + \varepsilon). \quad (9)$$

Этот пример в известной мере может иллюстрировать происхождение приливов в озерах малых размеров.

Предположив, что ξ пропорционально $\cos(\sigma t + \varepsilon)$, и отбросив множитель, зависящий от времени, получим из уравнения (1)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\sigma^2}{c^2} \xi = -\frac{f}{c^2}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\xi = -\frac{f}{\sigma^2} + D \sin \frac{\sigma x}{c} + E \cos \frac{\sigma x}{c}. \quad (10)$$

Граничные условия дают

$$E = \frac{f}{\sigma^2}, \quad D \sin \frac{\sigma l}{c} = \left(1 - \cos \frac{\sigma l}{c}\right) \frac{f}{\sigma^2}. \quad (11)$$

Исключая случай $\frac{\sigma l}{c} = 0$, будем иметь

$$D = \frac{f}{\sigma^2} \operatorname{tg} \frac{\sigma l}{2c};$$

следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{2f}{\sigma^2 \cos \frac{1}{2} \frac{\sigma l}{c}} \sin \frac{\sigma x}{2c} \sin \frac{\sigma(l-x)}{2c} \cos(\sigma t + \varepsilon), \\ \eta &= \frac{hf}{\sigma c \cos \frac{1}{2} \frac{\sigma l}{c}} \sin \frac{\sigma \left(x - \frac{1}{2} l\right)}{c} \cos(\sigma t + \varepsilon). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Если период возмущающей силы велик по сравнению с периодом самого медленного свободного колебания, то $\frac{\sigma l}{2c}$ будет мало и приближенная формула для возвышения может быть представлена в виде

$$\eta = \frac{f}{g} \left(x - \frac{1}{2} l\right) \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (13)$$

точно так, как если бы вода не обладала инерцией. Горизонтальное перемещение воды будет находиться всегда в одинаковой фазе с силой, пока период последней больше, чем период самого медленного свободного колебания, т. е. пока $\frac{\sigma l}{c} < \pi$. Если период силы уменьшается и становится меньше указанного значения, то фазы силы и перемещения будут противоположны.

Когда период в точности будет равен периоду свободного колебания нечетного порядка ($r = 1, 3, 5, \dots$), ξ и η становятся бесконечно большими, т. е. решение будет непригодным. Как было указано в § 168, этот случай можно объяснить тем, что при отсутствии сил трения амплитуда движения здесь становится такой большой, что наши основные допущения уже больше не оправдываются.

Если, с другой стороны, период возмущающей силы совпадает с периодом свободного колебания четного порядка ($r = 2, 4, 6, \dots$), то

$$\sin \frac{\sigma l}{c} = 0, \quad \cos \frac{\sigma l}{c} = 1$$

и граничные условия выполняются независимо от значения D . Вынужденное движение может быть тогда представлено уравнением ¹⁾

$$\xi = -\frac{2f}{\sigma^2} \sin^2 \frac{\sigma x}{2c} \cos(\sigma t + \varepsilon). \quad (14)$$

Этот пример иллюстрирует тот факт, что действие возмущающей силы иногда может быть легко вычислено без разложения силы на ее нормальные компоненты.

¹⁾ На языке общей теории это значит, что рассматриваемая здесь сила не имеет компоненты частного типа, с которой она синхронна, поэтому колебание этого типа вообще не может быть вызвано. Точно так же периодическое давление, приложенное к произвольной точке натянутой струны, не будет возбуждать того собственного колебания, которое имеет в этой точке узел, даже и тогда, когда оно синхронно с этим давлением.

Другой простой пример вынужденных колебаний, который с точки зрения теории приливов обладает известным интересом, есть пример канала, который с одного конца закрыт, а с другого конца сообщается с открытым морем, где происходят периодические колебания:

$$\eta = a \cos (\sigma t + \varepsilon). \quad (15)$$

Если мы поместим начало координат в закрытом конце, то решение, очевидно, представится в виде

$$\eta = a \frac{\cos \frac{\sigma x}{c}}{\cos \frac{\sigma l}{c}} \cos (\sigma t + \varepsilon), \quad (16)$$

где l обозначает длину. Когда $\frac{\sigma l}{c}$ мало, тогда приливная волна для всех точек канала имеет приблизительно одинаковую амплитуду. Для частных значений l (которые определяются из уравнения $\cos \frac{\sigma l}{c} = 0$) это решение не годится, так как амплитуда делается бесконечно большой.

Каналовая теория приливов

§ 180. Теория вынужденных колебаний в каналах или на открытых водных пространствах имеет значение главным образом вследствие ее прямого отношения к явлениям приливов. „Каналовая теория“, в частности, была разработана весьма исчерпывающим образом Эри¹⁾. Мы рассмотрим несколько наиболее интересных задач.

Вычисление возмущающего действия, которое производит отдаленное тело на воду моря, изложено в прибавлении к концу этой главы. Получается, например, что возмущающее действие луны в некоторой точке P земной поверхности может быть представлено потенциалом Ω , приближенное значение которого равно

$$\Omega = \frac{3}{2} \frac{\gamma M a^2}{D^3} \left(\frac{1}{3} - \cos^2 \vartheta \right), \quad (1)$$

где M означает массу Луны, D — ее расстояние от центра Земли, a — земной радиус, γ — „постоянную тяготения“ и ϑ — зенитное расстояние Луны в точке P . Оно дает горизонтальное ускорение

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta} = f \sin 2\vartheta \quad (2)$$

в направлении к той точке земной поверхности, которая лежит вертикально под Луной, где

$$f = \frac{3}{2} \frac{\gamma M a}{D^3}. \quad (3)$$

¹⁾ Airy, Encycl. Metrop., Tides and Waves, отд. VI (1845). Некоторые основания теории были найдены с помощью очень простых методов уже Юнгом (Young) в 1813—1823 годах (Works, II, 262, 291).

Если E есть масса Земли, то мы можем положить

$$g = \gamma \frac{E}{a^2},$$

откуда следует

$$\frac{f}{g} = \frac{3}{2} \frac{M}{E} \left(\frac{a}{D} \right)^3.$$

Положив $\frac{M}{E} = \frac{1}{81}$, $\frac{a}{D} = \frac{1}{60}$, получаем $\frac{f}{g} = 8,57 \cdot 10^{-8}$. Если возмущающее тело есть Солнце, то соответственно будет $\frac{f}{g} = 3,78 \cdot 10^{-8}$.

Для некоторых целей удобно ввести линейную величину H , определяемую формулой

$$H = \frac{af}{g}. \quad (4)$$

Положив $a = 64 \cdot 10^5$ м, мы для лунных приливов получим $H = 0,55$ м, а для солнечных приливов

$$H = 0,24 \text{ м.}$$

В прибавлении будет показано, что H измеряет наибольшую высоту прилива от наибольшего уровня до наименьшего уровня воды согласно статической теории.

§ 181. Рассмотрим случай канала постоянной ширины, который совпадает с земным экватором, и предположим для простоты, что Луна описывает круговую орбиту в этой же плоскости. Пусть ξ есть отнесенное к поверхности Земли перемещение частицы воды, среднее положение которой имеет угол долготы φ , считая на восток от некоторого определенного меридиана.

Если ω есть угловая скорость вращения Земли, то действительное перемещение частицы за время t будет равно $\xi + a\omega t$, так что тангенциальное ускорение будет равно $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$. Приняв, что центробежная сила, как обычно, включена в значение g , можно непосредственно применить рассуждения § 169, 177.

Если n обозначает угловую скорость Луны в направлении на запад, считая от определенного меридиана¹⁾, то мы можем в формуле (2) § 180 положить

$$\vartheta = nt + \varphi + \varepsilon,$$

так что уравнение движения будет представлено в виде

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{a^2 \partial \varphi^2} - f \sin 2(nt + \varphi + \varepsilon). \quad (1)$$

Свободные колебания будут определены, если принять во внимание, что ξ должна быть обязательно периодической функцией от φ ,

¹⁾ Мы имеем $n = \omega - n_1$, где n_1 есть угловая скорость Луны на ее орбите.

значения которой повторяются при возрастании φ на 2π . Следовательно, согласно теореме Фурье ξ можно представить в виде

$$\xi = \sum_0^{\infty} (P_r \cos r\varphi + Q_r \sin r\varphi). \quad (2)$$

Подставив это выражение в уравнение (1) и отбросив последний член, мы найдем, что P_r и Q_r должны удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2 P_r}{dt^2} + \frac{r^2 c^2}{a^2} P_r = 0. \quad (3)$$

Для любого нормального колебания движение представляет таки образом простое гармоническое колебание с периодом $\frac{2\pi a}{rc}$.

Для *вынужденных* волн или приливов получим

$$\xi = -\frac{1}{4} \frac{fa^2}{c^2 - n^2 a^2} \sin 2(nt + \varphi + \varepsilon); \quad (4)$$

отсюда следует

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{c^2 H}{c^2 - n^2 a^2} \cos 2(nt + \varphi + \varepsilon). \quad (5)$$

Таким образом здесь мы получим полусуточный прилив (причем подразумеваются, конечно, лунные сутки), который, кроме того, будет „прямым“ или „обращенным“, т. е. будет иметь место высокая вода или низкая вода под Луной, смотря по тому $c \lesseqgtr na$ или, другими словами, смотря по тому, будет ли отнесенная к земной поверхности скорость точки, находящейся всегда вертикально под Луной, меньше или больше скорости свободной волны. При условиях, действительно существующих на Земле, мы имеем

$$\frac{c^2}{n^2 a^2} = \frac{g}{n^2 a} \frac{h}{a} = 311 \frac{h}{a},$$

так что приливы суть „обращенные“; для противоположного случая глубина канала должна значительно превосходить действительную глубину моря.

Этот результат, который иногда рассматривается как парадокс, вытекает из общего принципа, изложенного в § 168. Он представляет следствие относительной медленности свободных колебаний в экваториальном канале средней глубины.

Из грубых цифр таблицы на стр. 323 видно, что даже при глубине в 3510 метров свободной волне необходимо приблизительно 30 часов, чтобы пробежать половину земной окружности, в то время как период возмущающей силы, производящей приливы, равен приблизительно только 12 часам.

Формула (5) в действительности есть частный случай формулы (14) § 168, так как она может быть представлена в виде

$$\eta = \frac{1}{1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}} \bar{\eta}, \quad (6)$$

где $\bar{\eta}$ есть данное статической теорией возвышение

$$\bar{\eta} = \frac{1}{2} H \cos 2 (nt + \varphi + \varepsilon), \quad (7)$$

и

$$\sigma = 2n, \quad \sigma_0 = \frac{2c}{a}.$$

Для умеренных глубин, от 3000 метров и ниже, $n^2 a^2$ велико сравнительно с gh ; амплитуда горизонтального движения согласно уравнению (4) тогда приближенно будет равна $\frac{1}{4n^2}$ или $\frac{g}{4n^2 a} H$ и будет почти независимой от глубины. Для лунных приливов эта амплитуда приблизительно равна $42\frac{1}{2}$ метрам. Максимум возвышения получается умножением на $\frac{2h}{a}$; это дает для глубины в 3000 метров высоту только 0,04 метра.

Для больших глубин приливы должны быть выше, но все еще обращенными до тех пор, пока будет достигнута критическая глубина $\frac{n^2 a^2}{g}$, которая приблизительно равна 24 километрам. Для глубин, превышающих эту границу, приливы становятся прямыми и они все более приближаются к тому виду, который дается статической теорией ¹⁾.

§ 182. Случай канала, совпадающего с земной параллелью, трактуется аналогичным образом. Предполагая, что орбита Луны лежит всегда в плоскости экватора, мы найдем с помощью сферической тригонометрии, что

$$\cos \vartheta = \sin \theta \cos (nt + \varphi + \varepsilon), \quad (1)$$

где ϑ есть угол, дополнительный к углу широты, а φ — долгота.

Возмущающая сила в направлении долготы будет

$$-\frac{\partial \Omega}{a \sin \theta \partial \varphi} = -f \sin \theta \sin 2 (nt + \varphi + \varepsilon), \quad (2)$$

а это дает

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{c^2 H \sin^2 \theta}{c^2 - n^2 a^2 \sin^2 \theta} \cos 2 (nt + \varphi + \varepsilon); \quad (3)$$

следовательно, если $na > c$, то приливы будут прямыми или обращенными, смотря по тому, будет ли $\sin \theta \leq \frac{c}{na}$. Если глубина так

¹⁾ Ср. Young, см. своску на стр. 318

велика, что $c > na$, то приливы для всех значений θ будут прямыми.

Если Луна не лежит в плоскости экватора, а имеет угол склонения Δ , формулу (1) следует заменить через

$$\cos \theta = \cos \theta \cos \Delta + \sin \theta \sin \Delta \cos \alpha, \quad (4)$$

где α обозначает часовой угол Луны относительно меридиана точки P . Для простоты мы пренебрежем движением Луны по склонению сравнительно с угловой скоростью вращения Земли, т. е. мы полагаем

$$\alpha = nt + \varphi + \varepsilon$$

и рассматриваем Δ как постоянную. Составляющая возмущающей силы в направлении параллельного круга будет иметь вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Omega}{a \sin \theta \partial \varphi} = & -f \cos \theta \sin 2\Delta \sin (nt + \varphi + \varepsilon) - \\ & -f \sin \theta \sin^2 \Delta \sin 2(nt + \varphi + \varepsilon). \end{aligned} \quad (5)$$

Отсюда получается

$$\begin{aligned} \eta = & \frac{1}{2} \frac{c^2 H}{c^2 - n^2 a^2 \sin^2 \theta} \sin 2\theta \sin 2\Delta \cos (nt + \varphi + \varepsilon) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{c^2 H}{c^2 - n^2 a^2 \sin^2 \theta} \sin^2 \theta \sin^2 \Delta \cos 2(nt + \varphi + \varepsilon). \end{aligned} \quad (6)$$

Первый член дает суточный прилив с периодом $\frac{2\pi}{n}$; этот член обращается в нуль и меняет свой знак, когда Луна пересекает экватор, т. е. дважды в месяц. Второй член представляет полусуточный прилив с периодом $\frac{\pi}{n}$, амплитуда которого теперь меньше, чем прежде, в $\sin^2 \Delta$ раз.

§ 183. Когда канал совпадает с меридианом, мы должны обратить внимание на то, что невозмущенная свободная поверхность образует фигуру относительного равновесия при одновременном действии тяготения и центробежной силы и поэтому не в точности является сферической. Мы будем впоследствии иметь случай обстоятельно рассмотреть вопрос о перемещениях по отношению к вращающемуся шару; предвосхищая результаты этого рассмотрения, мы на мгновение предположим, что в узком канале возмущения практически таковы, как если бы Земля покоилась, а возмущающее тело вращалось вокруг нее с соответствующей относительной скоростью.

Если принять, что Луна движется в плоскости экватора, и обозначить через $nt + \varepsilon$ часовой угол относительно меридиана канала и через θ — угловое расстояние от полюса точки P канала, то получим

$$\cos \theta = \sin \theta \cos (nt + \varepsilon). \quad (1)$$

Уравнение движения будет

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 \xi}{a^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial \Omega}{a \partial \theta} = \\ &= c^2 \frac{\partial^2 \xi}{a^2 \partial \theta^2} - \frac{1}{2} f \sin 2\theta (1 + \cos 2(nt + \varepsilon)). \end{aligned} \quad (2)$$

В качестве решения мы найдем

$$\eta = -\frac{1}{4} H \cos 2\theta - \frac{1}{4} \frac{c^2 H}{c^2 - n^2 a^2} \cos 2\theta \cos 2(nt + \varepsilon). \quad (3)$$

Первый член представляет постоянное изменение среднего уровня на величину

$$\eta = -\frac{1}{4} H \cos 2\theta. \quad (4)$$

Колебания выше и ниже среднего возмущенного уровня даны вторым членом (3). Он представляет полусуточный прилив; мы видим, что для $c < na$, т. е. для действительных условий на Земле, когда Луна стоит в плоскости канала, уровень воды в широтах, больших 45° , повышается, а в широтах, меньших 45° , понижается, и имеет место обратное явление, когда Луна удалена от канала на 90° . Соотношения будут как раз противоположными, когда $c > na$.

Если Луна находится не в плоскости экватора, а имеет известное склонение, то формула для среднего уровня, как это выражено членом, соответствующим формуле (4), имеет некоторый коэффициент, зависящий от склонения, и соответствующее изменение в нем дает четырнадцатидневный прилив, а в случае Солнца — полугодовой. Существует также суточный прилив, знак которого зависит от склонения.

Читателю будет нетрудно проверить эти результаты с помощью данного в прибавлении общего выражения для Ω .

§ 184. В случае канала постоянной ширины, окружающего земной шар (§ 181, 182), имеет место обязательно всюду точное совпадение (или точное противоположение) между фазами возвышения приливов и фазами сил, их производящих. Этого уже не будет, когда канал или море имеет ограниченные размеры.

Возьмем, например, случай экваториального канала конечной длины ¹⁾. Если пренебречь склонением Луны, то мы получим при подходящем выборе начального момента времени

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{a^2 \partial \varphi^2} - f \sin 2(nt + \varphi) \quad (1)$$

с условием, что $\xi = 0$ на концах, где, скажем, $\varphi = \pm a$.

¹⁾ Lamb H. и Miss Swain, Phil. Mag. (6), XXIX, 736 (1915). Аналогичный результат при переменной глубине рассматривался Goldsbrough, Proc. Lond. Math. Soc. (2), XV, 64 (1915).

Если пренебречь инерцией воды, то член $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ отпадает, и мы получаем

$$\xi = \frac{1}{4} \frac{fa^2}{c^2} \left\{ \sin 2nt \cos 2\alpha + \frac{\varphi}{\alpha} \cos 2nt \sin 2\alpha - \sin 2(nt + \varphi) \right\} \quad (2)$$

и

$$\eta = -\frac{h}{a} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} H \left\{ \cos 2(nt + \varphi) - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \cos 2nt \right\}, \quad (3)$$

где $H = \frac{af}{g}$, как и в § 180. Это есть возвышение, получаемое согласно (исправленной) статической теории, о которой мы будем говорить в прибавлении к этой главе. В центре ($\varphi = 0$) канала имеем

$$\eta = \frac{1}{2} H \cos 2nt \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right). \quad (4)$$

Если α мало, то возвышения в этой точке будут очень малыми, но все же там нет узла в собственном смысле этого слова. Моменты высокой воды совпадают с прохождением Луны и „противополуны“¹⁾. На концах $\varphi = \pm \alpha$ будем иметь

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2} H \left\{ \left(1 - \frac{\sin 4\alpha}{4\alpha} \right) \cos 2(nt \pm \alpha) \mp \frac{1 - \cos 4\alpha}{4\alpha} \sin 2(nt \pm \alpha) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} H R_0 \cos 2(nt \pm \alpha \mp \varepsilon_0), \end{aligned} \quad (5)$$

если

$$R_0 \cos 2\varepsilon_0 = 1 - \frac{\sin 4\alpha}{4\alpha}, \quad R_0 \sin 2\varepsilon_0 = -\frac{1 - \cos 4\alpha}{4\alpha}. \quad (6)$$

Здесь ε_0 обозначает часовой угол Луны, считая от меридиана на запад, когда на восточном конце канала имеет место высокий уровень воды, и считая на восток, когда высокий уровень воды имеет место на западном конце. Если α мало, то приближенно будем иметь

$$R_0 = 2\alpha, \quad \varepsilon_0 = -\frac{1}{4} \pi + \frac{2}{3} \alpha. \quad (7)$$

Если учесть инерцию воды, то получим

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{4} \frac{fa^2}{(m^2 - 1)c^2} \left[\sin 2(nt + \varphi) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sin 4m\alpha} \left\{ \sin 2(nt + \alpha) \sin 2m(\varphi + \alpha) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sin 2(nt - \alpha) \sin 2m(\varphi - \alpha) \right\} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

¹⁾ Это выражение будет объяснено в прибавлении к этой главе.

где $m = \frac{na}{c}$. Отсюда следует ¹⁾

$$\eta = -\frac{1}{2} \frac{H}{m^2-1} [\cos 2(nt + \varphi) - \frac{m}{\sin 4m\alpha} (\sin 2(nt + \alpha) \cos 2m(\varphi + \alpha) - \sin 2(nt - \alpha) \cos 2m(\varphi - \alpha))]. \quad (9)$$

Заставив m стремиться к нулю, мы получим формулу (3) статической теории. Заметим, что эти выражения для $m \rightarrow 1$ не обращаются в бесконечность, как в случае бесконечного канала. Однако во всех случаях, в которых условия вообще сравнимы с морскими условиями, m значительно больше единицы.

В центре канала будем иметь

$$\eta = -\frac{1}{2} \frac{H}{m^2-1} \cos 2nt \left(1 - \frac{m \sin 2\alpha}{\sin 2m\alpha}\right). \quad (10)$$

Как и в статической теории, при малом α амплитуда очень мала, но при этом нет узла. Для концов мы находим

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2} \frac{H}{m^2-1} \left\{ \left(\frac{m \sin 4\alpha}{\sin 4m\alpha} - 1 \right) \cos 2(nt \pm \alpha) \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{m (\cos 4m\alpha - \cos 4\alpha)}{\sin 4m\alpha} \sin 2(nt \pm \alpha) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} HR_1 \cos 2(nt \pm \alpha \mp \varepsilon_1), \end{aligned} \quad (11)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} R_1 \cos 2\varepsilon_1 &= \frac{m \sin 4\alpha - \sin 4m\alpha}{(m^2-1) \sin 4m\alpha}, \\ R_1 \sin 2\varepsilon_1 &= \frac{m (\cos 4m\alpha - \cos 4\alpha)}{(m^2-1) \sin 4m\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Если α будет малым, то имеем приближенно

$$R_1 = 2\alpha, \quad \varepsilon_1 = -\frac{1}{4} \pi + \frac{2}{3} \alpha, \quad (13)$$

как и в случае статической теории.

Значение R_1 становится бесконечным, когда $\sin 4m\alpha = 0$. Это определяет критические длины канала, для которых существует свободный период, равный $\frac{\pi}{n}$, или половине лунных суток. Предельное значение ε дано в подобном случае формулами

$$\operatorname{tg} 2\varepsilon_1 = -\operatorname{ctg} 2\alpha \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} 2\varepsilon_1 = \operatorname{tg} 2\alpha,$$

смотря по тому, является ли $4m\alpha$ нечетным или четным кратным π .

¹⁾ Ср. Airy, Tides and Waves, § 301.

		Исправленная статическая теория			Динамическая теория		
2α (градусы)	$2\alpha_0$ (км)	Разность высот		ϵ_0 (градусы)	Разность высот		ϵ_1 (градусы)
		в центре	на концах		в центре	на концах	
0	0,0	0	0	-45	0	0	-45
9	1001,7	0,004	0,157	-42	0,004	0,165	-41,9
18	2003,4	0,016	0,311	-32	0,018	0,396	-38,5
27	3005,1	0,037	0,460	-36	0,044	0,941	-33,9
31,5	3505,95	0,050	0,531	-34,5	0,063	1,945	-30,9
36	4006,8	0,065	0,601	-33	0,089	∞	$\left\{ \begin{array}{l} -27 \\ +63 \end{array} \right.$
40,5	4508,5	0,081	0,668	-31,6	0,125	1,956	
45	5008,5	0,100	0,733	-30,1	0,174	0,987	+68,2
54	6010,2	0,142	0,853	-27,2	0,354	0,660	+75,7
63	7011,9	0,190	0,959	-24,4	0,918	1,141	-83,5
72	8013,6	0,243	1,051	-21,6	∞	∞	-65,1
81	9015,3	0,301	1,127	-18,9	1,459	1,112	$\left\{ \begin{array}{l} -54 \\ +36 \end{array} \right.$
90	10017,0	0,363	1,185	-16,2	0,864	0,513	

Таблица иллюстрирует случай $m=2,5$. Если $\frac{\pi}{n}$ равно 12 лунным часам, то это соответствует глубине в 3300 метров, которая является величиной порядка средней морской глубины. Соответствующая скорость воли равна приблизительно 667 километрам в час. Первая критическая длина равна 4000 километров ($\alpha = \frac{1}{10}\pi$). Единица, которой измеряются максимальные разности высот, есть величина H , значение которой для лунного прилива равно приблизительно 0,549 метра. Часовые углы ϵ_0 и ϵ_1 выбраны таким образом, что они всегда лежат между -90° и $+90^\circ$; положительный знак указывает на запад от меридиана для восточного конца канала и на восток от меридиана для западного его конца.

Движение волн в канале с переменным поперечным сечением

§ 185. Когда поперечное сечение S канала не одинаково повсюду, а постепенно меняется от точки к точке, то уравнение неразрывности согласно (11) § 169 будет

$$\eta = -\frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial x} (S\xi), \quad (1)$$

где b обозначает ширину свободной поверхности. Если h есть средняя глубина при ширине b , то $S = bh$ и

$$\eta = -\frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial x} (hb\xi), \quad (2)$$

где h и b суть теперь функции от x .

Уравнение движения имеет тот же вид, что и раньше:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (3)$$

Из (2) и (3) мы можем исключить либо η , либо ξ ; уравнение для η будет

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{g}{b} \frac{\partial}{\partial x} \left(hb \frac{\partial \eta}{\partial x} \right). \quad (4)$$

Законы распространения волн в канале с непрерывно меняющимся прямоугольным сечением были изучены Гринном ¹⁾. Его результаты, свободные от ограничения специальной формой сечения, можно получить следующим образом.

Если мы введем определяемую уравнением

$$\frac{dx}{d\tau} = (gh)^{1/2} \quad (5)$$

переменную τ вместо x , то уравнение (4) перейдет в

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \eta'' + \left(\frac{b'}{b} + \frac{1}{2} \frac{h'}{h} \right) \eta'; \quad (6)$$

штрихи показывают здесь дифференцирование по τ . Если бы b и h были постоянны, то уравнению (6) можно было бы удовлетворить, как в § 170, полагая

$$\eta = F(\tau - t);$$

в рассматриваемом же случае для пробы возьмем

$$\eta = \Theta \cdot F(\tau - t), \quad (7)$$

где Θ является функцией только одной τ . Подставив это выражение η в уравнение (6), получим

$$2 \frac{\Theta'}{\Theta} \frac{F'}{F} + \frac{\Theta''}{\Theta} + \left(\frac{b'}{b} + \frac{1}{2} \frac{h'}{h} \right) \left(\frac{F'}{F} + \frac{\Theta'}{\Theta} \right) = 0. \quad (8)$$

Члены этого уравнения, содержащие F , сокращаются, если

$$2 \frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{b'}{b} + \frac{1}{2} \frac{h'}{h} = 0,$$

или

$$\Theta = C b^{-1/2} h^{-1/4}, \quad (9)$$

где C есть постоянная. Поэтому уравнение (4) будет удовлетворено, если предположить, что остальными членами (8) можно пренебречь.

Это приближение оправдывается, если мы можем пренебречь $\frac{\Theta''}{\Theta}$ и $\frac{\Theta'}{\Theta}$ по сравнению с $\frac{F'}{F}$. Что касается $\frac{\Theta'}{\Theta}$, то из (9) и (7) следует,

¹⁾ Green, On the Motion of Waves in a Variable Canal of small depth and width, Camb. Trans., VI (1837) [Papers, стр. 225]; см. также Airy, Tides and Waves, § 260.

что это равносильно пренебрежению величинами $b^{-1} \frac{db}{dx}$ и $h^{-1} \frac{dh}{dx}$ по сравнению с $\eta^{-1} \frac{\partial \eta}{\partial x}$. Если λ означает длину волны в общем смысле § 172, то $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ есть величина такого же порядка, как и $\frac{\eta}{\lambda}$, и наше допущение обозначает, что $\lambda \frac{db}{dx}$ и $\lambda \frac{dh}{dx}$ соответственно малы по сравнению с b и h . Другими словами, мы предполагаем, что поперечные измерения канала изменяются в пределах длины волны только на малую часть своей величины. Подобным же образом легко усмотреть что пренебрежение $\frac{\theta''}{\theta'}$ по сравнению с $\frac{F'}{F}$ равносильно аналогичному ограничению относительно скорости изменений $\frac{db}{dx}$ и $\frac{dh}{dx}$.

Так как уравнение (4) не изменяется от перемены знака перед t , то полное решение при вышеуказанных ограничениях будет

$$\eta = b^{-1/2} h^{-1/4} \{F(\tau - t) + f(\tau + t)\}, \quad (10)$$

где F и f суть произвольные функции.

Первый член этого выражения для η представляет волну, распространяющуюся в направлении положительной оси x . Скорость распространения в произвольной точке мы найдем из того соображения, что всякая отдельная фаза повторяется, когда δt и δl имеют одинаковые значения; таким образом она согласно (5) будет равна \sqrt{gh} , т. е. в точности тому же, что и в случае постоянного сечения. Таким же образом второй член выражения (10) представляет волну, распространяющуюся в направлении отрицательной оси x . В обоих случаях возвышение произвольной части волны изменяется при поступательном ее движении по закону $b^{-1/2} h^{-1/4}$.

Отражение прогрессивной волны в точке, где поперечное сечение канала внезапно меняется, было исследовано в § 176. Данные там формулы показывают, как и следовало ожидать, что амплитуда отраженной волны будет тем меньше, чем меньше изменение размеров сечения. Случай, когда переход от одного сечения к другому происходит не внезапно, а непрерывно, был изучен Рэлеем для частного закона изменения сечения¹⁾. Оказывается, что практически отражение будет отсутствовать, если расстояние, внутри которого имеет место переход, есть незначительное кратное от длины волны; в противоположном случае, наоборот, результаты совпадают с результатами § 176.

Если мы примем на основании этих результатов, что прогрессивная волна не испытывает никакого заметного распада при отражении, в том случае, когда можно пренебречь изменением сечения внутри длины волны, то закон амплитуд следует тотчас же из прин-

¹⁾ R a y l e i g h, On Reflection of Vibration at the Confines of two Media between which the Transition is gradual, Proc. Lond. Math. Soc. XI, 51 (1886) [Papers I, 460]; Theory of Sound, 2-е изд., London, 1894, § 148b.

ципа энергии ¹⁾. Из § 174 видно, что энергия волны пропорциональна длине, ширине и квадрату высоты; но легко показать, что длины волн в различных частях канала изменяются как соответствующие скорости распространения волн, т. е. как квадратные корни из средних глубин. Отсюда следует, в прежних обозначениях, что $\eta^2 b h^{1/2}$ будет постоянным или что η пропорционально $b^{-1/2} h^{-1/4}$, а это и есть указанный закон Грина.

§ 186. В случае простого гармонического колебания, при котором η пропорционально $\cos(\sigma t + \epsilon)$, уравнение (4) предыдущего параграфа представится в виде

$$\frac{g}{b} \frac{\partial}{\partial x} \left(h b \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \sigma^2 \eta = 0. \quad (1)$$

Некоторые наиболее интересные частные случаи могут быть легко разобраны.

1. Пусть в канале ширина будет пропорциональна расстоянию от конца $x=0$, а глубина везде будет одинаковой; предположим далее, что канал в своем устье ($x=a$) соединен с открытым морем, в котором происходит приливное движение по закону

$$\eta = C \cos(\sigma t + \epsilon). \quad (2)$$

Положив в уравнении (1) $h = \text{const.}$ и b пропорционально x , получим

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + k^2 \eta = 0, \quad (3)$$

где

$$k^2 = \frac{\sigma^2}{gh}. \quad (4)$$

Отсюда следует

$$\eta = C \frac{J_0(kx)}{J_0(ka)} \cos(\sigma t + \epsilon). \quad (5)$$

Кривая $y = J_0(x)$ изображена на фиг. 44, которая показывает, как увеличивается амплитуда вынужденного колебания в зависимости от расстояния от устья, в то время как длина волны остается почти постоянной.

2. Предположим теперь, что изменяется только глубина, равномерно возрастающая от конца канала $x=0$ вплоть до устья, в то время как ширина остается постоянной. Положив в уравнении (1)

$$h = h_0 \frac{x}{a}, \quad \kappa = \frac{\sigma^2 a}{gh_0},$$

мы получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \kappa \eta = 0. \quad (6)$$

То решение этого уравнения, которое конечно для $x=0$, будет

$$\eta = A \left(1 - \frac{\kappa x}{1^2} + \frac{\kappa^2 x^2}{1^2 2^2} - \dots \right), \quad (7)$$

или

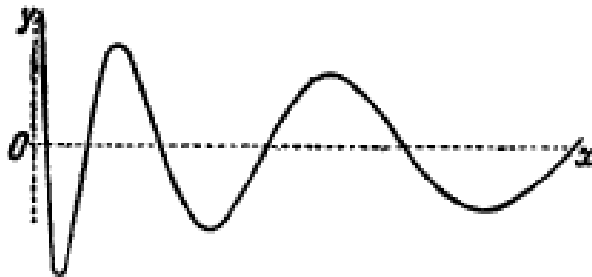
$$\eta = A J_0(2\kappa^{1/2} x^{1/2}). \quad (8)$$

¹⁾ Rayleigh, см. примечание на стр. 328.

или, наконец, введя опять временной множитель и определив постоянную, получим

$$\eta = C \frac{J_0(2\kappa^{1/2}x^{1/2})}{J_0(2\kappa^{1/2}a^{1/2})} \cos(\sigma t + \epsilon). \quad (9)$$

Кривая $y = J_0(\sqrt{x})$ (фиг. 42) (для ясности масштаб для y взят в двести раз больше такового для x) показывает, как амплитуда непрерывно возрастает, а длина волны убывает, если идти вверх по каналу. Эти примеры могут служить для объяснения увеличения морских приливов, которые происходят в мелких морях и в лиманах.



Фиг. 42.

3. Если и ширина и глубина изменяются пропорционально расстоянию от конца $x=0$, то, положив $b = b_0 \frac{x}{a}$, $h = h_0 \frac{x}{a}$, получим

$$x \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \kappa \eta = 0, \quad (10)$$

где, как и раньше, $\kappa = \frac{\sigma^2 a}{gh_0}$. Отсюда следует

$$\eta = A \left(1 - \frac{\kappa x}{1 \cdot 2} + \frac{\kappa^2 x^2}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4} - \dots \right) \cos(\sigma t + \epsilon). \quad (11)$$

Этот ряд равен $\frac{J_1(2\kappa^{1/2}x^{1/2})}{\kappa^{1/2}x^{1/2}}$, а постоянная A определяется при

сравнении с формулой (2). Этот случай находится в прекрасном соответствии с условиями в Бристольском канале (наблюдавшиеся там на различных станциях приливы хорошо согласуются с этой формулой)¹⁾.

Присоединим сюда еще некоторые простые задачи относительно свободных колебаний.

4. Рассмотрим канал постоянной ширины и длины $2a$, дно которого равномерно понижается от обоих концов к середине. Если взять начало на одном конце, то движение в первой половине канала определяется, как выше, формулой

$$\eta = A J_0(2\kappa^{1/2}x^{1/2}), \quad (12)$$

где $\kappa = \frac{\sigma^2 a^2}{gh_0}$ и h_0 обозначает глубину в середине.

Очевидно, что нормальные колебания распадаются на два класса. В первом классе η в соответствующих точках обеих половинок канала имеет противные значения, и поэтому в середине ($x=a$) будет обращаться в нуль. Значения σ при этом будут определяться с помощью формулы

$$J_0(2\kappa^{1/2}a^{1/2}) = 0. \quad (13)$$

Это значит, что если κ есть произвольный корень этого уравнения, то

$$\sigma = \frac{(gh_0)^{1/2}}{a} (\kappa a)^{1/2}. \quad (14)$$

¹⁾ Taylor G. J., Camb. Proc., XX, 320 (1921).

Во втором классе значения η будут симметричны относительно середины, так что в середине будем иметь $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$. Это дает

$$J'_0(2x^{1/2}a^{1/2}) = 0. \quad (15)$$

Легко найти, что самое медленное колебание принадлежит несимметричному классу и соответствует самому малому корню уравнения (13); этот наименьший корень равен $2x^{1/2}a^{1/2} = 0,7655 \pi$; отсюда следует

$$\frac{2\pi}{\sigma} = 1,306 \frac{4a}{(gh_0)^{1/2}}.$$

5. Предположим, что глубина канала изменяется по следующему закону:

$$h = h_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \quad (16)$$

где x обозначает расстояние от середины. Подставив h в уравнение (1) и положив $b = \text{const}$, мы найдем

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right\} + \frac{\sigma^2}{gh_0} \eta = 0. \quad (17)$$

Если положить

$$\sigma^2 = n(n+1) \frac{gh_0}{a^2}, \quad (18)$$

то (17) будет иметь такой же вид, как общее уравнение зональных сферических функций (1) § 84.

В настоящей задаче n определяется из условия, что η для $\frac{x}{a} = \pm 1$ должна быть конечной. Согласно § 85 это значит, что n есть целое число; нормальные колебания имеют, следовательно, тип

$$\eta = CP_n \left(\frac{x}{a}\right) \cos(\sigma t + \epsilon), \quad (19)$$

где P_n есть зональная сферическая функция, а значение σ определяется из (18).

При наиболее медленном колебании ($n=1$) профиль свободной поверхности есть прямая линия. Для канала постоянной глубины h_0 и той же самой длины $2a$ соответствующее значение σ равно $\frac{\pi c}{2a}$, где $c = (gh_0)^{1/2}$. Отсюда следует, что в рассматриваемом случае частота будет меньше в отношении $2\sqrt{1/\pi}$, или 0,9003¹⁾.

Вынужденные колебания, вызываемые возмущающей силой

$$X = f \cos(\sigma t + \epsilon), \quad (20)$$

¹⁾ Что касается обобщений и применений к теории „сейшей“ в бухтах, см. Chrystal Some Results in the Mathematical Theory of Seiches, Proc. R. S. Edin., XXV, 328 (1904), и Trans. R. S. Edin., XLI, 599 (1905). Новейшие исследования можно найти у Proudman, Proc. Lond. Math. Soc. (2), XIV, 240 (1914) и Doodson, Trans. R. S. Edin., LII, 629 (1920); Jeffreys, M. N. R. A. S., Geophys. Suppt. I, 495 (1928).

могут быть получены согласно закону (14) § 168. Статическая форма свободной поверхности, очевидно, определяется так:

$$\bar{\eta} = \frac{f}{g} x \cos(\sigma t + \epsilon), \quad (21)$$

и так как данная сила соответствует нормальному типу $n=1$, то

$$\eta = \frac{f}{g \left(1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}\right)} x \cos(\sigma t + \epsilon), \quad (22)$$

где

$$\sigma_0^2 = \frac{2gh_0}{a^2}.$$

Волны с конечной амплитудой

§ 187. Если возвышение волны сравнительно со средней глубиной не мало, то даже в канале постоянного прямоугольного сечения распространение волны совершается не без изменения ее формы. Эта задача была сначала разобрана Эри¹⁾ методом последовательных приближений. Он нашел, что в прогрессивной волне различные части движутся с различными скоростями, причем скорость волны, соответствующая возвышению η , приближенно дается формулой (6) § 175.

Более полное освещение вопроса можно получить методом, подобным тому, который применял Риман при изложении аналогичной акустической задачи (см. § 282).

Единственное допущение, которое мы теперь примем, состоит в том, что можно пренебречь вертикальным ускорением. Отсюда следует, как это было разъяснено в § 169, что горизонтальную скорость для всех точек сечения канала можно считать одинаковой. Уравнение движения будет, как раньше,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (1)$$

и уравнение неразрывности, как легко видеть, в случае прямоугольного сечения имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \{(h + \eta) u\} = -\frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad (2)$$

или

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = -(h + \eta) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3)$$

где h обозначает глубину.

¹⁾ См. сноску на стр. 329.

Если уравнение (3) умножить на $f'(\eta)$, где $f(\eta)$ подлежит еще определению, и сложить с (1), то получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}\right) \{f(\eta) + u\} &= -(h + \eta) f'(\eta) \frac{\partial u}{\partial x} - g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \\ &= -(h + \eta) f'(\eta) \frac{\partial}{\partial x} \{f(\eta) + u\}, \end{aligned} \quad (4)$$

если положить

$$(h + \eta) \{f'(\eta)\}^2 = g.$$

Уравнение (4) удовлетворяется с помощью

$$f(\eta) = 2c_0 \left\{ \left(1 + \frac{\eta}{h}\right)^{1/2} - 1 \right\}, \quad (5)$$

где $c_0 = \sqrt{gh}$. Если положить

$$P = f(\eta) + u, \quad Q = f(\eta) - u. \quad (6)$$

то будем иметь

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (u + v) \frac{\partial P}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

Аналогично получаем

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + (u - v) \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

где

$$v = (h + \eta) f'(\eta) = c_0 \left(1 + \frac{\eta}{h}\right)^{1/2}. \quad (9)$$

Отсюда следует, что P постоянно в (геометрической) точке, которая движется в направлении положительной оси x со скоростью

$$c_0 \left(1 + \frac{\eta}{h}\right)^{1/2} + u; \quad (10)$$

Q , напротив, будет постоянной в точке, которая движется в направлении отрицательной оси x со скоростью

$$c_0 \left(1 + \frac{\eta}{h}\right)^{1/2} - u. \quad (11)$$

Это значит, что всякое данное значение P передвигается вперед, а всякое данное значение Q передвигается назад со скоростями, данными формулами (10) и (11). Значения P и Q определяются с помощью значений η и u и обратно.

Возьмем в качестве примера начальное возмущение, ограниченное отрезком, для которого $a < x < b$, так что P и Q в начальный момент для $x < a$ и $x > b$ были равны нулю. Область, в которой P отлично от нуля, движется, следовательно, вперед, в то время как область, в которой Q отлично от нуля, движется назад; эти области после некоторого определенного промежутка времени разобщаются друг от друга и оставляют между собой пространство, в котором $P = 0$ и $Q = 0$, и жидкость, следовательно, находится в покое. Первона-

чальное возмущение распадается, таким образом, на две прогрессивные волны, которые распространяются в противоположных направлениях.

Для волны, распространяющейся в положительном направлении, имеем

$$Q = 0, \quad \frac{1}{2} P = u = 2c_0 \left\{ \left(1 + \frac{\eta}{h} \right)^{1/2} - 1 \right\}, \quad (12)$$

так что возвышение и скорость частиц будут связаны определенным соотношением (ср. § 171). Скорость волны дана формулами (10) и (12); в данном случае она будет равна

$$c_0 \left\{ 3 \left(1 + \frac{\eta}{h} \right)^{1/2} - 2 \right\}. \quad (13)$$

Если отвлечься от членов высшего порядка $\frac{\eta}{h}$, то это совпадает с результатом Эри [(6) § 175].

Аналогичные заключения можно сделать относительно волны, распространяющейся в отрицательном направлении ¹⁾.

Так как скорость волны растет вместе с возвышением, то оказывается, что в прогрессивной системе волн наклон на передней стороне делается все более крутым, а на задней стороне все более пологим, и здесь может быть достигнуто такое состояние, при котором мы более не вправе пренебрегать вертикальным ускорением. О том, что будет после этого момента, данная теория не может дать нам указаний; наблюдения, однако, показывают, что гребни стремятся в конце концов свернуться в завиток и затем распадаются.

Случай „высокого прилива“, когда имеет место внезапный переход от одного постоянного уровня к другому, можно рассмотреть с помощью приема стационарного движения (§ 175). Обозначая через Q объем, который протекает в единицу времени через сечение, ширина которого равна единице имеем

$$u_1 h_1 = u_2 h_2 = Q, \quad (14)$$

где индексы относятся к двум неизменяемым состояниям, а h_1 и h_2 означают глубины. Если мы рассмотрим массу жидкости, которая в данный момент заключена между двумя сечениями с разных сторон порога, то мы увидим, что количество движения этой массы в единицу времени возрастает на $gQ(u_2 - u_1)$, причем второе сечение предполагается находящимся направо от первого. Так как средние давления по сечению равны соответственно $\frac{1}{2} g h_2$ и $\frac{1}{2} g h_1$, то будем иметь

$$Q(u_2 - u_1) = \frac{1}{2} g (h_1^2 - h_2^2). \quad (15)$$

Отсюда и из (14) следует

$$Q^2 = \frac{1}{2} g h_1 h_2 (h_1 + h_2). \quad (16)$$

¹⁾ Эти результаты получаются также из уравнения (3) § 173, именно методом, данным Earnshaw; см. § 283.

Сообщив всей массе скорость $-u_1$, мы получим волну, нахлынувшую на спокойную воду, скорость распространения которой в отрицательном направлении равна

$$u_1 = \sqrt{\frac{gh_2(h_1 + h_2)}{2h_1}}. \quad (17)$$

Скорость частиц в волне, двигающейся вперед, будет равна $u_1 - u_2$ в направлении движения. Эта величина положительна или отрицательна, смотря по тому, будет ли $h_2 \geq h_1$, т. е. смотря по тому, имеем ли мы поднимающуюся волну или спадающую.

Уравнение энергии, однако, будет нарушено, за исключением случая, когда разность уровней бесконечно мала. При стационарном движении, если частица движется вдоль линии тока на поверхности, то потеря ее энергии при прохождении порога будет равна

$$\frac{1}{2} \rho (u_1^2 - u_2^2) + g\rho (h_1 - h_2) \quad (18)$$

на единицу объема. Вследствие уравнений (14) и (16) это выражение принимает вид

$$\frac{g\rho (h_2 - h_1)^3}{4h_1 h_2}. \quad (19)$$

Отсюда следует в той мере, в какой наши исследования вообще имеют значение, что скачек возвышения ($h_2 > h_1$) может распространяться без изменения далее, если только допустить, что имеет место рассеяние энергии в соответствующем размере в месте порога. Если же, однако, $h_2 < h_1$, то выражение (19) будет отрицательным и поэтому необходима в этом случае прибавка энергии. А тогда выходит, что отрицательный скачек, т. е. скачек понижения ни в коем случае не может далее продолжаться без изменения ¹⁾.

§ 188. При обстоятельном применении уравнений (1) и (3) к явлениям прилива пользуются обыкновенно методом последовательного приближения. В качестве примера мы рассмотрим канал, который одним концом ($x=0$) соединяется с открытым морем, где возвышение дано формулой

$$\eta = a \cos \sigma t. \quad (20)$$

В первом приближении имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = -h \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (21)$$

Решения этих уравнений, совместимые с (20), будут

$$\left. \begin{aligned} \eta &= a \cos \sigma \left(t - \frac{x}{c} \right), \\ u &= \frac{ga}{c} \cos \sigma \left(t - \frac{x}{c} \right). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

¹⁾ Rayleigh, On the Theory of Long Waves and Bores, Proc. Roy. Soc. A., XC, 324 (1914) [Papers, VI, 250].

Чтобы получить второе приближение, мы эти значения η и u подставим в (1) и (3); тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{g^2 \sigma a^2}{2c^2} \sin 2\sigma \left(t - \frac{x}{c} \right), \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -h \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{g \sigma a^2}{c^2} \sin 2\sigma \left(t - \frac{x}{c} \right). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Если проинтегрировать эти уравнения обыкновенными методами, то решение, совместимое с (20), будет

$$\left. \begin{aligned} \eta &= a \cos \sigma \left(t - \frac{x}{c} \right) - \frac{3}{4} \frac{g \sigma a^2}{c^2} x \sin 2\sigma \left(t - \frac{x}{c} \right), \\ u &= \frac{g a}{c} \cos \sigma \left(t - \frac{x}{c} \right) - \frac{1}{8} \frac{g^2 a^2}{c^2} \cos 2\sigma \left(t - \frac{x}{c} \right) - \\ &\quad - \frac{3}{4} \frac{g^2 \sigma a^2}{c^4} x \sin 2\sigma \left(t - \frac{x}{c} \right). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Прилагаемая фиг. 43 показывает, конечно, с преувеличенной амплитудой, профиль волны, вычисленный из первого из этих двух уравнений для некоторого частного случая. Необходимо отметить следующее: если зафиксируем внимание на какой-либо определенной точке канала, то заметим, что поднятие и падение воды происходят несимметрично, а именно падение требует более продолжительного времени, чем поднятие.



Фиг. 43.

Присутствие множителя x вне знака тригонометрической функции в (24) указывает на существование границы, вне которой приближение не годится. Условие для применения способа последовательных приближений состоит, очевидно, в том, что $\frac{g \sigma a x}{c^2}$ должно быть мало. Если мы положим

$$c^2 = gh, \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\sigma},$$

то эта дробь будет равна

$$2\pi \frac{a}{h} \frac{x}{\lambda}.$$

Отсюда следует, что как бы мало ни было отношение первоначального возвышения a к глубине, вышенаписанная дробь перестает быть малой, когда x есть достаточно большое кратное от длины волны (λ).

Необходимо отметить, что указанная сейчас граница в правой части фигуры уже превзойдена и что странные явления, которые начинают встречаться на заднем скате, происходят скорее от несовершенства наших методов вычисления, чем от действительных свойств волн. Если бы мы продолжили кривую, то нашли бы на заднем склоне вторичный максимум и минимум возвышения. Этим путем Эри пытался объяснить явление двойной высокой воды, которая наблюдается в некоторых реках; но на основании указанного выше соображения это заключение не может быть состоятельным ¹⁾.

Но это затруднение не должно встретиться в канале, закрытом на некотором расстоянии от устья неподвижной стеной, или в случае вынужденных волн, образованных периодической силой, в канале, закрытом с обоих концов (§ 179). Для определения общего характера результатов, ожидавшихся в этих

¹⁾ Mc. Cowan, см. сноску на стр. 326.

случаях, однако, уже достаточно сказано, а что касается дальнейших частных случаев, то мы сошлемся на учебник Эри ¹⁾.

Если разложить выражение для возвышения в какой-нибудь точке (x), например, формулы (24), на простые тригонометрические функции от времени, то оно будет состоять из двух членов, из которых второй представляет сверхприлив, или прилив второго порядка, так как он пропорционален a^2 ; частота этого прилива в два раза больше частоты начального приливного колебания, определяемого законом (20). Продолжая приближение, мы получим приливы еще большего порядка, частоты которых тогда в три, четыре и т. д. раза больше частот первоначального прилива.

Если вместо (20) возмущение в устье канала будет дано формулой

$$\zeta = a \cos \sigma t + a' \cos (\sigma' t + \varepsilon),$$

то легко определить, что при втором приближении получаются подобным образом приливы с периодами $\frac{2\pi}{\sigma + \sigma'}$ и $\frac{2\pi}{\sigma - \sigma'}$; они называются „комбинационными приливами и аналогичны комбинационным тонам“ акустики которые были исследованы впервые Гельмгольцем ²⁾.

Распространение волн в двух измерениях

§ 189. Предположим сначала, что мы имеем плоский слой воды постоянной глубины h . Если пренебречь вертикальным ускорением, то горизонтальное движение для всех частиц одной и той же вертикали должно быть, как и раньше, одно и то же. Пусть оси x и y горизонтальны, u и v обозначают горизонтальные компоненты скорости в точке (x, y) и ζ есть соответствующее возвышение свободной поверхности над невозмущенным уровнем. Уравнение неразрывности получим, вычисляя поток жидкости в призматическом объеме, который имеет основанием элементарный прямоугольник $\delta x \delta y$; пренебрегая членами второго порядка, получим

$$\frac{\partial}{\partial x} (uh \delta y) \delta x + \frac{\partial}{\partial y} (vh \delta x) \delta y = - \frac{\partial}{\partial t} \{(\zeta + h) \delta x \delta y\};$$

откуда

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (1)$$

При отсутствии возмущающих сил уравнения движения будут

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial y},$$

где мы можем положить

$$p - p_0 = g\rho(z_0 + \zeta - z),$$

если z_0 будет обозначать ординату свободной поверхности в невозмущенном состоянии. Тогда получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \quad (2)$$

¹⁾ Airy, Tides and Waves, § 198, ... и 308; см. также G. H. Darwin, Tides, Encycl. Britann. (9-е изд.), XXIII, 362, 363 (1888).

²⁾ Helmholtz, Über Kombinationstöne, Berl. Monatsber., 22 Mai 1856 [Wiss. Abh., I, 256]; и Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden, Crelle, LVII, 14 (1859) [Wiss. Abh., I, 318].

Исключив u и v , будем иметь

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right), \quad (3)$$

где, как и выше, $c^2 = gh$.

При применении к гармоническим колебаниям можно уравнения (2) и (3) упростить, вводя комплексный временной множитель $e^{i(\sigma t + \epsilon)}$ и в конечном счете отбрасывая мнимые части наших выражений. Это будет законным до тех пор, пока мы имеем дело только с линейными уравнениями. Тогда согласно уравнениям (2)

$$u = \frac{ig}{\sigma} \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad v = \frac{ig}{\sigma} \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad (4)$$

а уравнение (3) будет

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + k^2 \zeta = 0, \quad (5)$$

где

$$k^2 = \frac{\sigma^2}{c^2}. \quad (6)$$

Условие, которое должно выполняться на вертикальной границе, получается как раз из формулы (4); оно имеет вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0, \quad (7)$$

где ∂n обозначает элемент нормали к ограничивающей поверхности.

Если жидкость находится под действием малых возмущающих сил, колебаниями которых в пределах глубины можно пренебречь, то уравнения (2) заменяются через

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad (8)$$

где Ω есть потенциал этих сил.

Положив

$$\bar{\zeta} = -\frac{\Omega}{g}, \quad (9)$$

где $\bar{\zeta}$ обозначает статическое возвышение, соответствующее потенциалу Ω , можно уравнения (8) написать так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial}{\partial x} (\zeta - \bar{\zeta}), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial}{\partial y} (\zeta - \bar{\zeta}), \quad (10)$$

В случае простого гармонического колебания эти уравнения принимают вид

$$u = \frac{ig}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x} (\zeta - \bar{\zeta}), \quad v = \frac{ig}{\sigma} \frac{\partial}{\partial y} (\zeta - \bar{\zeta}); \quad (11)$$

откуда, подставляя в уравнение неразрывности (1), мы получим

$$(\Delta_1 + k^2) \zeta = \Delta_1 \bar{\zeta}, \quad (12)$$

где, как раньше,

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (13)$$

и $k^2 = \frac{\sigma^2}{gh}$. Условие, которое должно быть выполнено на вертикальной границе, будет теперь

$$\frac{\partial}{\partial n} (\zeta - \bar{\zeta}) = 0. \quad (14)$$

§ 190. Уравнение (3) § 189 по виду тождественно с уравнением, которое встречается в теории поперечных колебаний равномерно натянутой мембраны. Еще более глубокая связь имеется, если принять во внимание граничные условия, с теорией цилиндрических звуковых волн ¹⁾. Действительно, многие результаты этой теории можно непосредственно перенести на плоские волны жидкости.

Чтобы получить свободные колебания слоя воды, ограниченного вертикальными стенками, мы должны найти решение уравнения

$$(\Delta_1 + k^2)\zeta = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$\frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0. \quad (2)$$

Подобным же образом, как и в § 178, находим, что такое решение возможно только для определенных значений k , через которые в конце концов определяются периоды $\frac{2\pi}{kc}$ различных нормальных колебаний.

В случае если контур есть *прямоугольник*, причем начало координат помещается в одной из вершин, а оси x и y направлены вдоль двух сторон, то граничные условия будут иметь вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \text{ для } x=0 \text{ и } x=a$$

и

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \text{ для } y=0 \text{ и } y=b,$$

где a и b суть длины сторон, параллельных осям x и y . Самое общее выражение для ζ , которое удовлетворяет этим условиям, дается двойным рядом Фурье

$$\zeta = \sum \sum A_{m,n} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad (3)$$

где суммирование распространяется на все целые значения m и n между 0 и ∞ . Подставив это выражение в (1), мы найдем

$$k^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right). \quad (4)$$

¹⁾ Rayleigh, Theory of Sound, § 338.

Если $a > b$, то мы получим самое медленное колебание, если положим $m = 1$, $n = 0$, откуда следует $ka = \pi$. Движение тогда всюду параллельно более длинной стороне прямоугольника; ср. § 178.

§ 191. В случае *кругового* слоя воды удобно взять начало координат в центре и ввести полярные координаты

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Уравнение (1) предыдущего параграфа будет тогда

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} + k^2 \zeta = 0. \quad (1)$$

Это уравнение, конечно, можно найти также и непосредственно.

Чтобы выяснить зависимость от θ , мы разложим ζ по теореме Фурье в ряд косинусов и синусов, кратных θ . Мы получим ряд, члены которого имеют вид

$$f(r) \cos s\theta, \quad f(r) \sin s\theta. \quad (2)$$

Вставляя в уравнение (1), найдем, что каждый из этих членов в отдельности должен удовлетворять уравнению (1) и что имеет место уравнение

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) + \left(k^2 - \frac{s^2}{r^2}\right) f(r) = 0. \quad (3)$$

Это уравнение (3) имеет тот же вид, как (14) § 101. Так как для $r = 0$ ζ должно быть конечным, то различные нормальные колебания можно выразить через

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= A_s J_s(kr) \cos s\theta \cos(\sigma t + \epsilon), \\ \zeta &= A_s J_s(kr) \sin s\theta \cos(\sigma t + \epsilon), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где s может иметь любое из значений $0, 1, 2, 3, \dots$, а A_s есть произвольная постоянная. Возможные значения k определяются условием $\frac{\partial \zeta}{\partial r} = 0$ на контуре $r = a$ и это дает

$$J'_s(ka) = 0. \quad (5)$$

Соответствующие частоты (σ) колебаний будут тогда

$$\sigma = kc,$$

где $c = \sqrt{gh}$.

Для случая $s = 0$ движение будет симметричным относительно начала, и гребни и впадины волн образуют окружности. Наименьшие корни уравнений

$$J_0(ka) = 0 \quad \text{или} \quad J_1(ka) = 0 \quad (6)$$

суть

$$\frac{ka}{\pi} = 1,2197, \quad 2,2330, \quad 3,2383, \quad \dots \quad (7)$$

Эти значения стремятся к

$$\frac{ka}{\pi} = m + \frac{1}{4},$$

где m есть целое число ¹⁾. Отсюда следует

$$\frac{\sigma a}{c} = 3,832, 7,016, 10,173, \dots \quad (7a)$$

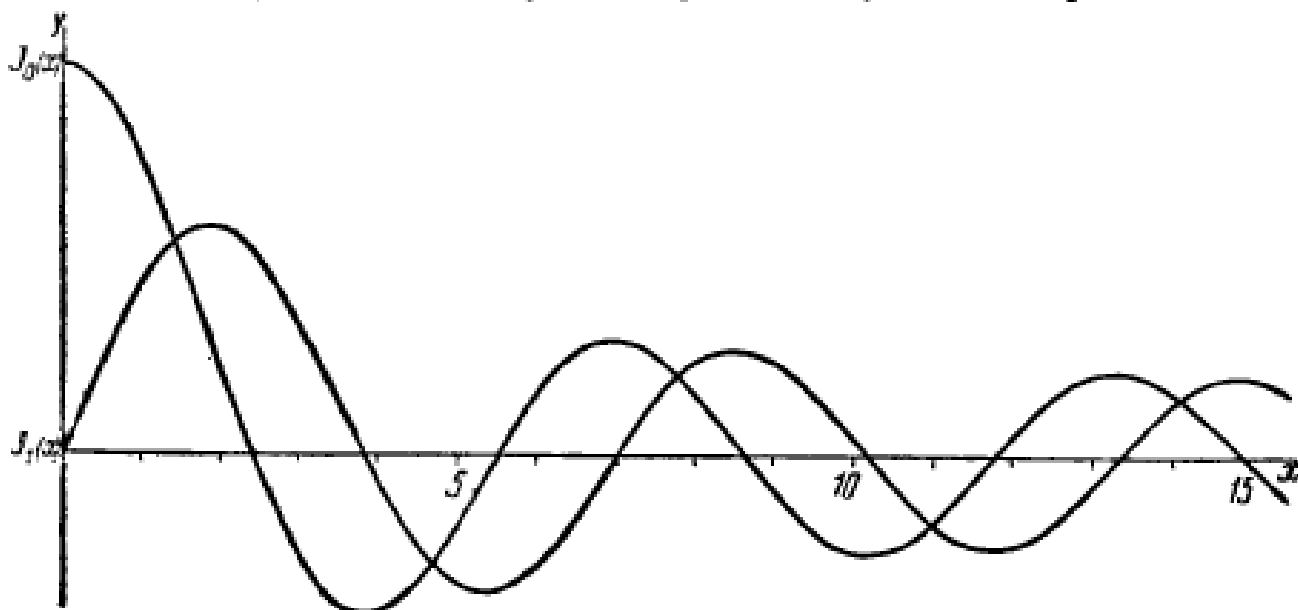
В m -м виде колебаний симметрического класса имеется m узловых окружностей, радиусы которых определяются из уравнения $\zeta = 0$ или

$$J_0(kr) = 0. \quad (8)$$

Корни этого уравнения (8) суть ²⁾

$$\frac{kr}{\pi} = 0,7655, 1,7571, 2,7546, \dots \quad (9)$$

Например, в первом симметрическом виде колебаний имеем одну узловую окружность, радиус которой $r = 0,628 a$. Форма сечения



Фиг. 44. Для ясности масштаб по оси ординат выбран в пять раз больше, чем по оси абсцисс.

свободной поверхности с плоскостью, проходящей через ось Z , может быть усмотрена при любом из этих колебаний на основании вида кривой $y = J_0(x)$, начерченной на фиг. 44.

¹⁾ Stokes, On the Numerical Calculation of a Class of Definite Integrals and Infinite Series, Camb. Trans., IX (1850) [Papers, II, 355]. Необходимо отметить, что $\frac{ka}{\pi}$ равна $\frac{\tau_0}{\tau}$, где τ означает действительный период, а τ_0 время, которое требует прогрессивная волна, чтобы пройти со скоростью \sqrt{gh} расстояние, равное диаметру $2a$.

²⁾ Stokes, см. выше.

Если $s > 0$, то кроме узловых окружностей, определяемых уравнением

$$J_s(kr) = 0, \quad (10)$$

существует s равноотстоящих узловых диаметров.

Необходимо отметить, что вследствие равенства частот двух видов колебаний, представленных уравнениями (4), нормальные колебания теперь до известной степени будут неопределенными, т. е. мы можем подставить $\cos s(\theta - \alpha_s)$ вместо $\cos s\theta$ или $\sin s\theta$, причем α_s произвольно. Узловые диаметры определяются тогда из

$$\theta - \alpha_s = \frac{2m+1}{2s} \pi, \quad (11)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots, s-1$. Неопределенность исчезает и частоты становятся неравными, когда контур хотя бы немного отклоняется от формы окружности.

В случае точно кругового контура наложением двух нормальных колебаний одинакового периода, но с различными фазами, получим решение

$$\zeta = C_s J_s(kr) \cos(\sigma t \mp s\theta + \varepsilon). \quad (12)$$

Это решение представляет систему волн, которые двигаются без изменения вокруг начала с угловой скоростью $\frac{\sigma}{s}$ в положительном или отрицательном направлении θ . Из выражений (4) § 189 видно, что движение каждой отдельной частицы будет эллиптически-гармоническим, причем одна ось каждого эллипса совпадает с радиусом-вектором. Все это согласно с общей теорией, на которую было указано в § 168.

Интереснейшие виды колебаний несимметрического класса суть те, которые соответствуют значению $s = 1$, например

$$\zeta = A J_1(kr) \cos \theta \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (13)$$

где k определяется уравнением

$$J_1'(ka) = 0. \quad (14)$$

Корни этого уравнения равны ¹⁾

$$\frac{ka}{\pi} = 0,586, 1,697, 2,717, \dots; \quad (15)$$

отсюда

$$\frac{\sigma a}{c} = 1,841, 5,332, 8,536, \dots \quad (15a)$$

Мы имеем теперь узловой диаметр $(\theta = \frac{\pi}{2})$, положение которого,

¹⁾ См. учебник Рэлея, § 339. Общую формулу профессора Магона (J. Mc. Mahon) для вычисления корней уравнения $J_s'(ka) = 0$ можно найти в специальных учебниках.

однако, будет неопределенным, так как начало отсчета θ произвольно. Для соответствующих видов колебаний при эллиптическом контуре эта узловая линия определяется однозначно; именно она совпадала бы либо с большой, либо с малой осью, и частоты были бы не равны.

Обе фиг. 45 показывают контурные линии свободной поверхности для первых двух видов колебаний рассматриваемого класса. Эти линии встречают границу под прямым углом в согласии с общим граничным условием [(2) § 190]. Простые гармонические колебания отдельных частиц совершаются по прямым линиям, которые согласно выражениям (4) § 189 перпендикулярны к контурным линиям. Форма сечений свободной поверхности с плоскостями, проходящими через ось z , видна из кривой $y = J_1(x)$ на фиг. 44.

Первый из двух, нарисованных на фиг. 44 видов колебаний имеет из всех нормальных колебаний наиболее длинный период. В этом случае вода колеблется с одной стороны на другую примерно таким образом, как при самом медленном виде колебания в канале, закрытом с обоих концов (§ 178). При втором виде колебаний получается узловая линия в виде окружности, радиус которой дается наименьшим корнем уравнения $J_1(kr) = 0$; это дает $r = 0,719 a$ ¹⁾.

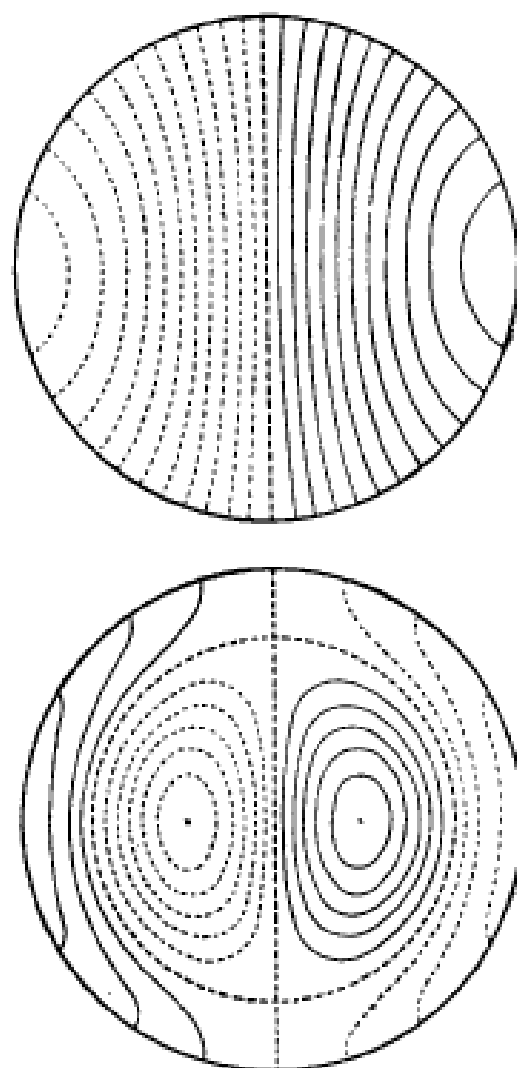
Сравнение этих исследований с общей теорией малых колебаний, о которой говорилось в § 168, приводит к различным важным свойствам бесселевых функций.

Прежде всего, так как общая масса воды остается без изменения, то

$$\int_0^{2\pi a} \int_0^0 \zeta r \, d\theta \, dr = 0, \quad (16)$$

¹⁾ Колебания жидкости в бассейне произвольной постоянной глубины были исследованы P o i s s o n, Sur les petites oscillations de l'eau contenue dans un cylindre, Ann. de Gergonne, XIX, 225 (1829—1829); теория бесселевых функций была тогда еще не разработана, и результаты поэтому не могли быть интерпретированы. Полное решение проблемы вместе с числовыми результатами даны были R a y l e i g h, Phil. Mag. (5), I, 257 (1876) [Papers, I, 25].

Исследование в тексте, конечно, ограничивается случаем, когда глубина мала в сравнении с радиусом a . Решение Пуассона и Рэлея для случая произвольной глубины будет приведено в гл. IX.



Фиг. 45.

где ζ имеет одну из форм (4). Для $s > 0$ это уравнение выполняется вследствие присутствия тригонометрического множителя $\cos s\theta$ или $\sin s\theta$; в симметричном случае оно дает

$$\int_0^a J_0(kr) r dr = 0. \quad (17)$$

Далее, так как самое общее свободное движение системы можно получить наложением нормальных колебаний, из которых каждое имеет произвольную амплитуду и фазу, то всякое произвольное значение ζ , удовлетворяющее условию (16), может быть разложено в ряд вида

$$\zeta = \sum \sum (A_s \cos s\theta + B_s \sin s\theta) J_s(kr), \quad (18)$$

где суммирование распространяется на все целые значения, включая нуль, и для каждого значения s на все корни k уравнения (5). Если коэффициенты A_s , B_s рассматривать как функции от t , то уравнение (18) представляет возмущенные поверхности в каждый произвольный момент времени. Величины A_s , B_s суть тогда нормальные координаты рассматриваемой системы (§ 168); выраженные через них формулы для кинетической и потенциальной энергии должны приводиться к суммам квадратов. Если рассматривать, например, потенциальную энергию

$$V = \frac{1}{2} g\varrho \iint \zeta^2 dx dy, \quad (19)$$

то для этого необходимо, чтобы

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a w_1 w_2 r d\theta dr = 0, \quad (20)$$

где w_1 , w_2 суть два какие-то члена разложения (18). Если w_1 , w_2 содержат косинус или синус различных кратностей от θ , то это соотношение можно тотчас же проверить интегрированием по θ ; если же

$$w_1 \text{ пропорционально } J_s(k_1 r) \cos s\theta,$$

$$w_2 \text{ пропорционально } J_s(k_2 r) \cos s\theta,$$

где k_1 , k_2 обозначают два произвольных различных корня уравнения (5), то получаем

$$\int_0^a J_s(k_1 r) J_s(k_2 r) r dr = 0. \quad (21)$$

Общие результаты, частными случаями которых являются формулы (17) и (21), суть

$$\int_0^a J_0(kr) r dr = -\frac{a}{k} J_0'(ka) \quad (22)$$

[ср. (10) § 102] и

$$\begin{aligned} \int_0^a J_s(k_1 r) J_s(k_2 r) r dr &= \\ &= \frac{1}{k_1^2 - k_2^2} \{k_1 a J_s'(k_2 a) J_s(k_1 a) - k_2 a J_s'(k_1 a) J_s(k_2 a)\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Для $k_1 = k_2$ это последнее выражение становится неопределенным; вычисление с помощью обычных приемов дает

$$\int_0^a \{J_s(ka)\}^2 r dr = \frac{1}{2k^2} [k^2 a^2 \{J_s'(ka)\}^2 + (k^2 a^2 - s^2) \{J_s(ka)\}^2]. \quad (24)$$

Математическое доказательство этих формул находится в учебниках, указанных на стр. 147.

Малые колебания *кольцеобразного* слоя воды, который ограничен концентрическими окружностями, теоретически легко рассмотреть с помощью бесселевых функций второго рода. Единственный, однако, интересный случай — это тот, когда оба радиуса приблизительно равны; практически мы имеем тогда канал кольцевого вида, и решение получается проще согласно § 178.

Указанный метод применяется также к случаю *кругового сектора* с произвольным углом ¹⁾ или к слою воды, ограниченному двумя концентрическими дугами окружности и двумя радиусами.

Соответствующая задача для *эллиптического бассейна* более трудна, но приближенное значение частоты самого медленного колебания, которое имеет ось в качестве узловой линии, можно получить согласно данному в § 168 методу Рэля.

Пусть уравнение контура будет

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \quad (25)$$

За компоненты перемещения возьмем

$$\left. \begin{aligned} \xi &= A \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) + B \frac{y^2}{b^2}, \\ \eta &= -B \frac{xy}{a^2}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где постоянные выбраны таким образом, что на границе контура (25)

$$\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} = 0. \quad (27)$$

Понятно, что компоненты перемещения необходимо умножить еще на временной множитель $\cos \sigma t$. Соответствующее возвышение поверхности равно

$$\zeta = -h \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = \frac{h}{a^2} (2A + B) x. \quad (28)$$

Допущение (26), однако, для рассматриваемого случая слишком общо, так как оно включает также циркуляционные движения. Условие, чтобы вектор вихря равнялся нулю, требует

$$(2a^2 + b^2) B = 2a^2 A. \quad (29)$$

Из (26) получаем

$$\begin{aligned} 2T &= \rho h \iint (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) dx dy = \\ &= 2\pi \rho a b h \sigma^2 \left\{ \frac{1}{6} A^2 + \frac{1}{12} AB + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{48} \frac{b^2}{a^2} \right) B^2 \right\} \sin^2 \sigma t, \end{aligned} \quad (30)$$

$$2V = \rho g \iint \zeta^2 dx dy = 2\pi a b g h^2 \frac{(2A + B)^2}{8a^2} \cos^2 \sigma t. \quad (31)$$

¹⁾ См. Rayleigh, Theory of Sound, § 339.

Выразив, что среднее значение $T - V$ равно нулю и используя условие (29) мы найдем

$$\sigma^2 = \frac{18a^2 + 6b^2}{5a^2 + 2b^2} \cdot \frac{c^2}{a^2}, \quad (32)$$

где $c^2 = gh$.

При $b = a$ имеем $\frac{\sigma a}{c} = 1,852$, в то время как для круглого бассейна истинное значение $\frac{\sigma a}{c} = 1,841$. Приближенное значение хорошо согласуется с общим принципом (§ 168).

Не следует ожидать, что формула (32) для больших значений эксцентриситета даст еще хорошие результаты. Для $\frac{b}{a} = \infty$ она совершенно не годится.

Различные виды продольных колебаний в эллиптическом канале были исследованы Жефреем ¹⁾ и Гольдштейном ²⁾ и совсем недавно Хидаком ³⁾ различными методами. Оказывается, что при наиболее важном виде колебаний $\frac{\sigma a}{c} = 1,8866$, если мы примем $\frac{b}{a} \rightarrow 0$, в формуле (32) получим $\frac{\sigma a}{c} = 1,8994$. Казалось, что формула эта дает хорошее приближение для значений $\frac{b}{a}$, меньших единицы.

§ 192. Рассмотрим пример *вынужденных* колебаний в круглом бассейне. Предположим, что возмущающие силы таковы, что возвышение согласно статической теории равно

$$\bar{\zeta} = C \left(\frac{r}{a} \right)^s \cos s\theta \cos (\sigma t + \varepsilon). \quad (33)$$

Это дает $\Delta_1 \bar{\zeta} = 0$, и уравнение (12) § 189 приводится к виду (1). Решение его есть

$$\zeta = A J_s(kr) \cos s\theta \cos (\sigma t + \varepsilon), \quad (34)$$

где A обозначает произвольную постоянную. Граничное условие [(14) § 189] дает

$$Aka J'_s(ka) = sC;$$

отсюда следует, что

$$\zeta = C \frac{s J_s(kr)}{ka J'_s(ka)} \cos s\theta \cos (\sigma t + \varepsilon). \quad (35)$$

Случай $s = 1$ представляет интерес, так как он соответствует *неизменяющейся* горизонтальной силе; получаемый здесь результат можно сравнить с результатом § 179.

¹⁾ Jeffreys, Proc. Lond. Math. Soc. (2), XXIII, 455 (1924).

²⁾ Goldstein, там же, XXVIII, 91 (1927).

³⁾ Hidaka, Mem. Imp. Mar. Obs. (Japan), IV, 99 (1931). Эта работа содержит исследования свободных колебаний в бассейнах с другой формой очертания границ и с различными законами изменения глубины.

Случай $s = 2$ дает грубое представление полусуточных приливов для бассейна на полюсе Земли, ограниченного небольшим кругом широты, причем, однако, вращение Земли не учитывается.

Мы обращаем внимание на то, что выражение для амплитуды колебаний в случае $J_s(ka) = 0$ делается бесконечным. Это находится в согласии с общим положением, несколько примеров применения которого мы уже имели, именно: период возмущающей силы здесь равен периоду свободных нормальных колебаний, исследованных в предыдущем параграфе.

§ 193 ¹⁾. Если слой воды имеет переменную глубину, то (см. § 189) уравнение неразрывности будет

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \frac{\partial (hu)}{\partial x} - \frac{\partial (hv)}{\partial y}. \quad (1)$$

Уравнения движения [(2) § 189] остаются, конечно, без изменения. После исключения ζ мы находим для свободных колебаний

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = g \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right\}. \quad (2)$$

Если временной множитель есть $e^{i(\sigma t + \epsilon)}$, то мы получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + \frac{\sigma^2}{g} \zeta = 0. \quad (3)$$

Когда h зависит только от r — расстояния от начала, тогда уравнение (3) переходит в

$$h \Delta_1 \zeta + \frac{dh}{dr} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{g} \zeta = 0. \quad (4)$$

В качестве простого примера рассмотрим круглый бассейн, глубина которого постепенно убывает от центра к краю по закону

$$h = h_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right). \quad (5)$$

Если ввести полярные координаты и принять, что ζ пропорционально $\cos s\theta$ или $\sin s\theta$, то уравнение (4) примет вид

$$\left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{s^2}{r^2} \zeta \right) - \frac{2}{a^2} r \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{gh_0} \zeta = 0. \quad (6)$$

Тот интеграл этого уравнения который конечен в начале, находится легко в виде степенного ряда с возрастающими положительными показателями. Положив

$$\zeta = \sum A_m \left(\frac{r}{a} \right)^m, \quad (7)$$

¹⁾ Этот параграф представлял § 189 второго издания этого труда (1895). Подобное исследование дано Poinson, *Leçons de mécanique céleste*, III (Paris, 1910).

где для краткости тригонометрические множители опущены, получим следующее соотношение между последовательными коэффициентами:

$$(m^2 - s^2) A_m = \left\{ m(m-2) - s^2 - \frac{\sigma^2 a^2}{gh_0} \right\} A_{m-2},$$

или, если положить

$$\frac{\sigma^2 a^2}{gh_0} = n(n-2) - s^2, \quad (8)$$

где n — пока еще не обязательно целое число, то

$$(m^2 - s^2) A_m = (m-n)(m+n-2) A_{m-2} \quad (9)$$

Уравнение (6) будет удовлетворяться рядом вида (7), который начинается членом $A_s \left(\frac{r}{a}\right)^s$, причем остальные коэффициенты получим, если в (9) положим $m = s+2, s+4, \dots$. Таким образом, мы находим

$$\zeta = A_s \left(\frac{r}{a}\right)^s \left\{ 1 - \frac{(n-s-2)(n+s)}{2(2s+2)} \frac{r^2}{a^2} + \frac{(n-s-4)(n-s-2)(n+s)(n+s+2)}{2 \cdot 4 \cdot (2s+2)(2s+4)} \frac{r^4}{a^4} - \dots \right\}, \quad (10)$$

или, пользуясь употребительным способом обозначений гипергеометрических рядов:

$$\zeta = A_s \frac{r^s}{a^s} F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{r^2}{a^2}\right), \quad (11)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} n + \frac{1}{2} s,$$

$$\beta = 1 + \frac{1}{2} s - \frac{1}{2} n,$$

$$\gamma = s + 1.$$

Так как отсюда получаем $\gamma - \alpha - \beta = 0$, то для $r = a$ ряд не сходится кроме того случая, когда он конечен. Это же имеет место только тогда когда n есть целое число вида $s+2j$. Соответствующие значения σ получим из (8).

Для симметрических видов колебаний ($s=0$) имеем

$$\zeta = A_0 \left\{ 1 - \frac{j(j-1)}{1^2} \frac{r^2}{a^2} + \frac{(j+1)j(j-1)(j-2)}{1^2 \cdot 2^2} \frac{r^4}{a^4} - \dots \right\}, \quad (12)$$

где j может быть каким-нибудь целым числом, большим единицы¹⁾. Можно показать, что для $j-1$ значений r , лежащих между 0 и a , это выражение обращается в нуль, что указывает на существование $j-1$ круговых узловых линий. Значение σ определяется из

$$\sigma^2 = 4j(j-1) \frac{gh_0}{a^2}; \quad (13)$$

Отсюда следует $\frac{\sigma a}{\sqrt{gh_0}} = 2,828, 4,899, 6,928, \dots$ (13a)

¹⁾ Если мы положим $r/a = \sin^{1/2} \chi$, то ряд будет тождественно совпадать с разложением $P_{j-1}(\cos \chi)$; см. § 85 (4).

Таким образом самый медленный симметрический вид колебаний ($j=2$) имеет круговую узловую линию с радиусом $0,707 a$.

Из несимметрических видов колебаний для произвольного данного значения s самое медленное есть то, для которого $n=s+2$; в этом случае

$$\zeta = A_s \frac{r^s}{a^s} \cos s\theta \cos (\sigma t + \epsilon),$$

где значение σ получается из формулы

$$\sigma^2 = 2s \frac{gh_0}{a^2}. \quad (14)$$

Для случая $s=1$ различные частоты получаются из выражения

$$\sigma^2 = (4j^2 - 2) \frac{gh_0}{a^2}; \quad (15)$$

отсюда следует

$$\frac{\sigma a}{\sqrt{gh_0}} = 1,414, 3,742, 5,831, \dots \quad (16)$$

При самых медленных из этих видов колебаний, которые соответствуют значениям $s=1$, $n=3$, свободная поверхность есть всегда *плоскость*. Из (15a) § 191 следует, что частота в 0,768 раз больше, чем частота соответствующего вида колебаний в круглом бассейне с *постоянной* глубиной h_0 и тем же радиусом.

Как в § 192, мы могли бы написать сразу выражение для приливов, которые происходят от неизменяющейся горизонтальной периодической силы или вообще для случая, когда возмущающая сила имеет потенциал вида

$$\Omega \text{ пропорционально } r^s \cos s\theta \cos (\sigma t + \epsilon).$$

§ 194. В заключение нашего изучения длинных волн на плоских водных поверхностях мы рассмотрим еще распространение возмущений, которые идут от центра в неограниченном слое постоянной глубины. Для простоты мы ограничимся случаем симметрии, при котором возвышение ζ есть функция расстояния r от начала возмущения. Это приведет нас к некоторым своеобразным и важным явлениям, которые встречаются при распространении волн в двух измерениях.

Исследование периодического возмущения требует применения бесселевой функции (нулевого порядка) второго рода, относительно которой мы сделаем некоторые предварительные замечания.

Чтобы решить уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\varphi}{dz} + \varphi = 0 \quad (1)$$

при помощи определенных интегралов, мы возьмем¹⁾

$$\varphi = \int e^{-zt} T dt, \quad (2)$$

где T есть функция комплексного переменного t , а пределы интегрирования:

¹⁾ Forsyth, Differential Equations, гл. VII. Систематическое применение этого метода к теории бесселевых функций принадлежит H a n k e l, Die Zylinderfunktionen erster und zweiter Art, Math. Ann., 1, 467 (1869).

постоянны, но еще неопределенны. После интегрирования по частям будем иметь

$$z \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + \frac{d\varphi}{dz} + z\varphi = -[(1+t^2)e^{-zt} \cdot T] + \int \left(\frac{d}{dt} \{ (1+t^2) T \} - tT \right) e^{-zt} dt.$$

Уравнение (1) удовлетворяется, таким образом, если положить

$$\varphi = \int \frac{e^{-zt} dt}{\sqrt{1+t^2}} \quad (3)$$

при условии, что выражение

$$\sqrt{1+t^2} e^{-zt}$$

обращается в нуль при верхнем и нижнем пределах интегрирования. Следовательно, предполагая, что z действительно и положительно или что по крайней мере действительная часть z положительна, мы можем взять интеграл (3) вдоль пути, который соединяет две какие-то из точек i , $-i$, $+\infty$ в плоскости t ; но два различные пути, соединяющие одну и ту же пару точек, не обязательно должны давать один и тот же результат, если они содержат между собой одну из точек разветвления ($t = \pm i$) функции, находящейся под знаком интеграла.

Таким образом, мы получаем, например, решение в виде

$$\varphi_1 = \int_{-i}^i \frac{e^{-zt} dt}{\sqrt{1+t^2}},$$

где путь интегрирования есть та часть мнимой оси, которая лежит между пределами, и для квадратного корня берется то значение, которое для $t=0$ равно 1. Положив

$$t = \xi + i\eta,$$

получим

$$\varphi_1 = i \int_{-1}^{+1} \frac{e^{-iz\eta} d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = 2i \int_0^{1/2\pi} \cos(z \cos \theta) d\theta = i\pi J_0(z), \quad (4)$$

а это есть уже известное решение (§ 100).

Взяв интеграл (3) вдоль оси η от точки $(0, i)$ до начала и затем вдоль оси ξ до точки $(\infty, 0)$, мы получим независимое от (4) решение, которое при одинаковом условии относительно квадратного корня равно

$$\varphi_2 = \int_i^0 \frac{e^{-iz\eta} d(i\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} + \int_0^\infty \frac{e^{-z\xi} d\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} = \int_0^\infty \frac{e^{-z\xi} d\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} - i \int_0^1 \frac{e^{-iz\eta} d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}. \quad (5)$$

Если мы возьмем друг не пары пределов интегрирования и другие пути то мы можем получить другие выражения для φ , но все они должны быть эквивалентны либо φ_1 , либо φ_2 , либо их линейным комбинациям. В особенности важны некоторые другие выражения φ_2 . Известно, что значение интеграла (3) равно нулю, если он берется по замкнутой кривой, вне которой лежат точки разветвления ($t = \pm i$). Возьмем сначала в качестве такой замкнутой кривой прямоугольник, две стороны которого совпадают с положительными частями осей ξ и η , за исключением малой полуокружности около точки $t=i$, в то время как другие две стороны прямоугольника лежат в бесконечности. Легко видеть, что части интеграла, которые зависят от бесконечно далеких сторон, обращаются в нуль или потому, что множитель $e^{-z\xi} \rightarrow 0$ для $\xi \rightarrow \infty$, или же вследствие бесконечно быстрого колеба-

ния функции $\frac{e^{-iz\eta}}{\eta}$, когда $\eta \rightarrow \infty$. Мы можем таким образом путь, которым мы пользовались при образовании решения (5), заменить путем, который идет вдоль оси η от точки $(0, i)$ к точке $(0, i, \infty)$, при условии, что сохраняется непрерывность квадратного корня. Так как переменная t пробегает малый полукруг в направлении, противоположном часовой стрелке, то квадратный корень изменяется непрерывно от $\sqrt{1-\eta^2}$ до $i\sqrt{\eta^2-1}$. Следовательно,

$$\varphi_2 = \int_i^{i\infty} \frac{e^{-iz\eta} d(i\eta)}{i\sqrt{\eta^2-1}} = \int_1^{\infty} \frac{e^{iz\eta} d\eta}{\sqrt{\eta^2-1}} = \int_0^{\infty} e^{-iz \operatorname{ch} u} du. \quad (6)$$

Мы покажем, что это решение особенно подходит для случая расходящихся волн. Другой метод для получения этого решения будет дан в главе X.

Приравняв друг другу мнимые части в выражениях (5) и (6), получим формулу

$$J_0(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(z \operatorname{ch} u) du, \quad (7)$$

которая принадлежит Меллеру¹⁾.

Вследствие физической важности решения (6) введем для него особое обозначение. Мы полагаем²⁾

$$D_0(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-iz \operatorname{ch} u} du, \quad (8)$$

а это эквивалентно с

$$D_0(z) = -Y_0(z) - iJ_0(z), \quad (9)$$

где³⁾

$$Y_0 = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(z \operatorname{ch} u) du. \quad (10)$$

Приравняв друг другу действительные части в выражениях (5) и (6) получим также

$$Y_0(z) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-z \operatorname{sh} u} du + \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \sin(z \cos \theta) d\theta. \quad (11)$$

На том же основании можно заменить путь интегрирования, использованный для φ_2 , прямой линией²⁾, проведенной от точки $(0, i)$ параллельно

¹⁾ Mehlert, Math. Ann., V (1872).

²⁾ Применение простого обозначения для случая расходящихся волн можно считать оправданным. Наше $D_0(z)$ эквивалентно обозначению Нильсена $-iH_0^+(z)$ в форме, слегка измененной Ватсоном.

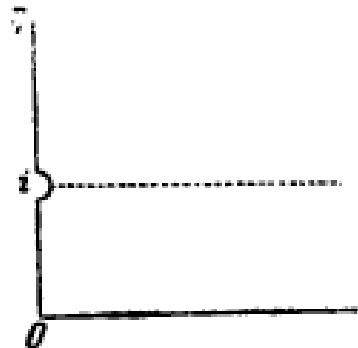
³⁾ Это есть обозначение, рекомендуемое Ватсоном. Мы обращаем, однако, внимание читателя на то, что тот же самый символ другими авторами применяется в другом смысле. С чисто математической точки зрения выбор решения „второго рода“ есть в сущности дело соглашения, так как дифференциальное уравнение (1) удовлетворяется также тогда, когда к решению прибавить постоянное, умноженное на $J_0(z)$. Таблицы функции $Y_0(z)$, определяемой (10), можно найти и в учебнике Ватсона.

оси ξ (см. пунктирную линию фиг. 46). Чтобы обеспечить непрерывность $\sqrt{1+i^2}$, заметим, что значение этого корня изменяется от $\sqrt{1-\eta^2}$ приблизительно до $e^{1/4 i \pi} \sqrt{2\xi}$, когда t пробегает нижний квадрант малого полукруга. Если положить $t = 1 + \xi$, то вдоль пунктирной линии будем иметь

$$\sqrt{1+i^2} = e^{1/4 i \pi} \sqrt{2\xi - i\xi^2},$$

где необходимо выбрать то значение корня, которое действительно и положительно, когда ξ бесконечно мало. Следовательно, мы имеем

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \int_i^{\infty+i} \frac{e^{-z(\xi+i)} d(\xi+i)}{e^{1/4 i \pi} \sqrt{2\xi - i\xi^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i(z+1/4\pi)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-z\xi}}{\xi^{1/2}} \left(1 - \frac{1}{2} i\xi\right)^{1/2} d\xi. \end{aligned} \quad (12)$$



Фиг. 46.

Если разложить двучлен в биномиальный ряд и интегрировать почленно, то найдем

$$D_0(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{-i(z+1/4\pi)} \left\{ 1 + \frac{1^2}{1!} \left(\frac{i}{2z}\right) + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2!} \left(\frac{i}{8z}\right)^2 + \dots \right\}, \quad (13)$$

причем используются формулы

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-z\xi} \xi^{-1/2} d\xi &= \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{z^{1/2}} = \frac{\pi^{1/2}}{z^{1/2}}, \\ \int_0^{\infty} e^{-z\xi} \xi^{m-1/2} d\xi &= \frac{\Gamma\left(m - \frac{1}{2}\right)}{z^{m+1/2}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2m-1)}{2^m z^m} \cdot \frac{\pi^{1/2}}{z^{1/2}}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Если разделить действительные и мнимые части (13), то получим из сравнения с (9)

$$J_0(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \left\{ R \sin\left(z + \frac{1}{4}\pi\right) - S \cos\left(z + \frac{1}{4}\pi\right) \right\}, \quad (15)$$

$$Y_0(z) = -\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \left\{ R \cos\left(z + \frac{1}{4}\pi\right) + S \sin\left(z + \frac{1}{4}\pi\right) \right\}, \quad (16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} R &= 1 - \frac{1^2 \cdot 3^2}{2! (8z)^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{4! (8z)^4} - \dots, \\ S &= \frac{1^2}{1! (8z)} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{3! (8z)^3} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Ряды в формулах (13) и (17) принадлежат к „полусходящимся“ или асимптотическим рядам; это значит, что хотя для достаточно больших значений z следующие друг за другом члены некоторое время убывают, но затем, однако, они опять начинают расти; если же остановимся на некотором

малом члене, то мы получим приблизительно верный результат¹⁾. Это доказывается исследованием остаточного члена, стоящего после m -го члена разложения выражения (12).

Из (15) видно, что с² возрастанием абсолютной величины корни уравнения $J_0(z) = 0$ приближаются к корням уравнения

$$\sin\left(z + \frac{1}{4}\pi\right) = 0. \quad (18)$$

Ряд (13) дает полное заключение относительно поведения функции $D_0(z)$ для больших значений z . Когда, напротив, z мало, то $D_0(z)$ согласно (8) очень велико. Приближенную формулу для этого случая можно получить следующим образом. Если мы обратимся к уравнению (11), то получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-z \operatorname{sh} u} du &= \int_1^{\infty} e^{-1/2 z (v-1/v)} \frac{dv}{v} = \\ &= \int_1^{\infty} \frac{e^{-1/2 z v}}{v} \left\{ 1 + \frac{z}{2v} + \frac{1}{2!} \left(\frac{z}{2v}\right)^2 + \dots \right\} dv = \\ &= \int_{1/2 z}^{\infty} \frac{e^{-w}}{w} \left\{ 1 + \frac{z^2}{4w} + \frac{1}{2!} \left(\frac{z^2}{4w}\right)^2 + \dots \right\} dw. \end{aligned} \quad (19)$$

Первый член дает²⁾

$$\int_{1/2 z}^{\infty} \frac{e^{-w}}{w} dw = -\gamma - \ln \frac{1}{2} z + \dots, \quad (20)$$

а остальные члены по сравнению с этим малы. Таким образом из (9) и (11) получаем

$$D_0(z) = -\frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{1}{2} z + \gamma + \frac{1}{2} i\pi + \dots \right). \quad (21)$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{z \rightarrow 0} z D'_0(z) = -\frac{2}{\pi} \text{ } ^3). \quad (22)$$

¹⁾ Ср. Whittaker a. Watson, *Modern Analysis*, гл. VIII; Bromwich, *Theory of Infinite series*, London, 1908, гл. XI; Watson, гл. VII; Gray and Matthews, 2-е изд., гл. V. Асимптотическое разложение для J_0 получено Пуассоном, *Journal de l'École Polyth.*, тетр. 19, стр. 349 (1823); строгое исследование этих и подобных разложений дано Стоксом, см. примечание на стр. 359. „Остаточный член“ исследован Липшицем, *Crelle*, LVI, 189 (1859); ср. Hankel, см. примечание на стр. 367.

²⁾ De Morgan, *Differential and Integral Calculus*, London, 1842, стр. 659.

³⁾ Бесселевы функции второго рода впервые были обстоятельно изучены Стоксом и приведены к виду, аналитически употребительному для применения к физическим проблемам, в работе, опубликованной в *Cambr. Trans.* С помощью современной теории функций методы были упрощены Липшицем и другими, а также (особенно с физической точки зрения) Рэлеем. Эти последние методы и применены в тексте

Формула (21) достаточна для наших целей, но полное выражение мы можем получить теперь также в форме ряда по возрастающим степеням z сравнением с общим решением уравнения (1). Именно мы имеем¹⁾

$$\varphi = A J_0(z) + B \left\{ J_0(z) \ln z + \frac{z^2}{2^2} - s_2 \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2} + s_3 \frac{z^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} - \dots \right\}, \quad (23)$$

где

$$s_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}.$$

Чтобы показать, что для малых значений z это выражение совпадает с (21), мы должны положить

$$B = -\frac{2}{\pi}, \quad A = -\frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{1}{2} z + \gamma + \frac{1}{2} i\pi \right); \quad (24)$$

тогда будем иметь

$$D_0(z) = -\frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{1}{2} z + \gamma + \frac{1}{2} i\pi \right) J_0(z) - \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{z^2}{2^2} - s_2 \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2} + s_3 \frac{z^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} - \dots \right\}. \quad (25)$$

§ 195. Мы можем теперь перейти к задаче, поставленной в начале § 194. Для определенности положим, что возмущение происходит благодаря переменному давлению p_0 , которое действует на поверхность. Тогда уравнения движения § 189 переходят в

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

в то время как

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2)$$

остается без изменения.

Если мы введем в (1) потенциал скоростей, то получим после интегрирования

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = g \zeta + \frac{p_0}{\rho}. \quad (3)$$

Мы можем предположить, что p_0 обозначает *изменяющееся* давление и произвольная функция от t заключена в φ , которая выбрана так, что в областях, не затронутых возмущением, $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$. Исключив ζ с помощью (2), получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = gh \Delta_1 \varphi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial t}. \quad (4)$$

После определения φ значение ζ найдем из уравнения (3).

¹⁾ Forsyth, Differential Equations, гл. VI, заметка I; Watson, Bessel Functions, стр. 59, 60.

Предположим теперь, что p_0 только внутри небольшой¹⁾ области около начала имеет заметную величину. Если умножить обе части уравнения (4) на $\delta x \delta y$ и интегрировать по этой области, то можно пренебречь, по сравнению с остальными, членом в левой части уравнения, и мы получим

$$-\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \frac{1}{g\varrho h} \frac{d}{dt} \iint p_0 dx dy, \quad (5)$$

где ds есть элемент границы области, а δn — горизонтальная нормаль к ds , проведенная наружу. Начало можно, таким образом, рассматривать как двухмерный источник с мощностью

$$f(t) = \frac{1}{g\varrho h} \frac{dP_0}{dt}, \quad (6)$$

где P_0 обозначает полную результирующую возмущающую силу.

Если мы перейдем к полярным координатам и положим $gh = c^2$, то должны будем удовлетворить уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \quad (7)$$

при условии

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(-2\pi r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = f(t), \quad (8)$$

где $f(t)$ обозначает мощность определенного только что источника.

В случае периодического источника мощности $e^{i\sigma t}$ уравнение (7) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + k^2 \varphi = 0, \quad (9)$$

где $k = \frac{\sigma}{c}$. Решение этого уравнения есть

$$\varphi = \frac{1}{4} D_0(kr) e^{i\sigma t}; \quad (10)$$

здесь постоянный множитель определен, как и в формуле (22) § 194. Если взять действительную часть, то будем иметь решение

$$\varphi = \frac{1}{4} \{ J_0(kr) \sin \sigma t - Y_0(kr) \cos \sigma t \}, \quad (11)$$

которое соответствует источнику мощности $f(t) = \cos \sigma t$.

Для больших значений kr формула (10) принимает вид

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{8\pi kr}} e^{i\sigma(t-r/c) - 1/4 i\pi}. \quad (12)$$

¹⁾ Это предположение обозначает, что измерения области малы в сравнении с длиной полученной волны, понимаемой в общем смысле § 172. С другой стороны, необходимо принять, что по отношению к h измерения велики.

Выражение $t - r/c$ показывает, что мы в самом деле получили решение, которое подходит для изображения расходящихся волн.

Следовательно, амплитуда кольцеобразных волн в конечном счете обратно пропорциональна квадратному корню расстояния от начала.

§ 196. Решение, которое мы получили для случая простого гармонического источника $e^{i\omega t}$, можно выразить так

$$2\pi\varphi = \int_0^{\infty} e^{i\omega \left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u\right)} du. \quad (13)$$

Эта форма допускает обобщение с помощью теоремы Фурье; формула

$$2\pi\varphi = \int_0^{\infty} f\left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u\right) du \quad (14)$$

должна представлять возмущение, происходящее от источника $f(t)$, лежащего в начале¹⁾. Конечно, $f(t)$ должна быть такой, чтобы интеграл сходился; это условие, понятно, будет всегда выполнено, когда источник был в действии только в течение конечного времени. Более полная формула, которая обнимает как сходящиеся, так и расходящиеся волны, будет

$$2\pi\varphi = \int_0^{\infty} f\left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u\right) du + \int_0^{\infty} F\left(t + \frac{r}{c} \operatorname{ch} u\right) du. \quad (15)$$

Решение (15) может быть проверено подстановкой в дифференциальное уравнение (7) и подчинением некоторым условиям. Если мы отдельно рассмотрим первый член (15), то найдем

$$\begin{aligned} 2\pi \left\{ c^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right\} &= \\ &= \int_0^{\infty} \left\{ \operatorname{sh}^2 u f''\left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u\right) - \frac{c}{r} \operatorname{ch} u f'\left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u\right) \right\} du = \\ &= \frac{c^2}{r^2} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial u^2} f\left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u\right) du = -\frac{c}{r} \left[\operatorname{sh} u f'\left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u\right) \right]_{u=0}^{u=\infty} \end{aligned}$$

Это выражение, очевидно, обращается в нуль, когда $f(t) = 0$ для отрицательных значений t , превосходящих определенную границу²⁾.

¹⁾ Содержание § 196, 197 заимствовано из работы автора «On Wave Propagation in Two Dimensions», Proc. Lond. Math. Soc. (1), XXXV, 141 (1902). Результат, эквивалентный уравнению (14), был найден (другим путем) Levi-Civita, Nuovo Cimento (4), VI (1897).

²⁾ Доказательство совершенно аналогично данному Леви-Чивита.

Далее при тех же самых условиях имеем

$$\begin{aligned} 2\pi r \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \frac{r}{c} \int_0^{\infty} \operatorname{ch} u \cdot f' \left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u \right) du = \\ &= \frac{r}{c} \int_0^{\infty} (\operatorname{sh} u + e^{-u}) f' \left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u \right) du = \\ &= - \left[f \left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u \right) \right]_{u=0}^{u=\infty} + \frac{r}{c} \int_0^{\infty} e^{-u} f' \left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u \right) du = \\ &= f \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{r}{c} \int_0^{\infty} e^{-u} f' \left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u \right) du. \end{aligned}$$

Предел этого выражения для $r \rightarrow 0$ равен $f(t)$; высказанное выше утверждение относительно мощности источника в (14) таким образом проверено.

Подобный прием применим и ко второму члену (15), при условии, что $F(t)$ для положительных значений t , которые превосходят определенную границу, обращается в нуль.

§ 197. Мы можем теперь применить формулу (14), чтобы исследовать действие переменного источника, которое меняется согласно какому-нибудь простому закону.

Если мы предположим, что до момента $t=0$ все находится в покое, так что $f(t)$ для отрицательных значений t равно нулю, тогда из (14) или из равнозначного выражения

$$2\pi\varphi = \int_{-\infty}^t \frac{f(\theta) d\theta}{\left\{ (t-\theta)^2 - \frac{r^2}{c^2} \right\}^{1/2}} \quad (16)$$

следует, что φ всюду остается равно нулю, пока $t < \frac{r}{c}$. Если, сверх того, источник действует только в течение конечного времени τ , так что $f(t) = 0$ для $t > \tau$, то для $t > \tau + \frac{r}{c}$ имеет место

$$2\pi\varphi = \int_0^{\tau} \frac{f(\theta) d\theta}{\left\{ (t-\theta)^2 - \frac{r^2}{c^2} \right\}^{1/2}}. \quad (17)^1$$

¹⁾ С аналитической точки зрения необходимо заметить, что для $p_0 = 0$ уравнение (4) может быть написано в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial (ict)^2} = 0$$

и что (17) состоит из совокупности решений известного типа

$$\{ x^2 + y^2 + (ict)^2 \}^{-1/2}.$$

Это выражение обычно не обращается в нуль; волна, таким образом, с задней стороны не ограничена так резко, как с передней, а наоборот, имеет нечто вроде хвоста¹⁾, форма которого, когда $t - \frac{r}{c}$ велико по сравнению с τ , определяется уравнением

$$2\pi\varphi = \frac{1}{\left(t^2 - \frac{r^2}{c^2}\right)^{1/2}} \int_0^{\tau} f(\theta) d\theta. \quad (18)$$

Возвышение ζ в произвольной точке выражается с помощью (3) через

$$\zeta = \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (19)$$

Отсюда следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \zeta dt = 0, \quad (20)$$

если начальные и конечные значения φ обращаются в нуль. Можно показать, что это будет иметь место, когда $f(t)$ конечно и интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \quad (21)$$

сходится. Смысл этих условий можно усмотреть из уравнения (6).

Отсюда следует, что даже тогда, когда $\frac{dP_0}{dt}$ все время будет положительно, так что поток в окрестности начала направлен целиком наружу, волна, которая подходит к произвольной точке, будет состоять не только (как в соответствующей проблеме одного измерения) из одного возвышения, но в простейшем случае из одного возвышения, сопровождаемого понижением.

Чтобы ближе исследовать распространение единичной волны в одном частном случае, возьмем

$$f(t) = \frac{\tau}{t^2 + \tau^2}; \quad (22)$$

это значит, что P_0 возрастает от одного постоянного значения к другому по закону

$$P_0 = A + B \operatorname{arctg} \frac{t}{\tau}. \quad (23)$$

Момент, в который возмущающее давление начинается или прекращается, является теперь неопределенным, но промежуток времени, в котором оно становится ощутительным, можно сделать как угодно малым, уменьшая τ . Для проведения вычислений удобнее взять вместо (22)

$$f(t) = \frac{1}{t - i\tau} \quad (24)$$

¹⁾ Наличие хвоста в случае цилиндрических электрических волн было замечено Хивисайдом: Heaviside, Phil. Mag. (5), XXVI (1888) [Electrical Papers, II].

и в конце оставить только мнимую часть. Тогда будем иметь

$$2\pi\varphi = \int_0^{\infty} \frac{du}{t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u - i\tau} = 2 \int_0^1 \frac{dz}{t - \frac{r}{c} - i\tau - \left(t + \frac{r}{c} - i\tau\right) z^2}, \quad (25)$$

где $z = \operatorname{th} \frac{1}{2} u$.

Теперь положим

$$\left. \begin{aligned} t - \frac{r}{c} - i\tau &= a^2 e^{-2i\alpha}, \\ t + \frac{r}{c} - i\tau &= b^2 e^{-2i\beta}, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где мы можем считать, что a, b положительны и углы α, β лежат между 0 и $\frac{1}{2}\pi$. Так как

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= \left(t - \frac{r}{c}\right)^2 + \tau^2, & b^2 &= \left(t + \frac{r}{c}\right)^2 + \tau^2, \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{c\tau}{ct - r}, & \operatorname{tg} 2\beta &= \frac{c\tau}{ct + r}, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

то получается, что $a \geq b$, смотря по тому $t \geq 0$, и что всегда $\alpha > \beta$. При этих обозначениях мы находим

$$2\pi\varphi = 2 \int_0^1 \frac{dz}{a^2 e^{-2i\alpha} - b^2 e^{-2i\beta} z^2} = \frac{e^{i(\alpha+\beta)}}{ab} \ln \frac{z + \frac{a}{b} e^{-i(\alpha-\beta)}}{z - \frac{a}{b} e^{-i(\alpha-\beta)}}. \quad (28)$$

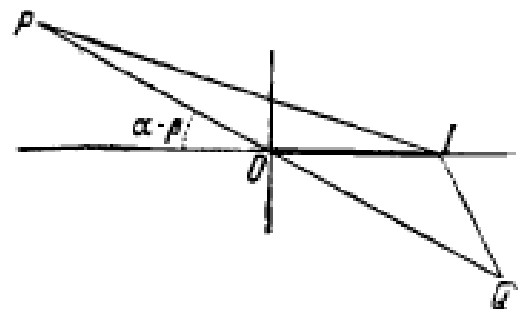
Чтобы взять верное значение логарифма, рассмотрим в плоскости комплекс-

ной переменной z точки (фиг. 47)

$$I = +1,$$

$$P = -\frac{a}{b} e^{-i(\alpha-\beta)},$$

$$Q = \frac{a}{b} e^{-i(\alpha-\beta)}$$



Фиг. 47.

Так как интеграл в (28) надо взять вдоль пути OI , то соответственное значение правой части (28) будет равно

$$\frac{e^{i(\alpha+\beta)}}{ab} \left\{ \left(\ln \frac{IP}{OP} + i \cdot OP I \right) - \left(\ln \frac{IQ}{OQ} - i \cdot OQ I \right) \right\},$$

где мы предполагаем логарифмы действительными, а углы положительными. Таким образом получается, если сохранить только мнимую часть, решение, соответствующее источнику типа (22) в виде:

$$2\pi\varphi = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{ab} \ln \frac{IP}{IQ} + \frac{\cos(\alpha+\beta)}{ab} (\pi - PIQ). \quad (29)$$

При этом будем иметь

$$\frac{IP}{IQ} = \left(\frac{a^2 + 2ab \cos(\alpha + \beta) + b^2}{a^2 - 2ab \cos(\alpha - \beta) + b^2} \right)^{1/2},$$

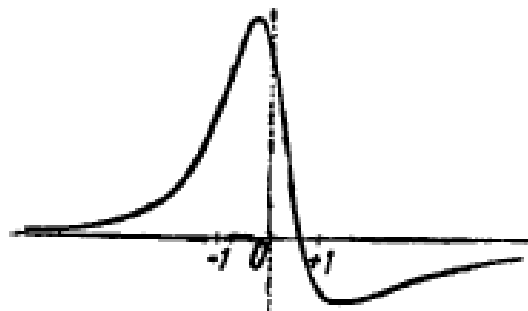
$$\operatorname{tg} PIQ = \frac{2ab \sin(\alpha - \beta)}{b^2 - a^2}, \quad (30)$$

причем значения a , b , α , β , выраженные через r и t , даны уравнениями (27).

Будет достаточно проследить главнейшую часть волны тогда, когда она проходит через точку, расстояние r которой от начала велико по сравнению с $c\tau$. Если мы ограничимся временем, в течение которого $t - \frac{r}{c}$ будет мало по сравнению с $\frac{r}{c}$, то a будет малым по сравнению с b , угол PIQ будет малым и $\frac{IP}{IQ}$ приблизительно будет равно 1. Если мы теперь положим

$$t = \frac{r}{c} + \tau \operatorname{tg} \eta, \quad (31)$$

то получим приближенно



Фиг. 48.

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2} \eta, \\ a &= \sqrt{\tau \sec \eta}, \\ \beta &= \frac{1}{4} \frac{c\tau}{r}, \\ b &= \left(2 \cdot \frac{r}{c} \right)^{1/2}; \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

тогда формула (29) принимает следующий вид:

$$2\pi\varphi = \frac{\pi}{ab} \cos \alpha = \frac{\pi}{\tau \sqrt{2}} \left(\frac{c\tau}{r} \right)^{1/2} \cos \left(\frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2} \eta \right) \sqrt{\cos \eta}. \quad (33)$$

Возвышение ζ в этом случае будет дано приближенно уравнением

$$2\pi g \zeta = 2\pi g \frac{d\varphi}{d(\tau \operatorname{tg} \eta)} = \frac{1}{4\tau^2 \sqrt{2}} \left(\frac{c\tau}{r} \right)^{1/2} \sin \left(\frac{1}{4} \pi - \frac{3}{2} \eta \right) \cos^{3/2} \eta. \quad (34)$$

Фигура 48 показывает соотношение между ζ и t , получаемое по формуле (34)¹⁾.

§ 198. Мы переходим теперь к исследованию случая сферического слоя воды или моря, которое покрывает шар. Предположим пока, что шар не вращается, а также пренебрежем пока взаимным притяжением частиц воды. Заданные математические условия тогда точно такие же, как и при акустической проблеме колебаний сферического воздушного слоя²⁾.

¹⁾ Точки, обозначенные на фигуре через -1 , 0 , $+1$, соответствуют временам $\frac{r}{c-\tau}$, $\frac{r}{c}$, $\frac{r}{c+\tau}$.

²⁾ Рассмотренной в книге Rayleigh, Theory of Sound, гл. XVIII.

Пусть a есть радиус твердого шара, h — глубина жидкости; мы предполагаем, что глубина h мала по сравнению с a , но непостоянна. Пусть положение какой-нибудь точки слоя определяется угловыми координатами θ , φ . Компоненту скорости в этой точке вдоль меридиана, в направлении возрастания θ , назовем через u , компоненту же скорости вдоль круга широты в направлении возрастания φ — через v . Далее через ζ обозначим возвышение свободной поверхности над невозмущенным уровнем. На основании изложенных в § 172 соображений предположим, что горизонтальное движение для всех точек одной и той же вертикали одинаково; уравнение неразрывности будет тогда

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (uha \sin \theta \delta \varphi) \delta \theta + \frac{\partial}{\partial \varphi} (vha \delta \theta) \delta \varphi = -a \sin \theta \delta \varphi a \delta \theta \frac{\partial \zeta}{\partial t},$$

где левая часть представляет поток через призму, имеющую в основании элемент поверхности $a \sin \theta \delta \varphi a \delta \theta$, тогда как правая сторона представляет быстроту уменьшения объема жидкости вследствие понижения поверхности. Следовательно,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{a \sin \theta} \left\{ \frac{\partial (hu \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (hv)}{\partial \varphi} \right\}. \quad (1)$$

Если пренебречь членами второго порядка относительно u и v , то уравнения движения, полученные по методам § 169, 189, будут

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial \zeta}{a \partial \theta} - \frac{\partial \Omega}{a \partial \theta}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -g \frac{\partial \zeta}{a \sin \theta \partial \varphi} - \frac{\partial \Omega}{a \sin \theta \partial \varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где Ω обозначает потенциал внешних сил.

Если положить

$$\bar{\zeta} = -\frac{\Omega}{g}, \quad (3)$$

то уравнения движения могут быть написаны также в форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{g}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} (\zeta - \bar{\zeta}), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{g}{a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\zeta - \bar{\zeta}). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Мы можем исключить u и v из уравнений (1) и (4) и получить таким образом уравнение, содержащее только ζ .

В случае простого гармонического колебания временной множитель равен $e^{i(\sigma t + \epsilon)}$, и уравнения принимают вид

$$\zeta = \frac{i}{\sigma a \sin \theta} \left\{ \frac{\partial (hu \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (hv)}{\partial \varphi} \right\}, \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= i \frac{g}{\sigma a} \frac{\partial}{\partial \theta} (\zeta - \bar{\zeta}), \\ v &= i \frac{g}{\sigma a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\zeta - \bar{\zeta}). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

§ 199. Рассмотрим более подробно случай постоянной глубины. Чтобы найти свободные колебания, положим $\zeta = 0$; уравнения (5) и (6) предыдущего параграфа тогда дают

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} + \frac{\sigma^2 a^2}{gh} \zeta = 0. \quad (1)$$

Это уравнение по виду тождественно с общим уравнением сферических поверхностных функций [§ 83 (2)]. Если мы, следовательно, положим

$$\frac{\sigma^2 a^2}{gh} = n(n+1), \quad (2)$$

то

$$\zeta = S_n \quad (3)$$

будет решением уравнения (1), где S_n обозначает общую сферическую поверхностную функцию порядка n .

В § 86 было отмечено, что S_n только тогда может быть конечной на всей поверхности шара, когда n есть целое число. Для океана, который покрывает всю сферу, свободная поверхность, таким образом, при нормальном колебании в каждый момент времени имеет форму „гармонического сфероида“

$$r = a + h + S_n \cos(\sigma t + \epsilon); \quad (4)$$

частота колебания будет равна

$$\sigma = \{ n(n+1) \}^{1/2} \frac{(gh)^{1/2}}{a}, \quad (5)$$

где n есть целое число.

Характер различных нормальных колебаний лучше всего определить при помощи исследования узловых линий ($S_n = 0$) свободной поверхности. В учебниках по сферическим функциям¹⁾ показывается, что зональная сферическая функция $P_n(\mu)$ обращается в нуль для n действительных и различных значений μ , лежащих между -1 и $+1$, так что в этом случае мы имеем в качестве узловых линий n кругов широты. Если n нечетно, то один из них совпадает с экватором. В случае тессеральных функций

$$(1 - \mu^2)^{1/2} \frac{d^s P_n(\mu)}{d\mu^s} \cos s\varphi,$$

$$(1 - \mu^2)^{1/2} \frac{d^s P_n(\mu)}{d\mu^s} \sin s\varphi$$

второй множитель обращается в нуль для $n - s$ значений μ , а тригонометрический множитель обращается в нуль для $2s$ равностоящих значений φ . Узловые линии состоят таким образом из $n - s$ парал-

¹⁾ См. литературные указания в своске 1, стр. 137.

лелей и $2s$ меридианов. Подобным же образом секториальные гармонические функции

$$(1 - \mu^2)^{1/2 n} \cos n\varphi,$$

$$(1 - \mu^2)^{1/2 n} \sin n\varphi$$

имеют в качестве узловых линий $2n$ меридианов.

Однако рассматриваемые случаи суть только частные случаи; в самом деле, так как существуют $2n + 1$ независимых сферических поверхностных функций какого-то целого порядка n и так как данная формулой (5) частота для каждой из них будет одной и той же, то будет иметь место неопределенность соответственного порядка и в составе нормальных колебаний и в распределении их узловых линий.

Наложением можно получить различные типы прогрессивных волн; если мы возьмем, например, секториальную гармоническую функцию, то получим решение, при котором

$$\zeta \text{ пропорционально } (1 - \mu^2)^{1/2 n} \cos(n\varphi - \sigma t + \varepsilon); \quad (6)$$

это дает целый ряд меридиональных гребней и борозд, которые движутся вокруг шара, причем скорость распространения, измеренная на экваторе, будет равна

$$\frac{\sigma a}{n} = \left(\frac{n+1}{n} gh\right)^{1/2}. \quad (7)$$

Легко убедиться, что траектории частиц суть эллипсы, главные оси которых соответственно совпадают с направлениями меридианов и кругов широты. На экваторе эти эллипсы сводятся к прямым линиям.

Для случая $n = 1$ сферическая функция будет зональной. Тогда гармонический сферический период (4) при нашей степени приближения будет представлять шар, эксцентричный твердому шару. Важно, однако, отметить, что этот случай, строго говоря, не может быть включен в наше динамическое исследование, если мы только не наложим некоторую связь на шар, чтобы удерживать его в покое, ибо рассматриваемая деформация свободной поверхности вызвала бы перемещение центра масс всего океана и вместе с этим вызвала бы соответствующую реакцию связи на земной шар. Легко было бы построить в этом смысле исправленную теорию для случая свободного земного шара, но сам вопрос имеет мало значения, во-первых, потому, что для случая Земли инертная масса твердого шара несоизмеримо велика сравнительно с массой океана и, во-вторых, возмущающие силы, которые могли бы произвести подобного рода деформацию, в природе обыкновенно не встречаются. Оказывается, например, что первый член выражения для приливообразующего потенциала Солнца или Луны есть сферическая функция *второго* порядка (см. прибавление к этой главе).

Для $n = 2$ свободная поверхность в некоторый момент представляет приближенно эллипсоид. Соответствующий период, который определяется из формулы (5), в 0,816 раза больше периода аналогичного колебания в канале на экваторе (§ 181).

Для больших значений n расстояние между двумя узловыми линиями мало сравнительно с радиусом земного шара, и колебания происходят тогда приблизительно таким же образом, как и на плоском слое воды. Например, скорость распространения секториальных волн, представленных формулой (6), на экваторе стремится с возрастающим n к значению $(gh)^{1/2}$ в согласии с § 170.

Сравнение этих исследований с общей теорией § 168 приводит по одним только физическим основаниям к заключению, что любое произвольное значение ζ можно разложить в ряд простых сферических функций, т. е. мы можем положить

$$\zeta = \sum_0^{\infty} S_n,$$

причем коэффициенты различных независимых сферических функций суть нормальные координаты системы. Так как в выражении для кинетической и потенциальной энергий произведения этих коэффициентов должны обращаться в нуль, то мы приходим к ортогональным свойствам сферических функций, как это было указано в § 87. Действительное вычисление энергий будет дано в следующей главе применительно к иному трактованию этой проблемы.

Действие простой гармонической возмущающей силы можно дать тотчас же, согласно формуле (14) § 168. Если значение Q на поверхности можно привести к виду

$$Q = \sum Q_n, \quad (8)$$

где Q_n есть сферическая поверхностная функция целого порядка n , то различные члены будут обозначать нормальные компоненты силы в обобщенном смысле § 135; значение ζ , согласно статической теории соответствующее какому-либо члену Q_n , будет

$$\zeta_n = -\frac{Q_n}{g}. \quad (9)$$

Таким образом для вынужденного колебания, соответствующего этому члену, мы будем иметь

$$\zeta_n = -\frac{1}{1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_n^2}} \frac{Q_n}{g}, \quad (10)$$

где σ обозначает частоту возмущающей силы, а σ_n — частоту соответствующего свободного колебания, которое дано формулой (5). Можно, конечно, уравнение (10) вывести без труда прямо из уравнения предыдущего параграфа.

§ 200. До сих пор мы пренебрегали взаимным притяжением частиц жидкости. В случае океана, покрывающего земной шар, и при плотностях, имеющих место для действительной Земли и действительного океана, указанное притяжение не оказывает влияния. Чтобы исследовать его действие для случая свободных колебаний, мы должны только в последнюю формулу на место Ω_n подставить гравитационный потенциал вытесняемой воды. Если мы обозначим плотность воды через ρ , а через ρ_0 обозначим среднюю плотность земли и воды вместе, то будем иметь¹⁾

$$\Omega_n = - \frac{4\pi\gamma\rho a}{2n+1} \zeta_n, \quad (11)$$

$$g = \frac{4}{3} \gamma \pi a \rho_0, \quad (12)$$

где γ обозначает постоянную тяготения; отсюда следует

$$\Omega_n = - \frac{3}{2n+1} \frac{\rho}{\rho_0} g \zeta_n. \quad (13)$$

Подставляя в (10), получим

$$\frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2} = \left(1 - \frac{3}{2n+1} \frac{\rho}{\rho_0} \right), \quad (14)$$

где σ_n обозначает теперь действительную частоту колебания, а σ_n — частоту, вычисленную на основании первой гипотезы, т. е. не принимая во внимание взаимного притяжения. Таким образом исправленная частота определится из формулы

$$\sigma_n^2 = n(n+1) \left(1 - \frac{3}{2n+1} \frac{\rho}{\rho_0} \right) \frac{gh}{a^2}. \quad (15)^2$$

Для эллипсоидального колебания ($n=2$) и для $\frac{\rho}{\rho_0} = 0,18$ (как в случае Земли) из выражения (14) видно, что благодаря взаимному притяжению частота *уменьшается* в отношении 0,94 к 1.

Самое медленное колебание соответствовало бы значению $n=1$, однако в этом случае, как было уже указано, мы должны были бы допустить существование наложенной на шар связи, удерживающей его в состоянии равновесия. При этом допущении из (15) следует, что значение σ_1^2 будет отрицательно, если $\rho > \rho_0$. Тригонометрическая функция от t заменяется тогда действительной показательной функцией, а это показывает, что конфигурация, при которой поверхность океана образует сферическую поверхность, концентрическую к поверхности

¹⁾ См. например, Routh, *Analytical Statics* 2-е изд., Cambridge, 1902, II, 146—7.

²⁾ Этот результат дан Л а п л а с о м, *Mécanique céleste*, кн. 1, § 1 (1799). Свободные и вынужденные колебания типа $n=2$ он исследовал уже ранее в своих *Recherches sur quelques points du système du monde*, *Mém. de l'Acad. Roy. des sciences*, 1775 (1778) [*Oeuvres complètes*, IX, 109].

земного шара, представляет неустойчивое положение равновесия. Так как введение связей только увеличивает инерцию системы, то мы заключаем, что для $\rho > \rho_0$ равновесие при свободном земном шаре также будет неустойчивым. В крайнем случае, когда мы предположили бы сам земной шар совершенно свободным от тяготения, вода, будучи возмущена под влиянием сил трения, стремилась бы, очевидно, в конце концов вытолкнуть ядро и собраться в виде шаровой массы.

Из § 168 следует, а также легко можно заметить независимо от этого, что вынужденные колебания, происходящие от периодической возмущающей силы при учете тяготения воды, будут даваться формулой (10) при условии, что Ω_n обозначает теперь потенциал только внешних сил и σ_n имеет значение, данное формулой (15).

§ 201. Колебания моря, ограниченного меридианами или параллельными кругами, или и теми и другими, могут быть исследованы тем же методом¹⁾. Однако получающиеся при этом сферические функции, как правило, уже теперь будут не целого порядка, а поэтому трудно получить численные результаты.

Для случая моря, ограниченного двумя параллельными кругами, мы полагаем

$$\zeta = \left\{ A p(\mu) + B q(\mu) \right\} \frac{\cos \sigma t}{\sin \sigma t} \quad (1)$$

где $\mu = \cos \theta$, а $p(\mu)$, $q(\mu)$ суть обе функции от μ , которые содержат $(1 - \mu^2)^{1/2}$ в качестве множителя и даны формулой (2) § 86. Необходимо заметить, что $p(\mu)$ есть четная, а $q(\mu)$ — нечетная функция от μ .

Если мы будем отличать ограничивающие параллельные круги индексами, то граничные условия будут

$$u = 0 \text{ для } \mu = \mu_1 \text{ и } \mu = \mu_2.$$

Для свободных колебаний будем иметь, согласно (6) § 193

$$A p'(\mu_1) + B q'(\mu_1) = 0, \quad A p'(\mu_2) + B q'(\mu_2) = 0; \quad (2)$$

откуда следует

$$\begin{vmatrix} p'(\mu_1) & q'(\mu_1) \\ p'(\mu_2) & q'(\mu_2) \end{vmatrix} = 0; \quad (3)$$

это уравнение определяет допустимые значения для порядка l сферических функций. Частоты σ , которые соответствуют различным корням, как и раньше, определяются формулой (5) § 199.

Если обе пограничные линии одинаково удалены от экватора, то имеем $\mu_2 = -\mu_1$. Вышесказанные решения распадаются тогда на две группы; для одной имеем

$$B = 0, \quad p'(\mu_1) = 0, \quad (4)$$

а для другой

$$A = 0, \quad q'(\mu_1) = 0. \quad (5)$$

В первом случае ζ для двух точек, лежащих симметрично относительно экватора, имеет одинаковое значение, во втором случае значения ζ для подобных точек одинаковы по абсолютной величине, но различны по знаку.

¹⁾ Ср. Rayleigh, см. сноску на стр. 378.

Если мы предположим, что одна из ограничивающих линий стягивается к одной точке (например, $\mu_2 = 1$), то приходим к случаю круглого бассейна. Значения $p'(1)$ и $q'(1)$ бесконечны, но их отношение вычисляется с помощью формул, данных в § 84. Из них можно найти с помощью второго уравнения (2) отношение $A : B$; если мы подставим это в первое уравнение (2), то получим уравнение для определения l . Однако мы будем иметь более простой метод для этого случая, если будем исходить из решения, о котором мы знаем, что оно для каждого значения l в полюсе $\mu = 1$ конечно. Это требует введения новых переменных, при выборе которых оставляется до известной степени произвол. Например, мы можем взять выражение $P_n^s(\cos \theta)$ из формулы (6) § 86 и попытаться определить l из условия, которое для $\theta = \theta_1$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \theta} P_n^s(\cos \theta) = 0 \quad (6)$$

Если радиус сферы делается бесконечным, то мы приходим к плоской проблеме § 191¹⁾. Отдельные шаги этого перехода можно усмотреть из § 100.

Если рассмотренный слой воды имеет в качестве границ два меридиана (и кроме того может иметь или не иметь параллельные круги), например $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$, то условие, что для них $v = 0$, налагает ограничение на множитель $\cos s\omega$, и мы получаем $s\alpha = m\pi$, где m есть целое число. Это последнее уравнение определяет допустимые значения s , которые, вообще говоря, не являются целыми числами²⁾.

Суточные и полусуточные приливы в невращающемся океане с постоянной глубиной, ограниченном двумя меридианами, были изучены Прудманом и Додсоном и доведены до результатов для некоторых случаев и некоторых значений глубины³⁾.

Приливы на вращающемся слое жидкости

§ 202. Теория приливов на открытом слое волн существенно усложняется благодаря вращению Земли. Если бы мы могли по крайней мере допустить, что периоды свободных колебаний и периоды возмущающих сил малы сравнительно с продолжительностью суток, то предыдущие исследования могли бы рассматриваться как первое приближение, но, однако, эти допущения далеко не соответствуют условиям, господствующим на Земле.

Затруднения, появляющиеся тогда, когда мы пытаемся учесть вращение, зависят от того, что частица, которая имеет движение в направлении изменения широты, стремится сохранить неизменным свой момент количества движения при вращении около земной оси и тем самым изменить свою скорость, перпендикулярную к направлению меридиана. Это обстоятельство, конечно, хорошо известно

¹⁾ Этот вопрос был решен Macdonald, Proc. Lond. Math. Soc., XXXI, 264 (1899).

²⁾ Ср. Rayleigh, Theory of Sound, § 336, 338.

³⁾ Читателю, который хочет изучать задачу в этом направлении дальше, мы указываем Thomson a. Tait, Natural Philosophy, 12-е изд., приложение В, Spherical Harmonic Analysis.

⁴⁾ Proudman a. Doodson, M. N. R. A. S., Geophy. Suppl., I, 468 (1927) и II, 209 (1929).

в связи с гадлеевой теорией пассатных ветров ¹⁾. На его значение для теории приливов впервые, повидимому, указал Маклорен ²⁾.

Вследствие большой инерции твердой части земного шара сравнительно с инерцией океана периодическое изменение скорости вращения, имеющее место благодаря приливам, абсолютно незаметно. Мы можем, следовательно, эту скорость вращения рассматривать в дальнейшем как постоянную.

Теория малых колебаний динамической системы около положения относительного равновесия по отношению к реальной или воображаемой твердой системе отсчета, вращающейся с постоянной угловой скоростью около неподвижной оси, отличается в некоторых существенных чертах от теории малых колебаний около положения абсолютного равновесия, о которой мы говорили в § 168. Необходимо поэтому уделить некоторое внимание общей теории, прежде чем заняться исследованием специальных проблем. Система, которую мы исследуем, может быть совершенно свободна или может быть связана с вращающимся твердым телом. Во втором случае предполагается, что как реакции связи, так и внутренние силы системы являются консервативными.

§ 203. Уравнения движения частицы m относительно прямоугольных координатных осей Ox , Oy , Oz , которые вращаются с угловой скоростью ω около Oz , имеют вид

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2x) &= X, \\ m(\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2y) &= Y, \\ m\ddot{z} &= Z, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где X , Y , Z означают компоненты действующих сил.

Предположим, что относительные координаты (x, y, z) каждой частицы выражены через определенное число независимых величин q_1, q_2, \dots, q_r . Положим

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \frac{1}{2} \sum m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \\ T_0 &= \frac{1}{2} \omega^2 \sum m(x^2 + y^2). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Таким образом \mathfrak{E} обозначает кинетическую энергию относительного движения; мы предполагаем, что она есть однородная квадратичная функция обобщенных скоростей \dot{q}_r , коэффициенты которой суть функции обобщенных координат q_r ; T_0 обозначает кинетическую энергию системы, когда она вращается без относительного движения в положении (q_1, q_2, \dots, q_n) . Наконец, мы положим

$$\sum (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = -\delta V + Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n, \quad (3)$$

¹⁾ Hadley, The Cause of the General Trade Winds, Phil. Trans., 1735.

²⁾ MacLaurin, De Causâ Physicâ Fluxus ex Refluxus Maris, Prop. VII. Motus aquae turbatur ex inaequali velocitate quâ corpora circa axem Terræ motu diurno deferuntur (1740).

где V обозначает потенциальную энергию, а Q_1, Q_2, \dots, Q_n суть обобщенные компоненты внешних сил.

Умножив три уравнения (1) соответственно на $\frac{\partial x}{\partial q_r}, \frac{\partial y}{\partial q_r}, \frac{\partial z}{\partial q_r}$ и сложив их, затем суммируя результат по всем частицам системы и поступая далее таким же образом, как и при „прямом“ выводе уравнений Лагранжа, получим следующее типичное уравнение движения в обобщенных координатах ¹⁾

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial q_r} + \beta_{r1} \dot{q}_1 + \beta_{r2} \dot{q}_2 + \dots + \beta_{rn} \dot{q}_n = - \frac{\partial}{\partial q_r} (V - T_0) + Q_r, \quad (4)$$

где

$$\beta_{rs} = 2\omega \sum m \frac{\partial (x, y)}{\partial (q_s, q_r)}. \quad (5)$$

Необходимо отметить, что

$$\beta_{rs} = -\beta_{sr}, \quad \beta_{rr} = 0. \quad (6)$$

Уравнение (4) можно вывести также из (23) § 141 с помощью (8) § 142, если вообразить вращающуюся систему свободной, но с бесконечно большим моментом инерции.

Условия относительного равновесия при отсутствии возмущающих сил можно получить, положив в уравнении (4) $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n = 0$; тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial q_r} (V - T_0) = 0; \quad (7)$$

это показывает, что значение $V - T_0$ для положения равновесия является „стационарным“.

Далее из уравнений (1) мы будем иметь

$$\sum m (\ddot{x} + \ddot{y} + \ddot{z}) - \omega^2 \sum m (x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) = \sum (X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}); \quad (8)$$

из этого уравнения и из уравнений (2) и (3) следует

$$\frac{d}{dt} (\mathfrak{E} + V - T_0) = Q_1 \dot{q}_1 + Q_2 \dot{q}_2 + \dots + Q_n \dot{q}_n. \quad (9)$$

Этот результат можно также получить из (4) с помощью соотношений (6). Если возмущающие силы отсутствуют, то

$$\mathfrak{E} + V - T_0 = \text{const.} \quad (10)$$

¹⁾ Ср. Thomson a. Tait, Natural Philosophy, 2-е изд., I, 310; Lamb, Higher Mechanics, 2-е изд., § 84.

Стоит также отметить вид, который принимает теорема Гамильтона § 135. Полная кинетическая энергия нашей системы равна

$$T = \frac{1}{2} \sum x m \{ (\dot{x} - \omega y)^2 + (\dot{y} + \omega x)^2 + \dot{z}^2 \} = \mathfrak{E} + T_0 + \omega M, \quad (11)$$

где

$$M = \sum m (xy - yx). \quad (12)$$

При отсутствии внешних сил будем иметь

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt = 0 \quad (13)$$

с обычными предельными условиями. Отсюда следует

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} (\mathfrak{E} + T_0 + \omega M - V) dt = 0 \quad (14)$$

при условии

$$\left[\sum m \{ (\dot{x} - \omega y) \Delta x + (\dot{y} + \omega x) \Delta y + \dot{z} \Delta z \} \right]_{t_0}^{t_1} = 0. \quad (15)$$

Эту теорему можно вывести также непосредственно из формулы (1) с помощью обычного метода Гамильтона. Обратное эта теорема для случая свободного движения приводит к независимому доказательству формулы (4). Введение в эти исследования возмущающих сил не представляет никаких трудностей.

Условие (15) всегда выполняется в том случае, когда относительные начальное и конечное положения при виртуальном движении такие же, как и при действительном.

§ 204. Примем, что координаты q_r выбраны таким образом, что они обращаются в нуль для невозмущенного состояния. В случае *малого* возмущения можно написать

$$2\mathfrak{E} = a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2 + \dots + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dots, \quad (1)$$

$$2(V - T_0) = c_{11}q_1^2 + c_{22}q_2^2 + \dots + 2c_{12}q_1q_2 + \dots, \quad (2)$$

где коэффициенты можно рассматривать как постоянные. Члены первого порядка в выражении $V - T_0$ вследствие „стационарности“ опущены.

Чтобы по возможности упростить уравнения (1) и (2), предположим, что они, как в § 168, приведены линейным преобразованием к сумме квадратов, т. е. что

$$2\mathfrak{E} = a_1\dot{q}_1^2 + a_2\dot{q}_2^2 + \dots + a_n\dot{q}_n^2, \quad (3)$$

$$2(V - T_0) = c_1q_1^2 + c_2q_2^2 + \dots + c_nq_n^2. \quad (4)$$

Величины q_1, q_2, \dots, q_n можно назвать „главными координатами“ системы. Однако не следует предполагать, что их свойства так же просты, как при отсутствии вращения. Коэффициенты a_1, a_2, \dots, a_n и c_1, c_2, \dots, c_n можно соответственно назвать „главными коэффициентами“ инерции и устойчивости. Главные коэффициенты устойчивости

такие же, как и без учета вращения, но дополненные фиктивными центробежными силами $(m\omega^2x, m\omega^2y, 0)$, которые действуют на каждую частицу в направлении от оси наружу.

Уравнения (4) предыдущего параграфа для случая бесконечно малых движений будут

$$\left. \begin{aligned} a_1\ddot{q}_1 + c_1q_1 + \beta_{12}\dot{q}_2 + \beta_{13}\dot{q}_3 + \dots + \beta_{1n}\dot{q}_n &= Q_1, \\ a_2\ddot{q}_2 + c_2q_2 + \beta_{21}\dot{q}_1 + \beta_{23}\dot{q}_3 + \dots + \beta_{2n}\dot{q}_n &= Q_2, \\ \dots & \\ a_n\ddot{q}_n + c_nq_n + \beta_{n1}\dot{q}_1 + \beta_{n2}\dot{q}_2 + \beta_{n3}\dot{q}_3 + \dots &= Q_n, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где коэффициенты β_{rs} можно рассматривать как постоянные.

Если умножить уравнения (5) по порядку на $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ и сложить их, то мы найдем, принимая во внимание соотношение $\beta_{rs} = -\beta_{sr}$:

$$\frac{d}{dt} (\mathfrak{E} + V - T_0) = Q_1\dot{q}_1 + Q_2\dot{q}_2 + \dots + Q_n\dot{q}_n, \quad (6)$$

что мы уже доказали, не прибегая к приближениям.

§ 205. Чтобы исследовать свободные движения системы, положим в уравнениях (5) $Q_1, Q_2, \dots, Q_n = 0$ и сделаем, как при обычном способе решения линейных уравнений, подстановку:

$$q_1 = A_1 e^{\lambda t}, \quad q_2 = A_2 e^{\lambda t}, \quad \dots, \quad q_n = A_n e^{\lambda t}. \quad (7)$$

Подставляя, находим

$$\left. \begin{aligned} (a_1\lambda^2 + c_1)A_1 + \beta_{12}\lambda A_2 + \dots + \beta_{1n}\lambda A_n &= 0, \\ \beta_{21}\lambda A_1 + (a_2\lambda^2 + c_2)A_2 + \dots + \beta_{2n}\lambda A_n &= 0, \\ \dots & \\ \beta_{n1}\lambda A_1 + \beta_{n2}\lambda A_2 + \dots + (a_n\lambda^2 + c_n)A_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Исключив отношения $A_1 : A_2 : \dots : A_n$, мы получим уравнение

$$\begin{vmatrix} a_1\lambda^2 + c_1, & \beta_{12}\lambda, & \dots \beta_{1n}\lambda, \\ \beta_{21}\lambda, & a_2\lambda^2 + c_2, & \dots \beta_{2n}\lambda \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1}\lambda, & \beta_{n2}\lambda, & \dots a_n\lambda^2 + c_n \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

или, как мы обычно будем писать для краткости,

$$D(\lambda) = 0. \quad (10)$$

Детерминант $D(\lambda)$ принадлежит в силу соотношений (6) § 203 к детерминантам, которые Кэли назвал косыми. Если изменить знак перед λ , то строки заменятся столбцами и наоборот, и значение детерминанта останется без изменения. Если представить левую часть уравнения (10) в развернутом виде, то она будет содержать только четные степени λ и корни будут состоять из пар вида

$$\lambda = \pm (\rho + i\sigma).$$

Для того чтобы относительное равновесие было устойчиво, существенно, чтобы значения ρ все были бы нулями, так как иначе в действительном выражении для произвольной координаты q , встретились бы члены вида $e^{\pm et} \cos \sigma t$ и $e^{\pm et} \sin \sigma t$; это указывало бы на возможность колебания с постоянно возрастающей амплитудой.

В теории абсолютного равновесия, которая была набросана в § 168, необходимое и достаточное условие для устойчивости (в указанном смысле) состояло просто в том, что потенциальная энергия для положения равновесия должна иметь минимум. В рассматриваемом случае условия становятся более сложными ¹⁾, но легко видеть, что если выражение для $V - T_0$ будет существенно положительным или, другими словами, если коэффициенты c_1, c_2, \dots, c_n в формуле (4) будут все положительными, то равновесие должно быть устойчивым. Это следует тотчас же из уравнения

$$\mathfrak{E} + (V - T_0) = \text{const.}, \quad (11)$$

выведенного в § 203, которое показывает, что при только что сделанном допущении ни \mathfrak{E} , ни $V - T_0$ не могут возрасти выше определенной границы, зависящей от начальных условий ²⁾. Необходимо отметить, что это заключение не основывается на применении приближенных уравнений.

Устойчивость, таким образом, будет обеспечена, когда $V - T_0$ в относительном положении равновесия есть минимум. Это условие, однако, не необходимо, и устойчивость может иметь место и тогда (с рассматриваемой точки зрения), когда $V - T_0$ есть максимум, как это мы покажем для частного случая двух степеней свободы. Необходимо, однако, заметить, что если система подвержена каким-нибудь, хотя бы незначительным силам трения, которые влияют на координаты q_1, q_2, \dots, q_n , то равновесие только тогда перманентно или „вековым“ образом устойчиво, когда $V - T_0$ есть минимум. Для таких сил характерно, что их работа, произведенная над системой, всегда является отрицательной. А в таком случае, согласно уравнению (6), выражение $\mathfrak{E} + (V - T_0)$ в алгебраическом смысле будет непрерывно уменьшаться, пока имеет место какое-нибудь относительное движение. Следовательно, если система перешла из относительного положения равновесия в такую конфигурацию, при которой $V - T_0$ будет отрицательным, то вышенаписанное выражение, а тем самым и его часть $V - T_0$ будут принимать непрерывно возрастающие отрицательные значения, что может случиться только тогда, когда система все более и более удаляется от своего положения равновесия.

¹⁾ Эти условия были исследованы Routh, см. сноску на стр. 243 см. также его *Advanced Rigid Dynamics*, гл. VI.

²⁾ Это заключение было первоначально применено Дирихле к теории колебаний около абсолютного положения равновесия § 168, *Über die Stabilität des Gleichgewichtes*. Crelle, XXXII (1846) [Werke, Berlin, 1889—1897, II, 3] Алгебраическое доказательство приведено у Lamb, *Higher Mechanics*, 2 изд., § 99.

Это важное различие между „обыкновенной“, или кинетической, и „вековой“, или практической, устойчивостью было сделано впервые Томсоном и Тэтом¹⁾. Необходимо отметить, что вышеизложенное доказательство предполагает постоянную угловую скорость (ω), которая в случае необходимости должна поддерживаться соответствующим образом действующей для этой цели на вращающееся тело силой. Если твердое тело *свободно*, то условие для вековой устойчивости принимает несколько иную форму, о которой речь будет впоследствии (гл. XII). При практических применениях ограничимся только случаями, в которых $V - T_0$ есть минимум, и коэффициенты c_1, c_2, \dots, c_n формулы (4) § 204 будут таким образом положительными.

Чтобы исследовать характер свободного колебания для случая устойчивости, заметим следующее: если λ есть произвольный корень уравнения (10), то уравнения (8) дают

$$\frac{A_1}{a_1} = \frac{A_2}{a_2} = \dots = \frac{A_n}{a_n} = C, \quad (12)$$

где a_1, a_2, \dots, a_n обозначают миноры какой-либо строки в детерминанте $D(\lambda)$, а C — произвольная постоянная. Эти миноры будут содержать, вообще говоря, как нечетные, так и четные степени от λ и поэтому примут неравные значения для обоих противоположных по знаку корней ($\pm \lambda$) некоторой произвольной пары. Если положить $\lambda = \pm i\sigma$, то соответствующие значения a_r будут иметь вид

$$\mu_r \pm i\nu_r,$$

где μ_r, ν_r действительны. Отсюда следует

$$q_r = C (\mu_r + i\nu_r) e^{i\sigma t} + C' (\mu_r - i\nu_r) e^{-i\sigma t}.$$

Положив

$$C = \frac{1}{2} K e^{i\varepsilon}, \quad C' = \frac{1}{2} K e^{-i\varepsilon},$$

получим решение наших уравнений в действительной форме с двумя произвольными постоянными K и ε ,

$$q_r = K \left\{ \mu_r \cos(\sigma t + \varepsilon) - \nu_r \sin(\sigma t + \varepsilon) \right\}. \quad (13)$$

Эти формулы представляют движение, которое можно обозначить как „собственный вид колебаний“ системы. Число возможных собственных видов колебаний равно, конечно, числу пар корней уравнения (9), т. е. равно числу степеней свободы системы. Необходимо

¹⁾ Thomson & Tait, Natural Philosophy, 2-е изд., часть I, стр. 391; см. также Poincaré, Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, Acta Mathematica, VII (1885) и op. cit. ante, стр. 146. Некоторые простые механические иллюстрации в статье „On Kinetic Stability“, Proc. Roy. Soc. A., LXXX, 168 (1909) и в работе автора Higher Mechanics, 2-е изд., стр. 253.

отметить, что вследствие вращения различные координаты неолго будут обладать одинаковыми фазами.

Если обозначить через ξ , η , ζ компоненты смещения произвольной частицы из ее положения равновесия, то мы будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\partial x}{\partial q_1} q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} q_2 + \dots + \frac{\partial x}{\partial q_n} q_n \\ \eta &= \frac{\partial y}{\partial q_1} q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} q_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial q_n} q_n \\ \zeta &= \frac{\partial z}{\partial q_1} q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} q_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial q_n} q_n \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Подставляя из уравнений (13), получим результат в виде

$$\left. \begin{aligned} \xi &= P \cdot K \cos(\sigma t + \epsilon) + P' \cdot K \sin(\sigma t + \epsilon) \\ \eta &= Q \cdot K \cos(\sigma t + \epsilon) + Q' \cdot K \sin(\sigma t + \epsilon) \\ \zeta &= R \cdot K \cos(\sigma t + \epsilon) + R' \cdot K \sin(\sigma t + \epsilon) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где P , P' , Q , Q' , R , R' обозначают определенные функции среднего положения частицы; в частности, эти функции содержат также и σ , а поэтому они различны для различных нормальных колебаний, но независимы, однако, от произвольных постоянных K и ϵ . Формулы (15) представляют эллиптическое колебание с периодом $\frac{2\pi}{\sigma}$, причем направления

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi}{P} = \frac{\eta}{Q} = \frac{\zeta}{R} \\ \frac{\xi}{P'} = \frac{\eta}{Q'} = \frac{\zeta}{R'} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

представляют направления двух сопряженных полуосей эллиптической орбиты, длины которых соответственно равны

$$\begin{aligned} &(P^2 + Q^2 + R^2)^{1/2} K \\ \text{и} \\ &(P'^2 + Q'^2 + R'^2)^{1/2} K. \end{aligned}$$

Положения, формы и относительные размеры эллиптических траекторий, а также относительные фазы частиц на них являются определенными таким образом для всякого нормального вида колебания, но абсолютные размеры и фазы будут произвольны.

§ 205а. Если угловая скорость ω будет малой, то вид нормальных колебаний, вообще говоря, будет мало отличаться от соответствующего вида при отсутствии вращения, и выражения для измененных видов колебаний и их частот можно найти следующим образом¹⁾. Так как детерминантное уравнение (9) § 205 не изменится, если мы переменим знаки на обратные у всех β , то частоты будут, как правило, содержать эти количества во второй степени. Следовательно, рассматривая для примера тот вид колебаний, в котором A_1

¹⁾ Rayleigh, Phil. Mag. (6), V, 293 (1903) [Papers, V, 89].

конечно, тогда как A_2, A_3, \dots, A_n будут сравнительно малыми, и полагая $\lambda = i\sigma_1$, получим r -е уравнение системы (8) в приближенном виде

$$\frac{A_r}{A_1} = \frac{i\beta_{r1}\sigma_1}{a_r(\sigma_1^2 - \sigma_r^2)}, \quad (17)$$

где $\sigma_r^2 = \frac{C_r}{a_r}$. Отсюда, подставляя в первое уравнение, мы получим исправленное выражение σ_1^2 , так что

$$\sigma_1^2 = \frac{C_1}{a_1} \left\{ 1 + \sum_r \frac{\beta_{1r}^2}{a_1 a_r (\sigma_1^2 - \sigma_r^2)} \right\}. \quad (18)$$

Но эти приближения будут ошибочными, если какой-нибудь знаменатель в скобке обращается в нуль или является очень малым. Этот случай будет иметь место тогда, когда два или несколько видов нормальных колебаний при отсутствии вращения имеют одинаковые или почти одинаковые периоды. Предположим, например, что σ_2^2 и σ_3^2 почти равны. Тогда из формулы (8), считая $\lambda = i\sigma$, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} (C_1^2 - \sigma^2 a_1) A_1 + i\beta_{12}\sigma A_2 &= 0, \\ i\beta_{21}A_1 + (C_2 - \sigma^2 a_2) A_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

т. е. A_1 и A_2 будут сравнимыми. Исключая $\frac{A_1}{A_2}$, получим

$$(\sigma^2 - \sigma_1^2)(\sigma^2 - \sigma_2^2) = \frac{\beta_{12}^2}{a_1 a_2} \sigma^2. \quad (20)$$

В случае точного равенства частот это дает

$$\sigma^2 - \sigma_1^2 = \pm \frac{\beta_{12}}{\sqrt{a_1 a_2}} \sigma, \quad (21)$$

или приближенно

$$\sigma - \sigma_1 = \pm \frac{\beta_{12}}{2\sqrt{a_1 a_2}}. \quad (22)$$

Изменение частоты вследствие вращения теперь будет пропорционально ω вместо ω^2 .

Выражения для A_3, A_4, \dots, A_n через A_1, A_2 могут быть найдены из оставшихся уравнений системы (8); ясно, что изменения в них могли произойти согласно указанному выше замечанию только благодаря прибавлению членов, содержащих ω^2 .

§ 205b. Вследствие аналитических трудностей, которые встречаются при определении свободных колебаний, в особенности в случае непрерывных систем, надлежит искать приближенные методы для вычисления наиболее важных частот, подобные тем, которые применял Рэлей в случае невращающихся систем (§ 168).

Для этой цели обратимся к вариационной формуле (14) § 203. При применении к малым колебаниям целесообразно ввести в эту

формулу отклонения (ξ, η, ζ) частиц из их положения относительного равновесия. Если написать $x_0 + \xi$, $y_0 + \eta$, $z_0 + \zeta$ вместо x , y , z , где x_0 , y_0 , z_0 относятся к положению относительного равновесия, то мы получим

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} M dt = \Delta \int_{t_0}^{t_1} M' dt + \left[\sum m (x_0 \Delta \eta_j - y_0 \Delta \xi_j) \right]_{t_0}^{t_1}, \quad (1)$$

где

$$M' = \sum m (\dot{\xi}_j - \eta_j \dot{\xi}). \quad (2)$$

При подстановке выражения (1) в (14) § 203 при использовании граничного условия (15) § 203 указанная теорема будет представлена формулой

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} (\mathfrak{E} + \omega M' + T_0 - V) dt = 0, \quad (3)$$

если

$$\left[\sum m \{ (\dot{\xi} - c\eta) \Delta \xi + (\dot{\eta} + \omega \xi) \Delta \eta + \dot{\zeta} \Delta \zeta \} \right]_{t_0}^{t_1} = 0. \quad (4)$$

Предположим теперь, что как действительное, так и виртуальное движения суть простые гармонические колебания, что оба обладают одинаковыми периодами $\frac{2\pi}{\sigma}$ и что пределы интегрирования отличаются друг от друга в точности на один период. Тогда члены в (4), относящиеся к обоим пределам, сокращаются, так что требуемое условие будет выполнено. Отсюда следует, что среднее значение (по отношению ко времени) выражения

$$\mathfrak{E} + \omega M' - (V - T_0) \quad (5)$$

будет стационарным для малых произвольных вариаций типа колебаний, причем период не варьируется. M' , выраженное в обобщенных координатах (относительно которых мы предполагаем, что они обращаются в нуль при относительном равновесии), представляет билинейную функцию двух рядов переменных

$$q_1, q_2, \dots, q_n$$

и

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$$

в то время как \mathfrak{E} и $V - T_0$, согласно предположению, представляют соответственно однородные квадратичные функции скоростей координат. Отсюда следует, что (5) есть однородная квадратичная функция переменных q_r, \dot{q}_r .

Если положить

$$q_r = A_r \cos \sigma t + B_r \sin \sigma t \quad (6)$$

и обозначить среднее значение выражения (5) через J , то получим

$$J = \sigma^2 P + \sigma Q - R, \quad (7)$$

где P, Q, R обозначают некоторые однородные квадратичные функции переменных A_r, B_r , точный вид которых в настоящий момент не нужен.

В силу свойства стационарности будем иметь

$$\sigma^2 \Delta P + \sigma \Delta Q - \Delta R = 0 \quad (8)$$

для всех бесконечно малых значений $\Delta A_r, \Delta B_r$. Если, в частности, положить $\Delta A_r = \varepsilon A_r, \Delta B_r = \varepsilon B_r$, где ε есть произвольно малая независимая от r постоянная, то будем иметь вследствие однородности

$$J = 0. \quad (9)$$

То обстоятельство, что при свободных колебаниях среднее значение выражения (5) равно нулю, представляет обобщение высказанного уже для случая $\omega = 0$ положения, что при колебаниях около положения абсолютного равновесия средние значения кинетической и потенциальной энергии равны между собой.

Данный результат может быть выражен еще в другой форме. Если временно рассматривать σ как функцию от A_r, B_r , где эти коэффициенты должны иметь какие-то значения, которые удовлетворяют уравнению

$$\sigma^2 P + \sigma Q - R = 0, \quad (10)$$

то будем иметь

$$(2\sigma P + Q) \Delta \sigma + (\sigma^2 \Delta P + \sigma \Delta Q - \Delta R) = 0. \quad (11)$$

Отсюда следует: если A_r, B_r имеют частные значения, соответствующие свободному колебанию, то имеем согласно (8)

$$\Delta \sigma = 0. \quad (12)$$

Другими словами, значения σ , определяемые формулой (10), стационарны.

Отсюда следует, что если значения P, Q, R в (10) вычислены на основе предполагаемого типа колебаний, который очень мало отличается от истинного, то погрешность получающегося значения σ будет второго порядка.

Стационарные значения включают, что вообще более всего важно, и максимумы и минимумы σ (взятые по абсолютной величине).

Применения вышензложенного принципа к частным случаям будут получены в § 212а и 216.

Общий вид функций P, Q, R в формуле (7) может быть установлен, хотя это и несущественно для доказательства. Принимая во внимание (3) и (4) § 204, мы тотчас же получаем

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{1}{4} S_r a_r (A_r^2 + B_r^2), \\ R &= \frac{1}{4} S_r c_r (A_r^2 + B_r^2), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где S_r обозначает суммирование по членам указанного вида, а r пробегает значения $1, 2, \dots, n$. Далее из (2) следует

$$\begin{aligned} mM' &= \omega \sum m \left(S_r \frac{\partial \xi}{\partial q_r} q_r \cdot S_s \frac{\partial \eta}{\partial q_s} \dot{q}_s - S_r \frac{\partial \eta}{\partial q_r} q_r \cdot S_s \frac{\partial \xi}{\partial q_s} \dot{q}_s \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\dot{q}_1 S_r \beta_{1r} q_r + \dot{q}_2 S_r \beta_{2r} q_r + \dots + \dot{q}_n S_r \beta_{nr} q_r \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\beta_{rs} = 2\omega \sum m \cdot \frac{\partial (\xi, \eta)}{\partial (q_r, q_s)}. \quad (15)$$

Если сделать подстановку из формулы (6) и взять среднее значение, то получим

$$Q = \frac{1}{2} S_r S_s \beta_{rs} A_s B_r,$$

где при двойном суммировании всякая перестановка индексов берется *один раз*.

Это подтверждается следующим замечанием: если образовать с помощью этих значений P, Q, R уравнения (8), то мы найдем, что коэффициенты при $\Delta A_r, \Delta B_r$ соответственно будут тождественны с коэффициентами при $\cos \sigma t$ и $\sin \sigma t$, если из (6) сделать подстановку в типичное уравнение движения (5) § 204.

§ 206. Символические выражения для *вынужденных* колебаний, под действием периодической возмущающей силы, легко могут быть написаны. Если предположить, что Q_1, Q_2, \dots, Q_n все пропорциональны $e^{i\sigma t}$, где σ задана, то уравнения (5) § 204 дадут, если опустить множители, зависящие от времени,

$$D(i\sigma)q_r = a_{r1}Q_1 + a_{r2}Q_2 + \dots + a_{rn}Q_n, \quad (1)$$

где коэффициенты в правой части обозначают миноры $r \cdot m$ -й строки детерминанта $D(i\sigma)$.

Важнейшее отличие от теории „нормальных колебаний“ при отсутствии вращения состоит в том, что отклонение, соответствующее какому-нибудь типу колебаний, не зависит единственно только от возмущающей силы того же самого типа. Вследствие этого движения отдельных частиц состоят, как легко видеть из (14) § 205, из общих эллиптических колебаний. Кроме того получаются вообще сдвиги фаз между отклонениями и силой, зависящие от частоты.

Как в § 168, отклонение будет очень велико, если $D(i\sigma)$ будет очень мало, т. е. когда частота σ возмущающей силы приближается к частоте собственного свободного колебания.

Если период возмущающих сил бесконечно велик, то отклонения стремятся к „статическим“ значениям

$$q_1 = \frac{Q_1}{c_1}, \quad q_2 = \frac{Q_2}{c_2}, \quad \dots, \quad q_n = \frac{Q_n}{c_n}, \quad (2)$$

как это непосредственно видно из уравнения (5) § 204. Это заключение должно быть, однако, изменено, если один или несколько коэффициентов устойчивости c_1, c_2, \dots, c_n будут равны нулю. Если, например, $c_1 = 0$, то как первая строка, так и первый столбец детерминанта $D(\lambda)$ делятся на λ , так что детерминантное уравнение (10) § 204 будет иметь пару корней, обращающихся в нуль. Другими словами, существует возможное свободное движение бесконечно длинного периода. Коэффициенты при Q_2, Q_3, \dots, Q_n на правой стороне формулы (1) становятся в этом случае неопределенными для $\sigma = 0$, и вычисленные значения не совпадают, вообще говоря, со значениями (2). Этот пункт важен, так как при некоторых гидродинамических применениях, как мы увидим, возможны установившиеся циркуляционные движения жидкости при постоянной деформации свободной поверхности даже без влияния внешних сил; далее как следствие получается, что вынужденные приливные волны длинного периода не обязательно будут приближаться к значениям, данным статической теорией приливов; ср. § 214, 217.

Чтобы пояснить вышезложенные положения, рассмотрим более подробно случай двух степеней свободы. Уравнения движения тогда имеют вид

$$\left. \begin{aligned} a_1 \ddot{q}_1 + c_1 \dot{q}_1 + \beta \dot{q}_2 &= Q_1, \\ a_2 \ddot{q}_2 + c_2 \dot{q}_2 + \beta \dot{q}_1 &= Q_2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Уравнение, определяющее периоды свободных колебаний, будет

$$a_1 a_2 \lambda^4 + (a_1 c_2 + a_2 c_1 + \beta^2) \lambda^2 + c_1 c_2 = 0. \quad (4)$$

Для „обыкновенной“ устойчивости достаточно, чтобы корни этого квадратного уравнения относительно λ^2 были действительны и отрицательны. Так как a_1, a_2 существенно положительны, то это условие, очевидно, всегда выполняется в том случае, если c_1, c_2 оба положительны, и выполняется также и тогда, когда c_1, c_2 оба отрицательны, если только β^2 достаточно велико. Позднее мы, однако, покажем, что в этом, втором случае равновесие, благодаря введению сил трения, будет неустойчиво; см. § 322.

Для определения вынужденных колебаний, когда Q_1, Q_2 пропорциональны $e^{i\sigma t}$, мы имеем, опуская множитель, зависящий от времени:

$$\left. \begin{aligned} (c_1 - \sigma^2 a_1) q_1 + i\sigma \beta q_2 &= Q_1, \\ -i\sigma \beta q_1 + (c_2 - \sigma^2 a_2) q_2 &= Q_2. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{(c_2 - \sigma^2 a_2) Q_1 - i\sigma \beta Q_2}{(c_1 - \sigma^2 a_1)(c_2 - \sigma^2 a_2) - \sigma^2 \beta^2}, \\ q_2 &= \frac{i\sigma \beta Q_1 + (c_1 - \sigma^2 a_1) Q_2}{(c_1 - \sigma^2 a_1)(c_2 - \sigma^2 a_2) - \sigma^2 \beta^2}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Предположим, что $c_2 = 0$ или, другими словами, что отклонение q_2 не влияет на значение $V - T_0$. Далее предположим, что $Q_2 = 0$, т. е. что внешние силы при некотором отклонении типа q_1 не производят никакой работы. Вышенаписанные формулы дают тогда

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{a_2}{a_2(c_1 - \sigma^2 a_1) + \beta^2} Q_1, \\ \dot{q}_2 &= \frac{\beta}{a_2(c_1 - \sigma^2 a_1) + \beta^2} \dot{Q}_1. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

В случае возмущения длинного периода мы будем иметь приближенно $\sigma = 0$, а поэтому

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{c_1 \div \frac{\beta^2}{a_2}} Q_1, \\ q_2 &= \frac{\beta}{a_2 c_1 + \beta^2} Q_1. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Отклонение q_1 , таким образом, *меньше*, чем его статическое значение в отношении $1:1 \div \frac{\beta^2}{a_2 c_1}$ и сопровождается движением типа q_2 , хотя и нет налицо никакой внешней силы этого типа (ср. § 217). Мы, естественно, приходим снова к случаю абсолютного равновесия, исследованному в § 168, если положим $\beta = 0$ ¹⁾.

Необходимо прибавить, что определение „главных координат“ § 204 зависит от первоначального вида \mathfrak{E} и $V - T_0$ и поэтому находится в зависимости от значения ω^2 , которое входит как множитель в T_0 . Система данных там уравнений не особенно подходит к разрешению вопроса о том, как зависят характер и частоты соответствующих нормальных колебаний от значения ω . Пункт, достойный быть отмеченным, который там был пропущен, заключается в том, что некоторые циркуляционные движения, которые при отсутствии вращения имели бы бесконечно длинные периоды, благодаря всякому хотя и малому вращению, превращаются в колебательные движения²⁾ периоды которых сравнимы с периодами вращения; ср. § 212, 223

Чтобы пояснить вопрос наиболее простым примером, возьмем опять случай двух степеней свободы. Если c_2 для $\omega = 0$ обращается в нуль и таким образом в общем случае содержит ω^2 в качестве множителя, то два корня уравнения (4) при ω^2 малом приближенно равны

$$\lambda^2 = -\frac{c_1}{a_1}, \quad \lambda^2 = -\frac{c_2}{a_2}.$$

Из второго из этих уравнений мы заключаем, что окончательно λ будет пропорциональна ω .

§ 207. Мы переходим теперь к гидродинамическим примерам и начнем со случая плоского горизонтального слоя жидкости, который в невозмущенном состоянии вращается равномерно около вертикальной оси³⁾. Результаты будут применимы без существенных изменений и к случаю бассейна не очень больших размеров, который находится на полюсе или где-нибудь в другом месте вращающегося земного шара.

Примем ось вращения за ось z . Предположим, что оси x и y вращаются с наперед заданной угловой скоростью ω в их собственной плоскости, и обозначим через u, v, w скорости *относительно этих*

¹⁾ Вышеизложенная теория появилась во 2-м изд. этого труда (1895). Влияние трения принимается во внимание в § 322.

²⁾ W. Thomson, On Gravitational Oscillations of Rotating Water, Proc. R. S. Edin., X, 92 (1879) [Papers, IV, 141].

осей в момент t той частицы, которая в этот момент занимает положение (x, y, z) . Действительные скорости этой частицы, параллельные мгновенным положениям осей, будут таковы:

$$u - \omega y, \quad v + \omega x, \quad w,$$

а ускорения по этим направлениям:

$$\frac{Du}{Dt} - 2\omega v - \omega^2 x, \quad \frac{Dv}{Dt} + 2\omega u - \omega^2 y, \quad \frac{Dw}{Dt}.$$

В настоящем случае относительное движение принимается бесконечно малым, так что $\frac{D}{Dt}$ можно заменить через $\frac{\partial}{\partial t}$.

Обозначив через z_0 ординату свободной поверхности при относительном равновесии исключительно под действием силы тяжести, имеем, как в § 26,

$$z_0 = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} (x^2 + y^2) + \text{const.} \quad (1)$$

Примем для простоты, что наклон этой поверхности всюду мал, т. е. что $\frac{\omega^2 r}{g}$ будет мало, где r есть наибольшее расстояние произвольной части слоя от оси вращения.

Если $z_0 + \zeta$ обозначает ординату возмущенной поверхности, то при обычном предположении, что вертикальное ускорение воды мало сравнительно с g , давление в произвольной точке (x, y, z) определится из уравнения

$$p - p_0 = g \rho (z_0 + \zeta - z), \quad (2)$$

откуда следует

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\omega^2 x - g \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= -\omega^2 y - g \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \end{aligned}$$

Уравнения горизонтального движения будут тогда иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где Ω обозначает потенциал возмущающих сил.

Если положить

$$\bar{\zeta} = -\frac{\Omega}{g}, \quad (4)$$

то уравнения (3) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v &= -g \frac{\partial}{\partial x} (\zeta - \bar{\zeta}), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u &= -g \frac{\partial}{\partial y} (\zeta - \bar{\zeta}). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Уравнение неразрывности имеет тот же вид, как в § 193:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial (hu)}{\partial x} - \frac{\partial (hv)}{\partial y}, \quad (6)$$

где h обозначает глубину свободной поверхности, считая от уровня в невозмущенном состоянии. Эта глубина, конечно, не будет постоянной за исключением, когда дно следует профилю свободной поверхности, данному уравнением (1).

Дифференцируя первое уравнение (5) по y , а второе по x и вычитая затем из второго первое, найдем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2\omega \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (7)$$

или, если положить

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

и проинтегрировать по t :

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + 2\omega \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = \text{const.} \quad (8)$$

Это есть не что иное как выражение теоремы Гельмгольца о том, что произведение модуля вихря

$$2\omega + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

на поперечное сечение

$$\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) dx dy$$

вихревой нити постоянно.

В случае простого гармонического возмущения с множителем $e^{i\sigma t}$ уравнения (5) и (6) соответственно перейдут в

$$\left. \begin{aligned} i\sigma u - 2\omega v &= -g \frac{\partial}{\partial x} (\zeta - \bar{\zeta}), \\ i\sigma v + 2\omega u &= -g \frac{\partial}{\partial y} (\zeta - \bar{\zeta}), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

и

$$i\sigma \zeta = -\frac{\partial (hu)}{\partial x} - \frac{\partial (hv)}{\partial y}. \quad (10)$$

Из (9) следует

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{g}{\sigma^2 - 4\omega^2} \left(i\sigma \frac{\partial}{\partial x} + 2\omega \frac{\partial}{\partial y} \right) (\zeta - \bar{\zeta}), \\ v &= \frac{g}{\sigma^2 - 4\omega^2} \left(i\sigma \frac{\partial}{\partial y} - 2\omega \frac{\partial}{\partial x} \right) (\zeta - \bar{\zeta}), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

и если подставить эти значения в (10), то получим уравнение, содержащее только ζ .

В случае постоянной глубины результат принимает вид

$$\Delta_1 \zeta + \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{gh} \zeta = \Delta_1 \bar{\zeta}, \quad (12)$$

где, как и раньше,

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Если $\bar{\zeta} = 0$, то при некоторых условиях уравнения (5) и (6) могут быть удовлетворены *постоянными* значениями u , v , ζ . Мы должны тогда иметь

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{g}{2\omega} \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \\ v &= \frac{g}{2\omega} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial(h, \zeta)}{\partial(x, y)} = 0. \quad (14)$$

Это последнее условие показывает, что линии контура свободной поверхности должны быть всюду параллельны линиям контура дна, но само значение ζ будет произвольным. Течение жидкости будет всюду параллельно линиям контура дна, и поэтому для возможности подобных стационарных движений необходимо далее, чтобы глубина вдоль боковой границы (которая предполагается в виде вертикальной стенки) была бы постоянной. Если глубина будет всюду одинаковой, то условие (14) тождественно выполняется; и единственное ограничение для значения ζ будет состоять только в том, что оно должно быть постоянно вдоль боковой границы.

§ 208. Уравнения предыдущего параграфа легко использовать в случае свободных волн в бесконечно длинном прямолинейном канале постоянного сечения¹⁾.

Если мы положим, что

$$\zeta = a e^{i k (ct - x) + m y}, \quad v = 0, \quad (1)$$

где ось x параллельна длине канала, то уравнения (5) дают, опуская члены, заключающие $\bar{\zeta}$,

$$c u = g \zeta, \quad 2\omega u = -g m \zeta, \quad (2)$$

в то время как из уравнения неразрывности (6) следует

$$c \zeta = h u. \quad (3)$$

Отсюда мы получим

$$c^2 = gh, \quad m = -\frac{2\omega}{c}. \quad (4)$$

Первая из этих формул показывает, что скорость волн не зависит от вращения.

¹⁾ Thomson W., см. сноску на стр. 398

Выраженное в действительной форме значение ζ будет

$$\zeta = a e^{-\frac{2\omega y}{c}} \cos \{ k(ct - x) + \varepsilon \}. \quad (5)$$

Показательный множитель указывает, что высота волны возрастает при переходе от одной стороны канала к другой и что она будет на той стороне наименьшей, которая при вращении идет *вперед*. Если обратить внимание на направления движения частицы воды соответственно на гребне и во впадине, то увидим, что этот результат стоит в согласии с положением, указанным в § 202¹⁾.

При изложенном выше решении от ширины канала требовалось только, чтобы она была всюду одинаковой, в остальном она ничем не ограничена.

Задачу определения свободных колебаний во вращающемся канале *конечной* длины, даже более простую задачу об отражении волны от поперечной стенки, нельзя решить просто наложением, как это было в § 176 и 177. В самом деле, для волны, распространяющейся в отрицательном направлении, получилось бы

$$\zeta = a' e^{-\frac{2\omega y}{c}} \cos \{ k(ct + x) + \varepsilon' \}, \quad (6)$$

но это решение нельзя совместить с (5) таким образом, чтобы было $u = 0$ на поперечной стенке для всех значений y ²⁾.

§ 209. Рассмотрим теперь случай слоя воды круговой формы, который вращается около своего центра³⁾.

Если мы введем полярные координаты r, θ и обозначим перемещения соответственно вдоль радиуса-вектора и перпендикулярно к радиусу-вектору через ξ и η , тогда, так как

$$\dot{\xi} = i \sigma \xi, \quad \dot{\eta} = i \sigma \eta,$$

¹⁾ Применения к явлениям приливов можно найти у Thomson W., Nature, XIX, 154, 571 (1879) и у Taylor G. I., Tidal Friction in the Irish Sea, Phil. Trans. A. CCXX, I (1918).

²⁾ Poincaré, Leçons de Méc. céleste, стр. 124. Намеченная здесь задача решена Taylor G. I., Proc. Lond. Math. Soc. (2), XX, 148 (1920). Он находит

следующее: если длина волны $\left(\frac{2\pi}{k}\right)$ достаточно велика сравнительно с шириной канала (b), то имеет место регулярное отражение (с изменением фазы) и именно таким образом, что в некотором отдалении от стенки практически наступает наложение (5) и (6) при $a' = a$ и при необходимом условии

$$k^2 b^2 < \pi^2 + \frac{4\omega^2 b^2}{c^2}.$$

Теория свободных колебаний во вращающемся прямоугольном бассейне также рассмотрена в указанной работе. Случай, когда угловая скорость вращения сравнительно мала, был исследован уже ранее Рэлеем, Phil. Mag. (6), V, 297 (1903) [Pareys, V, 93] и Proc. R. S. A., LXXXII, 448 (1909) [Pareys, V, 497].

³⁾ Следующее исследование есть развитие некоторых наметок, которые Кельвин дал в работе, указанной на стр. 398.

уравнения (9) § 207 будут равнозначны с уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \sigma^2 \xi + 2i\omega\sigma\eta &= g \frac{\partial}{\partial r} (\zeta - \bar{\zeta}), \\ \sigma^2 \eta - 2i\omega\sigma\zeta &= g \frac{\partial}{r \partial \theta} (\zeta - \bar{\zeta}), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

в то время как уравнение неразрывности (10) переходит в

$$\zeta = -\frac{\partial (h\xi r)}{r \partial r} - \frac{\partial (h\eta)}{r \partial \theta}. \quad (2)$$

Отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{g}{\sigma^2 - 4\omega^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2i\omega}{\sigma} \frac{\partial}{r \partial \theta} \right) (\zeta - \bar{\zeta}), \\ \eta &= \frac{ig}{\sigma^2 - 4\omega^2} \left(\frac{2\omega}{\sigma} \frac{\partial}{\partial r} - i \frac{\partial}{r \partial \theta} \right) (\zeta - \bar{\zeta}), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

и если теперь подставить в (2), то получим дифференциальное уравнение для ζ .

Для случая постоянной глубины мы находим

$$(\Delta + \kappa^2) \zeta = \Delta \bar{\zeta}, \quad (4)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (5)$$

и

$$\kappa^2 = \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{gh}. \quad (6)$$

Этот результат можно было бы получить непосредственно из (12) § 207.

Условие, которое нужно выполнить на границе ($r=a$), будет $\xi=0$ или

$$\left(r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2i\omega}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (\zeta - \bar{\zeta}) = 0. \quad (7)$$

§ 210. В случае свободных колебаний будем иметь $\bar{\zeta}=0$. Тот способ, по которому мнимая единица i введена в вышенаписанных уравнениях, в соединении с теоремой Фурье заставляет допустить, что θ входит в виде множителя $e^{is\theta}$, где s есть целое число. Поэтому дифференциальное уравнение (4) будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \left(\kappa^2 - \frac{s^2}{r^2} \right) \zeta = 0, \quad (8)$$

а граничное условие (7) для $r=a$ даст

$$\frac{r \partial \zeta}{\partial r} + \frac{2s\omega}{\sigma} \zeta = 0. \quad (9)$$

Уравнение (8) есть уравнение Бесселя, и решение, конечное для $r=0$, будет

$$\zeta = A J_s(\kappa r) e^{i(\sigma t + s\theta)}. \quad (10)$$

Необходимо, однако, отметить, что κ^2 в настоящей задаче не обязательно будет положительно. Если κ^2 отрицательно, то мы можем $J_s(\kappa r)$ заменить через $I_s(\kappa_1 r)$, причем κ_1 есть положительный квадратный корень из $\frac{4\omega^2 - \sigma^2}{gh}$ и

$$I_s(z) = \frac{z^s}{2^s \cdot s!} \left\{ 1 + \frac{z^2}{2(2s+2)} + \frac{z^4}{2 \cdot 4 \cdot (2s+2)(2s+4)} + \dots \right\}^1. \quad (11)$$

Для случая симметрии около оси $s=0$ получаем в действительной форме

$$\zeta = A J_0(\kappa r) \cos(\sigma t + \epsilon), \quad (12)$$

где κ определяется уравнением

$$J_0(\kappa a) = 0. \quad (13)$$

Соответствующие значения σ будут даны тогда формулой (6). Свободная поверхность при различных собственных колебаниях имеет тот же вид, как и в § 191, но частоты теперь будут больше. Если мы положим

$$c^2 = gh, \quad \beta = \frac{4\omega^2 a^2}{c^2}, \quad (14)$$

то будем иметь

$$\frac{\sigma^2 a^2}{c^2} = \kappa^2 a^2 + \beta. \quad (15)$$

Кроме того легко установить, приняв во внимание уравнения (3), что относительные движения частиц жидкости уже не будут только радиальными; частицы в действительности описывают эллипсы, большие оси которых лежат в направлении радиуса-вектора.

Для $s > 0$ будем иметь

$$\zeta = A J_s(\kappa r) \cos(\sigma t + s\theta + \epsilon), \quad (16)$$

где допустимые значения κ и, следовательно, также σ определяются уравнением (9), которое дает

$$\kappa a J_s(\kappa a) + \frac{2s\omega a}{\sigma} J_s(\kappa a) = 0. \quad (17)$$

Формула (16) представляет волну, которая вращается по отношению к воде с угловой скоростью $\frac{\sigma}{s}$, причем вращение волны происходит в одинаковом или противоположном направлении к вращению воды, смотря по тому, будет ли $\frac{\sigma}{s}$ отрицательным или положительным.

¹⁾ Функции $I_s(z)$ табулированы проф. Lodge A., Brit. Ass. Rep., 1889. Таблицы были перепечатаны Dale и Jahneke und Emden. Обстоятельные таблицы функций $e^{-z} I_0(z)$, $e^{-z} I_1(z)$ находятся в учебнике Watson.

Если κa есть какой то действительный или чисто мнимый корень уравнения (17), то соответствующее значение σ будет даваться уравнением (15).

Графическое построение дает некоторое заключение о значениях σ . Если положить

$$\kappa^2 a^2 = x,$$

то согласно (6) имеем

$$\frac{\sigma}{2\omega} = \pm \left(1 + \frac{x}{\beta}\right)^{1/2}. \quad (18)$$

Если мы положим далее

$$\frac{sJ_s(\kappa a)}{\kappa a J'_s(\kappa a)} = \varphi(\kappa^2 a^2),$$

то уравнение (17) будет иметь вид

$$\varphi(x) \pm \left(1 + \frac{x}{\beta}\right)^{1/2} = 0. \quad (19)$$

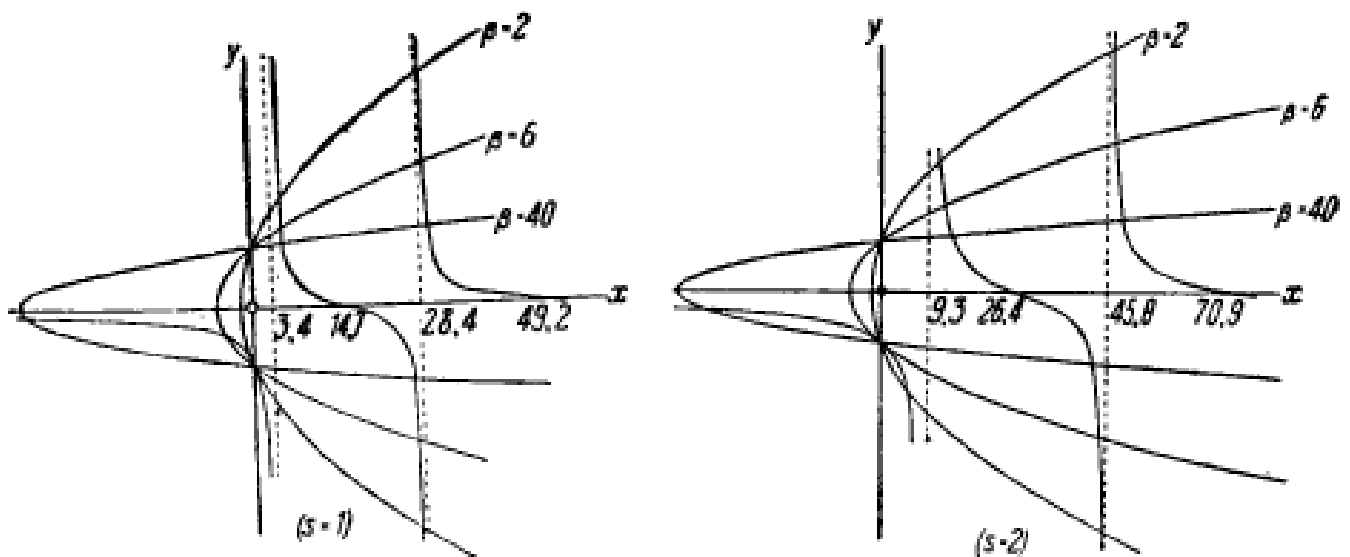
Кривая

$$y = -\varphi(x) \quad (20)$$

может быть легко построена с помощью таблиц для функций $J_s(z)$ и $I_s(z)$; точки пересечения ее с параболой

$$y^2 = 1 + \frac{x}{\beta} \quad (21)$$

дают своими ординатами значения $\frac{\sigma}{2\omega}$. Постоянная β , от которой зависят



Фиг. 49.

положения корней, равна квадрату величины $\frac{2\omega a}{Vgh}$; эта величина есть отношение периода волны, которая движется вокруг кругового канала глубины h и длины окружности $2\pi a$, к половине периода $\frac{\pi}{\omega}$ вращения воды.

Фиг. 49 дает относительные величины наименьших корней для случая $s=1$ и $s=2$, причем β имеет значения 2, 6, 40 ¹⁾.

¹⁾ Для ясности масштаб для y взят в десять раз больше, чем для x .

С помощью этих фигур мы можем исследовать в общем виде изменения в поведении свободных колебаний, когда β растет, начиная с 0. Получаемые результаты тем самым будут обусловлены либо непрерывным возрастанием ω , либо непрерывным убыванием h . Мы будем различать выражениями „положительные“ и „отрицательные“ те волны, которые движутся по отношению к вращению воды соответственно в том же или противоположном направлении.

Если β будет бесконечно малым, то значения x получим из уравнения

$$J'_s(x^{1/2}) = 0;$$

они соответствуют вертикальным асимптотам кривой, определяемой уравнением (20). Значения σ будут входить тогда попарно с одинаковыми абсолютными величинами, но с противоположными знаками, а это показывает, что здесь нет никакой разницы между скоростями положительной и отрицательной волны. Мы будем иметь здесь случай (12) § 191.

Когда β растет, значения σ , принадлежащие к одной паре, делаются неодинаковыми по абсолютной величине, и соответствующие значения x разделяются, причем то значение будет больше, для которого $\frac{\sigma}{2\omega}$ положи-

тельно. Для $\beta = s(s+1)$ кривая уравнения (20) и парабола (21) касаются друг друга в точке $(0, -1)$, причем соответствующее значение σ равно -2ω .

Когда β перерастает это критическое значение, то одно значение x становится отрицательным, а соответствующее (отрицательное) значение $\frac{\sigma}{2\omega}$

делается все меньше и меньше.

делается все меньше и меньше.

Когда β растет, начиная от нуля, то относительная угловая скорость для отрицательной волны делается больше, чем для положительной волны приблизительно той же формы. Более того, значение σ для отрицательной волны всегда будет больше, чем 2ω . Если вращение ускоряется, то обе волны все больше различаются как по их форме, так и по их частоте. При достаточно большом значении β мы можем получить одну, но не больше, чем одну, положительную волну, для которой σ будет численно меньше, чем 2ω . Когда, наконец, β становится очень большой, то значение σ , соответствующее этой волне, делается очень малым сравнительно с 2ω , в то время как остальные значения все более приближаются к значению $\pm 2\omega$.

Если теперь приписать индекс нуль тем величинам, которые относятся к случаю $\omega = 0$, то получим

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} = \frac{x^2 + \frac{4\omega^2}{gh}}{x_0^2} = \frac{x + \beta}{x_0}, \quad (22)$$

где x_0 относится к соответствующей асимптоте кривой уравнения (20). Это дает частоту произвольного свободного колебания, выраженную через соответствующее колебание при отсутствии вращения.

Все это иллюстрируется следующей таблицей, которая дает для случая $s = 1$ приближенные значения ka внутри интервала, применен-

ного в первой фиг. 46, а также соответствующие значения $\frac{\sigma}{2\omega}$

и $\frac{\sigma a}{c}$.

$\beta = 0$	$\beta = 2$			$\beta = 6$			$\beta = 40$			$\beta = \infty$		
$\kappa a = \frac{\sigma a}{c}$	κa	$\frac{\sigma}{2\omega}$	$\frac{\sigma a}{c}$	κa	$\frac{\sigma}{2\omega}$	$\frac{\sigma a}{c}$	κa	$\frac{\sigma}{2\omega}$	$\frac{\sigma a}{c}$	κa	$\frac{\sigma}{2\omega}$	$\frac{\sigma a}{c}$
+1,84	$\begin{cases} 2.19 \\ 0 \end{cases}$	$\begin{cases} +1.84 \\ -1.00 \end{cases}$	$\begin{cases} +2.61 \\ -1.41 \end{cases}$	$\begin{cases} 2.29 \\ 2.10 i \end{cases}$	$\begin{cases} +1.37 \\ -0.51 \end{cases}$	$\begin{cases} +3.35 \\ -1.28 \end{cases}$	$\begin{cases} 2.38 \\ 6.28 i \end{cases}$	$\begin{cases} +1.07 \\ -0.17 \end{cases}$	$\begin{cases} +6.76 \\ -1.09 \end{cases}$	$\begin{cases} 2.40 \\ i\beta^{1/2} \end{cases}$	$\begin{cases} +1.00 \\ -\beta^{1/2} \end{cases}$	$\begin{cases} +\beta^{1/2} \\ -1.00 \end{cases}$
+5,33	$\begin{cases} 5.38 \\ 5.28 \end{cases}$	$\begin{cases} +3.93 \\ -3.86 \end{cases}$	$\begin{cases} +5.56 \\ -5.47 \end{cases}$	$\begin{cases} 5.41 \\ 5.25 \end{cases}$	$\begin{cases} +2.43 \\ -2.37 \end{cases}$	$\begin{cases} +5.94 \\ -5.79 \end{cases}$	$\begin{cases} 5.47 \\ 5.18 \end{cases}$	$\begin{cases} +1.32 \\ -1.29 \end{cases}$	$\begin{cases} +8.36 \\ -8.17 \end{cases}$	$\begin{cases} 5.52 \\ 5.14 \end{cases}$	$\begin{cases} +1.00 \\ -1.00 \end{cases}$	$\begin{cases} +\beta^{1/2} \\ -\beta^{1/2} \end{cases}$

§ 211. В качестве примера *вынужденных* колебаний достаточно рассмотреть случай, когда

$$\bar{\zeta} = C \left(\frac{r}{a} \right)^s e^{i(\sigma t + s\theta + s)}, \quad (23)$$

где значение σ теперь задано.

Это дает

$$\Delta_1 \bar{\zeta} = 0,$$

а из уравнения (4) тогда следует

$$\zeta = A J_s(\kappa r) e^{i(\sigma t + s\theta + s)}, \quad (24)$$

где A должно быть определено из граничного условия (7), именно

$$A = \frac{s \left(1 + \frac{2\omega}{\sigma} \right)}{\kappa a J'_s(\kappa a) + \frac{2s\omega}{\sigma} J(\kappa a)} \cdot C. \quad (25)$$

Это выражение (25) становится очень большим, когда частота возмущения приблизительно совпадает с частотой собственного колебания соответствующего вида ¹⁾.

Случаи, наиболее интересные с точки зрения приливов, суть те, для которых $s=1$ и $\sigma=\omega$ и соответственно, $s=2$ и $\sigma=2\omega$. Они должны представлять суточные и полусуточные приливы, которые вызываются отдаленным возмущающим телом, собственным движением которого можно пренебречь по сравнению с вращением ω .

В случае $s=1$ мы будем иметь постоянную горизонтальную возмущающую силу. Если мы, кроме того, положим $\sigma=\omega$, то без труда получим, что амплитуда возвышения прилива на границе ($r=a$) бассейна находится к статическому значению в следующем отношении:

$$\frac{3I_1(z)}{I_1(z) + zI_0(z)}, \quad (26)$$

где $z = \frac{1}{2} \sqrt{3\beta}$. С помощью таблиц Лоджа мы находим для этого отношения следующие значения

	1,000,	0,638,	0,396,
для	$\beta = 0,$	$12,$	$48.$

¹⁾ Случай *приблизительно* круглого слоя был исследован Proudman, On some Cases of Tidal Motion on Rotating Sheets of Water, Proc. Lond. Math. Soc. (2), XII, 453 (1913).

Если $\sigma = 2\omega$, то $m = 0$ и, следовательно, вследствие (23), (24), (25)

$$\zeta = \bar{\zeta}, \quad (27)$$

т. е. возвышение прилива имеет в точности „статическое значение“.

Этот замечательный результат может быть получен в более общем виде; он имеет место и тогда, когда возмущающая сила имеет вид

$$\bar{\zeta} = \chi(r) e^{i(2\omega t + s\theta + \epsilon)}, \quad (28)$$

при условии, что глубина h есть функция только от r . Если мы вернемся к уравнениям (1), то увидим, что они для $\sigma = 2\omega$ удовлетворяются значениями

$$\zeta = \bar{\zeta}, \quad \eta = i\bar{\zeta}.$$

Чтобы определить $\bar{\zeta}$ как функцию от r , сделаем подстановку в уравнение неразрывности (2); тогда получим

$$\frac{\partial(h\bar{\zeta})}{\partial r} - \frac{s-1}{r} h\bar{\zeta} = -\chi(r). \quad (29)$$

Произвольное постоянное, которое получится при интегрировании этого уравнения, определяется из граничных условий.

В рассматриваемом случае будем иметь $\chi(r) = \frac{Cr^s}{a^s}$. Если мы проинтегрируем и положим $\bar{\zeta} = 0$ для $r = a$, то найдем

$$h\bar{\zeta} = \frac{Cr^{s-1}}{2a^s} (a^2 - r^2) e^{i(2\omega t + s\theta + \epsilon)}. \quad (30)$$

Соотношение $\eta = i\bar{\zeta}$ показывает, что амплитуды ξ и η равны между собой, в то время как их фазы отличаются на 90° ; относительные траектории частиц жидкости в этом случае будут окружности с радиусами

$$r = \frac{Cr^{s-1}}{2ha^s} (a^2 - r^2); \quad (31)$$

каждый из этих кругов пробегается в отрицательном направлении с угловой скоростью 2ω . Легко показать, что траектория произвольной частицы в пространстве есть эллипс с полуосями $r \pm r$, который она в гармоническом движении пробегает вокруг начала в положительном направлении, причем период будет равен $\frac{2\pi}{\omega}$. Этим объясняются особенности рассматриваемого

случая. В самом деле, если ζ будет иметь все время статическое значение, то горизонтальные силы, происходящие от возвышения, в точности будут уравновешивать возмущающую силу, и оставаться будут только те силы, которые соответствуют невозмущенной форме свободной поверхности [(1)

§ 207]. Эти силы дают ускорение к центру $g \frac{dz_0}{dr}$, или $\omega^2 r$, где r обозначает радиус-вектор частицы в ее мгновенном положении. Следовательно, все условия задачи будут удовлетворены эллиптическо-гармоническим колебанием отдельных частиц, если только положения, размеры и „фазы“ траекторий могут быть выбраны таким образом, что при взятом значении ζ удовлетворяется уравнение неразрывности. Только что проведенное исследование дает решение этого вопроса.

Если слой воды будет ограничен также и радиальными стенками, то задача становится более трудной. Приливные колебания (свободные и вынуж-

денные) в полукруговом бассейне постоянной глубины исследовались Прудманом ¹⁾ в применении к Черному морю, причем рассматривались возмущающие силы идеализированного суточного и полусуточного типа.

Свободные и вынужденные колебания во вращающемся эллиптическом бассейне постоянной глубины изучались Гольдштейном ²⁾.

§ 212 ³⁾. Мы рассмотрим вкратце также случай круглого бассейна переменной глубины; закон изменения глубины предполагаем при этом тем же самым, как и в § 193, именно

$$h = h_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right). \quad (1)$$

Если мы примем, что ξ , η , ζ все пропорциональны $e^{i(\sigma t + s\theta + \epsilon)}$ и что h зависит только от r , то из уравнений (2), (3) § 209 получим

$$\begin{aligned} (\sigma^2 - 4\omega^2) \zeta + g \frac{dh}{dr} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2\omega s}{\sigma r} \right) (\zeta - \bar{\zeta}) + \\ + gh \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{s^2}{r^2} \right) (\zeta - \bar{\zeta}) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Подставив из (1) значение для h , получим для свободных колебаний

$$\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{s^2}{r^2} \zeta \right) - \frac{2}{a^2} \left(r \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{2\omega s}{\sigma} \zeta \right) + \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{gh_0} \zeta = 0. \quad (3)$$

Это уравнение тождественно с уравнением (6) § 193 с единственной разницей, что теперь мы имеем

$$\frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{gh_0} - \frac{4\omega^2}{\sigma a^2}$$

вместо $\frac{\sigma^2}{gh_0}$. Следовательно, решение может быть написано сразу из результатов указанного параграфа. В самом деле, если мы положим

$$\frac{(\sigma^2 - 4\omega^2) a^2}{gh_0} - \frac{4\omega s}{\sigma} = n(n-2) - s^2, \quad (4)$$

то будем иметь

$$\zeta = A_s \left(\frac{r}{a} \right)^s F \left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{r^2}{a^2} \right) e^{i(\sigma t + s\theta + \epsilon)}, \quad (5)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} n + \frac{1}{2} s,$$

$$\beta = 1 + \frac{1}{2} s - \frac{1}{2} n,$$

$$\gamma = s + 1.$$

Условие, чтобы ряд сходился на границе $r = a$, требует, чтобы

$$n = s + 2j, \quad (6)$$

где j есть некоторое положительное целое число. Значения σ определяются тогда из уравнения (4).

¹⁾ Proudman, M. N. R. A. S. Geophys. Suppt. II, 32 (1928).

²⁾ Goldstein, M. N. R. A. S. Geophys. Suppt. II, 213 (1929).

³⁾ См. подстрочное примечание к § 193.

Вид свободной поверхности будет поэтому тем же самым, как в случае отсутствия вращения, но только движение частиц жидкости будет другим. Относительные траектории будут теперь эллипсы, главные оси которых направлены соответственно вдоль радиуса-вектора и перпендикулярно к нему; это легко получить из уравнений (3) § 209.

Для симметрических видов колебаний ($s=0$) уравнение (4) дает

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + 4\omega^2, \quad (7)$$

где σ_0 обозначает найденную в § 193 частоту соответствующего вида колебаний при отсутствии вращения.

Для значения s , отличного от нуля, наиболее важные виды колебаний суть те, для которых $n=s+2$. Уравнение (4) делится тогда на $\sigma+2\omega$, но этот множитель не существенный; если отбросим его, то получим квадратное уравнение

$$\sigma^2 - 2\omega\sigma = 2s \frac{gh_0}{a^2}, \quad (8)$$

откуда следует

$$\sigma = \omega \pm \left(\omega^2 + 2s \frac{gh_0}{a^2} \right)^{1/2}. \quad (9)$$

Это дает две волны, которые вращаются около начала, причем относительная скорость волн для отрицательной волны будет больше, чем для положительной, как и в случае постоянной глубины (§ 210). С помощью (8) формулы приводятся к таким:

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= A_s \left(\frac{r}{a} \right)^s, \\ \xi &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{h_0} A_s \left(\frac{r}{a} \right)^{s-1}, \\ \eta &= \frac{1}{2} i \frac{a}{h_0} A_s \left(\frac{r}{a} \right)^{s-1}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

причем каждый раз необходимо приписать множитель $e^{i(\sigma t + s\theta + \epsilon)}$. Так как $\eta = i\xi$, то все относительные траектории будут окружности.

Необходимо отметить случай $s=1$, $n=3$; свободная поверхность при этом всегда *плоская*, и круговые траектории имеют тогда все один и тот же радиус. В следующей таблице, которая относится к этому случаю, β поставлено вместо $\frac{4\omega^2 a^2}{c_0^2}$, где $c_0 = \sqrt{gh_0}$.

$\beta=0$	$\beta=2$		$\beta=6$		$\beta=40$	
$\frac{\sigma a}{c_0}$	$\frac{\sigma}{2\omega}$	$\frac{\sigma a}{c_0}$	$\frac{\sigma}{2\omega}$	$\frac{\sigma a}{c_0}$	$\frac{\sigma}{2\omega}$	$\frac{\sigma a}{c_0}$
+1.414	+1.618 -0.618	+2.288 -0.874	+1.264 -0.264	+3.096 -0.646	+1.018 -0.018	+6.626 -0.302

Если $n > s+2$, то мы имеем круговые узловые линии. Уравнение (4) будет тогда *кубическим* относительно $\frac{\sigma}{2\omega}$; легко убедиться, что его корни

все действительны и лежат соответственно между $-\infty$ и -1 , -1 , и 0 , $+1$ и $+\infty$. Следующая таблица вычислена для случая $s=1$, $n=5$.

$\beta = 0$	$\beta = 2$		$\beta = 6$		$\beta = 40$	
$\frac{\sigma a}{c_0}$	$\frac{\sigma}{2\omega}$	$\frac{\sigma a}{c_0}$	$\frac{\sigma}{2\omega}$	$\frac{\sigma a}{c_0}$	$\frac{\sigma}{2\omega}$	$\frac{\sigma a}{c_0}$
± 3.742	+2.889 -0.125 -2.764	+4.085 -0.176 -3.909	+1.874 -0.100 -1.774	+4.590 -0.245 -4.344	+1.183 -0.040 -1.143	+7.483 -0.253 -7.230

Первый и последний корень каждой тройки дают положительные и отрицательные волны того же характера, как те, которые мы получали ранее при постоянной глубине. Меньший отрицательный корень дает сравнительно медленное колебание, которое для бесконечно малой угловой скорости ω переходит в *стационарное* вихревое движение без поднятия или опускания поверхности. На возможность подобных колебаний было указано в конце § 206. В рассматриваемом случае легко проследить этот переход. Из уравнения (4) следует, что соответствующий предел $\frac{\sigma}{2\omega}$ при бесконечном уменьшении ω будет равен $-1/7$. Мы находим тогда из (2), (3) § 209

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi} &= C \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) e^{i(\theta + \sigma t)}, \\ \dot{\eta} &= iC \left(1 - 5 \frac{r^2}{a^2} \right) e^{i(\theta + \sigma t)} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

и, наконец,

$$\zeta = -\frac{8i\sigma C}{g} r \left(1 - \frac{3}{2} \frac{r^2}{a^2} \right) e^{i(\theta + \sigma t)}, \quad (12)$$

где

$$\sigma = -\frac{2}{7} \omega.$$

Важнейший случай *вынужденных* колебаний есть тот, когда

$$\bar{\zeta} = C \left(\frac{r}{a} \right)^3 e^{i(\sigma t + s\theta + s)}. \quad (13)$$

Подстановкой в (3) мы можем тотчас же проверить, что

$$\zeta = \frac{2sgh_0}{2sgh_0 - (\sigma^2 - 2\omega\sigma)a^2} \bar{\zeta}. \quad (14)$$

Заметим, что для $\sigma = 2\omega$ высота прилива будет иметь в точности статическое значение. Это находится в согласии с § 211.

Когда σ_1 , σ_2 обозначают два корня уравнения (8), то последняя формула может быть написана в следующем виде:

$$\zeta = \frac{\bar{\zeta}}{\left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_1} \right) \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_2} \right)}. \quad (15)$$

Приливные колебания в полукруглом бассейне с указанным выше законом изменения глубины были изучены Гольдбраухом ¹⁾. Вся трудность этой задачи состоит в удовлетворении условий на прямолинейной части границы.

§ 212а. Приведем некоторые примеры решений по приближенному способу, рассмотренному в § 205b.

1. Имеет смысл рассмотреть сначала уже разрешенную задачу, поэтому возьмем задачу круглого бассейна постоянной глубины (§ 210). Возьмем полярные координаты смещенной частицы относительно вращающейся с угловой скоростью ω горизонтальной начальной прямой в виде

$$r' = r + \xi, \quad \theta' = \theta = \frac{\eta}{r}, \quad (1)$$

тогда уравнение неразрывности будет, как в (2) § 209:

$$\frac{\dot{z}}{h} = - \frac{\partial \xi}{\partial r} - \frac{\xi}{r} - \frac{\partial \eta}{r \partial \theta}. \quad (2)$$

В наших прежних обозначениях будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \frac{1}{2} \rho h \int_0^a \int_0^{2\pi} (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) r \, d\theta \, dr, \\ V - T_0 &= \frac{1}{2} \rho g \int_0^a \int_0^{2\pi} \xi^2 r \, d\theta \, dr, \\ M' &= \rho h \int_0^a \int_0^{2\pi} (\xi \dot{\eta} - \eta \dot{\xi}) r \, d\theta \, dr. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Для наиболее медленного колебания в качестве предполагаемого типа возьмем

$$\left. \begin{aligned} \xi &= A \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \cos(\sigma t + \theta), \\ \eta &= \left(-A + B \frac{r^2}{a^2} \right) \sin(\sigma t + \theta), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

а это дает

$$\frac{\dot{z}}{h} = (3A - B) \frac{r}{a^2} \cos(\sigma t + \theta). \quad (5)$$

Постоянные в (4) выбираются таким образом, чтобы \dot{z} была конечно для $r = 0$.

Отсюда и из определений § 205b следует, если взять средние значения функций в формулах (3) и произвести интегрирования:

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{1}{12} \pi \rho h a^2 (4A^2 - 3AB + B^2), \\ Q &= - \frac{1}{6} \pi \rho \omega h a^2 (3A^2 - AB), \\ R &= \frac{1}{8} \pi \rho g h^2 (3A - B)^2. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

¹⁾ Goldsbrough. Proc. Roy. Soc., CXXII, 228 (1929).

Если для краткости напишем

$$\left. \begin{aligned} c &= \sqrt{gh}, \\ \sigma \frac{a}{c} &= x, \\ \frac{4\omega^2 a^2}{c^2} &= \beta, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

то уравнение

$$\sigma^2 P + \sigma Q - R = 0 \quad (8)$$

переходит в следующее:

$$\left(4x^2 - 3\sqrt{\beta}x - \frac{27}{2}\right)A^2 - (3x^2 - \sqrt{\beta}x - 9)AB + \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)B^2 = 0. \quad (9)$$

Стационарные значения x определяются тогда из уравнения

$$x^2(7x^2 - 6\sqrt{\beta}x - \beta - 24) = 0. \quad (10)$$

Корни, значения которых равны нулю, можно отбросить, так как они соответствуют только циркулирующему движению без изменения поверхности уровня. Для сравнения с численными результатами § 210 положим по очереди

$$\beta = 2, 6, 40.$$

Корни уравнения (10), отличные от 0, для этих сравниваемых случаев соответственно будут равны

$$\left. \begin{aligned} -1,43 \\ +2,65 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} -1,27 \\ +3,27 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} -2,35 \\ +6,77 \end{aligned} \right\}.$$

Только в третьем случае имеется значительное отклонение от точного значения. Можно показать, что приближенный метод является успешным для довольно большой области значений параметра β .

2. В случае *прямоугольного* бассейна постоянной глубины мы расположим оси Ox и Oy по двум его сторонам, длины которых обозначим через a и b . Если обозначить через ξ , η компоненты смещения частицы, то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \frac{1}{2} \rho h \int_0^a \int_0^b (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) dx dy, \\ V - T_0 &= \frac{1}{2} \rho g \int_0^a \int_0^b \zeta^2 dx dy, \\ M' &= \rho h \int_0^a \int_0^b (\xi \dot{\eta} - \eta \dot{\xi}) dx dy. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

В качестве приближенного типа мы возьмем

$$\left. \begin{aligned} \xi &= A \sin \frac{\pi x}{a} \cos \sigma t, \\ \eta &= B \sin \frac{\pi y}{b} \sin \sigma t. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Это приводит нас к случаю $\omega = 0$, при котором либо A , либо B равно нулю; поэтому нет основания ожидать, что это приближение будет давать хоро-

шие результаты для значений ω , превышающих некоторый предел. Из (12) следует

$$\frac{\zeta}{h} = -\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\pi \left(\frac{A}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \sigma t + \frac{B}{b} \cos \frac{\pi y}{b} \sin \sigma t \right). \quad (13)$$

Отсюда получаем

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{1}{8} \rho h a b (A^2 + B^2), \\ Q &= \frac{4 \rho \omega h a b}{\pi^2} A B, \\ R &= \frac{1}{8} \pi^2 g \rho h^2 \left(\frac{b}{a} A^2 + \frac{a}{b} B^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Уравнение (8) принимает теперь вид

$$\left(\sigma^2 - \frac{\pi^2 c^2}{a^2} \right) A^2 + \frac{32 \omega \sigma}{\pi^2} A B + \left(\sigma^2 - \frac{\pi^2 c^2}{b^2} \right) B^2 = 0, \quad (15)$$

где, как и раньше, $c^2 = gh$. Стационарные значения σ определяются, таким образом, из уравнения

$$(\sigma^2 - \sigma_1^2)(\sigma^2 - \sigma_2^2) = \frac{256 \omega^2 \sigma^2}{\pi^4}, \quad (16)$$

где σ_1, σ_2 представляют те значения σ , которые соответствуют колебаниям, параллельным соответственно оси x и оси y при отсутствии вращения.

Если ω будет малым и a и b заведомо не равны между собой, то в том типе колебаний, при котором σ близко к σ_1 , будем иметь приближенно

$$\sigma - \sigma_1 = \frac{128 \omega^2 \sigma_1}{\pi^4 (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)}. \quad (17)$$

Соответствующее отношение B/A будет дано тогда уравнением

$$\frac{16 \omega \sigma_1}{\pi^2} A + (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) B = 0, \quad (18)$$

и оно будет малым, как и следовало ожидать.

Для квадратного бассейна $a = b$; тогда уравнение (16) даст

$$\sigma^2 - \sigma_1^2 = \pm \frac{16 \omega \sigma}{\pi^2}, \quad (19)$$

или приблизительно

$$\sigma - \sigma_1 = \pm \frac{8 \omega}{\pi^2}. \quad (20)$$

В таком случае будет $B/A = \pm 1$.

Приливы на вращающемся шаре

§ 213. Мы переходим теперь к изложению оснований проблемы Лапласа о приливных колебаниях океана, который обладает сравнительно небольшой глубиной и покрывает вращающийся шар ¹⁾. Чтобы

¹⁾ Laplace, Recherches sur quelques points du Système du monde, Mém. de l'Acad. roy. de Sciences, 1775 [1778] и 1776 [1779] [Oeuvres Complètes, IX, 88, 187]. Это исследование с различными изменениями перепечатано в Mécanique céleste, кн. 4, гл. I (1779).