

ших страницах, и мы видели, что полное воздействие жидкости на движение твердого тела может быть заменено увеличением инертной массы твердого тела. Мы увидим, что аналогичный результат имеет место вообще, если применить выражение „масса“ в несколько расширенном смысле.

При принятых условиях движение жидкости характеризуется существованием однозначного потенциала скоростей  $\varphi$ , который удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\Delta\varphi = 0; \quad (1)$$

кроме того, должны выполняться еще следующие условия: 1) значение  $-\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ , где  $\delta n$  обозначает по обыкновению элемент нормали в точке поверхности тела, проведенной по направлению к жидкости, должно равняться скорости соответственной точки поверхности по нормали; 2) частные производные  $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$  должны обращаться в нуль на бесконечности в любом направлении от твердого тела. Это второе условие следует признать необходимым по той причине, что конечная скорость в бесконечности дала бы бесконечно большую кинетическую энергию, которая не может быть получена с помощью конечных сил, действующих на тело в течение конечного промежутка времени. К этому условию мы придем также, если примем, что жидкость заключена в бесконечно большом сосуде, бесконечно удаленный со всех сторон от движущегося твердого тела. Действительно, при этом допущении можно рассматривать пространство, наполненное жидкостью, образованным как бы из трубок тока, которые начинаются и кончаются на поверхности тела, так что полный поток через всякую конечную или бесконечную поверхность, проведенную внутри жидкости, должен быть конечным, а это дает в бесконечности скорость, равную нулю.

В § 41 было показано, что при вышеизложенных условиях движение жидкости определяется однозначно.

§ 118. Для дальнейшего исследования задачи удобнее следовать методу, введенному в динамику твердого тела Эйлером, и взять систему прямоугольных осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , неизменно связанных с телом. Если движение тела в произвольный момент времени определить через проекции мгновенной угловой скорости  $p$ ,  $q$ ,  $r$  и через проекции поступательной скорости  $u$ ,  $v$ ,  $w$  начала координат на подвижные оси <sup>1)</sup>, то, следуя Кирхгофу, мы можем написать

$$\varphi = u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3 + p\chi_1 + q\chi_2 + r\chi_3, \quad (2)$$

где, как это непосредственно можно усмотреть,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ ,  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ ,  $\chi_3$  суть некоторые функции от  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , зависящие только от формы и

<sup>1)</sup> Мы употребляем теперь обозначения  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$  не в их прежнем смысле.

положения поверхности тела по отношению к координатным осям. В самом деле, если  $l$ ,  $m$ ,  $n$  означают направляющие косинусы направленной в жидкость нормали в некоторой точке поверхности, то кинематическое условие на поверхности будет

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial n} = l(u + qz - ry) + m(v + rx - pz) + n(w + py - qx);$$

вставив вместо  $\varphi$  его значение (2), получим

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= l, & -\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} &= m, & -\frac{\partial \varphi_3}{\partial n} &= n, \\ -\frac{\partial \chi_1}{\partial n} &= ny - mz, & -\frac{\partial \chi_2}{\partial n} &= lz - px, & -\frac{\partial \chi_3}{\partial n} &= mx - ly. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Так как эти функции должны удовлетворять также и уравнению (1) и их производные в бесконечности должны обращаться в нуль, то, согласно § 41, они вполне определены <sup>1)</sup>.

**§ 119.** Каковым бы ни было в некоторый момент времени движение твердого тела и жидкости, оно может быть образовано мгновенно из положения равновесия при помощи подходящим образом выбранного импульсивного динамического винта, приложенного к твердому телу. Этот импульсивный винт есть тот, который необходим, чтобы уравновесить систему действующих на поверхность импульсивных давлений  $\rho\varphi$  и, кроме того, образовать действительное количество движения всех частиц тела. Он был назван Кельвином *импульсом* системы в рассматриваемый момент времени. Необходимо отметить, что определенный таким образом импульс не тождествен с полным количеством движения <sup>2)</sup> системы; это последнее в данном случае фактически неопределимо <sup>3)</sup>. Мы сейчас же докажем, однако, что импульс вследствие внешних действующих на тело сил меняется точно таким же образом, как количество движения конечной динамической системы.

Рассмотрим сначала некоторое действительное движение твердого тела с момента  $t_0$  до момента  $t_1$  под действием произвольных сил, приложенных к этому телу, в *конечной* массе жидкости, заключенной в неподвижном сосуде произвольной формы. Вообразим, что движение перед моментом  $t_0$  произошло из положения равновесия с помощью сил, действующих на твердое тело (безразлично, непрерывных или импульсивных), и после момента  $t_1$  опять таким же образом прекращено при помощи сил, действующих на тело. Так как количество движения системы, как в начале, так и в конце

<sup>1)</sup> Для частного случая поверхности эллипсоида их значения могут быть получены сразу из результатов § 114, 115.

<sup>2)</sup> Следует иметь в виду, что здесь под полным количеством движения системы подразумевается главный вектор количеств движения вместе с главным моментом количеств движения. *Прим. ред.*

<sup>3)</sup> То-есть попытка его вычислить приводит к „несобственным“ интегралам.

этого процесса равно нулю, то интегралы по времени от сил, действующих на тело, вместе с интегралом по времени от давлений, производимых сосудом на жидкость, должны образовать уравновешенную систему сил. Величины этих давлений вычисляются согласно § 20 по формуле

$$\frac{p}{e} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} q^2 + F(t). \quad (1)$$

Давления, которые на всей поверхности сосуда имеют одни и те же значения, при суммировании дают результирующую, равную нулю; следовательно, так как, к тому же,  $\varphi$  в начале и в конце постоянно, то единственная эффективная часть интеграла давления  $\int p dt$  будет дана только одним членом

$$-\frac{1}{2} e \int q^2 dt. \quad (2)$$

Возвратимся теперь к первоначальной формулировке нашей задачи и предположим, что окружающий сосуд бесконечно велик и в каждом направлении бесконечно удален от движущегося тела. Если рассматривать расположение трубок тока (§ 36), то легко видеть, что скорость  $q$  жидкости на большом расстоянии  $r$  от начала, лежащего вблизи твердого тела, в конечном счете есть величина самое большее порядка  $\frac{1}{r^2}$ <sup>1)</sup>; следовательно, подинтегральное выражение (2) будет

величиной порядка  $\frac{1}{r^2}$ . Так как элементы поверхности сосуда суть величины порядка  $r^2 \delta \tilde{\omega}$ , причем  $\delta \tilde{\omega}$  есть элемент телесного угла, то результирующая и главный момент давлений обращаются в нуль. А тогда указанное выше заключение приводит к тому, что интеграл по времени от сил, действующих на тело, обращается в нуль.

Если мы вообразим, что движение произошло *мгновенно* из положения равновесия в момент  $t_0$  и прекращено *мгновенно* в момент  $t_1$ , то результат, к которому мы пришли, можно выразить следующим образом:

„Импульс“ движения (в смысле Кельвина) в момент  $t_1$  отличается от „импульса“ в момент  $t_0$  на интеграл по времени от внешних сил, которые действовали на тело в течение промежутка времени  $t_1 - t_0$ <sup>2)</sup>.

Необходимо отметить, что вышеизложенное рассуждение остается в существенных чертах без изменения, если одно тело заменить *группой* тел, которые, кроме того, могут быть не твердыми, а упругими, и даже тогда, когда твердые тела заменены *жидкими массами*, находящимися в вихревом движении.

1) Она на самом деле будет порядка  $\frac{1}{r^2}$  тогда, когда, как в рассматриваемом случае, полный поток наружу равен нулю.

2) W. Thomson, см. примечание на стр. 50. Вышеизложенный способ доказательства был любезно сообщен автору Лармором (J. Larmor).

§ 120. Чтобы выразить аналитически изложенный выше результат, предположим, что  $\xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu, \nu$  суть компоненты сил и пар, которые вместе образуют импульс; равным образом  $X, Y, Z, L, M, N$  обозначают систему внешних сил. Полное изменение  $\xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu, \nu$ , происходящее отчасти от движения осей, к которым отнесены эти величины, и отчасти от внешних сил, представляется тогда следующими формулами <sup>1)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= r\eta - q\zeta + X, & \frac{d\lambda}{dt} &= w\eta - v\zeta + r\mu - q\nu + L, \\ \frac{d\eta}{dt} &= p\zeta - r\xi + Y, & \frac{d\mu}{dt} &= u\zeta - w\xi + p\nu - r\lambda + M, \\ \frac{d\zeta}{dt} &= q\xi - p\eta + Z, & \frac{d\nu}{dt} &= v\xi - u\eta + q\lambda - p\mu + N. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Действительно, в момент  $t + \delta t$  подвижные оси образуют с их положениями в момент  $t$  углы, косинусы которых суть

$$(1, r \delta t, -q \delta t), \quad (-r \delta t, 1, p \delta t), \quad (q \delta t, -p \delta t, 1).$$

Поэтому для составляющей, параллельной новому положению оси  $x$ , будем иметь

$$\xi + \delta\xi = \xi + \eta \cdot r \delta t - \zeta \cdot q \delta t + X \delta t.$$

Если мы затем при составлении моментов относительно нового положения  $Ox$  примем во внимание, что  $O$  смещено на отрезки  $u \delta t, v \delta t, w \delta t$ , параллельные осям, то получим

$$\lambda + \delta\lambda = \lambda + \eta \cdot w \delta t - \zeta \cdot v \delta t + \mu \cdot r \delta t - \nu \cdot q \delta t + L \delta t.$$

Эти уравнения вместе с аналогичными, которые могут быть написаны сразу на основании симметрии, и представляют как раз уравнения (1).

Если внешние силы на тело не действуют, то легко получить для этих уравнений следующие интегралы:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \text{const.}, \quad \lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta = \text{const.}, \quad (2)$$

которые выражают то, что сила и момент пары, составляющие импульс <sup>2)</sup>, будут постоянными по величине.

§ 121. Теперь мы должны еще выразить  $\xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu, \nu$  через  $u, v, w, p, q, r$ . Пусть  $T$  обозначает кинетическую энергию жидкости, так что

$$2T = -\rho \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS, \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Ср. H a y w a r d, On a Direct Method of Estimating Velocities, Accelerations, and all similar Quantities, with respect to Axes moveable in any manner in space, Cambr. Trans., X, 1 (1856).

<sup>2)</sup> То-есть составляющие импульсивный винт. Прим. ред.

где интегрирование распространяется по поверхности движущегося тела. Если подставить значение  $\varphi$  из уравнения (2) § 118, то мы получим

$$2T = \left. \begin{aligned} & Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2A'vw + 2B'wu + 2C'uv + \\ & + Pp^2 + Qq^2 + Rr^2 + 2P'qr + 2Q'rp + 2R'pq + \\ & + 2p(Fu + Gv + Hw) + 2q(F'u + G'v + H'w) + \\ & + 2r(F''u + G''v + H''w); \end{aligned} \right\} (2)$$

21 коэффициент  $A, B, C$  и т. д. суть некоторые постоянные, которые определяются видом и положением поверхности относительно координатных осей. Мы имеем, например,

$$\left. \begin{aligned} A &= -e \iint \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dS = e \iint \varphi_1 l dS, \\ A' &= -\frac{1}{2} e \iint \left( \varphi_2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} + \varphi_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) dS = \\ &= -e \iint \varphi_2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} dS = -e \iint \varphi_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} dS = \\ &= e \iint \varphi_2 n dS = e \iint \varphi_3 m dS, \\ P &= -e \iint \chi_1 \frac{\partial \chi_1}{\partial n} dS = e \iint \chi_1 (ny - mz) dS, \end{aligned} \right\} (3)$$

причем преобразования основываются на равенствах (3) § 118 и на частном случае теоремы Грина [§ 44 (2)]. Эти выражения для коэффициентов были даны Кирхгофом.

Фактические значения коэффициентов в выражении для  $2T$  были найдены в предшествующей главе для случая эллипсоида; именно, из § 114 и 115 получается

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{a_0}{2-a_0} \frac{4}{3} \pi abc, \\ P &= \frac{1}{5} \frac{(b^2-c^2)^2 (\gamma_0 - \beta_0)}{2(b^2-c^2) + (b^2+c^2)(\beta_0 - \gamma_0)} \frac{4}{3} \pi abc, \end{aligned} \right\} (4)$$

с аналогичными выражениями для  $B, C, Q, R$ . Все остальные коэффициенты в этом случае равны нулю, что легко показать. Мы заметим, что

$$A - B = \frac{2(a_0 - \beta_0)}{(2-a_0)(2-\beta_0)} \frac{4}{3} \pi abc, \quad (5)$$

так что  $A < B < C$ , когда  $a > b > c$ , как и следовало ожидать.

Формулы для эллипсоида вращения получаются отсюда, если положить  $b=c$ ; их можно получить также независимо от этого по методу § 104—109. Так, например, для круглого диска ( $a=0, b=c$ ) мы получаем

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{8}{3} ec^2, & P &= 0, \\ B &= 0, & Q &= \frac{16}{45} ec^2, \\ C &= 0, & R &= \frac{16}{45} ec^2. \end{aligned} \right\} (6)$$

§ 121a. Когда движение тела состоит только из одного поступательного перемещения, то формула для кинетической энергии жидкости принимает следующий вид:

$$2T = Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2A'vw + 2B'wu + 2C'uv. \quad (1)$$

Мы можем теперь показать, что на большом удалении от тела во всех случаях весь эффект сводится к эффекту, создаваемому соответственным дублетом, и что характер этого дублета целиком определяется коэффициентами формулы (1).

Для этого мы прибегнем к формуле (12) § 58

$$4\pi\varphi_P = \iint (\varphi - \varphi') \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS. \quad (2)$$

Мы можем рассматривать границу тела как тонкую твердую оболочку, содержащую внутри себя жидкость. Допустим, что  $\varphi$  и  $\varphi'$  суть потенциалы скоростей, отнесенные соответственно к внешней и внутренней области. Пусть  $(x_1, y_1, z_1)$  будут координаты точки  $P$ , которая предполагается удаленной на расстояние, большое по сравнению с размерами тела, и  $(x, y, z)$  — координаты элемента поверхности  $dS$ . Тогда, полагая

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \quad r = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2},$$

приближенно будем иметь

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r_1^3}, \quad \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} = \frac{lx_1 + my_1 + nz_1}{r_1^3}.$$

Предположим теперь, что оболочка движется с единичной скоростью параллельно оси  $x$  без вращения. Полагая

$$\varphi = \varphi_1, \quad \varphi' = -x, \quad (3)$$

получим

$$\iint \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS = \frac{Ax_1 + C'y_1 + B'z_1}{e r_1^3} \quad (4)$$

и

$$\iint \varphi' \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS = -\frac{Qx_1}{r_1^3}, \quad (5)$$

где  $Q$  обозначает объем тела. В самом деле, мы имеем

$$\iint x l dS = Q, \quad \iint x m dS = 0, \quad \iint x n dS = 0. \quad (6)$$

Отсюда

$$4\pi\varphi_P = \frac{(A + eQ)x_1 + C'y_1 + B'z_1}{e r_1^3}. \quad (7)^1$$

<sup>1)</sup> Из работы On Wave Resistance Proc. Roy. Soc., CXI, 15 (1926).

Таким образом, эффект на большом удалении совпадает с эффектом от дублета, но ось дублета не обязательно должна совпадать с направлением перемещения тела. Однако, если тело движется параллельно оси своего установившегося движения (§ 124), то коэффициенты  $\mathbf{C}'$  и  $\mathbf{B}'$  исчезают, и тогда

$$4\pi\varphi_P = \frac{(A + eQ) x_1}{er_1^2}. \quad (8)$$

Например, в случае сферы мы имеем  $A = \frac{2}{3} \pi \rho a^3$ ,  $Q = \frac{4}{3} \pi a^3$  и

$$\varphi_P = \frac{a^3 x_1}{2r_1^2}, \quad (9)$$

как и в § 92.

В общем же случае, когда тело имеет скорость  $(u, v, w)$ , формула (7) должна быть заменена следующей:

$$4\pi r_1^2 e \varphi_P = (\mathbf{A}u + \mathbf{C}'v + \mathbf{B}'w) x_1 + (\mathbf{C}'u + \mathbf{B}v + \mathbf{A}'w) y_1 + \\ + (\mathbf{B}'u + \mathbf{A}'v + \mathbf{C}w) z_1 + eQ(ux_1 + vy_1 + wz_1). \quad (10)$$

Обратно, знание вида потенциала скоростей на бесконечности, обусловленного установившимся движением тела, приводит к знанию соответствующих коэффициентов инерции.

Например, в случае овалов Раякина, на которые были ссылки в § 97, мы имеем непрерывное распределение источников вдоль оси  $x$ , подчиненное тому условию, что полное „напряженное“ всех источников есть нуль. Если линейная плотность этого распределения есть  $m$ , то получаем

$$\varphi = \int \frac{m d\xi}{\sqrt{(x_1 - \xi)^2 + y_1^2 + z_1^2}} = \int \left( \frac{1}{r_1} + \frac{\xi x_1}{r_1^3} + \dots \right) m d\xi.$$

или

$$\varphi = \frac{x_1}{r_1^3} \int m \xi d\xi + \dots \quad (11)$$

так как  $\int m d\xi = 0$ . Отсюда

$$\frac{A}{e} + Q = 4\pi \int m \xi d\xi. \quad (12)^1)$$

**§ 122.** Кинетическая энергия только одного тела, обозначим ее через  $T_1$ , выражается следующим образом:

$$2T_1 = m(u^2 + v^2 + w^2) + \mathbf{P}_1 p^2 + \mathbf{Q}_1 q^2 + \mathbf{R}_1 r^2 + \\ + 2\mathbf{P}'_1 q r + 2\mathbf{Q}'_1 r p + 2\mathbf{R}'_1 p q + \\ + 2m\{\alpha(vr - wq) + \beta(wp - ur) + \gamma(uq - vp)\}, \quad (1)$$

<sup>1)</sup> G. J. Taylor, Proc. Roy. Soc., CXX, 13 (1928).

Следовательно, полная энергия системы  $T + T_1$ , мы ее обозначим через  $T$ , будет представляться выражением того же общего вида, как и в § 121,

$$2T = Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2A'vw + 2B'wu + 2C'uv + \\ + Pp^2 + Qq^2 + Rr^2 + 2P'qr + 2Q'rp + 2R'pq + \\ + 2p(Fu + Gv + Hw) + 2q(F'u + G'v + H'w) + \\ + 2r(F''u + G''v + H''w), \quad (2)$$

где коэффициенты все обозначены единообразными буквами, хотя шесть из них имеют, конечно, те же самые значения, как в формуле (2) § 121.

Значения различных составляющих импульса, выраженные через скорости  $u, v, w, p, q, r$ , можно теперь найти при помощи известного метода динамики <sup>1)</sup>. Допустим, что некоторая система бесконечно больших сил ( $X, Y, Z, L, M, N$ ) действует на твердое тело в течение бесконечно малого промежутка времени  $\tau$ , так что импульс изменяется от  $(\xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu, \nu)$  до  $(\xi + \delta\xi, \eta + \delta\eta, \zeta + \delta\zeta, \lambda + \delta\lambda, \mu + \delta\mu, \nu + \delta\nu)$ . Работа, произведенная силой  $X$ ,

$$\int_0^\tau Xu \, dt,$$

по своему значению лежит между

$$u_1 \int_0^\tau X \, dt \quad \text{и} \quad u_2 \int_0^\tau X \, dt,$$

причем  $u_1$  и  $u_2$  суть наибольшее и наименьшее значения  $u$  в течение промежутка  $\tau$ , т. е. она лежит между  $u_1 \delta\xi$  и  $u_2 \delta\xi$ . Если введем теперь допущение, что  $\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta, \delta\lambda, \delta\mu, \delta\nu$  бесконечно малы, то каждая из величин  $u_1$  и  $u_2$  равна  $u$ , и произведенная работа равна  $u \delta\xi$ . Подобным же образом мы можем вычислить работу, произведенную остальными силами и парами сил. Полный результат должен равняться приращению кинетической энергии; мы имеем, следовательно,

$$u \delta\xi + v \delta\eta + w \delta\zeta + p \delta\lambda + q \delta\mu + r \delta\nu = \\ = \delta T = \frac{\partial T}{\partial u} \delta u + \frac{\partial T}{\partial v} \delta v + \frac{\partial T}{\partial w} \delta w + \frac{\partial T}{\partial p} \delta p + \frac{\partial T}{\partial q} \delta q + \frac{\partial T}{\partial r} \delta r. \quad (3)$$

Если изменить теперь скорости в некотором данном отношении, то импульсы изменятся в том же отношении. Поэтому, полагая

$$\frac{\delta u}{u} = \frac{\delta v}{v} = \frac{\delta w}{w} = \frac{\delta p}{p} = \frac{\delta q}{q} = \frac{\delta r}{r} = k,$$

<sup>1)</sup> См. Thomson и Tait, § 313, или Maxwell, Electricity and Magnetism, часть IV, гл. 5.



будем иметь

$$\frac{\delta \xi}{\xi} = \frac{\delta \eta}{\eta} = \frac{\delta \zeta}{\zeta} = \frac{\delta \lambda}{\lambda} = \frac{\delta \mu}{\mu} = \frac{\delta \nu}{\nu} = k.$$

Подставляя эти отношения в формулу (1), получим

$$\begin{aligned} u\xi + v\eta + w\zeta + p\lambda + q\mu + r\nu &= \\ &= u \frac{\partial T}{\partial u} + v \frac{\partial T}{\partial v} + w \frac{\partial T}{\partial w} + p \frac{\partial T}{\partial p} + q \frac{\partial T}{\partial q} + r \frac{\partial T}{\partial r} = 2T, \end{aligned} \quad (4)$$

так как  $T$  есть однородная функция второй степени. Если взять теперь произвольную вариацию  $\delta$  от обеих частей (4) и опустить члены, которые сокращаются согласно (3), то мы получим

$$\xi \delta u + \eta \delta v + \zeta \delta w + \lambda \delta p + \mu \delta q + \nu \delta r = \delta T.$$

Так как вариации  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$ ,  $\delta p$ ,  $\delta q$ ,  $\delta r$  все независимы друг от друга, то мы получаем искомые формулы

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\partial T}{\partial u}, & \lambda &= \frac{\partial T}{\partial p}, \\ \eta &= \frac{\partial T}{\partial v}, & \mu &= \frac{\partial T}{\partial q}, \\ \zeta &= \frac{\partial T}{\partial w}, & \nu &= \frac{\partial T}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Необходимо отметить следующее: так как  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , ... — линейные функции от  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , ..., то эти последние можно представить так же, как линейные функции первых, и  $T$  можно рассматривать так же, как однородную функцию второй степени от  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ . Когда  $T$  представлено таким образом, мы его обозначим через  $T'$ . Уравнение (3) дает тогда сразу

$$\begin{aligned} u \delta \xi + v \delta \eta + w \delta \zeta + p \delta \lambda + q \delta \mu + r \delta \nu &= \\ &= \frac{\partial T'}{\partial \xi} \delta \xi + \frac{\partial T'}{\partial \eta} \delta \eta + \frac{\partial T'}{\partial \zeta} \delta \zeta + \frac{\partial T'}{\partial \lambda} \delta \lambda + \frac{\partial T'}{\partial \mu} \delta \mu + \frac{\partial T'}{\partial \nu} \delta \nu; \end{aligned}$$

отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial T'}{\partial \xi}, & p &= \frac{\partial T'}{\partial \lambda}, \\ v &= \frac{\partial T'}{\partial \eta}, & q &= \frac{\partial T'}{\partial \mu}, \\ w &= \frac{\partial T'}{\partial \zeta}, & r &= \frac{\partial T'}{\partial \nu}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Эти формулы в известном смысле взаимны с формулами (5).

Последние результаты мы можем использовать для того, чтобы в случае, когда не действуют внешние силы, кроме интегралов уравнений движения, найденных в § 120, найти еще новый интеграл. Именно имеем

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T'}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \dots + \frac{\partial T'}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} + \dots = u \frac{d\xi}{dt} + \dots + p \frac{d\lambda}{dt} + \dots,$$

а это выражение тождественно обращается в нуль, согласно (1) § 120. Отсюда мы получаем уравнение энергии

$$T = \text{const.} \quad (7)$$

§ 123. В формуле (5) положим, согласно обозначениям § 121,

$$T = T + T_1.$$

Из динамики твердого тела известно, что члены, выраженные через  $T_1$ , представляют количество движения и момент количеств движения самого тела. Следовательно, остальные, представленные через  $T$ , члены должны представлять систему тех импульсивных давлений, которые испытывает жидкость со стороны поверхности тела, когда движение предполагается мгновенно вызванным из состояния покоя.

Это легко может быть проверено. Например, составляющая по оси  $x$  указанной выше системы импульсивных давлений, согласно § 118 и 121, равна

$$\begin{aligned} \iint e\varphi l \, dS &= -e \iint \varphi \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \, dS = \\ &= Au + C'v + B'w + Fp + F'q + F''r = \frac{\partial T}{\partial u}. \end{aligned} \quad (8)$$

Аналогично момент импульсивных давлений относительно оси  $Ox$  равен

$$\begin{aligned} \iint e\varphi(ny - mz) \, dS &= -e \iint \varphi \frac{\partial \chi_1}{\partial n} \, dS = \\ &= Fu + Gv + Hw + Pp + R'q + Q'r = \frac{\partial T}{\partial p}. \end{aligned} \quad (9)$$

§ 124. Уравнения движения могут быть теперь представлены в следующей форме <sup>1)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u} &= r \frac{\partial T}{\partial v} - q \frac{\partial T}{\partial w} + X, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v} &= p \frac{\partial T}{\partial w} - r \frac{\partial T}{\partial u} + Y, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial w} &= q \frac{\partial T}{\partial u} - p \frac{\partial T}{\partial v} + Z, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p} &= w \frac{\partial T}{\partial v} - v \frac{\partial T}{\partial w} + r \frac{\partial T}{\partial q} - q \frac{\partial T}{\partial r} + L, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q} &= u \frac{\partial T}{\partial w} - w \frac{\partial T}{\partial u} + p \frac{\partial T}{\partial r} - r \frac{\partial T}{\partial p} + M, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial r} &= v \frac{\partial T}{\partial u} - u \frac{\partial T}{\partial v} + q \frac{\partial T}{\partial p} - p \frac{\partial T}{\partial q} + N. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Kirchhoff, см. примечание на стр. 200; далее W. Thomson, Hydrokinetic Solutions and Observations, Phil. Mag. (5), XIII, 362 (1871) (перепечатано в Baltimore Lectures, Cambridge, 1904, стр. 584).

Если мы здесь положим

$$T = \Gamma + \Gamma_1$$

и выделим члены, относящиеся к  $\Gamma$ , то получим выражения для воздействия давления окружающей жидкости на движущееся тело; так, составляющая результирующей давлений жидкости, параллельная оси  $x$ , назовем ее через  $X$ , будет равна

$$X = - \frac{d}{dt} \frac{d\Gamma}{du} + r \frac{\partial \Gamma}{\partial v} - q \frac{\partial \Gamma}{\partial w}, \quad (2)$$

и момент  $L$  этих давлений относительно оси  $x$  будет равен <sup>1)</sup>

$$L = - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial p} + w \frac{\partial \Gamma}{\partial v} - v \frac{\partial \Gamma}{\partial w} + r \frac{\partial \Gamma}{\partial q} - q \frac{\partial \Gamma}{\partial r}. \quad (3)$$

Если, например, твердое тело вынуждено двигаться без вращения с постоянной скоростью  $(u, v, w)$ , то имеем

$$\left. \begin{aligned} X &= Y = Z = 0, \\ L &= w \frac{\partial \Gamma}{\partial v} - v \frac{\partial \Gamma}{\partial w}, \\ M &= u \frac{\partial \Gamma}{\partial w} - w \frac{\partial \Gamma}{\partial u}, \\ N &= v \frac{\partial \Gamma}{\partial u} - u \frac{\partial \Gamma}{\partial v}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где

$$2\Gamma = Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2A'vw + 2B'wu + 2C'uv.$$

Давления жидкости приводятся таким образом к паре сил, которая только тогда обращается в нуль, когда имеем

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial u} : u = \frac{\partial \Gamma}{\partial v} : v = \frac{\partial \Gamma}{\partial w} : w,$$

т. е. когда скорость  $(u, v, w)$  совпадет с направлением одной из главных осей эллипсоида,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A'yz + 2B'zx + 2C'xy = \text{const.} \quad (5)$$

Таким образом, как впервые заметил Кирхгоф, для каждого твердого тела существуют три перпендикулярные друг к другу направления установившегося поступательного перемещения; это значит, что если телу дано движение параллельно одному из этих направлений без вращения и затем тело предоставлено самому себе, то оно будет и в дальнейшем сохранять это движение. Само собой понятно, что

<sup>1)</sup> Если только вид этих выражений известен, то нетрудно проверить их прямым вычислением из уравнения давления (5) § 20. См. Lamb, On the Forces experienced by a Solid moving through a Liquid, Quart. Journ. Math., XIX, 66 (1883).

эти три направления определяются исключительно формой поверхности тела. Необходимо, однако, заметить, что импульс, необходимый для образования одного из этих установившихся поступательных движений, в общем случае не сводится к одной только силе. Если, например, для простоты, выбрать координатные оси параллельными трем названным направлениям, так что

$$A' = B' = C' = 0,$$

то мы будем иметь при движении, при котором только  $u$  отлично от нуля,

$$\begin{aligned} \xi &= Au, & \lambda &= Fu, \\ \eta &= 0, & \mu &= F'u, \\ \zeta &= 0; & \nu &= F''u; \end{aligned}$$

импульс состоит таким образом из винта с шагом  $\frac{F}{A}$ .

При указанном выборе координатных осей составляющие пары сил, эквивалентной давлению жидкости на тело, в случае произвольного равномерного поступательного перемещения  $(u, v, w)$  будут равны

$$\left. \begin{aligned} L &= (B - C)vw, \\ M &= (C - A)wu, \\ N &= (A - B)uv. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Если мы, следовательно, в эллипсоиде

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = \text{const.} \quad (7)$$

проведем радиус-вектор в направлении скорости  $(u, v, w)$  и опустим из центра перпендикуляр  $h$  на касательную плоскость в конце  $r$ , то плоскость пары сил есть та плоскость, которая определена через  $h$  и  $r$ ; величина момента пары сил пропорциональна  $\frac{\sin(hr)}{h}$  и сама она стремится вращать тело в направлении от  $h$  к  $r$ . Таким образом, если направление  $(u, v, w)$  только немного отличается от направления оси  $X$ , то пара сил стремится уменьшить отклонение, если  $A$  есть наибольшая из трех величин  $A, B, C$ , и, наоборот, увеличить его, если  $A$  есть наименьшая из этих величин, в то время как для случая, когда  $A$  лежит между  $B$  и  $C$ , действие пары зависит от относительного положения  $r$  по отношению к круговым сечениям указанного эллипсоида. Тогда получается, что из трех стационарных поступательных перемещений только одно единственное вполне устойчиво, именно то, которое соответствует наибольшему из трех коэффициентов  $A, B, C$ . Например, единственное устойчивое направление поступательного перемещения эллипсоида есть направление наименьшей оси; см. § 121 <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Физическая причина этой тенденции удлиненного тела становиться широкой стороной против относительного движения легко может быть усмотрена на фиг. 18, стр. 110. Некоторое число интересных практических примеров было дано Томсоном и Тэтом, § 325.

**§ 125.** Вышеописанные движения представляют собою хотя и самые простые, однако не единственные установившиеся движения, возможные для твердого тела, когда на него не действуют внешние силы. Мгновенное движение тела в некоторый произвольный момент, согласно хорошо известной теореме кинематики, представляет некоторое винтовое движение; для того, чтобы это движение было установившимся, необходимо, чтобы при движении не менялось положение импульса (которое неизменно в пространстве) относительно тела. Для этого необходимо, чтобы ось винтового движения совпадала с осью соответствующего импульсивного винта. Так как общие уравнения прямой линии содержат четыре независимых постоянных, то это условие приводится к четырем линейным соотношениям, которые должны удовлетворяться пятью отношениями  $u : v : w : p : q : r$ . При рассмотренных здесь обстоятельствах для всякого тела существует, таким образом, просто бесконечная система возможных установившихся движений.

Установившиеся движения, которые по важности наиболее близко подходят к трем установившимся поступательным перемещениям, суть те, для которых импульс приводится к *паре сил*. Уравнения (1) § 120 показывают, что  $\xi = \eta = \zeta = 0$  и  $\lambda, \mu, \nu$  могут быть постоянны, при условии, что

$$\frac{\lambda}{p} = \frac{\mu}{q} = \frac{\nu}{r} = k. \quad (1)$$

Если координатные оси имеют специальные направления, принятые в предыдущем параграфе, то мы можем из условий

$$\xi = \eta = \zeta = 0$$

сразу выразить  $u, v, w$  через  $p, q, r$ ; именно, имеем

$$u = -\frac{Fp + F'_q + F''_r}{A}, \quad v = -\frac{Gp + G'_q + G''_r}{B}, \quad w = -\frac{Hp + H'_q + H''_r}{C}. \quad (2)$$

Подставляя эти значения в выражения (5) § 122 для  $\lambda, \mu, \nu$ , мы получим

$$\lambda = \frac{\partial \Theta}{\partial p}, \quad \mu = \frac{\partial \Theta}{\partial q}, \quad \nu = \frac{\partial \Theta}{\partial r}, \quad (3)$$

где

$$2\Theta(p, q, r) = \mathfrak{P}p^2 + \mathfrak{Q}q^2 + \mathfrak{R}r^2 + 2\mathfrak{P}'qr + 2\mathfrak{Q}'rp + 2\mathfrak{R}'pq, \quad (4)$$

и коэффициенты этого выражения определяются формулами следующего вида:

$$\mathfrak{P} = P - \frac{F^2}{A} - \frac{G^2}{B} - \frac{H^2}{C}, \quad \mathfrak{P}' = P' - \frac{F'F''}{A} - \frac{G'G''}{B} - \frac{H'H''}{C}. \quad (5)$$

Эти формулы имеют место для всякого случая, в котором сила — составляющая импульса — обращается в нуль. Если использовать условие (1) стационарного движения, то отношения  $p : q : r$  будут определяться из трех уравнений

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P}p + \mathfrak{R}'q + \mathfrak{Q}'r &= kp, \\ \mathfrak{R}'p + \mathfrak{Q}q + \mathfrak{P}'r &= kq, \\ \mathfrak{Q}p + \mathfrak{P}'q + \mathfrak{R}r &= kr. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Вид этих уравнений показывает, что прямая, направление которой определяется отношениями  $p : q : r$ , должна быть параллельна одной из главных осей эллипсоида.

$$\Theta(x, y, z) = \text{const.} \quad (7)$$

Существует, следовательно, три таких стационарных винтовых движения, что соответствующий импульсивный винт приводится во всех случаях только к импульсивной паре. Оси этих трех винтов перпендикулярны друг другу. Однако вообще они не пересекают друг друга.

Можно теперь показать, что во всех случаях, когда импульс приводится только к импульсивной паре, движение может быть вполне определено. При этом удобнее, сохраняя те же направления осей, перенести начало координат. Перенесем начало координат в произвольную точку  $(x, y, z)$ , причем вместо  $u, v, w$  пишем соответственно

$$\Theta + ry - qz, \quad v + pz - rx, \quad w + qx - py.$$

Коэффициент при  $2uv$  в выражении для кинетической энергии (2) § 122 будет равен тогда  $-Bx + G'$ , коэффициент при  $2wq$  равен  $Cx + H'$  и т. д. Если принять

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \left( \frac{G'}{B} - \frac{H'}{C} \right), \\ y &= \frac{1}{2} \left( \frac{H}{C} - \frac{F'}{A} \right), \\ z &= \frac{1}{2} \left( \frac{F'}{A} - \frac{G}{B} \right), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

то коэффициенты в преобразованном выражении для  $2T$  будут удовлетворять соотношениям

$$\frac{G'}{B} = \frac{H'}{C}, \quad \frac{H}{C} = \frac{F'}{A}, \quad \frac{F'}{A} = \frac{G}{B}. \quad (9)$$

Обозначая каждую из этих пар одинаковых величин через  $\alpha, \beta, \gamma$ , можно переписать формулы (2) в следующем виде:

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial p}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial q}, \quad w = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad (10)$$

где

$$2\Psi(p, q, r) = \frac{F}{A} p^2 + \frac{G'}{B} q^2 + \frac{H'}{C} r^2 + 2\alpha qr + 2\beta rp + 2\gamma pq. \quad (11)$$

Движение тела во всякий момент времени можно вообразить состоящим из двух частей: поступательного движения, которое эквивалентно движению начала, и вращения около мгновенной оси, проходящей через начало. Так как  $\xi = \eta = \zeta = 0$ , то эта последняя часть определяется из уравнений

$$\frac{d\lambda}{dt} = r\mu - qv, \quad \frac{d\mu}{dt} = pv - r\lambda, \quad \frac{dv}{dt} = q\lambda - p\mu,$$

которые показывают, что вектор  $(\lambda, \mu, \nu)$  постоянен по величине и имеет неподвижное направление в пространстве. После подстановки  $\lambda, \mu, \nu$  из

уравнений (3) мы получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial p} &= r \frac{\partial \Theta}{\partial q} - q \frac{\partial \Theta}{\partial r}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial q} &= p \frac{\partial \Theta}{\partial r} - r \frac{\partial \Theta}{\partial p}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial r} &= q \frac{\partial \Theta}{\partial p} - p \frac{\partial \Theta}{\partial q}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Эти уравнения по виду тождественны с уравнениями движения твердого тела около неподвижной точки, так что можно применить хорошо известное решение этой задачи, данное Пуансо. Вращательное движение тела мы получим, если заставим эллипсоид (7), неподвижно связанный с телом, катиться по неподвижной в пространстве плоскости

$$\lambda x + \mu y + \nu z = \text{const.}$$

с угловой скоростью, пропорциональной длине  $OI$  радиуса-вектора, проведенного из начала в точку касания  $I$ . Представление действительного движения достигается тогда тем, что всей системе катящегося эллипсоида совместно с плоскостью дается поступательная скорость, компоненты которой даны формулами (10). Направление этой скорости совпадает с направлением нормали  $OM$  к касательной плоскости поверхности второго порядка

$$\Psi(x, y, z) = -\epsilon^2 \quad (13)$$

в точке  $P$ , в которой  $OI$  пересекает поверхность; величина же скорости равна отношению

$$\frac{\epsilon^2}{OP \cdot OM}, \text{ умноженному на угловую скорость тела.} \quad (14)$$

Если  $OI$  пересекает не поверхность (13), а сопряженную поверхность, которая получается, если изменить знак у  $\epsilon$ , то поступательная скорость имеет противоположное направление <sup>1)</sup>.

**§ 126.** Проблема интегрирования уравнений движений твердого тела в общем случае привлекала внимание различных математиков, однако, как и следовало ожидать при всей сложности этой проблемы, физическое значение результатов не легко усмотреть <sup>2)</sup>.

В дальнейшем мы сначала исследуем, какие упрощения получаются в формуле для кинетической энергии, когда рассматриваются специальные классы твердых тел; затем мы перейдем к исследованию одного или двух особенно интересных частных случаев, которые могут быть изучены без математических трудностей.

Общее выражение для кинетической энергии содержит, как мы видели, двадцать один коэффициент, но при специальном выборе ко-

<sup>1)</sup> Содержание этого параграфа заимствовано из следующей работы: Lamb, On the Free Motion of a Solid through an Infinite Mass of Liquid, Proceed. London Math. Society., VIII (1877). Независимо от этого Graig получил аналогичные результаты, The Motion of a Solid in a Fluid, American Journ. of Math., II (1879).

<sup>2)</sup> Литературные указания см. Wien, Lehrbuch der Hydrodynamik, Leipzig, 1900, стр. 164.

ординатных осей и их начала это число сводится к пятнадцати <sup>1)</sup> Напишем общее выражение кинетической энергии в наиболее симметрическом виде

$$\begin{aligned}
 2T = & Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2A'vw + 2B'wu + 2C'uv + \\
 & + Pp^2 + Qq^2 + Rr^2 + 2P'qr + 2Q'rp + 2R'pq + \\
 & + 2Lup + 2Mvq + 2Nwr + \\
 & + 2F(vr + wq) + 2G(wp + ur) + 2H(uq + vp) + \\
 & + 2F'(vr - wq) + 2G'(wp - ur) + 2H'(uq - vp). \quad (1)
 \end{aligned}$$

Мы уже видели, что можно так выбрать направление осей, что

$$A' = B' = C' = 0,$$

и можно легко показать, что перемещением начала можно сделать также

$$F' = G' = H' = 0.$$

Мы примем отныне, что эти упрощения уже произведены.

1. Если тело имеет плоскость симметрии, то из возможного вида линий тока относительного движения заключаем, что поступательное перемещение, перпендикулярное к этой плоскости, должно быть одним из стационарных поступательных перемещений § 124. Если эту плоскость взять в качестве плоскости  $xu$ , то, очевидно, что энергия движения должна оставаться без изменения, если изменить знак при  $w, p, q$ . Это же требует, чтобы  $P', Q', L, M, N, H$  обращались в нуль. Три винтовых движения § 125 представляют теперь чистые вращения, но их оси вообще не пересекают друг друга.

2. Если тело имеет вторую плоскость симметрии, перпендикулярную к первой, то эту вторую плоскость мы можем принять за плоскость  $xz$ . Мы найдем, что в этом случае  $R'$  и  $G$  также обращаются в нуль, так что

$$2T = Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + Pp^2 + Qq^2 + Rr^2 + 2F(vr + wq). \quad (2)$$

Ось  $x$  есть ось одного из установившихся вращений, а оси двух других стационарных вращений пересекают ее под прямым углом, но не обязательно в одной точке.

3. Если тело имеет третью плоскость симметрии, перпендикулярную к двум другим, например плоскость  $yz$ , то мы будем иметь

$$2T = Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + Pp^2 + Qq^2 + Rr^2. \quad (3)$$

4. Возвращаясь к п. 2, заметим, что в случае тела вращения с осью  $Ox$  выражение для  $2T$  должно остаться без изменения, если

<sup>1)</sup> Ср. Clebsch, Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit, Math. Ann., III, 238 (1870). Эта работа рассматривает „взаимную“ форму уравнений движения, которая получается, если подставить (6) § 122 в (1) § 120.



написать  $v, q, -w, -r$  вместо  $w, r, v, q$  соответственно, так как это равносильно повороту осей  $y$  и  $z$  на  $90^\circ$ ; поэтому имеем

$$B = C, \quad Q = R, \quad F = 0$$

и, следовательно,

$$2T = Au^2 + B(v^2 + w^2) + Pp^2 + Q(q^2 + r^2). \quad (4)^1$$

Аналогичное приведение получается также в некоторых других случаях, например, в случае прямой призмы, поперечное сечение которой есть некоторый правильный многоугольник <sup>2)</sup>. Это видно тотчас же, если принять во внимание, что когда ось  $x$  совпадает с осью призмы, то невозможно дать осям  $y$  и  $z$  какие-то направления, которые бы не были направлениями симметрии.

5. Если, наконец, форма тела находится в одинаковом отношении к каждой координатной плоскости (как, например, для шара или куба), то выражение (3) принимает следующий вид:

$$2T = A(u^2 + v^2 + w^2) + P(p^2 + q^2 + r^2). \quad (5)$$

Этот результат по тем же основаниям распространяется также и на другие случаи, например, на случай правильного многогранника. Тело такого рода с гидродинамической точки зрения практически „изотропно“, и его движение будет происходить в точности так же, как движение шара при тех же условиях.

6. Рассмотрим теперь другой класс случаев. Предположим, что тело имеет разновидность косо́й симметрии относительно определенной оси (например относительно оси  $x$ ), т. е. оно может совпасть само с собой, если его повернуть на  $180^\circ$  вокруг этой оси, но оно, однако, не обладает обязательно плоскостью симметрии <sup>3)</sup>. Выражение для  $2T$  должно оставаться неизменяемым, если изменить знак перед  $v, w, q, r$ ; поэтому должны обращаться в нуль коэффициенты  $Q', R', G, H$ . Мы имеем тогда

$$2T = Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + Pp^2 + Qq^2 + Rr^2 + 2P'qr + \\ + 2Lup + 2Mvq + 2Nwr + 2F(vr + wq). \quad (6)$$

Ось  $x$  есть одно из направлений установившегося поступательного движения; она есть также ось одного из трех винтовых движений § 125, причем шаг будет равен  $-\frac{L}{A}$ . Оси двух других винтовых движений пересекают эту ось под прямым углом, но вообще не в одной и той же точке.

<sup>1)</sup> Относительно решения уравнений движения в этом случае см. Greenhill, The Motion of a Solid in Infinite Liquid under no Forces, Americ. Journ. of Math., XX (1897).

<sup>2)</sup> См. Lamor, On Hydrokinetic Symmetry, Quart. Journ. Math., XX 261 (1885) (Papers, I, 77).

<sup>3)</sup> (Пример такого тела есть двухлопастный корабельный винт.

7. Если тело приходит в совпадение с самим собой при повороте на  $90^\circ$  вокруг вышерассмотренной оси, то выражение (6) должно остаться без изменения, если написать  $v, q, -w, -r$  вместо  $w, r, v, q$  соответственно. Это требует, чтобы

$$B = C, \quad Q = R, \quad P' = 0, \quad M = N, \quad F = 0.$$

Отсюда следует <sup>1)</sup>

$$2T = Au^2 + B(v^2 + w^2) + Pp^2 + Q(q^2 + r^2) + 2Lup + 2M(vq + wr). \quad (7)$$

Вид этого выражения остается без изменения, если повернуть ось  $y$  и ось  $z$  в их плоскости на некоторый произвольный угол. Говорят поэтому, что тело в этом случае обладает винтообразной симметрией относительно оси  $x$ .

8. Если тело обладает аналогичными свойствами косо́й симметрии еще относительно другой оси, которая пересекает первую под прямым углом, то, очевидно, будем иметь

$$2T = A(u^2 + v^2 + w^2) + P(p^2 + q^2 + r^2) + 2L(pu + qv + rw). \quad (8)$$

Всякое произвольное направление есть теперь направление установившегося поступательного перемещения и всякая произвольная прямая, проходящая через начало, есть ось некоторого винтового движения вида, рассмотренного в § 125, с шагом  $-\frac{L}{A}$ . Форма выражения (8) остается без изменения при всяком изменении направления координатных осей. Поэтому тело называют в этом случае „винтообразно изотропным“.

§ 127. Для случая тела вращения или другого какого-нибудь тела, для которого имеет место формула

$$2T = Au^2 + B(v^2 + w^2) + Pp^2 + Q^2(q^2 + r^2), \quad (1)$$

Кирхгофом <sup>2)</sup> было проведено интегрирование уравнений движения с помощью эллиптических функций.

Частный случай, когда тело, не вращаясь около своей оси, движется таким образом, что эта ось всегда остается в той же самой плоскости, можно исследовать очень просто <sup>3)</sup>, и при этом получают очень интересные результаты.

<sup>1)</sup> Этот результат допускает аналогичное обобщение как и в формуле (4); например, он имеет место для некоторого тела, имеющего форму корабельного винта с тремя симметрично расположенными лопастями. Интегрирование уравнений движения было разобрано Greenhill, *The Motion of a Solid in Infinite Liquid*, Amer. Journ. of Math., XXVIII, 71 (1906).

<sup>2)</sup> См. примечание на стр. 200.

<sup>3)</sup> См. Thomson и Tait, § 332; Greenhill, *On the Motion of a Cylinder through a Frictionless Liquid under no Forces*, *Mess. of Math.*, IX, 117 (1880).

Если указанную неподвижную плоскость принять за плоскость  $xu$ , то будем иметь

$$p = q = w = 0,$$

так что уравнения движения (1) § 124 приводятся к

$$A \frac{du}{dt} = rBv, \quad B \frac{dv}{dt} = -rAu, \quad Q \frac{dr}{dt} = (A - B) uv. \quad (2)$$

Обозначим через  $x, y$  координаты движущегося начала относительно неподвижных осей в плоскости ( $xu$ ), в которой движется ось твердого тела, причем ось  $x$  должна совпадать с осью результирующего импульса движения, который назовем через  $I$ ; через  $\theta$  назовем угол, который прямая  $Ox$  (она связана неизменным образом с телом) образует с осью  $x$ . Мы имеем тогда

$$Au = I \cos \theta, \quad Bv = -I \sin \theta, \quad r = \dot{\theta}.$$

Первые два уравнения (2) просто указывают на то, что направление импульса в пространстве неизменно; третье уравнение дает

$$Q\ddot{\theta} + \frac{A - B}{AB} I^2 \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (3)$$

Мы можем, не нарушая общности, принять  $A > B$ . Если положим  $2\theta = \vartheta$ , то уравнение (3) напишется

$$\ddot{\vartheta} + \frac{(A - B) I^2}{ABQ} \sin \vartheta = 0, \quad (4)$$

а это есть уравнение обыкновенного маятника. Поэтому вращательное движение тела совпадает с движением „квадрантного маятника“, т. е. тела, движение которого относительно квадранта следует тому же закону, как и движение обыкновенного маятника относительно полуокружности. Когда  $\theta$  будет определено из уравнения (3) и начальных условий, то  $x$  и  $y$  определятся из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= u \cos \theta - v \sin \theta = \frac{I}{A} \cos^2 \theta + \frac{I}{B} \sin^2 \theta, \\ \dot{y} &= u \sin \theta + v \cos \theta = \left( \frac{I}{A} - \frac{I}{B} \right) \sin \theta \cos \theta = \frac{Q}{I} \dot{\theta}; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

второе уравнение дает

$$y = \frac{Q}{I} \dot{\theta}. \quad (6)$$

Этот результат непосредственно очевиден, так как аддитивная постоянная равна нулю вследствие того, что ось  $x$  взята таким образом, что она не только параллельна направлению импульса  $I$ , но и совпадает с ним.

Предположим сначала, что тело совершает полные обороты; тогда первый интеграл уравнения (3) имеет вид

$$\dot{\theta}^2 = \omega^2 (1 - k^2 \sin^2 \theta), \quad (7)$$

где

$$k^2 = \frac{A - B}{ABQ} \frac{I^2}{\omega^2}. \quad (8)$$

Отсюда следует, если отсчитывать  $t$  от значения  $\theta = 0$ , что

$$\omega t = \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} = F(k, \theta), \quad (9)$$

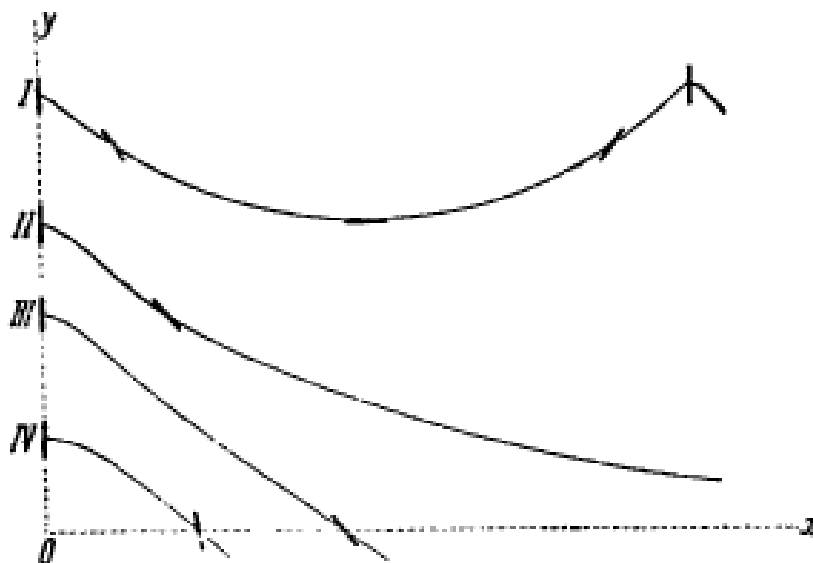
где для эллиптического интеграла принято обычное обозначение. Если исключить  $t$  из (5) и (7) и полученные таким образом уравнения интегрировать по  $\theta$ , то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} x &= \left( \frac{I}{A\omega} + \frac{Q\omega}{I} \right) F(k, \theta) - \frac{Q\omega}{I} E(k, \theta), \\ y &= \frac{Q}{I} \dot{\theta} = \frac{Q\omega}{I} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

причем нулевое значение  $x$  выбрано таким образом, что оно соответствует положению  $\theta = 0$ . Траектория может быть тогда в каждом отдельном случае вычерчена с помощью таблиц Лежандра. См. отмеченную цифрой I кривую на фиг. 31.

Если, напротив, тело не совершает полного оборота, но колеблется с угловой амплитудой  $\alpha$  около положения  $\theta = 0$ , то соответствующая форма первого интеграла от (3) напишется

$$\dot{\theta}^2 = \omega^2 \left( 1 - \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \alpha} \right), \quad (11)$$



Фиг. 31.

где

$$\sin^2 \alpha = \frac{ABQ}{A-B} \frac{\omega^2}{I^2}. \quad (12)$$

Если положить

$$\sin \theta = \sin \alpha \sin \psi,$$

то это дает

$$\dot{\psi}^2 =$$

$$= \frac{\omega^2}{\sin^2 \alpha} (1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \psi)$$

отсюда следует

$$\frac{\omega t}{\sin \alpha} = F(\sin \alpha, \psi). \quad (13)$$

Рассматривая  $\psi$  в качестве независимого переменного в уравнении (5) и интегрируя, получим

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{I}{B\omega} \sin \alpha F(\sin \alpha, \psi) - \frac{Q\omega}{I} \operatorname{cosec} \alpha E(\sin \alpha, \psi), \\ y &= \frac{Q\omega}{I} \cos \psi. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Траектория точки  $O$  есть теперь синусоидальная кривая, пересекающая ось импульсов в промежутки времени, равные половине периода вращательного движения. Такое движение представлено кривыми III и IV фиг. 31.

Существует еще критический случай между двумя только что рассмотренными случаями, который будем иметь тогда, когда тело совершает как раз половину оборота, при этом  $\theta$  имеет асимптотические предельные зна-

чения  $\pm \frac{1}{2} \pi$ . Этот случай можно получить, полагая  $k=1$  в (7) или  $\alpha = \frac{1}{2} \pi$  (11); мы найдем тогда

$$\dot{\theta} = \omega \cos \theta, \quad (15)$$

$$\omega t = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{1}{5} \pi + \frac{1}{2} \theta \right), \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{I}{B\omega} \ln \operatorname{tg} \left( \frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \theta \right) - \frac{Q\omega}{I} \sin \theta, \\ y &= \frac{Q\omega}{I} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

См. кривую *II* на фиг. 31<sup>1)</sup>.

Мы обращаем внимание на то, что вышешложенное исследование не ограничивается только случаем тела вращения; оно годится также и для тела с двумя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии, которое движется параллельно одной из этих плоскостей, предполагая при этом, что начало выбрано надлежащим образом. Если упомянутая плоскость есть плоскость *xy*, то при перенесении начала в точку

$$\left( \frac{F}{B}, 0, 0 \right)$$

последний член в формуле (2) § 126 обращается в нуль и уравнения движения принимают указанный вид (2). Если же, с другой стороны, движение будет параллельно плоскости *xz*, то мы должны перенести начало в точку  $\left( -\frac{F}{C}, 0, 0 \right)$ .

Результаты этого параграфа, а также относящаяся к этому фигура служат для иллюстрации утверждений, высказанных в конце § 124. Так, кривая *IV* с преувеличенной амплитудой иллюстрирует случай слегка возмущенного *устойчивого* движения, параллельного одной из осей установившегося поступательного движения. Случай возмущенного *неустойчивого* стационарного движения представился бы кривой, которая, смотря по роду возмущения, находится с одной или с другой стороны в соседстве с кривой *II*.

**§ 128.** Если требуется исследовать только устойчивость движения тела, параллельного оси симметрии, то, конечно, можно проще достигнуть цели, пользуясь приближенными методами. Если, например, тело с тремя плоскостями симметрии, рассмотренное в § 126 п. 3,

<sup>1)</sup> Чтобы сделать наиболее отчетливыми характерные признаки движения, кривые нарисованы для несколько крайнего случая  $A=5B$ . В случае бесконечно тонкого диска, лишенного собственной инерции, мы имели бы  $\frac{A}{B} = \infty$ ; кривые имели бы тогда *точки заострения*, в которых они пересекали бы ось *y*. Из уравнения (5) видно, что  $\dot{x}$  всегда имеет тот же самый знак, так что ни в каком случае не могут появиться *петли*.

В различных случаях, представленных на фиг. 31, тело всегда приведено в движение с одним и тем же импульсом, но с различными степенями вращения. Для кривой *I* максимальная угловая скорость в  $\sqrt{2}$  раз больше той, которая имеется в предельном случае *II*, в то время как кривые *III* и *IV* представляют колебания с амплитудами 45 и 18°.

слегка выведено из положения стационарного движения, параллельного оси  $x$ , то, полагая

$$u = u_0 + u'$$

и принимая  $u'$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$  все очень малыми, мы получим

$$\left. \begin{aligned} A \frac{du'}{dt} = 0, \quad B \frac{dv}{dt} = -Au_0 r, \quad C \frac{dw}{dt} = Au_0 q, \\ P \frac{dp}{dt} = 0, \quad Q \frac{dq}{dt} = (C-A)u_0 w, \quad R \frac{dr}{dt} = (A-B)u_0 v. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Отсюда получается

$$B \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{A(A-B)}{R} u_0^2 v = 0$$

и аналогичное уравнение для  $r$ , и

$$C \frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{A(A-C)}{Q} u_0^2 w = 0 \quad (2)$$

и аналогичное уравнение для  $q$ . Движение, таким образом, только тогда будет устойчиво, когда  $A$  есть наибольшая из трех величин  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

Известно из обыкновенной динамики, что устойчивость тела, которое движется параллельно оси симметрии, увеличивается, а неустойчивость соответственно уменьшается, если сообщить ему вращение около этой оси. Этот вопрос был исследован Гренхиллом <sup>1)</sup>.

Итак, если тело вращения получает малое возмущение своего состояния, при котором оно движется с постоянными  $u$  и  $p$ , в то время как остальные компоненты скорости равны нулю, то первое и четвертое из уравнений (1) § 124 дают, если пренебречь квадратами и произведениями малых величин,

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dp}{dt} = 0;$$

отсюда следует

$$u = u_0, \quad p = p_0, \quad (3)$$

где  $u_0$ ,  $p_0$  суть некоторые постоянные. Остальные уравнения получают после подстановки из (3) § 126 следующий вид:

$$B \left( \frac{dv}{dt} - p_0 w \right) = -Au_0 r, \quad B \left( \frac{dw}{dt} + p_0 v \right) = Au_0 q, \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} Q \frac{dq}{dt} + (P-Q) p_0 r = -(A-B) u_0 w, \\ Q \frac{dr}{dt} - (P-Q) p_0 q = (A-B) u_0 v. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Если мы предположим, что  $v$ ,  $w$ ,  $q$ ,  $r$  пропорциональны  $e^{i\sigma t}$ , и исключим их отношения, то найдем

$$Q\sigma^2 \pm (P-2Q) p_0 \sigma - \left\{ (P-Q) p_0^2 + \frac{A}{B} (A-B) u_0^2 \right\} = 0. \quad (6)$$

<sup>1)</sup> Greenhill, Fluid Motion between Confocal Elliptic Cylinders, etc. Quart. Journ. Math., XVI, 227 (1879).

Условие того, что корни этого уравнения будут действительны, состоит в том, что

$$P^2 p_0^2 + 4 \frac{A}{B} (A - B) Q u_0^2$$

должно быть положительно. Это получается всегда, когда  $A > B$ , а в случае  $A < B$  может быть достигнуто, если дать  $p_0$  достаточно большое значение.

Этот пример объясняет устойчивость полета, которую получает продолговатый снаряд благодаря винтовой нарезке.

**§ 129.** В исследованиях § 125 применялось выражение „установившееся“, чтобы характеризовать движения, при которых кинематический винт сохраняет постоянное положение относительно движущегося тела. Однако в случае тела вращения мы будем применять это выражение в несколько расширенном смысле, именно мы распространим его на движения, при которых векторы поступательной и вращательной скорости имеют постоянную величину и составляют как с осью симметрии, так и между собой постоянные углы, хотя их положение относительно точек твердого тела, не лежащих на оси, может непрерывно меняться.

Условия, которые при этом должны быть выполнены, можно легко получить из уравнений движения § 124; эти последние после подстановки из (4) § 126 будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} A \frac{du}{dt} &= B(rv - qw), & P \frac{dp}{dt} &= 0, \\ B \frac{dv}{dt} &= Bpw - Aru, & Q \frac{dq}{dt} &= -(A - B)uw - (P - Q)pr, \\ B \frac{dw}{dt} &= Aqu - Bpv, & Q \frac{dr}{dt} &= (A - B)uv + (P - Q)pq. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Получается, что  $p$  во всех случаях постоянно и что  $q^2 + r^2$  также постоянно, если, например,

$$\frac{v}{q} = \frac{w}{r} = k. \quad (2)$$

Это дает

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad v^2 + w^2 = \text{const.}$$

Отсюда следует, что  $k$  также постоянно; необходимо только удовлетворить еще уравнениям

$$\begin{aligned} kB \frac{dq}{dt} &= (kBp - Au)r, \\ Q \frac{dq}{dt} &= - \{ (A - B)ku + (P - Q)p \} r. \end{aligned}$$

Эти уравнения будут совместны друг с другом, если

$$kB \{ (A - B)ku + (P - Q)p \} + Q(kBp - Au) = 0,$$

а это дает

$$\frac{u}{p} = \frac{kBP}{AQ - k^2B(A - B)}. \quad (3)$$

Изменяя  $k$ , мы получаем таким образом бесконечное множество случаев возможных стационарных движений указанного выше рода. В каждом из этих

случаев мгновенная ось вращения и направление поступательного движения начала лежат в одной плоскости с осью тела. Легко видеть, что начало описывает винтовую линию около оси импульса. Этими результатами мы обязаны Кирхгофу.

**§ 130.** Единственный случай винтообразного тела, в котором могут быть получены простые результаты, есть случай „изотропного винтового тела“, о котором шла речь в пункте 8 § 126.

Пусть  $O$  есть центр тела; за координатные оси в произвольный момент мы возьмем следующие три прямые: прямую  $Ox$ , параллельную оси импульса, проведенную от оси импульса наружу, прямую  $Oy$  и прямую  $Oz$ , перпендикулярную к плоскости этих двух прямых. Если через  $I$  и  $K$  обозначить силу и момент пары, составляющие импульс, то получим

$$\left. \begin{aligned} Au + Lp = \xi = I, \quad Av + Lq = \eta = 0, \quad Aw + Lv = \zeta = 0, \\ Pp + Lu = \lambda = K, \quad Pq + Lv = \mu = 0, \quad Pr + Lw = \nu = I\tilde{\omega}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $\tilde{\omega}$  обозначает расстояние точки  $O$  от оси импульса.

Так как

$$AP - L^2 \neq 0,$$

то второе и пятое из этих уравнений показывают, что

$$v = 0, \quad q = 0.$$

Поэтому  $\tilde{\omega}$  будет постоянно во время всего движения и остальные величины также постоянны; в частности, будем иметь

$$u = \frac{PI - LK}{AP - L^2}, \quad w = -\frac{LI\tilde{\omega}}{AP - L^2}. \quad (2)$$

Начало  $O$  описывает, таким образом, винтовую линию около оси импульса с шагом, равным

$$\frac{K}{I} - \frac{P}{L}.$$

Этот пример принадлежит Кельвину <sup>1)</sup>.

**§ 131.** Прежде чем оставить эту часть наших исследований, заметим еще, что только что рассмотренная теория с очень малыми изменениями годится также и для ациклического движения жидкости, заполняющей полость в движущемся теле. Если взять начало в центре

<sup>1)</sup> См. примечание на стр. 210. Там указано, что может быть построено твердое тело рассматриваемого вида при помощи прикрепления к шару лопастей в средних точках двенадцати четвертей сферических дуг, которые получаются при делении сферы на октанты. Лопасти должны быть перпендикулярны к поверхности, и их плоскости должны образовывать угол в  $45^\circ$  с соответствующими дугами. Лармор (см. примечание на стр. 217) дает другой пример: „... Если взять правильный тетраэдр (или другое правильное тело) и отрезать углы косыми поверхностями, которые таковы, что если рассматривать их из какого-либо угла, они кажутся все наклоненными в том же самом направлении, то мы получим пример изотропного геликоида“.

Относительно дальнейших исследований в связи с данным вопросом см. работу Miss P a w c e t t, On the Motion of Solids in a Liquid, Quart. Journ. Math., XXVI (1893).



массы жидкости, то формула для кинетической энергии движения жидкости будет иметь следующий вид:

$$2T = m(u^2 + v^2 + w^2) + Pp^2 + Qq^2 + Rr^2 + 2P'qr + 2Q'rp + 2R'pq. \quad (1)$$

В самом деле, кинетическая энергия будет равна кинетической энергии всей жидкой массы ( $m$ ), предполагая ее сосредоточенной в центре тяжести и движущейся вместе с этой точкой, плюс кинетическая энергия движения относительно центра тяжести. Методом § 118, 121 легко показать, что эта вторая часть энергии есть однородная квадратичная функция от  $p$ ,  $q$ ,  $r$ .

Следовательно, жидкость можно заменить твердым телом той же массы и с тем же центром тяжести, при условии, что его главные оси инерции и моменты инерции подобраны подходящим образом.

В случае эллипсоидальной полости значения коэффициентов в формуле (1) могут быть вычислены по § 110. Мы найдем этим путем, если оси координат совпадают с главными осями эллипсоида, что

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{5} m \frac{(b^2 - c^2)^2}{b^2 + c^2}, \\ Q &= \frac{1}{5} m \frac{(c^2 - a^2)^2}{c^2 + a^2}, \\ R &= \frac{1}{5} m \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2}, \\ P' &= Q' = R' = 0. \end{aligned}$$

### Случай тела с отверстием

§ 132. Когда движущееся тело имеет одно или несколько отверстий или пробоин, так что пространство, его окружающее, будет многосвязно, то жидкость может иметь самостоятельное движение, независимое от движения твердого тела, именно циклическое движение, при котором циркуляция по различным неприводимым замкнутым кривым, которые могут быть проведены через отверстия, могут иметь произвольно заданные постоянные значения. Мы покажем кратко, как вышеизложенные методы могут быть приложены к этому случаю.

Пусть  $\kappa$ ,  $\kappa'$ ,  $\kappa''$ , ... суть циркуляции по различным контурам и  $\delta\sigma$ ,  $\delta\sigma'$ ,  $\delta\sigma''$ , ... —элементы соответствующих перегородок, проведенных как указано в § 48. Далее,  $l$ ,  $m$ ,  $n$  суть направляющие косинусы нормалей, направленных в сторону жидкости, в некоторой точке поверхности твердого тела или нормалей в некоторой точке положительной стороны перегородки.

Тогда потенциал скоростей имеет вид

$$\varphi + \varphi_0,$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3 + p\chi_1 + q\chi_2 + r\chi_3, \\ \varphi_0 &= \kappa\omega + \kappa'\omega' + \kappa''\omega'' + \dots \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Функции  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3$  определяются теми же условиями, как в § 118. Для определения функции  $\omega$  мы имеем следующие условия: 1) она должна для всех точек жидкости удовлетворять уравнению  $\Delta\omega = 0$ ; 2) ее производные должны в бесконечности обращаться в нуль; 3) на поверхности тела должно быть  $\frac{\partial\omega}{\partial n} = 0$ ; 4)  $\omega$  должна быть циклическая функция, которая уменьшается на единицу, когда соответствующая точка описывает всю замкнутую кривую, пересекающую первую перегородку в положительном направлении один и только один раз, напротив,  $\omega$  возвращается к первоначальному значению, когда соответствующая точка описывает замкнутую кривую, которая не встречает этой перегородки. Из § 52 следует, что эти условия определяют  $\omega$  с точностью до аддитивной постоянной. Подобным же образом определяются и остальные функции  $\omega', \omega'', \dots$

Согласно формуле (5) § 55 удвоенная кинетическая энергия жидкости равна

$$\begin{aligned} & -e \iint (\varphi + \varphi_0) \frac{\partial}{\partial n} (\varphi + \varphi_0) dS - \\ & -e\kappa \iint \frac{\partial}{\partial n} (\varphi + \varphi_0) d\sigma - e\kappa' \iint \frac{\partial}{\partial n} (\varphi + \varphi_0) d\sigma' - \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Так как циклические постоянные от  $\varphi$  равны нулю и так как  $\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}$  на поверхности тела обращается в нуль, то согласно (4) § 54 имеем

$$\iint \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS + \kappa \iint \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\sigma + \kappa' \iint \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\sigma' + \dots = \iint \varphi \frac{\partial\varphi_0}{\partial n} dS = 0.$$

Поэтому формула (2) сводится к

$$-e \iint \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS - e\kappa \iint \frac{\partial\varphi_0}{\partial n} d\sigma - e\kappa' \iint \frac{\partial\varphi_0}{\partial n} d\sigma' - \dots \quad (3)$$

Подставляя значения  $\varphi, \varphi_0$  из уравнений (1), найдем, что энергия жидкости будет равна

$$T + K, \quad (4)$$

где  $T$  есть однородная квадратическая функция от  $u, v, w, p, q, r$  определенного в (2), (3) § 121 вида, и

$$2K = (\kappa, \kappa)\kappa^2 + (\kappa', \kappa')\kappa'^2 + \dots + 2(\kappa, \kappa')\kappa\kappa' + \dots \quad (5)$$

Здесь, например, имеем

$$\left. \begin{aligned} (\kappa, \kappa) &= -e \iint \frac{\partial\omega}{\partial n} d\sigma, \\ (\kappa, \kappa') &= -\frac{1}{2}e \iint \frac{\partial\omega'}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{2}e \iint \frac{\partial\omega}{\partial n} d\sigma' = \\ &= -e \iint \frac{\partial\omega'}{\partial n} d\sigma = -e \iint \frac{\partial\omega}{\partial n} d\sigma'. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Тождественность различных форм  $(\kappa, \kappa')$  следует из (4) § 54.

Таким образом полная энергия жидкости и твердого тела равняется

$$T = \mathfrak{E} + K, \quad (7)$$

где  $\mathfrak{E}$  есть однородная квадратичная функция от  $u, v, w, p, q, r$  того же вида, как в (8) § 121, а  $K$  определяется вышенаписанными уравнениями (5) и (6).

§ 133. „Импульс“ движения состоит теперь частью из импульсивных действующих на тело сил и частью из импульсивных давлений  $\varrho\kappa, \varrho\kappa', \varrho\kappa'', \dots$ , которые действуют равномерно (как разъяснено в § 54) на различные мембраны, предполагаемые на мгновение помещенными на месте перегородок. Мы обозначим через  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1$  компоненты внешнего, действующего на тело импульса. Выражая то, что компонента по оси  $x$  количества движения твердого тела равна соответствующей компоненте полного импульса, действующего на тело, мы получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial u} &= \xi_1 - \varrho \iint (\varphi + \varphi_0) l dS = \\ &= \xi_1 + \varrho \iint (u\varphi_1 + \dots + p\chi_1 + \dots + \kappa\omega + \dots) \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dS = \\ &= \xi_1 - \frac{\partial T}{\partial u} + \varrho\kappa \iint \omega \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dS + \varrho\kappa' \iint \omega' \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dS + \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

причем, как и выше,  $T_1$  обозначает кинетическую энергию твердого тела, а  $T$  ту часть энергии жидкости, которая независима от циклического движения. Далее мы находим, если будем рассматривать момент количества движения твердого тела около оси  $x$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial p} &= \lambda_1 - \varrho \iint (\varphi + \varphi_0) (ny - mz) dS = \\ &= \lambda_1 + \varrho \iint (u\varphi_1 + \dots + p\chi_1 + \dots + \kappa\omega + \dots) \frac{\partial \chi_1}{\partial n} dS = \\ &= \lambda_1 - \frac{\partial T}{\partial p} + \varrho\kappa \iint \omega \frac{\partial \chi_1}{\partial n} dS + \varrho\kappa' \iint \omega' \frac{\partial \chi_1}{\partial n} dS + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Отсюда, так как

$$\mathfrak{E} = T + T_1,$$

будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial u} - \varrho\kappa \iint \omega \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dS - \varrho\kappa' \iint \omega' \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dS - \dots, \\ \lambda_1 &= \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial p} - \varrho\kappa \iint \omega \frac{\partial \chi_1}{\partial n} dS - \varrho\kappa' \iint \omega' \frac{\partial \chi_1}{\partial n} dS - \dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Согласно ранее разобранному обобщению Кельвина теоремы Грина уравнения (3) могут быть написаны также следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial u} + \rho \kappa \iint \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} d\sigma + \rho \kappa' \iint \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} d\sigma' + \dots, \\ \lambda_1 &= \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial p} + \rho \kappa \iint \frac{\partial \chi_1}{\partial n} d\sigma + \rho \kappa' \iint \frac{\partial \chi_1}{\partial n} d\sigma' + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Если прибавить к этому члены, обусловленные импульсивными давлениями, действующими на перегородки, то мы получим в конечном счете для компонент полного импульса движения <sup>1)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial u} + \xi_0, & \lambda &= \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial p} + \lambda_0, \\ \eta &= \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial v} + \eta_0, & \mu &= \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial q} + \mu_0, \\ \zeta &= \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial w} + \zeta_0, & \nu &= \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial r} + \nu_0, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где, например,

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= \rho \kappa \iint \left( l + \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right) d\sigma + \rho \kappa' \iint \left( l + \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right) d\sigma' + \dots, \\ \lambda_0 &= \rho \kappa \iint \left( ny - mz + \frac{\partial \chi_1}{\partial n} \right) d\sigma + \\ &\quad + \rho \kappa' \iint \left( ny - mz + \frac{\partial \chi_1}{\partial n} \right) d\sigma' + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Ясно, что постоянные  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \lambda_0, \mu_0, \nu_0$  суть компоненты импульса того циклического движения жидкости, которое осталось бы, если тело привести в равновесие силами, действующими только на него.

Согласно рассуждениям § 119, полный импульс будет подчиняться тому же самому закону, как и количество движения конечной динамической системы. Таким образом, если значения (5) вставить в уравнения (1) § 120 <sup>2)</sup>, то мы получим уравнения движения твердого тела.

**§ 134.** В качестве простого примера возьмем случай кольцеобразного тела вращения.

Если ось  $x$  совпадает с осью кольца, то мы можем в силу того же рассуждения, как в § 126 п. 4, написать

$$2T = Au^2 + B(v^2 + w^2) + Pr^2 + Q(q^2 + r^2) + (x, x) x^2, \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Ср. W. Thomson, см. сноску на стр. 210.

<sup>2)</sup> Этот результат может быть получен из формулы давления § 20 прямым вычислением; см. Bryan, Hydrodynamical Proof of the Equations of Motion of a Perforated Solid. . . , Phil. Mag., Mat., 1893.

предполагая, что положение начала координат и направление осей выбраны соответственным образом. Отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} \xi &= Au + \xi_0, & \lambda &= Pr, \\ \eta &= Bv, & \mu &= Qq, \\ \zeta &= Bw, & \nu &= Qr. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Если эти значения подставить в уравнения § 120, то мы найдем

$$\frac{dp}{dt} = 0, \text{ или } p = \text{const.},$$

что впрочем и непосредственно очевидно. Предположим, что движение кольца мало отличается от состояния, при котором  $v, w, p, q, r$  равны нулю, т. е. состояния установившегося движения, параллельного оси симметрии. В начале возмущенного движения  $v, w, p, q, r$  будут малыми величинами, произведениями которых можно пренебречь. Первое из указанных уравнений даст тогда

$$\frac{du}{dt} = 0, \text{ или } u = \text{const.},$$

а остальные уравнения получают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} B \frac{dv}{dt} &= -(Au + \xi_0) r, & Q \frac{dq}{dt} &= -\{(A - B)u + \xi_0\} w, \\ B \frac{dw}{dt} &= (Au + \xi_0) q, & Q \frac{dr}{dt} &= \{(A - B)u + \xi_0\} v. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Исключая  $r$ , найдем

$$BQ \frac{d^2v}{dt^2} = -(Au + \xi_0) \{(A - B)u + \xi_0\} v. \quad (4)$$

Точно такому же уравнению удовлетворяет и  $w$ . Таким образом для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы коэффициент при  $v$  в правой части уравнения (4) был бы отрицательным; когда это условие удовлетворено, то период малого колебания <sup>1)</sup> будет равен

$$2\pi \left[ \frac{BQ}{(Au + \xi_0) \{(A - B)u + \xi_0\}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

Мы укажем еще другой случай установившегося движения кольца, именно тот, при котором импульс приводится к паре сил относительно диаметра. Легко видеть, что уравнения движения удовлетворяются с помощью

$$\xi = \eta = \zeta = \lambda = \mu = 0, \text{ и } \nu = \text{const.};$$

в этом случае имеем

$$u = -\frac{\xi_0}{A}, \quad r = \text{const.}$$

Кольцо вращается тогда около оси, которая лежит в плоскости уз, параллельна оси  $z$  и находится от нее на расстоянии  $\frac{u}{r}$  <sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> W. Thomson, см. сноску на стр. 210.

<sup>2)</sup> Что касается дальнейших исследований по этому вопросу, мы укажем на работы Basset, On the Motion of a Ring in an Infinite Liquid, Proc. Camb. Phil. Soc., VI (1887) и Miss Fawcett, см. сноску на стр. 224.

### Силы, действующие на цилиндр в плоском потоке.

§ 134а. Плоская задача о движении цилиндрического тела, в частности, и тогда, когда имеет место циркуляция вокруг последнего, может быть сравнительно просто исследована непосредственным подсчетом давлений на поверхность<sup>1)</sup>. Мы допускаем при этом по обыкновению, что жидкость на бесконечности находится в покое.

Выбирая оси, связанные с поперечным сечением, обозначим через  $(u, v)$  скорость начала, через  $\Gamma$  — угловую скорость. Символы  $u, v$  будут теперь иметь свой первоначальный смысл как компоненты скорости жидкости. В таком случае уравнение для давления представится в виде

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - (u - \Gamma y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - (v + \Gamma x) \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{2} q^2 + \text{const.}, \quad (1)$$

где

$$q^2 = u^2 + v^2.$$

Сила  $(X, Y)$  и пара  $(N)$ , к которым приводятся давления на поверхности, будут

$$X = - \int p l ds, \quad Y = - \int p m ds, \quad N = - \int p (m x - l y) ds, \quad (2)$$

где  $l, m$  суть направляющие косинусы нормали, проведенной от элемента  $ds$  контура наружу, и интеграция совершается по всему периметру. В силу соотношений

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int q^2 l ds &= - \iint \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \int (lu + mv) u ds, \\ \frac{1}{2} \int q^2 m ds &= - \iint \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \int (lu + mv) v ds. \end{aligned} \quad (3)$$

При этом мы здесь опустили различные криволинейные интегралы, взятые по бесконечно большому охватывающему контуру, так как на большом расстоянии  $r$  скорость будет по крайней мере порядка  $\frac{1}{r}$ , тогда как  $ds$  — порядка  $r \delta \theta$ . На поверхности же самого цилиндра имеем

$$lu + mv = l(u - \Gamma y) + m(v + \Gamma x). \quad (4)$$

Подставляя из (1) в (2), мы найдем

$$\begin{aligned} \frac{X}{\rho} &= - \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} l ds + \int (mu - lv)(v + \Gamma x) ds = \\ &= - \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} l ds + \int (v + \Gamma x) \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds \end{aligned} \quad (5)$$

<sup>1)</sup> Aeronautical Research Committee, R. and M., 1218 (1929). Относительно другого способа изучения см. Glauert, R. and M., 1215 (1929).

и аналогично

$$\frac{\mathbf{Y}}{e} = - \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} m ds - \int (\mathbf{u} - r\mathbf{y}) \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds. \quad (6)$$

Кроме того, будем иметь

$$\frac{1}{2} \int q^2 (mx - ly) ds = \int (lu + mv) (xv - yu) ds. \quad (7)$$

Здесь криволинейный интеграл по бесконечно удаленной границе также опущен, так как мы можем допустить, что на этой границе  $\frac{l}{x} = \frac{m}{y}$ , а  $lu + mv$  имеет порядок  $\frac{1}{r^2}$ . Формула (2) для  $\mathbf{N}$  тогда представится в виде

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{N}}{e} &= - \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} (mx - ly) ds + \int (\mathbf{u}x + \mathbf{v}y) (lv - mu) ds = \\ &= - \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} (mx - ly) ds - \int (\mathbf{u}x + \mathbf{v}y) \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds. \end{aligned} \quad (8)$$

По аналогии с § 118, 132 мы теперь положим

$$\varphi = \mathbf{u}\varphi_1 + \mathbf{v}\varphi_2 + r\chi + \varphi_0, \quad (9)$$

где функция  $\varphi_0$  представляет циркуляционное движение, которое продолжало бы существовать и тогда, когда цилиндр был бы остановлен. Она, следовательно, есть циклическая функция с циклической постоянной, которую назовем через  $k$ . Сравнивая с выражением (4), на поверхности цилиндра будем иметь

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -l, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = -m, \quad \frac{\partial \chi}{\partial n} = -(mx - ly), \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} = 0. \quad (10)$$

При отсутствии циркуляции энергия жидкости была бы равна

$$\mathbf{T} = - \frac{1}{2} e \int (\varphi - \varphi_0) \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds. \quad (11)$$

Подставляя из (9) и (10) в (11), получим

$$2\mathbf{T} = \mathbf{A}u^2 + 2\mathbf{H}uv + \mathbf{B}v^2 + \mathbf{R}r^2 + 2(\mathbf{L}u + \mathbf{M}v)r, \quad (12)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} &= e \int l\varphi_1 ds, & \mathbf{H} &= e \int l\varphi_2 ds = e \int m\varphi_1 ds, \\ \mathbf{B} &= e \int m\varphi_2 ds, & \mathbf{R} &= e \int (mx - ly)\chi ds, \\ \mathbf{L} &= e \int l\chi ds = e \int (mx - ly)\varphi_1 ds, \\ \mathbf{M} &= e \int m\chi ds = e \int (mx - ly)\varphi_2 ds. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Первые члены в правых частях выражений (5), (6) и (8) теперь принимают вид

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d}{dt} (\mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{H}\mathbf{v} + \mathbf{L}\mathbf{r}) &= -\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{u}}, \\ -\frac{d}{dt} (\mathbf{H}\mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{v} + \mathbf{M}\mathbf{r}) &= -\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{v}}, \\ -\frac{d}{dt} (\mathbf{R}\mathbf{r} + \mathbf{L}\mathbf{u} + \mathbf{M}\mathbf{v}) &= -\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{r}}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Кроме того, мы будем иметь

$$\begin{aligned} e \int x \frac{\partial (\varphi - \varphi_0)}{\partial s} ds &= e \int m (\varphi - \varphi_0) ds = \mathbf{H}\mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{v} + \mathbf{M}\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{v}}, \\ e \int y \frac{\partial (\varphi - \varphi_0)}{\partial s} ds &= -e \int l (\varphi - \varphi_0) ds = \\ &= -(\mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{H}\mathbf{v} + \mathbf{L}\mathbf{r}) = -\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{u}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Если мы положим

$$\int x \frac{\partial \varphi_0}{\partial s} ds = \alpha, \quad \int y \frac{\partial \varphi_0}{\partial s} ds = \beta, \quad (16)$$

то выражения для сил примут тогда вид

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{X} &= -\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{u}} + \mathbf{r} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{v}} - k\varrho \mathbf{v} + e\alpha \mathbf{r}, \\ \mathbf{Y} &= -\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{v}} - \mathbf{r} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{u}} + k\varrho \mathbf{u} + e\beta \mathbf{r}, \\ \mathbf{N} &= -\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{u}} - \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{v}} - e(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Поворачивая оси координат на соответствующий угол, коэффициент  $\mathbf{H}$  можно обратить в нуль. А соответствующим выбором начала координат мы можем или обратить в нуль коэффициенты  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{M}$ , или сделать  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ . Эти два предположения вообще несовместимы, и ни то, ни другое выбранное начало не может предполагаться совпадающим со средним центром площади сечения.

Наиболее интересен тот случай, однако, когда сечение будет симметричным относительно двух перпендикулярных осей. Если их выбрать за оси координат, то мы будем иметь

$$\mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{L} = 0, \quad \mathbf{M} = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad (18)$$

и формулы (17) приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{X} &= -\mathbf{A} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{B}\mathbf{r}\mathbf{v} - k\varrho \mathbf{v}, \\ \mathbf{Y} &= -\mathbf{B} \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{A}\mathbf{r}\mathbf{u} + k\varrho \mathbf{u}, \\ \mathbf{N} &= -\mathbf{R} \frac{d\mathbf{r}}{dt} - (\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{u}\mathbf{v}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$



Чтобы составить уравнения движения, в этом случае мы должны только видоизменить коэффициенты инерции, так же как в § 122. Если распределение масс будет также симметричным, то мы можем положить

$$A = A + M, \quad B = B + M, \quad R = R + L, \quad (20)$$

где  $M$  представляет массу самого цилиндра, а  $L$  — его момент инерции. Тогда получим

$$\left. \begin{aligned} A \frac{du}{dt} - Brv + k_{\rho}v &= X, \\ B \frac{dv}{dt} + Aru - k_{\rho}u &= Y, \\ L \frac{dr}{dt} - (A - B)uv &= N, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где  $X$ ,  $Y$ ,  $N$  представляют действие внешних сил. Когда последние отсутствуют и циркуляция равна нулю, решение уравнений проводится, как и в § 127.

В случае круглого сечения нет необходимости предполагать оси координат вращающимися. Полагая тогда  $A = B$ ,  $r = 0$ , мы получим, как и в § 69,

$$A \frac{du}{dt} + k_{\rho}u = X, \quad A \frac{dv}{dt} - k_{\rho}u = Y. \quad (22)$$

Если сечение будет симметричным только относительно одной оси, например оси  $x$ , то мы будем иметь  $H = 0$ ,  $L = 0$ ,  $B = 0$ . Смещая начало вдоль оси симметрии, мы можем сделать  $M = 0$ , но одновременно  $\alpha$  вообще не может обратиться в нуль. В случае отсутствия циркуляции новое начало представляет „центр реакции“, введенный Томсоном и Тэтом <sup>1)</sup>.

### Уравнения движения в обобщенных координатах

**§ 135.** Когда в жидкости движутся несколько тел или когда жидкость ограничена целиком или частично неподвижными стенками, то мы можем применить метод *обобщенных координат* Лагранжа. Этот метод к гидродинамическим задачам был впервые применен Томсоном и Тэтом <sup>2)</sup>.

Системы, которые обыкновенно рассматриваются в аналитической динамике, имеют конечное число степеней свободы, т. е. положение каждой частицы вполне определено, если известны значения конечного числа независимых переменных или обобщенных координат  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Кинетическая энергия  $T$  может быть представлена как квадратичная функция обобщенных компонент скорости  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ .

Согласно методу Гамильтона действительное движение системы между моментами  $t_0$  и  $t_1$  сравнивается с виртуальным движением. Если

<sup>1)</sup> Natural Philosophy, § 321.

<sup>2)</sup> Thomson и Tait, Natural Philosophy (1-е изд.) Oxford (1867), § 331-

$\xi, \eta, \zeta$  означают декартовы координаты произвольной частицы  $m$  и  $X, Y, Z$  — компоненты полной силы, действующей на нее, то оказывается, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \{ \Delta T + \sum (X \Delta \xi + Y \Delta \eta + Z \Delta \zeta) \} dt = 0, \quad (1)$$

при условии, что для сравниваемого движения имеем

$$\left[ \sum m (\dot{\xi} \Delta \xi + \dot{\eta} \Delta \eta + \dot{\zeta} \Delta \zeta) \right]_{t_0}^{t_1} = 0. \quad (2)$$

Знак суммы  $\sum$  распространяется на все частицы системы. Виртуальное движение обыкновенно выбирается таким образом, что начальное и конечное положения каждой частицы те же самые, что и при действительном движении. Величины  $\Delta \xi, \Delta \eta, \Delta \zeta$  обращаются тогда в нуль при обоих пределах интегрирования, и условие (2) будет соблюдено.

Для консервативной системы, свободной от внешних сил, уравнение (1) принимает вид

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt = 0. \quad (3)$$

Словами это выражается так: если сравнивать действительное движение системы между двумя произвольными ее положениями со всеми возможными движениями между теми же положениями ее, причем возможные движения (при приложении соответствующих сил) совершаются *в течение того же промежутка времени*, то получается, что интеграл по времени от *кинетического потенциала*<sup>1)</sup>, именно  $V - T$ , будет иметь стационарное значение.

В обобщенных координатах уравнение (1) принимает вид

$$\int_{t_0}^{t_1} (\Delta T + Q_1 \Delta q_1 + Q_2 \Delta q_2 + \dots + Q_n \Delta q_n) dt = 0, \quad (4)$$

отсюда можно получить известным способом уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r. \quad (5)$$

**§ 136.** Перейдем теперь к гидродинамической задаче. Пусть  $q_1, q_2, \dots, q_n$  обозначают систему обобщенных координат, которая служит для определения положений твердых тел. Мы предположим пока, что движение жидкости зависит только от движения твердых тел и, следовательно, свободно от вихрей и ациклично.

<sup>1)</sup> Это название введено Гельмгольцем, *Die physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung*, Crelle, 137, 213 (1886) (Wiss. Abh., III, 203).

В этом случае потенциал скоростей в произвольный момент будет иметь вид

$$\varphi = \dot{q}_1 \varphi_1 + \dot{q}_2 \varphi_2 + \dots + \dot{q}_n \varphi_n, \quad (1)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  определяются аналогично тому, как это сделано в § 118. Формула для кинетической энергии жидкости представится тогда

$$2T = -e \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = A_{11} \dot{q}_1^2 + A_{22} \dot{q}_2^2 + \dots + 2A_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dots, \quad (2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_{rr} &= -e \iint \varphi_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial n} dS, \\ A_{rs} &= -e \iint \varphi_r \frac{\partial \varphi_s}{\partial n} dS = -e \iint \varphi_s \frac{\partial \varphi_r}{\partial n} dS, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

и интегрирования распространяются по мгновенному положению ограничивающих жидкость поверхностей. Тождественность обоих видов  $A_{rs}$  следует из теоремы Грина. Коэффициенты  $A_{rr}, A_{rs}$  будут вообще функциями координат  $q_1, q_2, \dots, q_n$ .

Если мы к (2) прибавим удвоенную кинетическую энергию  $T_1$  самих тел, то получим выражение того же вида, но с измененными коэффициентами

$$2T = A_{11} \dot{q}_1^2 + A_{22} \dot{q}_2^2 + \dots + 2A_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dots \quad (4)$$

Остается только еще показать, что хотя наша система и имеет бесконечное число степеней свободы, все же при предположенных условиях можно получить уравнения движения тел, подставляя это значение  $T$  в уравнения Лагранжа (5) § 135. Мы не имеем права это принять без дальнейшего исследования, так как положения различных частиц жидкости *не* определяются мгновенными значениями  $q_1, q_2, \dots, q_n$  координат тел. Когда, например, тела, после того как они совершили различные движения, все вернулись в свои первоначальные положения, тогда отдельные частицы жидкости окажутся смещенными, вообще говоря, на конечные расстояния <sup>1)</sup>.

Вернемся теперь к общей формуле (1) § 135 и предположим, что для возможного сравнимого движения, к которому относится символ  $\Delta$ , тела не испытывают изменений в размерах или формах и что, кроме того, жидкость остается несжимаемой и на ограничивающих поверхностях получает такое же перемещение в направлении нормалей, как

<sup>1)</sup> Как простой пример рассмотрим случай круглого диска, который движется без вращения таким образом, что его центр описывает прямо-угольник, две стороны которого перпендикулярны к плоскости диска; исследуем теперь смещение частицы, которая первоначально находилась в центре диска.

и тело, с которым оно соприкасается. Известно, что при этих обстоятельствах члены суммы

$$\sum (X \Delta \xi + Y \Delta \eta + Z \Delta \zeta),$$

зависящие от внутренних реакций тел, исчезают.

Члены, зависящие от взаимных давлений элементов жидкости, равны

$$- \iiint \left( \frac{\partial p}{\partial x} \Delta \xi + \frac{\partial p}{\partial y} \Delta \eta + \frac{\partial p}{\partial z} \Delta \zeta \right) dx dy dz,$$

или

$$\iint p (l \Delta \xi + m \Delta \eta + n \Delta \zeta) dS + \iiint p \left( \frac{\partial \Delta \xi}{\partial x} + \frac{\partial \Delta \eta}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

где первый интеграл распространяется по ограничивающим поверхностям, а  $l$ ,  $m$ ,  $n$  означают направляющие косинусы нормалей, направленных в сторону жидкости. Объемный интеграл обращается в нуль вследствие условия несжимаемости

$$\frac{\partial \Delta \xi}{\partial x} + \frac{\partial \Delta \eta}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

Интеграл по поверхности обращается в нуль на неподвижной границе, на которой имеем

$$l \Delta \xi + m \Delta \eta + n \Delta \zeta = 0,$$

а в случае движущихся тел он сокращается с теми членами, которые представляют результирующие давлений тел на жидкость. Таким образом можно предположить, что символы  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  относятся только к остальным силам, действующим на систему, и мы можем написать

$$\sum (X \Delta \xi + Y \Delta \eta + Z \Delta \zeta) = Q_1 \Delta q_1 + Q_2 \Delta q_2 + \dots + Q_n \Delta q_n, \quad (6)$$

где  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  суть обобщенные компоненты внешних сил.

Сравниваемое движение жидкости имеет все еще большую степень общности. Мы ограничим ее теперь в дальнейшем следующим допущением. В то время когда твердые тела вынуждены совершать с помощью соответствующих сил произвольное движение, жидкость должна быть предоставлена самой себе и совершать то движение, которое вызывается движением твердых тел. Возможное движение жидкости можно, следовательно, предположить безвихревым, благодаря чему измененная кинетическая энергия системы  $T + \Delta T$  будет той же самой функцией измененных координат  $q_r + \Delta q_r$  и измененных скоростей  $\dot{q}_r + \Delta \dot{q}_r$ , какой функцией от  $q_r$  и  $\dot{q}_r$  была первоначальная кинетическая энергия  $T$ .

Если же мы рассмотрим далее только частицы жидкости, то будем иметь при том же предположении

$$-\sum m (\dot{\xi} \Delta\xi + \dot{\eta} \Delta\eta + \dot{\zeta} \Delta\zeta) = -\rho \iiint \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \Delta z \right) dx dy dz = \rho \iint \varphi (l \Delta\xi + m \Delta\eta + n \Delta\zeta) dS,$$

причем опять использовано условие несжимаемости (5). Удовлетворяя кинематическим условиям на границах, будем иметь

$$l \Delta\xi + m \Delta\eta + n \Delta\zeta = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} \Delta q_1 - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \Delta q_2 - \dots - \frac{\partial\varphi_n}{\partial n} \Delta q_n,$$

и, следовательно, применяя формулы (1), (2), (3), получим

$$\begin{aligned} \sum m (\dot{\xi} \Delta\xi + \dot{\eta} \Delta\eta + \dot{\zeta} \Delta\zeta) &= \\ &= \rho \iint \varphi \left( \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} \Delta q_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \Delta q_2 + \dots + \frac{\partial\varphi_n}{\partial n} \Delta q_n \right) dS = \\ &= (A_{11}\dot{q}_1 + A_{12}\dot{q}_2 + \dots + A_{1n}\dot{q}_n) \Delta q_1 + \\ &\quad + (A_{21}\dot{q}_1 + A_{22}\dot{q}_2 + \dots + A_{2n}\dot{q}_n) \Delta q_2 + \\ &\quad + \dots + \\ &\quad + (A_{n1}\dot{q}_1 + A_{n2}\dot{q}_2 + \dots + A_{nn}\dot{q}_n) \Delta q_n = \\ &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \Delta q_1 + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \Delta q_2 + \dots + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \Delta q_n. \end{aligned} \tag{7}$$

Если мы прибавим члены, зависящие от твердых тел, то найдем, что условие (2) § 135 все еще будет иметь место; вывод уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r \tag{8}$$

проводится тогда обычным путем.

**§ 137.** В качестве первого применения изложенной теории рассмотрим пример, данный Томсоном и Тэтом <sup>1)</sup>, где предполагается, что шар движется в жидкости, ограниченной только бесконечной плоской стенкой.

Возьмем для простоты случай, когда центр шара движется в плоскости, перпендикулярной к стенке, и будем определять его положение в этой плоскости в момент  $t$  прямоугольными координатами  $x$  и  $y$ , причем  $y$  обозначает расстояние от стенки. Мы имеем тогда

$$2T = Ax^2 + By^2 \tag{1}$$

где  $A$  и  $B$  суть функции только от  $y$ ; член  $\ddot{x}y$  не может, очевидно, входить, так как энергия должна остаться без изменения, когда знак при  $\dot{x}$  меняется

<sup>1)</sup> Thomson a. Tait, Natural Philosophy, § 321.

на обратный. Значения  $A$  и  $B$  могут быть получены из результатов § 98, 99; именно, если  $m$  обозначает массу шара,  $a$  — его радиус, то будем иметь приближенно

$$\left. \begin{aligned} A &= m + \frac{2}{3} \pi \rho a^3 \left( 1 + \frac{3}{16} \frac{a^3}{y^3} \right), \\ B &= m + \frac{2}{3} \pi \rho a^3 \left( 1 + \frac{3}{8} \frac{a^3}{y^3} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

при условии, что  $y$  велико сравнительно с  $a$ .

Уравнения движения получаются

$$\frac{d}{dt} (A\dot{x}) = X, \quad \frac{d}{dt} (By\dot{y}) - \frac{1}{2} \left( \frac{dA}{dy} \dot{x}^2 + \frac{dB}{dy} \dot{y}^2 \right) = Y, \quad (3)$$

где  $X$  и  $Y$  суть компоненты внешней силы, относительно которой предполагаем, что ее линия действия проходит через центр шара.

Если внешняя сила отсутствует и скорость шара направлена перпендикулярно к стенке, то мы имеем  $\dot{x} = 0$  и

$$By\dot{y}^2 = \text{const.} \quad (4)$$

Так как  $B$  убывает, когда  $y$  возрастает, то шар будет получать ускорение в направлении *от* стенки.

Если же, напротив, шар принужден двигаться параллельно стенке, тогда имеем  $y = 0$ , и сила, необходимая для этого, будет равна

$$Y = -\frac{1}{2} \frac{dA}{dy} \dot{x}^2. \quad (5)$$

Так как  $\frac{dA}{dy}$  отрицательна, то оказывается, что шар будет словно *притягиваться* стенкой. Причину этого легко усмотреть, если свести задачу к случаю стационарного движения. На той стороне шара, которая лежит ближе к стенке, скорость жидкости, очевидно, больше и давление, следовательно, меньше, чем на стороне, более удаленной от стенки; см. § 23.

Вышеизложенное исследование пригодно также и для случая, когда два шара движутся в безграничной массе жидкости таким образом, что плоскость  $y = 0$  во всех отношениях будет плоскостью симметрии.

**§ 138.** В качестве следующего случая мы рассмотрим тот, когда два шара движутся в направлении их линий центров.

Кинематическая часть этой задачи была рассмотрена в § 98. Если обозначим теперь через  $x$ ,  $y$  расстояния центров  $A$ ,  $B$  шаров от неподвижного начала  $O$ , лежащего на прямой, соединяющей эти точки, то мы будем иметь

$$2T = L\dot{x}^2 - 2M\dot{x}\dot{y} + N\dot{y}^2, \quad (1)$$

где коэффициенты  $L$ ,  $M$ ,  $N$  суть функции от  $y - x$  или  $c$ , т. е. расстояния между центрами. Поэтому уравнения движения напишутся

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} (L\dot{x} - M\dot{y}) + \frac{1}{2} \left( \frac{dL}{dc} \dot{x}^2 - 2 \frac{dM}{dc} \dot{x}\dot{y} + \frac{dN}{dc} \dot{y}^2 \right) &= X, \\ \frac{d}{dt} (-M\dot{x} + N\dot{y}) - \frac{1}{2} \left( \frac{dL}{dc} \dot{x}^2 - 2 \frac{dM}{dc} \dot{x}\dot{y} + \frac{dN}{dc} \dot{y}^2 \right) &= Y, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $X$ ,  $Y$  суть силы, действующие на шары в направлении линии центров. Если радиусы  $a$ ,  $b$  оба малы сравнительно с  $c$  и если принять во внимание

только важнейшие члены, то, согласно (15) § 98, мы будем иметь приближенно

$$\left. \begin{aligned} L &= m + \frac{2}{3} \pi \rho a^3, \\ M &= 2\pi \rho \frac{a^3 b^3}{c^3}, \\ N &= m' + \frac{2}{3} \pi \rho b^3, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где  $m$  и  $m'$  суть массы обоих шаров. С той же степенью приближения имеем, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dc} &= 0, \\ \frac{dM}{dc} &= -6\pi \rho \frac{a^3 b^3}{c^4}, \\ \frac{dN}{dc} &= 0. \end{aligned}$$

Если каждый из обоих шаров принужден двигаться с постоянной скоростью, то сила, которая должна действовать на  $A$ , чтобы поддерживать движение, равна

$$X = -\frac{dM}{dc} \dot{y} (\dot{y} - \dot{x}) - \frac{dM}{dc} \ddot{x} y = 6\pi \rho \frac{a^3 b^3}{c^4} \dot{y}^2. \quad (4)$$

Эта сила направлена к  $B$  и зависит только от скорости  $B$ . Получается, таким образом, так, как если бы оба шара отталкивали друг друга; необходимо заметить, что кажущиеся силы вообще только тогда равны и противоположны, когда  $\dot{x} = \pm y$ .

Если шары совершают малые периодические колебания одинакового периода около некоторого среднего положения, то средние значения первых членов в (2) обращаются в нуль; таким образом оказывается, что шары действуют друг на друга с силами, которые равны

$$6\pi \rho \frac{a^3 b^3}{c^4} [\dot{x} y], \quad (5)$$

где  $[\dot{x} y]$  обозначает среднее значение от  $\dot{x} y$ . Если разность фаз  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  меньше четверти периода, то сила будет отталкивающей, а если больше четверти периода, то — притягивающей.

Пусть теперь  $B$  совершает малые периодические колебания, в то время как  $A$  остается в покое. Среднее значение силы, которая должна быть приложена к шару  $A$ , чтобы препятствовать его движению, будет равна

$$X = \frac{1}{2} \frac{dN}{dc} [\dot{y}^2], \quad (6)$$

где  $[\dot{y}^2]$  обозначает среднее значение квадрата скорости  $B$ . При выше принятой степени точности  $\frac{dN}{dc}$  равно нулю; принимая во внимание § 98, мы находим, что наиболее важный член здесь равен  $-12\pi \rho \frac{a^3 b^3}{c^7}$ , так что сила, действующая на  $A$ , притягивающая и равна

$$6\pi \rho \frac{a^3 b^3}{c^7} [\dot{y}^2]. \quad (7)$$

Этот результат можно получить из общего принципа, высказанного Кельвином. Если рассматривать два погруженных в жидкость тела, из которых одно ( $A$ ) совершает малые колебания, в то время как другое ( $B$ ) удерживается в покое, то скорость жидкости на поверхности  $B$  в общем будет больше на той стороне, которая обращена к  $A$ , чем на противоположной стороне. Поэтому среднее давление на первую сторону будет меньше, чем на вторую, так что  $B$  в общем будет испытывать притяжение к  $A$ . В качестве практических иллюстраций этой теоремы мы можем привести кажущееся притяжение подвешенной тонкой карточки в воздухе колеблющимся камертоном, а также другие подобные явления, исследованные экспериментально Гутрием <sup>1)</sup> и объясненные вышеуказанным способом Кельвином <sup>2)</sup>.

### Преобразование уравнений Лагранжа в случае циклического движения

§ 139. Мы возвратимся теперь к исследованиям в § 136 с целью применить их к случаю, когда жидкость независимо от движения, вызванного телами, совершает циклическое безвихревое движение через каналы, которые находятся в движущихся телах или в заключающем ее сосуде.

Предположим, что различные отверстия загорожены поверхностными перегородками. Мы допускаем, что у каналов, которые находятся в заключающем жидкость сосуде, эти воображаемые поверхности неподвижны в пространстве; напротив, у каналов, находящихся в движущемся теле, мы будем считать их неподвижно связанными с телом. Обозначим через  $\dot{\chi}$ ,  $\dot{\chi}'$ ,  $\dot{\chi}''$ , ... *относительные* расходы в момент  $t$  через отдельные перегородки; пусть  $\chi$ ,  $\chi'$ ,  $\chi''$ , ... будут интегралами по времени от этих расходов, считая от произвольного момента; эти величины определяют, следовательно, объемы жидкости, протекшей до момента  $t$  через соответствующие перегородки. Оказывается тогда, что аналогия с динамической системой с конечным числом степеней свободы все еще будет сохраняться, если только рассматривать величины  $\chi$ ,  $\chi'$ ,  $\chi''$  в дополнение к величинам  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ , которые определяют положения движущихся тел как обобщенные координаты системы. Заранее видно, что значения  $\chi$ ,  $\chi'$ ,  $\chi''$ , ... войдут не сами в выражение кинетической энергии, а только через скорости их изменений, т. е. их производные по времени.

Сначала покажем, что движение жидкости при всяком данном положении тел определяется однозначно мгновенными значениями  $q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{\chi}, \dot{\chi}', \dot{\chi}'', \dots$ . В самом деле, если два различных вида безвихревого движения были бы совместимы с этими значениями, тогда границы жидкости при том движении, которое есть *разность* этих двух движений, должны были бы оставаться в покое и расход

<sup>1)</sup> Guthrie, On Approach caused by Vibration, Phil. Mag. (4), XL (1870).

<sup>2)</sup> Kelvin, Reprint of Papers on Electrostatics etc., § 741. Литературные указания об экспериментальных и теоретических исследованиях Бьеркнеса и других относительно взаимного влияния колеблющихся в жидкости шаров, см. Hicks, Report on Recent Researches in Hydrodynamics, Brit. Ass. Rep., 1882, стр. 52; Love, Encycl. d. math. Wiss., IV (3), стр. 111, 112.



через каждую перегородку должен был бы равняться нулю. Формула (5) § 55 показывает, что при этих обстоятельствах кинетическая энергия должна была бы обращаться в нуль.

Потенциал скоростей может быть выражен, следовательно, в форме

$$\varphi = \dot{q}_1 \varphi_1 + \dot{q}_2 \varphi_2 + \dots + \dot{q}_n \varphi_n + \dot{\chi} \Omega + \dot{\chi}' \Omega' + \dots \quad (1)$$

При этом  $\varphi_r$  есть потенциал скоростей того движения, при котором изменяется только  $q_r$ , и расход через каждую перегородку тем самым равен нулю. Далее,  $\Omega$  есть потенциал скоростей движения, при котором твердые тела все находятся в покое, в то время как расход через первое отверстие равен единице, а через всякое другое отверстие равен нулю. Необходимо при этом принять во внимание, что  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \Omega, \Omega', \dots$ , вообще говоря, суть циклические функции, которые, однако, согласно принятым в § 50 ограничениям, могут рассматриваться как однозначные.

Кинетическая энергия жидкости определяется выражением

$$2T = \rho \iiint \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz, \quad (2)$$

где интеграл распространяется по области, которая в рассматриваемый момент наполнена жидкостью. Если вставить в (2) вместо  $\varphi$  значение из (1), то мы получим  $T$  в виде однородной квадратичной функции от  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, \dots, \dot{\chi}, \dot{\chi}', \dot{\chi}''$  с коэффициентами, зависящими от мгновенного положения тел, и поэтому они представляют функции только от  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Кроме того, согласно (1) § 53, найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\chi}} &= \rho \iiint \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right\} dx dy dz = \\ &= -\rho \iint \varphi \frac{\partial \Omega}{\partial n} dS - \rho \kappa \iint \frac{\partial \Omega}{\partial n} d\sigma - \rho \kappa' \iint \frac{\partial \Omega}{\partial n} d\sigma' - \dots, \end{aligned}$$

где  $\kappa, \kappa', \dots$  означают циклические постоянные  $\varphi$ , первый поверхностный интеграл распространяется по поверхностям тел, а остальные — по различным перегородкам. При помощи условий, которыми определяется  $\Omega$ , это выражение сводится к первому уравнению следующей системы:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\chi}} = \rho \kappa, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\chi}'} = \rho \kappa', \dots \quad (3)$$

Эти уравнения показывают, что  $\rho \kappa, \rho \kappa', \dots$  могут рассматриваться в качестве тех обобщенных компонент импульса, которые соответствуют компонентам скорости  $\dot{\chi}, \dot{\chi}', \dots$

Воспользуемся общей формулой Гамильтона (1) § 135. Мы предположим, что сравниваемое движение твердых тел подчинено только условию, что начальные и конечные положения тел те же самые, как и при действительном движении; далее предполагается, что

начальное положение каждой частицы жидкости у обоих движений будет одним и тем же. Следовательно, выражение

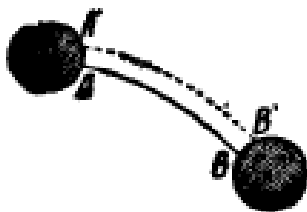
$$\sum m (\dot{\xi} \Delta \xi + \dot{\eta} \Delta \eta + \dot{\zeta} \Delta \zeta) \quad (4)$$

обращается в нуль в момент  $t_0$ , но, вообще говоря, не обращается в нуль в момент  $t_1$ , если нет налицо дальнейших ограничений.

Мы предположим теперь, что сравниваемое движение жидкости есть безвихревое; оно определяется тогда мгновенными значениями измененных обобщенных координат и скоростей. Если рассматривать частицы только жидкости, то будем иметь

$$\begin{aligned} \sum m (\dot{\xi} \Delta \xi + \dot{\eta} \Delta \eta + \dot{\zeta} \Delta \zeta) &= \\ &= -e \iiint \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta \xi + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Delta \eta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Delta \zeta \right) dx dy dz = \\ &= e \iint \varphi (l \Delta \xi + m \Delta \eta + n \Delta \zeta) dS + \\ &\quad + e\kappa \iint (l \Delta \xi + m \Delta \eta + n \Delta \zeta) d\sigma + \\ &\quad + e\kappa' \iint (l \Delta \xi + m \Delta \eta + n \Delta \zeta) d\sigma' + \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $l$ ,  $m$ ,  $n$  обозначают направляющие косинусы нормали к некоторому элементу ограничивающей поверхности, направленной в сторону жидкости, или нормали элемента перегородки, проведенной в направлении, в котором взята соответствующая циркуляция.



Фиг. 32.

В момент  $t_1$  мы будем иметь тогда

$$l \Delta \xi + m \Delta \eta + n \Delta \zeta = 0$$

как на поверхностях тел, так и на неподвижных границах. Если, далее,  $AB$  (фиг. 32) обозначает одну из перегородок в момент  $t_1$ ,  $A'B'$

изображает то место, которое занято в тот же самый момент теми частицами сравниваемого движения, которые при действительном движении занимают положение  $AB$ , тогда объем, заключенный между  $AB$  и  $A'B'$ , равен соответствующему значению  $\Delta \chi$ . Отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} \iint (l \Delta \xi + m \Delta \eta + n \Delta \zeta) d\sigma &= \Delta \chi, \\ \iint (l \Delta \xi + m \Delta \eta + n \Delta \zeta) d\sigma' &= \Delta \chi', \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Варьируемые циркуляции для отдельных моментов находятся еще в нашем распоряжении. Мы можем допустить, что они выбраны таким образом, что  $\Delta \chi$ ,  $\Delta \chi'$ , ... в момент  $t_1$  обращаются в нуль.

При этом выражение (4) будет обращаться в нуль, и если мы еще дальше предположим, что при произвольных относительных перемещениях частиц жидкости внешние силы в их совокупности не совершают работы, когда граница жидкости находится в покое, то будем иметь

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \Delta T + Q_1 \Delta q_1 + Q_2 \Delta q_2 + \dots + Q_n \Delta q_n \right\} dt = 0, \quad (7)$$

как и выше.

Интегрируя по частям и принимая во внимание, что при нашем допущении

$$\Delta q_1, \Delta q_2, \dots, \Delta q_n, \Delta \chi, \Delta \chi', \dots$$

при пределах  $t_0, t_1$  обращаются в нуль, но в остальном независимы, мы получаем  $n$  уравнений вида

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r \quad (8)$$

и затем уравнения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\chi}} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\chi}'} = 0. \quad (9)$$

**§ 140.** Уравнения типа (8) и (9) встречаются в различных задачах обыкновенной динамики, например, когда вопрос касается гироскопов, где координаты  $\chi, \chi'$ , абсолютные значения которых не влияют на кинетическую или потенциальную энергию системы, суть угловые координаты гироскопов относительно их рам. Общая теория таких систем была разобрана Раусом<sup>1)</sup>, Томсоном и Тэтом<sup>2)</sup> и другими авторами.

Мы видели, что имеют место уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\chi}} = e\kappa, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\chi}'} = e\kappa', \dots, \quad (10)$$

и интегрирование уравнений (9) показывает, что величины  $\kappa, \kappa', \dots$  постоянны по отношению ко времени, что уже известно было ранее (§ 50). Для дальнейшего полагаем

$$R = T - e\kappa\dot{\chi} - e\kappa'\dot{\chi}' \dots \quad (11)$$

<sup>1)</sup> Routh, On the Stability of a Given State of Motion (Adams Prize Essay), London, 1877; Advanced Rigid Dynamics, 6-е изд., London, 1905.

<sup>2)</sup> Thomson a. Tait, Natural Philosophy, 2-е изд., § 319 (1879). См. также Helmholtz, Prinzipien der Statik Monocyklischen Systeme, Crelle, XC VII (1884) (Wiss. Abh., III, 179); Larmor, On the Direct Application of the Principle of Least Action to the Dynamics of Solid and Fluid Systems, Proc. Lond. Math. Soc. (2), XV (1884) (Papers, I, 31); Basset, Proc. Camb. Soc., VI, 117 (1889).

Уравнения (10) определяют, как сразу видно, если их написать полностью,  $\dot{\chi}, \dot{\chi}', \dots$  в виде линейных функций от  $\kappa, \kappa', \dots$  и  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ ; вставляя в (11), мы можем представить  $R$  как однородную квадратичную функцию тех же величин с коэффициентами, которые, вообще говоря, содержат координаты  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . При этом предположении, если к обеим частям уравнения (11) применить произвольную вариацию  $\delta$  и опустить члены, которые исчезают согласно (10), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_1} \delta \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial R}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial R}{\partial \kappa} \delta \kappa + \dots = \\ = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \delta \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial T}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + -e\dot{\chi} \delta \kappa - \dots, \end{aligned} \quad (12)$$

где для краткости написан только один член каждого вида. Мы получаем отсюда  $2n$  уравнений типа

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}, \quad \frac{\partial R}{\partial q_r} = \frac{\partial T}{\partial q_r} \quad (13)$$

вместе с

$$\frac{\partial R}{\partial \kappa} = -e\dot{\chi}, \quad \frac{\partial R}{\partial \kappa'} = -e\dot{\chi}'. \quad (14)$$

Поэтому уравнения (8) могут быть написаны в следующей форме:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial R}{\partial q_r} = Q_r, \quad (15)$$

где скорости  $\dot{\chi}, \dot{\chi}', \dots$ , которые соответствуют циклическим координатам  $\chi, \chi', \dots$ , теперь исключены<sup>1)</sup>.

§ 141. Чтобы показать более ясно, каким образом меняются динамические уравнения в случае циклических движений, мы поступим следующим образом.

Подставляя (14) в (11), мы получим

$$T = R - \left( \kappa \frac{\partial R}{\partial \kappa} + \kappa' \frac{\partial R}{\partial \kappa'} + \dots \right). \quad (16)$$

Если вспомнить о содержании  $R$ , то мы можем на мгновение написать

$$R = R_{2,0} + R_{1,1} + R_{0,2}, \quad (17)$$

где  $R_{2,0}$  есть однородная квадратичная функция от  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ ;  $R_{0,2}$  — однородная квадратичная функция от  $\kappa, \kappa', \dots$  и  $R_{1,1}$  есть билинейная функция этих двух рядов переменных. Поэтому уравнение (16) принимает вид

$$T = R_{2,0} - R_{0,2}, \quad (18)$$

<sup>1)</sup> Это исследование принадлежит Routh, см. сноску на стр. 243; ср. Уиттекер, Аналитическая динамика, § 38, ОНТИ, 1937.



Если в уравнениях движения вполне определенной системы с конечным числом степеней свободы (4) § 135 изменить знак элемента времени  $\delta t$ , то уравнения остаются без изменения. Движение, таким образом, обратимо, т. е. если при прохождении системы через некоторое определенное положение скорости  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$  все будут обращены, то система (если силы в одинаковых положениях будут всегда одинаковы) пройдет свой первоначальный путь в противоположном направлении. Важно заметить, что сказанное не всегда имеет место для гиростатической системы; именно, те члены в (23), которые линейны относительно  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ , меняют свой знак одновременно с  $\delta t$ , в то время как другие члены не делают этого. Следовательно, в рассматриваемом нами случае движение тел будет необратимо, если только мы не предположим, что циркуляции  $\kappa, \kappa', \dots$  также меняют свой знак одновременно со скоростями  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ <sup>1)</sup>.

Если мы умножим уравнения (23) соответственно на  $q_1, q_2, \dots, q_n$  и затем их сложим, то мы найдем при помощи небольшого изменения обычного приема

$$\frac{d}{dt} (\mathfrak{E} + K) = Q_1 \dot{q}_1 + Q_2 \dot{q}_2 + \dots + Q_n \dot{q}_n, \quad (25)$$

или, если система будет консервативной,

$$\mathfrak{E} + K + V = \text{const.} \quad (26)$$

§ 142. Результаты § 141 могут быть применены к установлению условий равновесия системы тел, окруженных жидкостью, находящейся в циклическом движении. Эта задача „кинетостатики“, как ее можно назвать, однако, может быть рассмотрена с помощью более простого приема.

Выражение для  $\varphi$  при настоящих условиях может быть написано в двух видах

$$\varphi = \dot{\chi} \Omega + \dot{\chi}' \Omega' + \dots, \quad (1)$$

$$\varphi = \kappa \omega + \kappa' \omega' + \dots, \quad (2)$$

и кинетическая энергия получается как однородная квадратичная форма либо от  $\dot{\chi}, \dot{\chi}', \dots$ , либо от  $\kappa, \kappa', \dots$  с коэффициентами, которые в обоих случаях суть функции координат  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , определяющих положения твердых тел. Эти два выражения для энергии мы будем различать с помощью двух символов  $T_0$  и  $K$ . Далее, согласно (5) § 55 мы имеем еще третью формулу для  $T$ , именно

$$2T = \varrho \kappa \dot{\chi} + \varrho \kappa' \dot{\chi}' + \dots \quad (3)$$

<sup>1)</sup> Совершенно так же, как нельзя переменить движение оси волчка на обратное, если не изменить направления вращения.

Если воспользоваться исследованием в начале § 139, учитывая при этом, что теперь члены, содержащие  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ , исчезают, то замечаем, что

$$e\kappa = \frac{\partial T_0}{\partial \dot{\chi}}, \quad e\kappa' = \frac{\partial T_0}{\partial \dot{\chi}'}, \dots \quad (4)$$

Далее, формула в явном виде для  $K$  будет

$$\begin{aligned} 2K &= -e\kappa \iint \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma - e\kappa' \iint \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma' - \dots = \\ &= (\kappa, \kappa)\kappa^2 + (\kappa', \kappa')\kappa'^2 + \dots + 2(\kappa, \kappa')\kappa\kappa' + \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} (\kappa, \kappa) &= -e \iint \frac{\partial \omega}{\partial n} d\sigma, \\ (\kappa, \kappa') &= -e \iint \frac{\partial \omega'}{\partial n} d\sigma = -e \iint \frac{\partial \omega}{\partial n} d\sigma' \end{aligned} \quad (6)$$

и т. д. Отсюда следует

$$\frac{\partial K}{\partial \kappa} = (\kappa, \kappa)\kappa + (\kappa, \kappa')\kappa' + \dots = -e \iint \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma.$$

Мы получаем таким образом

$$e\dot{\chi} = \frac{\partial K}{\partial \kappa}, \quad e\dot{\chi}' = \frac{\partial K}{\partial \kappa'}, \dots \quad (7)$$

Если, далее, напишем  $T_0 + K$  вместо  $2T$  в уравнении (3) и применим к обеим частям полученного таким образом тождества полную вариацию  $\delta$ , то найдем, если опустить члены, которые уничтожаются согласно (4) и (7)<sup>1)</sup>,

$$\frac{\partial T_0}{\partial q_r} + \frac{\partial K}{\partial q_r} = 0. \quad (8)$$

Это уравнение содержит ряд необходимых аналитических формул<sup>2)</sup>.

Предположим теперь, что тела из состояния покоя в положении  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$  переведены в другое соседнее состояние покоя, в положение

$$(q_1 + \Delta q_1, q_2 + \Delta q_2, \dots, q_n + \Delta q_n);$$

тогда необходимая для этого работа будет равна

$$Q_1 \Delta q_1 + Q_2 \Delta q_2 + \dots + Q_n \Delta q_n,$$

где  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  означают компоненты тех внешних сил, которые должны быть приложены, чтобы нейтрализовать давления жидкости на тела. Эта работа должна равняться приращению  $\Delta K$  кинетической

<sup>1)</sup> Достаточно взять либо (4), либо (7); рассматриваемый способ приводит тогда к независимому доказательству другого ряда формул.

<sup>2)</sup> Заметим, что функция  $R$  § 140 приводится теперь к  $-K$ .

энергии, которое вычисляется при допущении, что циркуляции  $\kappa, \kappa', \dots$  будут постоянны. Отсюда следует

$$Q'_r = \frac{\partial K}{\partial q_r}. \quad (9)$$

Силы, эквивалентные давлениям жидкости на тела (когда последние находятся в покое), получаются изменением знака; они имеют вид

$$Q_r = - \frac{\partial K}{\partial q_r}; \quad (10)$$

Следовательно, тела стремятся двигаться таким образом, что кинетическая энергия циклического движения убывает.

Вследствие (8) будем иметь также

$$Q'_r = \frac{\partial T_0}{\partial q_r}. \quad (11)$$

**§ 143.** Формула (19) § 141 может быть использована для определения приближенного выражения для сил воздействия на тело, погруженное в неравномерный поток<sup>1)</sup>.

Предположим, что мы имеем тело, удерживаемое в состоянии покоя в циклической области, в которой жидкость находится в циркуляционном безвихревом движении. Пусть  $K$  есть энергия жидкости, которая изменяется с изменением положения тела. Мы будем предполагать, что размеры тела настолько малы по сравнению с расстоянием от стенок области, что его положение может быть определено заданными координатами точки  $(x, y, z)$ . Тогда для компонент сил воздействия на него давлений жидкости мы будем иметь

$$X = - \frac{\partial K}{\partial x}, \quad Y = - \frac{\partial K}{\partial y}, \quad Z = - \frac{\partial K}{\partial z}. \quad (1)$$

Остается найти приближенно вид функции  $K$  от  $x, y, z$ . Пусть  $(u, v, w)$  будет скорость, которую имела бы жидкость в точке  $(x, y, z)$ , если бы тело отсутствовало. Если тело было бы вынуждено двигаться с этой скоростью и если бы оно имело плотность, совпадающую с плотностью окружающей жидкости, то энергия была бы приближенно той же самой, как если бы все пространство было заполнено жидкостью. Из формулы (19) § 141 следует, что в этом случае энергия жидкости была бы  $\mathfrak{E} + K$ , где согласно § 124

$$2\mathfrak{E} = Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2A'vw + 2B'wu + 2C'uv, \quad (2)$$

а энергия тела была бы равна

$$\frac{1}{2} eQ(u^2 + v^2 + w^2), \quad (3)$$

<sup>1)</sup> G. I. Taylor, The Forces on a Body placed in a Curved or Converging Stream of Fluid, Proc. Roy. Soc., CXX, 260 (1928).



где  $Q$  есть вытесненный объем. Выражение

$$\mathfrak{E} + \frac{1}{2} \epsilon Q (u^2 + v^2 + w^2) + K \quad (4)$$

имеет, таким образом, постоянное значение, так как оно представляет энергию жидкости, заполняющей область и имеющей заданную циркуляцию. Это выражение определяет вид  $K$ .

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x} + \frac{1}{2} \epsilon Q \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2 + w^2), \\ Y &= \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial y} + \frac{1}{2} \epsilon Q \frac{\partial}{\partial y} (u^2 + v^2 + w^2), \\ Z &= \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial z} + \frac{1}{2} \epsilon Q \frac{\partial}{\partial z} (u^2 + v^2 + w^2). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Так как силы воздействия на тело должны зависеть только от движения жидкости в непосредственной близости к нему, то эти выражения будут общими и независимыми от тех частных предположений, которые принимаются в отношении вывода этих уравнений.

Если направление невозмущенного потока вблизи тела будет принято за направление оси  $x$ , то результаты упрощаются. Полагая  $v=0$ ,  $w=0$ , мы будем иметь

$$\left. \begin{aligned} X &= \left\{ (A + \epsilon Q) \frac{\partial u}{\partial x} + B' \frac{\partial w}{\partial x} + C' \frac{\partial v}{\partial x} \right\} u, \\ Y &= \left\{ (A + \epsilon Q) \frac{\partial u}{\partial y} + B' \frac{\partial w}{\partial y} + C' \frac{\partial v}{\partial y} \right\} u, \\ Z &= \left\{ (A + \epsilon Q) \frac{\partial u}{\partial z} + B' \frac{\partial w}{\partial z} + C' \frac{\partial v}{\partial z} \right\} u. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Если к тому же поток будет симметричен относительно плоскостей  $y=0$ ,  $z=0$ , то мы будем иметь  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ , а в силу допущения о безвихревом характере движения будет также  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ . Симметрия также требует, чтобы  $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$ . Отсюда

$$\left. \begin{aligned} X &= (A + \epsilon Q) u \frac{\partial u}{\partial x}, \\ Y &= C' u \frac{\partial v}{\partial y}, \\ Z &= B' u \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Вначале предположим, что одна из осей установившегося поступательного движения (§ 124) совпадает с направлением потока. Тогда  $C' = 0$ ,  $B' = 0$  и

$$X = (A + \epsilon Q) f, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \quad (8)$$

где  $f$  есть ускорение в невозмущенном потоке. Таким образом, если тело представляет шар, то  $A = \frac{2}{3} \pi \rho a^3$ ,  $Q = \frac{4}{3} \pi a^3$ ,  $X = 2\pi \rho a^3 f$ . Для круглого цилиндра, относя все величины к единице длины его, получим

$$A = \pi \rho a^2, \quad Q = \pi \rho a^2, \quad X = 2\pi \rho a^2 f.$$

Теперь предположим, что только две оси установившегося поступательного движения лежат в одной плоскости с направлением потока. Если данная плоскость принята за плоскость  $xu$ , то мы будем иметь  $A' = 0$ ,  $B' = 0$ . Если поток будет симметричным относительно оси  $x$ , то будем иметь

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x},$$

и силы приводятся к

$$X = (A + eQ) f, \quad Y = \frac{1}{2} C' f, \quad Z = 0. \quad (9)$$

В случае круглого диска

$$A = \frac{8}{3} \rho a^3 \cos^2 \alpha, \quad C' = -\frac{8}{3} \rho a^3 \sin \alpha \cos \alpha, \quad Q = 0,$$

где  $\alpha$  есть угол, который составляет направление потока с осью симметрии. В случае плоского движения эллиптического цилиндра

$$A = \pi \rho (b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha), \quad C' = \pi \rho (a^2 - b^2) \sin \alpha \cos \alpha, \quad Q = \pi ab,$$

где  $\alpha$  есть угол наклона направления потока к большой оси<sup>1)</sup>.

Приведенная теория имеет интерес в связи с „перепадом давления“ в аэродинамической трубе, которая используется для измерения лобового сопротивления моделей аэропланов. Поток воздуха немного суживается по направлению к вентилятору на заднем конце трубы, а возрастание скорости предполагает падение давления. Мы тогда имеем

$$ef = -\frac{\partial p}{\partial x}. \quad (10)$$

Предыдущие формулы показывают, что было бы неправильно вычислять значение  $X$  на основании только измеренных градиентов давления, как если бы это была статическая задача, когда мы имели бы просто  $x = eQf$ <sup>2)</sup>.

Некоторые дальнейшие интересные примеры кинетостатики (не воспроизводимые в настоящем издании) были исследованы Томсоном<sup>3)</sup>, Кирхгофом<sup>3)</sup> и Больцманом<sup>4)</sup>.

<sup>1)</sup> Эти частные случаи были подтверждены непосредственным вычислением воздействия давлений жидкости: Aeronautical Research Committee, R. and M. 1164 (1928).

<sup>2)</sup> Taylor G. I. см. сноску на стр. 248.

<sup>3)</sup> Thomson W., On the Forces experienced by Solids immersed in a Moving Liquid, Proc. R. S. Edin., 1870 (Reprint, § XLI).

<sup>3)</sup> См. сноску на стр. 74.

<sup>4)</sup> Boltzmann, Über die Druckkräfte, welche auf Ringe wirksam sind die in bewegte Flüssigkeit tauchen, Crelle, LXXIII (1871) (Wiss. Abh. I, 200).

**§ 144.** Теперь мы оставляем эту область нашего исследования. Чтобы избежать, насколько это возможно, сомнений в ненадежности, которые иногда возникают при употреблении „обобщенных координат“, мы старались в этой главе поставить дело на возможно прочное основание, не считаясь даже с некоторой многословностью в толковании методов.

Некоторым авторам<sup>1)</sup> вопрос представлялся сам по себе как один из наиболее простых. Задачи приводились в один прием к обыкновенным формулам динамики мысленным введением неограниченного числа „скрытых координат“, которые должны были бы определять положения различных частиц жидкости. Соответствующие компоненты импульса все предполагались обращающимися в нуль, за исключением (в случае циклической области) тех, которые представлены циркуляциями через различные отверстия.

С физической точки зрения затруднительно будет не согласиться с подобного рода обобщением, в особенности тогда, когда оно образует исходную точку для всего развития этой ветви гидродинамики; хотя оно и будет по меньшей мере законным, все же с гидродинамической точки зрения желательно, чтобы оно было оправдано а posteriori независимыми, хотя и громоздкими методами.

Какой бы прием мы ни применяли, в результате имеем следующее: системы, рассмотренные в этой главе, ведут себя как обыкновенные системы с конечным числом степеней свободы (поскольку принимаются во внимание явные координаты  $q_1, q_2, \dots, q_n$ ). Дальнейшее развитие общей теории принадлежит аналитической динамике, и поэтому его надо искать в соответствующих учебниках и специальных статьях, посвященных этому вопросу. Необходимо, однако, еще отметить, что гидродинамические системы доставляют в высшей степени интересные и прекрасные применения принципа наименьшего действия, теорем взаимности Гельмгольца и других общих теорем динамики.

## ГЛАВА СЕДЬМАЯ

### ВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ

**§ 145.** Наши исследования до сих пор ограничивались почти исключительно случаем безвихревого движения. Мы переходим теперь к изучению вихревого движения. Эта область была впервые исследована Гельмгольцем<sup>2)</sup>; другие, более простые доказательства некоторых его теорем были даны впоследствии Кельвином в работе о вихревом движении, цитированной уже в главе III.

<sup>1)</sup> См. Thomson а. Tait, также Lagrange, см. выше, стр. 243.

<sup>2)</sup> Helmholtz, Über Integrale der hydrodynamischen Gleichung n, welche den Wirbelbewegungen entsprechen, Crelle, LV, 1858 [Wiss. Abh., I. 101]. Переведено в Ostwalds Klassiker d. exakten Wissenschaften, Bd. 79.

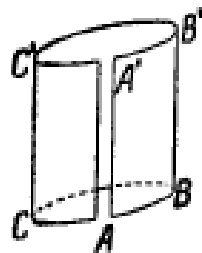
В этой главе, так же как в главе III, для обозначения компонентов вектора вихря мы применили символы  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ; это значит

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \eta &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \zeta &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Линию, направление которой совпадает всюду с мгновенной осью вращения частиц жидкости, называют вихревой линией. Дифференциальные уравнения системы вихревых линий будут

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}. \quad (2)$$

Если через каждую точку малой замкнутой кривой провести соответствующую вихревую линию, то получим трубку, которая называется вихревой трубкой. Жидкость внутри такой трубки образует вихревую нить или просто вихрь.



Фиг. 33.

Пусть  $ABC$  и  $A'B'C'$  (фиг. 33) — две произвольные, проведенные на поверхности вихревой трубки замкнутые кривые, которые окружают вихревую трубку, и  $AA'$  пусть будет произвольная соединяющая их линия, которая также лежит на поверхности. Мы применим теперь к замкнутой кривой  $ABCAA'C'B'A'A$  и к ограниченной ею части поверхности вихревой трубки теорему § 32. Так как для каждой точки этой поверхности имеем

$$l\xi + m\eta + n\zeta = 0,$$

то криволинейный интеграл, распространенный по замкнутой кривой:

$$\int (u dx + v dy + w dz),$$

должен обращаться в нуль, т. е. в обозначениях § 31

$$J(ABCA) + J(AA') + J(A'C'B'A') + J(A'A) = 0,$$

а это сводится к

$$J(ABCA) = J(A'B'C'A').$$

Следовательно, циркуляция по всем замкнутым кривым вокруг одной и той же вихревой трубки имеет одинаковое значение.

Далее из § 31 следует, что циркуляция вдоль контура произвольного сечения трубки, перпендикулярного к трубке, равна  $\omega\sigma$ , где

$$\omega = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{1/2}$$

означает модуль вихря, а  $\sigma$  — бесконечно малую величину площади сечения.

Сопоставляя эти результаты, мы заключаем, что произведение абсолютного значения вихря на поперечное сечение вихревой трубки имеет одинаковое значение для всех точек вихря. Это произведение удобно взять как меру *напряжения* вихря<sup>1)</sup>.

Данное здесь доказательство принадлежит Кельвину; сама теорема была впервые дана Гельмгольцем как следствие соотношения

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

которое непосредственно следует из данных в выражениях (1) значений для  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ . На самом деле, если вставить  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  вместо  $U$ ,  $V$ ,  $W$  в (1) § 42, то получим

$$\iint (l\xi + m\eta + n\zeta) dS = 0, \quad (4)$$

где интегрирование распространяется по любой лежащей целиком в жидкости замкнутой поверхности. Применяв это к замкнутой поверхности, которая образована из двух сечений вихревой трубки и лежащей между ними части трубки, найдем

$$\omega_1 \sigma_1 = \omega_2 \sigma_2,$$

где  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  суть значения вихря в сечениях  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ .

Доказательство Кельвина показывает, что теорема имеет место и тогда, когда только  $u$ ,  $v$ ,  $w$  непрерывны, а  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  разрывны; в этом случае может быть в одной точке вихревой нити острый излом.

Важным следствием вышеизложенной теоремы является теорема о том, что вихревая линия во внутренней точке жидкости не может ни начинаться, ни оканчиваться. Все имеющиеся вихревые линии должны или образовать замкнутые кривые линии, или же, пронизывая жидкость, начинаться и кончаться на ее границах; ср. § 36.

Формула (3) § 32 может быть теперь сформулирована следующим образом: циркуляция по какой-либо замкнутой кривой равна сумме напряжений всех вихрей, охватываемых этой кривой.

**§ 146.** В § 33 было доказано, что в идеальной жидкости, находящейся под действием сил с однозначным потенциалом, плотность которой или постоянна во всем объеме, или есть функция только давления, циркуляция по любой движущейся с жидкостью замкнутой кривой постоянна во времени.

Применяя эту теорему к замкнутой кривой, которая охватывает вихревую трубку, мы найдем, что напряжение какой-либо вихревой трубки постоянно во времени.

Возьмем в произвольный момент времени поверхность, состоящую всецело из вихревых линий; согласно § 32 циркуляция по всякой

<sup>1)</sup> Циркуляция вокруг вихря есть действительно самая естественная мера его напряжения.

замкнутой кривой, проведенной на ней, равна нулю, так как для каждой точки поверхности имеет место равенство

$$l\xi + m\eta + n\zeta = 0.$$

Вообразим теперь, что поверхность движется с жидкостью, тогда (как было показано в предыдущем параграфе) циркуляция по всякой замкнутой кривой, лежащей на поверхности, всегда будет равна нулю, отсюда следует, что поверхность будет состоять всегда из вихревых линий. Если мы будем рассматривать две такие поверхности, то увидим, что их линия пересечения всегда должна быть вихревой линией, отсюда мы выводим теорему, что вихревые линии движутся вместе с жидкостью.

Эта замечательная теорема была сначала доказана Гельмгольцем для случая несжимаемых жидкостей; вышеизложенное, данное Кельвином доказательство показывает, что оно пригодно и для всякой жидкости, которая удовлетворяет приведенным выше условиям.

Теорема о том, что циркуляция по всякой движущейся с жидкостью замкнутой кривой остается неизменной, составляет единственную и достаточную связь с динамикой, которая необходима для проведения исследований этой главы.

Эта теорема основывается на допущении непрерывного распределения давлений, которое, обратно, опять вытекает из этой теоремы. В самом деле, если в какой-нибудь задаче мы найдем функции  $u$ ,  $v$ ,  $w$  от  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ , которые удовлетворяют кинематическим условиям, и если это решение возможно также *динамически*, то соотношение между давлениями жидкости в двух данных движущихся точках  $A$ ,  $B$  должно быть задано с помощью формулы (2) § 33, именно

$$\left[ \int \frac{dp}{\rho} + \Omega - \frac{1}{2} q^2 \right]_A^B = - \frac{D}{Dt} \int_A^B (u dx + v dy + w dz). \quad (1)$$

Таким образом необходимо и достаточно, чтобы выражение в правой части равенства (1) оставалось одинаковым для всех путей интегрирования, которые соединяют  $A$  и  $B$  и движутся с жидкостью. Это бывает тогда и только тогда, когда принятые значения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  таковы, что вихревые линии движутся с жидкостью и что интенсивность каждого вихря постоянна во времени.

Легко видеть, что это заключение ни в какой мере не нарушается, когда допущенные значения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  таковы, что  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  делаются на некоторых поверхностях разрывными, при условии, что  $u$ ,  $v$ ,  $w$  сами всюду непрерывны.

Вследствие исторического интереса мы изложим кратко некоторые независимые друг от друга доказательства предыдущих теорем и выясним их взаимную связь.

Пожалуй, самое убедительное из этих доказательств основано на простом обобщении некоторых уравнений, которые первоначально были даны

Коши во введении к его классическому трактату о волнах<sup>1)</sup> и которые он применил для доказательства теоремы Лагранжа о потенциале скоростей.

Если исключить функцию  $\chi$  с помощью перекрестного дифференцирования, то уравнения (2) § 15 дают

$$\frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial u}{\partial c} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial b} \frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial v}{\partial c} \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial b} \frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial w}{\partial c} \frac{\partial z}{\partial b} = \frac{\partial w_0}{\partial b} - \frac{\partial v_0}{\partial c}$$

(где  $u, v, w$  написаны вместо  $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}$ ) и два других аналогичных уравнения. Заменяя в этих уравнениях производные от  $u, v, w$  по  $a, b, c$  через их выражения как функции производных от  $u, v, w$  по  $x, y, z$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \xi \frac{\partial (y, z)}{\partial (b, c)} + \eta \frac{\partial (z, x)}{\partial (b, c)} + \zeta \frac{\partial (x, y)}{\partial (b, c)} &= \xi_0, \\ \xi \frac{\partial (y, z)}{\partial (c, a)} + \eta \frac{\partial (z, x)}{\partial (c, a)} + \zeta \frac{\partial (x, y)}{\partial (c, a)} &= \eta_0, \\ \xi \frac{\partial (y, z)}{\partial (a, b)} + \eta \frac{\partial (z, x)}{\partial (a, b)} + \zeta \frac{\partial (x, y)}{\partial (a, b)} &= \zeta_0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Умножив теперь эти уравнения по порядку на  $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial x}{\partial c}$  и сложив их, мы получим, если принять во внимание уравнение неразрывности Лагранжа (1) § 14, первое уравнение следующей симметричной системы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi}{e} &= \frac{\xi_0}{e_0} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\eta_0}{e_0} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\zeta_0}{e_0} \frac{\partial x}{\partial c}, \\ \frac{\eta}{e} &= \frac{\xi_0}{e_0} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\eta_0}{e_0} \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\zeta_0}{e_0} \frac{\partial y}{\partial c}, \\ \frac{\zeta}{e} &= \frac{\xi_0}{e_0} \frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\eta_0}{e_0} \frac{\partial z}{\partial b} + \frac{\zeta_0}{e_0} \frac{\partial z}{\partial c}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

В частном случае несжимаемой жидкости ( $e=e_0$ ) эти уравнения отличаются только обозначением  $\xi, \eta, \zeta$  от уравнений, данных Коши. Из них тотчас же следует, что значения  $\xi, \eta, \zeta$  для частицы жидкости всегда будут равны нулю, если начальные значения  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  компонент вихря для этой частицы обращаются в нуль. Это и составляет доказательство Коши теоремы Лагранжа.

Чтобы интерпретировать уравнения (3) для общего случая, рассмотрим линейный элемент, который для момента  $t=0$  лежит на вихревой линии; тогда имеем

$$\begin{aligned} \delta a &= e \frac{\xi_0}{e_0}, \\ \delta b &= e \frac{\eta_0}{e_0}, \\ \delta c &= e \frac{\zeta_0}{e_0}, \end{aligned}$$

где  $e$  бесконечно мало. Если мы вообразим, что этот элемент движется с жидкостью, то согласно уравнениям (3) его проекции на координатные оси

<sup>1)</sup> См. сноску на стр. 33.

для некоторого другого момента будут

$$\begin{aligned}\delta x &= \varepsilon \frac{\xi}{e}, \\ \delta y &= \varepsilon \frac{\eta}{e}, \\ \delta z &= \varepsilon \frac{\zeta}{e};\end{aligned}$$

это значит, что элемент будет все еще принадлежать вихревой линии и его длина, назовем ее через  $\delta s$ , будет пропорциональна  $\frac{\omega}{e}$ , где  $\omega$  — модуль вектора вихря. Обозначив через  $\sigma$  поперечное сечение вихревой нити, ось которой есть  $\delta s$ , мы видим, что произведение  $\rho \sigma \delta s$  постоянно во времени. Следовательно, напряжение  $\omega \sigma$  вихря будет постоянно<sup>1)</sup>.

Первоначально данное Гельмгольцем доказательство исходит из системы трех уравнений, которые могут быть так обобщены, что будут пригодны и для произвольной жидкости, для которой  $e$  есть функция только от  $p$ : они тогда примут вид<sup>2)</sup>

$$\left. \begin{aligned}\frac{D}{Dt} \left( \frac{\xi}{e} \right) &= \frac{\xi}{e} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\eta}{e} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\zeta}{e} \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{D}{Dt} \left( \frac{\eta}{e} \right) &= \frac{\xi}{e} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\eta}{e} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\zeta}{e} \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{D}{Dt} \left( \frac{\zeta}{e} \right) &= \frac{\xi}{e} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\eta}{e} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\zeta}{e} \frac{\partial w}{\partial z}.\end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Эти уравнения можно получить следующим образом. При существовании потенциала сил  $\Omega$  динамические уравнения § 6 можно представить в такой форме:

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - v\zeta + w\eta &= -\frac{\partial \chi'}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - w\xi + u\zeta &= -\frac{\partial \chi'}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} - u\eta + v\xi &= -\frac{\partial \chi'}{\partial z},\end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где

$$\chi' = \int \frac{dp}{e} + \frac{1}{2} q^2 + \Omega \quad (6)$$

и

$$q^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

Из второго и третьего уравнений (5), исключая  $\chi'$  при помощи перекрестного дифференцирования, получим

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} + w \frac{\partial \xi}{\partial z} - u \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) = \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z} - \xi \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right).$$

Принимая во внимание соотношение

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

<sup>1)</sup> См. N a n s o n, *Mess. of Math.*, III, 120 (1874); K i r c h h o f f, *Mechanik*, 15-я лекция (1876); S t o k e s, *Papers*, II, 47 (1883).

<sup>2)</sup> N a n s o n, см. выше.



и уравнение неразрывности

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0, \quad (8)$$

мы легко получаем первое из уравнений (4).

Чтобы интерпретировать эти уравнения, рассмотрим элемент линии, проекции которого на координатные оси в момент  $t$  равны

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \varepsilon \frac{\xi}{\rho}, \\ \delta y &= \varepsilon \frac{\eta}{\rho}, \\ \delta z &= \varepsilon \frac{\zeta}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где  $\varepsilon$  бесконечно мало. Если мы предположим, что этот элемент линии движется с жидкостью, то величина, на которую  $\delta x$  возрастает в единицу времени, равна разности значений  $u$  на обоих концах, откуда

$$\frac{D}{Dt} (\delta x) = \varepsilon \frac{\xi}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon \frac{\zeta}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Из уравнения (4) тогда следует

$$\left. \begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left( \delta x - \varepsilon \frac{\xi}{\rho} \right) &= 0, \\ \frac{D}{Dt} \left( \delta y - \varepsilon \frac{\eta}{\rho} \right) &= 0, \\ \frac{D}{Dt} \left( \delta z - \varepsilon \frac{\zeta}{\rho} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Гельмгольц заключает отсюда дальше: если соотношения (9) имеют место в момент  $t$ , то они сохраняются также и в момент  $t + \delta t$  и т. д. Это заключение, однако, не является вполне строгим: оно может быть подвержено возражениям, которые и сделал Стокс<sup>1)</sup> против некоторых ошибочных доказательств теоремы Лагранжа о потенциале скоростей<sup>2)</sup>.

Чтобы установить связь с исследованием Кельвина, заметим, что уравнения (2) выражают следующее: циркуляция по каждой из трех бесконечно малых замкнутых кривых, плоскости которых первоначально были перпендикулярны к трем координатным осям, постоянна. Если мы возьмем, например, замкнутую кривую, которая первоначально ограничивала прямоуголь-

<sup>1)</sup> См. примечание на стр. 33.

<sup>2)</sup> Необходимо упомянуть, что для случая несжимаемой жидкости Лагранж установил уравнения, которые довольно похожи на уравнения (4). *Miscell. Trans.*, II (1760) [*Оеuvres*, I, 442]. Автор выражает благодарность за это указание и вышеизложенное замечание об исследованиях Гельмгольца профессору Лармору. Уравнения, эквивалентные уравнениям, данным Лагранжем, были независимо установлены Стоксом (см. примечание выше) и положены в основание строгого доказательства теоремы о потенциале скоростей.

ник  $\delta b \delta c$ , и обозначим через  $A, B, C$  величины площадей его проекций на координатные плоскости в момент  $t$ , то получим

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial (y, z)}{\partial (b, c)} \delta b \delta c, \\ B &= \frac{\partial (z, x)}{\partial (b, c)} \delta b \delta c, \\ C &= \frac{\partial (x, y)}{\partial (b, c)} \delta b \delta c; \end{aligned}$$

тогда первое из уравнений (2) напишется <sup>1)</sup>

$$\xi A + \eta B + \zeta C = \xi_0 \delta b \delta c. \quad (11)$$

В качестве применения уравнений (4) рассмотрим движение жидкости, заключенной в эллипсоидальном сосуде, причем вектор вихря этого движения постоянен в пространстве <sup>2)</sup>. Формулы

$$\left. \begin{aligned} u &= qz - ry, \\ v &= rx - pz, \\ w &= py - qx \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

представляют, очевидно, равномерное вращение жидкости как твердого тела внутри сферической границы. Преобразуя координаты и соответствующие скорости с помощью однородного растяжения, получим формулы

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{a} &= \frac{qz}{c} - \frac{ry}{b}, \\ \frac{v}{b} &= \frac{rx}{a} - \frac{pz}{c}, \\ \frac{w}{c} &= \frac{py}{b} - \frac{qx}{a}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

представляющие некоторое движение внутри неподвижной эллипсоидальной оболочки, уравнение которой есть

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (14)$$

Теперь будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \left( \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) p, \\ \eta &= \left( \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) q, \\ \zeta &= \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) r. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

<sup>1)</sup> *Napson*, *Mess. of Math.*, VII, 182 (1878). Подобная же интерпретация гельмгольцевых уравнений была дана автором этой книги *Mess. of Math.*, VII, 41 (1877).

Наконец, необходимо еще вспомнить, что другое доказательство теоремы Лагранжа, которое основывается на элементарных динамических принципах, без ссылки на гидрокинетические уравнения, было намечено Стоксом. (*Camb. Trans.*, VIII [Papers, I, 113]) и проведено Кельвином в его работе о движении вихрей.

<sup>2)</sup> Ср. *Voigt*, *Beiträge zur Hydrodynamik*. *Gött. Nachr.*, 1891, стр. 71; *Tedone*, *Nuovo Cimento*, XXIII (1893). Прием, употребленный в тексте, взят из работы *Poincaré*, *Sur la precession des corps déformables*, *Bull. Astr.*, 1910.

Подставляя в уравнение (4), мы получим уравнение

$$(b^2 + c^2) \frac{d\rho}{dt} = (b^2 - c^2) q r, \quad (6)$$

которое может быть представлено в форме

$$a^2 (b^2 + c^2) \frac{d\rho}{dt} = (b^2 (c^2 + a^2) - c^2 (a^2 + b^2)) q r. \quad (7)$$

Так же получим два других аналогичных уравнения. Таким образом полученные уравнения тождественны по форме с уравнениями Эйлера для свободного движения твердого тела около неподвижной точки.

Мы можем легко найти интегралы

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = \text{const.} \quad (18)$$

и

$$\frac{b^2 c^2 \xi^2}{b^2 + c^2} + \frac{c^2 a^2 \eta^2}{c^2 + a^2} + \frac{a^2 b^2 \zeta^2}{a^2 + b^2} = \text{const.}; \quad (19)$$

первый из этих интегралов является подтверждением одной из теорем Гельмгольца, в то время как второй следует из постоянства энергии.

**§ 147.** Рассуждением, аналогичным рассуждению § 41, находим, что непрерывное безвихревое движение невозможно в несжимаемой жидкости, наполняющей неограниченное пространство и подверженной условию, что скорость в бесконечности обращается в нуль. Это тотчас же приводит к следующей теореме:

Движение жидкости, наполняющей неограниченное пространство и покоящейся в бесконечности, будет вполне определено, если мы знаем значения объемного расширения ( $\theta$ ) и компоненты вихря  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  для всех точек области.

В самом деле, предположим, что существуют две тройки значений  $u_1, v_1, w_1$  и  $u_2, v_2, w_2$  компонент скорости, из которых каждая тройка внутри неограниченного пространства удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \theta, \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} &= \xi, \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} &= \eta, \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= \zeta, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

а в бесконечности обращается в нуль. Величины

$$u' = u_1 - u_2,$$

$$v' = v_1 - v_2,$$

$$w' = w_1 - w_2,$$

тогда будут удовлетворять уравнениям (1) и (2) и обращаться в нуль в бесконечности, кроме того,

$$\theta = \xi = \eta = \zeta = 0.$$

А тогда они должны, в силу ранее изложенных результатов, всюду обращаться в нуль; следовательно, существует только *одно* возможное движение, удовлетворяющее данным условиям.

Тем же способом можно показать, что движение жидкости, заключенной в произвольную, *ограниченную*, односвязную область, будет определено, если мы знаем значения объемного расширения и компонент вихря для всякой точки области, а также значения нормальных компонент скорости во всякой точке границы. В случае *n*-связной области необходимо к этим данным прибавить еще значения циркуляций по различным независимым контурам этой области.

**§ 148.** Если в случае неограниченного пространства величины  $\theta$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  все обращаются в нуль вне некоторой конечной области, то полное определение  $u$ ,  $v$ ,  $w$  через значения этих величин внутри области может быть достигнуто следующим образом<sup>1)</sup>.

Компоненты скорости, обусловленные изменением плотности, можно сейчас же написать, согласно (1) § 56, так как объемное расширение  $\theta'$  в элементе  $dx' dy' dz'$ , очевидно, эквивалентно простому источнику с напряжением  $\theta' dx' dy' dz'$ . Мы получаем, таким образом,

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ v &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ w &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\theta'}{r} dx' dy' dz', \quad (2)$$

а  $r$  обозначает расстояние между точкой  $(x', y', z')$ , в которой лежит элемент объема интеграла, и точкой  $(x, y, z)$ , для которой ищутся значения  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , т. е.

$$r = \{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\}^{1/2}.$$

Интегрирование распространяется на все части пространства, для которых  $\theta'$  отлично от нуля.

Чтобы найти компоненты скорости, обусловленные *вихрями*, примем во внимание следующее: при отсутствии расширения поток через две произвольные незамкнутые поверхности, ограниченные

<sup>1)</sup> Изложенное здесь исследование в основном дано Гельмгольцем. Соответствующая кинематическая задача была впервые решена в несколько другом роде Стоксом, On the Dynamical Theory of Diffraction, Camb. Trans., IX (1849) [Papers, II, 254 . . .].

одной и той же кривой по краям, имеет одно и то же значение и, следовательно, определяется только видом и положением этой кривой. Это указывает на то, что поток через произвольную поверхность, опирающуюся на замкнутую кривую, может быть выражен через криволинейный интеграл, распространенный по этой кривой, т. е. через

$$\int (F dx + G dy + H dz). \quad (3)$$

При этом допущении согласно методу § 31 будет

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \\ v &= \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \\ w &= \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Необходимо и, как мы видели, достаточно, чтобы функции  $F$ ,  $G$ ,  $H$  удовлетворяли уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) - \Delta F$$

и двум аналогичным. Эти три функции всякий раз будут определяться соответственно только с точностью до трех аддитивных функций вида

$$\frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial z},$$

и мы можем, если пожелаем, подобрать  $\chi$  таким образом, чтобы

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

В таком случае будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \Delta F &= -\xi, \\ \Delta G &= -\eta, \\ \Delta H &= -\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Частные решения этих уравнений получим, положив  $F$ ,  $G$ ,  $H$  равными потенциалам распределения масс с объемными плотностями  $\frac{\xi}{4\pi}$ ,  $\frac{\eta}{4\pi}$ ,  $\frac{\zeta}{4\pi}$  соответственно; тогда

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\xi'}{r} dx' dy' dz', \\ G &= \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\eta'}{r} dx' dy' dz', \\ H &= \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\zeta'}{r} dx' dy' dz', \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где штрихи при буквах  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  служат для обозначения этих величин в точке  $(x', y', z')$ . Интегрирования естественно необходимо распространить по всем местам, для которых  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  отличны от нуля. Мы должны теперь показать только, что значения  $F$ ,  $G$ ,  $H$  в действительности удовлетворяют уравнению (5). Так как

$$\frac{\partial}{\partial x} r^{-1} = -\frac{\partial}{\partial x'} r^{-1},$$

то формулы (7) дают

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{1}{4\pi} \iiint \left( \xi' \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{r} + \eta' \frac{\partial}{\partial y'} \frac{1}{r} + \zeta' \frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{r} \right) dx' dy' dz'.$$

Выражение в правой части обращается в нуль согласно обобщению теоремы (4) § 42<sup>1)</sup>, так как всюду

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

в то время как

$$l\xi + m\eta + n\zeta = 0$$

на поверхности вихря (где  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  могут быть разрывны) и  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  в бесконечности обращаются в нуль.

Полное решение нашей задачи получается сложением решений (1) и (4), и оно будет

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \\ v &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \\ w &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где  $\Phi$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  имеют данные в формулах (2) и (7) значения.

Заметим еще, что ограничение, что  $\theta$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  вне некоторой области должны обращаться в нуль, несущественно. Достаточно предположить данные такими, что интегралы в (2) и (7), распространенные на бесконечные объемы, сходятся. Это будет наверно в том случае, когда  $\theta$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  для бесконечно возрастающего  $R$  имеют порядок  $R^{-n}$ , где  $R$  означает расстояние от начала, а  $n > 3$ <sup>2)</sup>. Если область, наполненная жидкостью полностью или частично ограничена поверхностями, на которых дана нормальная компонента скорости и (в случае  $n$ -связной области) заданы значения циркуляции для каждой из  $n$  независимых замкнутых кривых, то задачу можно аналогичным приемом свести к задаче одного безвихревого движения, именно к задаче типа, исследованного в главе III, одно-

<sup>1)</sup> С особенностью, встречающейся в точке  $r=0$ , здесь и раньше следует поступать так же, как и в теории тяготения. Результат благодаря этому не изменяется.

<sup>2)</sup> Ср. Leathem, Camb. Tracts. № 1, 2-е изд., стр. 44.

значную определенность которой мы там показали. Мы предоставляем читателю провести это, используя следующее замечание. Если вихри пронизывают область и начинаются и кончаются на ее границе, то целесообразно считать их продолженными за или вдоль границы таким образом, чтобы они образовали замкнутые нити, и интегралы (7) отнести к полной системе полученных таким образом вихрей. При таком представлении условие (5) все еще будет выполняться.

Существует полная аналогия между только что изложенными аналитическими соотношениями и соотношениями, имеющими место в теории электромагнетизма. Если мы напишем в уравнениях (1) и (2) § 147

$$\alpha, \beta, \gamma, \rho, u, v, w, \theta$$

вместо

$$u, v, w, \theta, \xi, \eta, \zeta, \theta,$$

то получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} &= \rho, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} &= u, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} &= v, \\ \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} &= w, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

а это как раз и есть основное соотношение названной теории;  $\alpha, \beta, \gamma$  означают тогда компоненты магнитной силы,  $u, v, w$  — компоненты электрического тока и  $\rho$  есть плотность гипотетического магнитного вещества, с помощью которого может быть представлено всякое имеющееся в поле явление магнетизма<sup>1)</sup>. Отсюда, вихревые нити соответствуют электрическим контурам, напряжение этого вихря — силам токов по этим контурам, источники и стоки — положительным и отрицательным магнитным полюсам и, наконец, скорость жидкости — магнитной силе<sup>2)</sup>.

Аналогия простирается, конечно, на все результаты, выведенные из основных уравнений; так,  $\Phi$  в уравнениях (8) соответствует магнитному потенциалу, а  $F, G, H$  компонентам „электромагнитного момента количества движения“.

**§ 149.** Чтобы интерпретировать результат, содержащийся в уравнениях (8) § 148, вычислим значения  $u, v, w$ , обусловленные изолированной замкнутой вихревой нитью, находящейся в неограниченной несжимаемой жидкости, покоящейся в бесконечности.

Так как  $\theta = 0$ , то  $\Phi = 0$ . Чтобы вычислить значения  $F, G, H$ , мы можем заменить элемент объема  $\delta x' \delta y' \delta z'$  через  $\sigma' \delta s'$ , где  $\delta s'$

<sup>1)</sup> Ср. Maxwell, *Electricity and Magnetism*, § 607. Аналогия была улучшена применением рациональной системы электрических единиц, которую предложил Хэвисайд — Heaviside, *Electrical Papers*, London, 1892, I, 199.

<sup>2)</sup> На эту аналогию впервые указал Гельмгольц; она была широко использована Кельвином в его работе об электричестве и магнетизме.

есть элемент длины нити, а  $\sigma'$  — ее поперечное сечение. Далее имеем

$$\begin{aligned}\xi' &= \omega' \frac{dx'}{ds'}, \\ \eta' &= \omega' \frac{dy'}{ds'}, \\ \zeta' &= \omega' \frac{dz'}{ds'},\end{aligned}$$

где  $\omega'$  означает длину вектора вихря. Формулы (7) § 148 дают тогда

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{dx'}{r}, \\ G &= \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{dy'}{r}, \\ H &= \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{dz'}{r}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $\kappa = \omega' \sigma'$  измеряет напряжение вихря и интегралы распространяются по всей длине нити.

Следовательно, согласно (4) § 148 будем иметь

$$u = \frac{\kappa}{4\pi} \int \left( \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} dz' - \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} dy' \right)$$

и аналогичные выражения для  $v$  и  $w$ . Мы найдем таким образом<sup>1)</sup>

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\kappa}{4\pi} \int \left( \frac{dy'}{ds'} \frac{z-z'}{r} - \frac{dz'}{ds'} \frac{y-y'}{r} \right) \frac{ds'}{r^2}, \\ v &= \frac{\kappa}{4\pi} \int \left( \frac{dz'}{ds'} \frac{x-x'}{r} - \frac{dx'}{ds'} \frac{z-z'}{r} \right) \frac{ds'}{r^2}, \\ w &= \frac{\kappa}{4\pi} \int \left( \frac{dx'}{ds'} \frac{y-y'}{r} - \frac{dy'}{ds'} \frac{x-x'}{r} \right) \frac{ds'}{r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Обозначив через  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$  части этих выражений, соответствующие элементу  $\delta s'$  нити, увидим, что результирующая  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$  перпендикулярна к плоскости, определяемой вихревой линией в точке  $(x', y', z')$  и отрезком  $r$ , а направление ее совпадает с направлением, в котором двигалась бы точка  $(x, y, z)$ , если вообразить жидкость отвердевшей и вращающейся вокруг элемента вихря в  $(x', y', z')$ . Величина результирующей будет равна

$$\{ (\delta u)^2 + (\delta v)^2 + (\delta w)^2 \}^{1/2} = \frac{\kappa \sin \chi \delta s'}{4\pi r^2}, \quad (3)$$

где  $\chi$  есть угол между  $r$  и вихревой линией в  $(x', y', z')$ .

<sup>1)</sup> Эти выражения эквивалентны формулам, полученным Стоксом, см. примечание на стр. 260.



При изменении значений символов в смысле, данном в предыдущем параграфе, этот результат тождествен с законом о действии электрического тока на магнитный полюс<sup>1)</sup>.

### Потенциал скоростей, обусловленный вихревой нитью

§ 150. В точках вне вихря существует потенциал скоростей, который можно найти следующим образом. Возьмем для простоты случай одной замкнутой вихревой нити, здесь мы будем иметь для несжимаемой жидкости согласно предыдущему параграфу

$$u = \frac{\kappa}{4\pi} \int \left( \frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{r} dy' - \frac{\partial}{\partial y'} \frac{1}{r} dz' \right). \quad (1)$$

Согласно теореме Стокса (4) § 32 мы можем заменить криволинейный интеграл, распространенный по замкнутой кривой, через поверхностный интеграл, распространенный по произвольной поверхности, которая ограничена этой замкнутой кривой. Таким образом при небольших изменениях обозначений мы имеем

$$\begin{aligned} \int (P dx' + Q dy' + R dz') &= \\ &= \int \int \left\{ l \left( \frac{\partial R}{\partial y'} - \frac{\partial Q}{\partial z'} \right) + m \left( \frac{\partial P}{\partial z'} - \frac{\partial R}{\partial x'} \right) + n \left( \frac{\partial Q}{\partial x'} - \frac{\partial P}{\partial y'} \right) \right\} dS. \end{aligned}$$

Положим

$$P = 0, \quad Q = \frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{r}, \quad R = -\frac{\partial}{\partial y'} \frac{1}{r},$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial y'} - \frac{\partial Q}{\partial z'} &= \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \frac{1}{r}, \\ \frac{\partial P}{\partial z'} - \frac{\partial R}{\partial x'} &= \frac{\partial^2}{\partial x' \partial y'} \frac{1}{r}, \\ \frac{\partial Q}{\partial x'} - \frac{\partial P}{\partial y'} &= \frac{\partial^2}{\partial x' \partial z'} \frac{1}{r}; \end{aligned}$$

следовательно, выражение (1) примет вид

$$u = \frac{\kappa}{4\pi} \int \int \left( l \frac{\partial}{\partial x'} + m \frac{\partial}{\partial y'} + n \frac{\partial}{\partial z'} \right) \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{r} dS'.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial x'} (r^{-1}) = -\frac{\partial}{\partial x} (r^{-1}),$$

<sup>1)</sup> Ampère, Théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques, Paris, 1826.

то мы получаем отсюда первое из уравнений (2); два других получаются аналогичными рассуждениями,

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ w &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где

$$\varphi = \frac{\kappa}{4\pi} \iint \left( l \frac{\partial}{\partial x'} + m \frac{\partial}{\partial y'} + n \frac{\partial}{\partial z'} \right) \frac{1}{r} dS'. \quad (3)$$

Здесь  $l, m, n$  обозначают направляющие косинусы нормали к элементу  $\delta S$  поверхности, ограниченной вихревой нитью.

Формулу (3) можно написать иначе,

$$\varphi = \frac{\kappa}{4\pi} \iint \frac{\cos \theta}{r^2} dS', \quad (4)$$

где  $\theta$  обозначает угол между  $r$  и нормалью  $(l, m, n)$ . Так как  $\cos \theta \frac{\delta S'}{r^2}$  измеряет элементарный телесный угол, под которым  $\delta S'$  видна из точки  $(x, y, z)$ , то получаем следующее: потенциал скоростей, обусловленный одной замкнутой вихревой нитью, имеет в любой точке значение, равное  $\frac{\kappa}{4\pi}$ , умноженное на телесный угол, под которым из этой точки видна поверхность, ограниченная вихрем.

Так как телесный угол изменяется на  $4\pi$ , когда рассматриваемая точка описывает замкнутую кривую, охватывающую вихревую нить, то мы снова убеждаемся в том, что значение  $\varphi$ , данное формулой (4), является циклическим с циклической постоянной  $\kappa$ ; ср. § 145.

Заметим, что выражение (4) равно расходу жидкости (взятому с отрицательным знаком) через промежуточное отверстие вихревой нити, обусловленному точечным источником с мощностью  $\kappa$  в точке  $(x, y, z)$ .

Сравнивая выражение (4) с (4) § 56, видим, что вихревая нить в известном смысле эквивалентна равномерному распределению дублетов по ограниченной ею поверхности. Оси этих дублетов должны предполагаться всюду перпендикулярными к поверхности, а плотность распределения — равной напряжению вихря. Мы принимаем здесь, что положительное направление нормали и положительное направление оси вихревой нити образуют „правую систему“; см. § 31.

Обратно, можно показать, что всякое распределение дублетов по замкнутой поверхности, при котором оси имеют направление нормалей, может быть заменено системой замкнутых вихревых нитей <sup>1)</sup>,

<sup>1)</sup> Ср. Maxwell, Electricity and Magnetism, § 485, 652.

лежащих на этой поверхности. То же заключение будет получено независимо от предыдущего из исследований следующего параграфа.

### Вихревой слой

§ 151. До сих пор мы предполагали, что  $u, v, w$  непрерывны. Теперь покажем, каким образом случаи, в которых встречаются поверхности разрыва, могут быть включены в круг действия наших теорем.

Случай, когда разрывна только *нормальная* компонента скорости, был уже рассмотрен в § 58. Если  $u, v, w$  означают компоненты скорости на одной стороне,  $u', v', w'$  — на другой стороне, то, как было показано, этот случай может быть осуществлен распределением простых источников с поверхностной плотностью

$$l(u' - u) + m(v' - v) + n(w' - w),$$

где  $l, m, n$  означают направляющие косинусы нормалей, проведенных к той стороне поверхности, скорости на которой отмечены штрихом.

Теперь рассмотрим случай, когда будет разрывной только *тангенциальная* компонента скорости, так что

$$l(u' - u) + m(v' - v) + n(w' - w) = 0. \quad (1)$$

Мы будем предполагать, что линии тока *относительного* движения, определяемые дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{u' - u} = \frac{dy}{v' - v} = \frac{dz}{w' - w}, \quad (2)$$

а также система к ним ортогональных траекторий проведены на поверхности. Пусть  $PQ, P'Q'$  будут элементы линий, которые проведены в непосредственной близости к поверхности с обеих ее сторон параллельно к некоторой линии системы (2), а  $PP', QQ'$  представляют элементы нормалей к поверхности, бесконечно малые сравнительно с  $PQ$  и  $P'Q'$ . Циркуляция по замкнутой кривой  $P'Q'QP$  будет равна тогда

$$(q' - q) PQ,$$

где  $q$  и  $q'$  означают абсолютные значения скоростей на обеих сторонах. Здесь происходит совершенно так, как если бы на месте поверхности находился бесконечно тонкий слой вихрей; при этом вышеупомянутые ортогональные траектории служили бы вихревыми линиями, а модуль вихря  $\omega$  и (переменная) толщина  $\delta n$  слоя были бы связаны соотношением

$$\omega \delta n = q' - q. \quad (3)$$

Тот же самый результат получается, если исследовать те разрывности, которые встречаются в значениях  $u, v, w$ , определяемых по формулам (4) и (7) § 148, когда последние применяются к случаю слоя плотности  $\delta n$ , внутри которого  $\xi, \eta, \zeta$  становятся бесконечными, но так, что  $\xi \delta n, \eta \delta n, \zeta \delta n$  остаются конечными <sup>1)</sup>.

В § 147, 148 мы показали, что всякое непрерывное движение жидкости, наполняющей неограниченное пространство и покоящейся в бесконечности, можно рассматривать как вызванное соответствующим распределением источников и вихрей с конечной плотностью. Мы только что видели, как можно получить непрерывным переходом к пределу случай, когда источники и вихри распределены по поверхностям с бесконечной объемной плотностью, но конечной поверхностной плотностью. Мы можем, в частности, рассматривая случай, когда соответствующая неограниченная жидкость является несжимаемой, предполагать ее разделенной на две части замкнутой поверхностью, на которой нормальные компоненты скорости будут непрерывными, а тангенциальные компоненты скорости будут разрывными, как в (12) § 58. Этот случай эквивалентен вихревому слою; мы заключаем теперь следующее: всякое непрерывное, безвихревое циклическое или нециклическое движение несжимаемой жидкости, наполняющей произвольную область, может рассматриваться как вызванное некоторым распределением вихрей по ограничивающей поверхности, которая отделяет область от остального неограниченного пространства. В случае области, простирающейся в бесконечность, это распределение относится к *конечной* части ограничивающей поверхности при условии, что жидкость покоится в бесконечности.

Эта теорема представляет дополнение к полученным в § 58 результатам.

Только что приведенные заключения могут быть иллюстрированы результатами § 91. Именно, если задана нормальная компонента  $S_n$  скорости для всей сферической поверхности  $r = a$ , то значения потенциала скоростей для внутреннего и внешнего пространства были представлены формулами

$$\varphi = \frac{a}{n} \left( \frac{r}{a} \right)^n S_n \quad \text{и} \quad \varphi = - \frac{a}{n+1} \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} S_n.$$

Отсюда, если  $\delta\epsilon$  означает угол, под которым виден из центра элемент линии, проведенной на поверхности, то относительная скорость, взятая в направлении этого элемента, будет выражаться через

$$\frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{\partial S_n}{\partial \epsilon}.$$

Таким образом результирующая относительной скорости направлена тангенциально к поверхности и перпендикулярно к линиям уровня ( $S_n = \text{const.}$ ) поверхностной сферической функции  $S_n$ ; последние линии образуют, следовательно, вихревые линии.

<sup>1)</sup> Helmholtz, см. сноску на стр. 251.

Если, например, тонкая сферическая оболочка, наполненная жидкостью и окруженная жидкостью, движется подобно тому, как и в § 92, параллельно оси  $x$ , то движение жидкости как внутри, так снаружи таково, как если бы оно было вызвано системой вихрей, распределенных на сфере по параллельным кругам; при этом напряжение элементарного вихря пропорционально проекции ширины соответствующей сферической зоны на ось  $x$ <sup>1)</sup>.

### Импульс и энергия системы вихрей

§ 152. Последующие исследования относятся к случаю системы вихрей конечных размеров в жидкости, наполняющей неограниченное пространство и покоящейся в бесконечности.

Задача найти распределение импульсивных сил с компонентами  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$ , отнесенных к единице массы, которое породило бы мгновенно из положения равновесия действительное движение с компонентами скорости  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , является до известной степени неопределенной; однако решение, достаточное для наших целей, можно получить следующим образом. Предположим, что проведена односвязная поверхность  $S$ , заключающая все вихри. Мы обозначим через  $\varphi$  однозначный потенциал скоростей, который имеется вне  $S$ , и через  $\varphi_1$  — то решение  $\Delta\varphi = 0$ , которое конечно всюду внутри  $S$ , а на поверхности связано непрерывно с  $\varphi$ . Другими словами,  $\varphi_1$  есть потенциал скоростей того движения, которое возникает внутри  $S$ , когда на поверхности  $S$  приложены импульсивные давления  $\rho\varphi$ . Если мы предположим теперь, что для внутренних точек имеют место равенства

$$X' = u + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}, \quad Y' = v + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}, \quad Z' = w + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \quad (1)$$

и для внешних точек

$$X' = 0, \quad Y' = 0, \quad Z' = 0, \quad (2)$$

то видим согласно § 11, что эти силы действительно вызвали бы мгновенное движение из состояния покоя; при этом распределение импульсивных давлений для внешних точек выражалось бы через  $\rho\varphi$ , а для внутренних точек — через  $\rho\varphi_1$ . Силы были бы разрывны на поверхности, но разрывность имеет место только для нормальных компонент, тангенциальные же компоненты обращаются в нуль как при подходе изнутри, так и снаружи, так как  $\varphi$  на поверхности переходит непрерывно в  $\varphi_1$ . Поэтому для точек, лежащих на внутренней стороне поверхности, будем иметь

$$mZ' - nY' = 0, \quad nX' - lZ' = 0, \quad lY' - mX' = 0, \quad (3)$$

где  $l$ ,  $m$ ,  $n$  означают направляющие косинусы нормалей, проведенных внутрь.

<sup>1)</sup> Те же самые заключения пригодны также и для эллиптической оболочки, которая движется параллельно главной оси; см. § 114.

Интегрируя по внутреннему объему, ограниченному поверхностью  $S$ , получим

$$\begin{aligned}
 \iiint (y\zeta - z\eta) dx dy dz &= \\
 &= \iiint \left\{ y \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - z \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} dx dy dz = \\
 &= \iiint \left\{ y \left( \frac{\partial Y'}{\partial x} - \frac{\partial X'}{\partial y} \right) - z \left( \frac{\partial X'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial x} \right) \right\} dx dy dz = \\
 &= - \iint \{ y(lY' - mX') - z(nX' - lZ') \} dS + \\
 &\quad + 2 \iiint X' dx dy dz, \quad (4)
 \end{aligned}$$

где поверхностный интеграл обращается в нуль вследствие (3). Далее мы получим

$$\begin{aligned}
 - \iiint (y^2 + z^2) \xi dx dy dz &= \\
 &= - \iiint (y^2 + z^2) \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz = \\
 &= - \iiint (y^2 + z^2) \left( \frac{\partial Z'}{\partial y} - \frac{\partial Y'}{\partial z} \right) dx dy dz = \\
 &= \iint (y^2 + z^2) (mZ' - nY') dS + \\
 &\quad + 2 \iiint (yZ' - zY') dx dy dz, \quad (5)
 \end{aligned}$$

где опять поверхностный интеграл обращается в нуль.

Таким образом для силы и пары, составляющих полный импульс системы вихрей, мы имеем выражения

$$\left. \begin{aligned}
 P &= \frac{1}{2} e \iiint (y\zeta - z\eta) dx dy dz, \\
 Q &= \frac{1}{2} e \iiint (z\xi - x\zeta) dx dy dz, \\
 R &= \frac{1}{2} e \iiint (x\eta - y\xi) dx dy dz, \\
 L &= -\frac{1}{2} e \iiint (y^2 + z^2) \xi dx dy dz, \\
 M &= -\frac{1}{2} e \iiint (z^2 + x^2) \eta dx dy dz, \\
 N &= -\frac{1}{2} e \iiint (x^2 + y^2) \zeta dx dy dz.
 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Чтобы эти выражения применить к случаю одной замкнутой вихревой нити с бесконечно малым сечением  $\sigma$ , заменим элемент объема через  $\sigma \delta s$  и напишем

$$\xi = \omega \frac{dx}{ds}; \quad \eta = \omega \frac{dy}{ds}, \quad \zeta = \omega \frac{dz}{ds}; \quad (7)$$

тогда получим

$$P = \frac{1}{2} \rho \omega \sigma \int (y dz - z dy) = \kappa \rho \iint l' dS', \quad (8)$$

$$L = -\frac{1}{2} \rho \omega \sigma \int (y^2 + z^2) dx = -\kappa \rho \iint (m' z - n' y) dS' \quad (9)$$

и дальнейшие аналогичные формулы. Криволинейный интеграл берется вдоль вихревой нити, поверхностный — по поверхности диафрагмы, ею стягиваемой, а  $l'$ ,  $m'$ ,  $n'$  суть направляющие косинусы, нормали к элементу  $\delta S'$  диафрагмы. Тождество различных видов следует из теоремы Стокса. Мы писали  $\kappa$  вместо  $\omega \sigma$ , т. е.  $\kappa$  есть циркуляция по контуру, охватывающему вихревую нить<sup>1)</sup>.

Все исследование относится, конечно, к мгновенному состоянию системы, но мы напоминаем, что импульс согласно доказательству § 119 будет постоянен во всех отношениях, если только внешние силы отсутствуют.

**§ 153.** Рассмотрим теперь *энергию* системы вихрей. Легко показать, что при предположенных условиях эта энергия постоянна, если не действуют внешние силы. В самом деле, если  $T$  есть энергия жидкости, ограниченной произвольной замкнутой поверхностью  $S$ , то, полагая в (5) § 10  $V = 0$ , будем иметь

$$\frac{DT}{Dt} = \iint (lu + mv + nw) p dS. \quad (1)$$

Если поверхность  $S$  заключает все вихри, то мы можем положить

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} q^2 + F(t), \quad (2)$$

и из (4) § 150 следует непосредственно, что на большом расстоянии  $R$  от вихрей  $p$  будет конечным, а  $lu + mv + nw$  будет порядка  $R^{-3}$ ; в то время когда поверхность  $S$  расширяется до бесконечности,  $\delta S$  будет пропорциональна  $R^2$ . Поэтому в конечном счете правая часть (1) обращается в нуль, и мы имеем

$$T = \text{const.} \quad (3)$$

<sup>1)</sup> Выражения (8) и (9) найдены с помощью элементарных рассуждений J. J. Thomson, On the Motion of Vortex Rings (Adams Prize Essay), London, 1882, стр. 5, 6; формулы (6) были затем выведены из них, однако, с обратным знаком для  $L, M, N$ . Исправление принадлежит Welsh. Интересное подтверждение формул в том виде, как они здесь даны, доставляет случай шарообразной массы, вращающейся, как твердое тело, в покоящейся жидкости при условии, что принят во внимание сферический вихревой слой, обуславливающий разрыв скорости.

Перейдем теперь к изучению некоторых важных кинематических выражений для  $T$ , причем для простоты все еще будем ограничиваться случаем, когда несжимаемая жидкость простирается в бесконечность и там находится в покое, а все вихри находятся на конечном расстоянии от начала.

Первое из этих выражений указано электромагнитной аналогией, отмеченной в § 148. Так как  $\theta = 0$  и, следовательно,  $\Phi = 0$ , то мы имеем по (4) § 148

$$2T = e \iiint (u^2 + v^2 + w^2) dx dy dz = \\ = e \iiint \left\{ u \left( \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \right) + v \left( \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} \right) + w \left( \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) \right\} dx dy dz.$$

Правая часть этого выражения может быть представлена суммой поверхностного интеграла

$$e \iint \{ F(mw - nv) + G(nu - lw) + H(w - tu) \} dS$$

и объемного интеграла

$$e \iiint \left\{ F \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + G \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + H \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} dx dy dz.$$

Для бесконечно удаленных точек  $F$ ,  $G$ ,  $H$  в конечном счете порядка  $R^{-2}$ , а  $u$ ,  $v$ ,  $w$  порядка  $R^{-3}$ , так что поверхностный интеграл обращается в нуль, и мы имеем

$$T = \frac{1}{2} e \iiint (F\xi + G\eta + H\zeta) dx dy dz, \quad (4)$$

или, вставляя значения  $F$ ,  $G$ ,  $H$  из (7) § 148,

$$T = \frac{e}{8\pi} \iiint \iiint \frac{\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'}{r} dx dy dz dx' dy' dz', \quad (5)$$

причем каждое интегрирование по объему распространяется по всему пространству, наполненному вихрями.

Этому выражению можно дать несколько другой вид. Предположим, что система вихрей составлена из нитей, пусть  $\delta s$ ,  $\delta s'$  означают элементы длины двух произвольных нитей;  $\sigma$ ,  $\sigma'$  — соответствующие поперечные сечения, а  $\omega$ ,  $\omega'$  — соответствующие значения модуля вихря. За элементы объема мы возьмем  $\sigma \delta s$  и  $\sigma' \delta s'$ , тогда выражение под знаком интеграла в (5) будет равно

$$\frac{\cos \varepsilon}{r} \cdot \omega \sigma \delta s \cdot \omega' \sigma' \delta s',$$

где  $\varepsilon$  означает угол между  $\delta s$  и  $\delta s'$ . Положив

$$\omega \sigma = \kappa, \quad \omega' \sigma' = \kappa',$$



будем иметь

$$T = \frac{e}{4\pi} \sum \kappa \kappa' \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds ds', \quad (6)$$

причем двойной интеграл берется вдоль осей нитей, а суммирование  $\sum$  включает все наличные пары нитей (и каждую только один раз).

Множитель при  $e$  в формуле (6) тождествен с выражением для энергии некоторой системы электрических токов, распространяющихся в проводниках, положения которых совпадают с положениями вихревых нитей, а их силы суть  $\kappa, \kappa', \dots$ <sup>1)</sup>.

Вышеизложенное исследование в действительности есть только обращение употребительного в учебниках электромагнетизма приема рассуждения, которым доказывается равенство

$$\frac{1}{4\pi} \sum ii' \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds ds' = \frac{1}{2} \iiint (a^2 + \beta^2 + \gamma^2) dx dy dz,$$

где  $i, i'$  означают силу тока в линейных проводниках, элементы которых обозначены через  $ds, ds'$  и  $a, \beta, \gamma$  представляют компоненты магнитной силы в произвольной точке поля.

Рассматриваемая в этом параграфе теорема чисто кинематической природы и основывается только на предположении, что функции  $u, v, w$  внутри всего пространства удовлетворяют уравнению неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

и обращаются в нуль в бесконечности. Поэтому она с помощью простого обобщения распространяется на случай, рассмотренный в § 144; там мы принимали, что жидкость, лишенная вихрей, циркулирует через отверстия в неподвижных телах; теперь можно считать, что  $u, v, w$  во всех точках пространства, не занятого жидкостью, равны нулю. Исследование § 151 показывает, что полученное таким образом распределение скоростей может рассматриваться как происходящее от системы вихревых слоев, которые совпадают с граничными поверхностями. Энергия этой системы получается простым изменением формулы (6), и она, следовательно, пропорциональна энергии соответствующей системы электропроводящих поверхностей.

Этим самым высказанная перед этим в § 144 теорема доказана

При условиях, указанных в начале § 152, мы получаем еще другое употребительное выражение для  $T$

$$T = e \iiint \{u(y\zeta - z\eta) + v(z\xi - x\zeta) + w(x\eta - y\xi)\} dx dy dz \quad ^2). \quad (7)$$

Чтобы проверить его, преобразуем правую часть уравнения с помощью уже часто применявшегося приема, причем поверхностные интегралы мы можем опустить, исходя из тех же соображений, как и в предыдущем параграфе. Первый из трех членов дает

$$\begin{aligned} e \iiint u \left\{ y \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - z \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} dx dy dz = \\ = -e \iiint \left\{ (vy + wz) \frac{\partial u}{\partial x} - u^2 \right\} dx dy dz. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> При этом в основу кладется рациональная система электрических единиц; см. стр. 263

<sup>2)</sup> Lamb, Motion of fluids, § 136 (1879).

Если преобразовать таким же образом два других члена и затем сложить, то получим, используя уравнения неразрывности:

$$e \iiint \left( u^2 + v^2 + w^2 + xu \frac{\partial u}{\partial x} + yv \frac{\partial v}{\partial y} + zw \frac{\partial w}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

или, наконец, если еще преобразовать последние три члена

$$\frac{1}{2} e \iiint (u^2 + v^2 + w^2) dx dy dz.$$

В случае конечной области поверхностные интегралы должны сохраниться <sup>1)</sup>. Поэтому мы должны к правой части (7) прибавить еще выражение

$$e \iint \left\{ (lu + mv + nw) (xu + yv + zw) - \frac{1}{2} (lx + my + nz) q^2 \right\} dS, \quad (8)$$

где  $q^2 = u^2 + v^2 + w^2$ . Это упрощается в случае неподвижной границы.

Значение выражения (7) должно оставаться без изменения при всяком переносе начала координат. Поэтому должны иметь место уравнения

$$\left. \begin{aligned} \iiint (v\zeta - w\eta) dx dy dz &= 0, \\ \iiint (w\xi - u\zeta) dx dy dz &= 0, \\ \iiint (u\eta - v\xi) dx dy dz &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Эти уравнения, которые легко могут быть установлены интегрированием по частям, получаются также из того соображения, что при отсутствии внешних сил компоненты импульса, параллельные координатным осям, должны быть постоянны. Если взять сначала случай жидкости, заключенной в неподвижный сосуд конечной величины, то мы будем иметь в обозначениях § 152

$$P = e \iiint u dx dy dz - e \iint l\varphi dS; \quad (10)$$

при этом  $\varphi$  обозначает потенциал скоростей вблизи стенки сосуда, где движение безвихревое.

Поэтому согласно (5) § 146 имеем

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= e \iiint \frac{\partial u}{\partial t} dx dy dz - e \iint l \frac{\partial \varphi}{\partial t} dS = \\ &= -e \iiint \frac{\partial x'}{\partial x} dx dy dz + e \iiint (v\zeta - w\eta) dx dy dz - e \iint l \frac{\partial \varphi}{\partial t} dS. \end{aligned} \quad (11)$$

Первый и третий члены последних выражений исчезают, так как согласно (4) § 20 и (6) § 146 на границе  $x' = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ . Поэтому для всякой системы замкнутых вихрей, которая заключена в неподвижный сосуд, будем иметь.

$$\frac{dP}{dt} = e \iiint (v\zeta - w\eta) dx dy dz \quad (12)$$

<sup>1)</sup> J. J. Thomson, см. примечание на стр. 271.

и два аналогичных уравнения. В § 119 мы показали, что  $P$  будет постоянно, когда сосуд бесконечно велик и стенки его находятся на бесконечном расстоянии от вихрей. Это дает первое из трех уравнений (9).

Если мы уравнения (9) получили бы другим путем, то мы могли бы обратно заключить из них о постоянстве компонент импульса  $P, Q, R$ <sup>1)</sup>.

### Прямолинейные вихри

§ 154. Если движение происходит только в двух измерениях  $x, y$ , то  $w=0$ , а  $u, v$  будут функциями только от  $x, y$ . Поэтому

$$\xi = 0, \quad \eta = 0,$$

и вихревые линии суть прямые, параллельные оси  $z$ . Теория принимает тогда очень простой вид.

Формулы (8) § 148 переходят в следующие:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

функции  $\varphi, \psi$  должны удовлетворять уравнениям

$$\Delta_1 \varphi = -\theta, \quad \Delta_1 \psi = \zeta, \quad (2)$$

где

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

а также соответствующим граничным условиям.

В случае несжимаемой жидкости, которой мы теперь ограничимся,

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (3)$$

где  $\psi$  есть функция тока § 59. Известно из теории логарифмического потенциала, что решение уравнения

$$\Delta_1 \psi = \zeta, \quad (4)$$

где  $\zeta$  есть данная функция от  $x, y$ , есть

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \iint \zeta' \ln r \, dx' \, dy' + \psi_0, \quad (5)$$

причем  $\zeta'$  есть значение  $\zeta$  в точке  $(x', y')$ , а

$$r = \{(x - x')^2 + (y - y')^2\}^{1/2}.$$

„Добавочная функция“  $\psi_0$  есть какое-либо решение уравнения

$$\Delta_1 \psi_0 = 0; \quad (6)$$

она позволяет нам удовлетворить граничным условиям.

<sup>1)</sup> J. J. Thomson, см. примечание на стр. 271.

В случае безграничной жидкости, которая покоится в бесконечности,  $\psi_0$  сводится к постоянной. Формулы (3) и (5) тогда дают

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{2\pi} \iint \zeta' \frac{y-y'}{r^2} dx' dy', \\ v &= \frac{1}{2\pi} \iint \zeta' \frac{x-x'}{r^2} dx' dy'. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Вихревая нить с координатами  $x'$ ,  $y'$  и напряжением  $\kappa$  сообщает таким образом жидкости в точке  $(x, y)$  скорость, компоненты которой равны

$$-\frac{\kappa}{2\pi} \frac{y-y'}{r^2} \quad \text{и} \quad \frac{\kappa}{2\pi} \frac{x-x'}{r^2}.$$

Эта скорость перпендикулярна к прямой, соединяющей точки  $(x, y)$  и  $(x', y')$ , и ее величина равна  $\frac{\kappa}{2\pi r}$ .

Вычислим теперь интегралы

$$\iint u\zeta dx dy \quad \text{и} \quad \iint v\zeta dx dy,$$

в которых интегрирование распространяется на все части плоскости  $xy$ , для которой  $\zeta$  отлично от нуля. Мы имеем

$$\iint u\zeta dx dy = -\frac{1}{2\pi} \iiint \zeta \zeta' \frac{y-y'}{r^2} dx dy dx' dy',$$

причем интегрирование по поверхности каждый раз распространяется по поперечным сечениям всех вихрей. Каждому члену

$$\zeta \zeta' \frac{y-y'}{r^2} dx dy dx' dy'$$

этого интеграла соответствует другой член

$$\zeta \zeta' \frac{y'-y}{r^2} dx dy dx' dy',$$

и они взаимно друг друга уничтожают. Отсюда получаем

$$\left. \begin{aligned} \iint u\zeta dx dy &= 0, \\ \iint v\zeta dx dy &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Обозначив, как выше, напряжение вихря через  $\kappa$ , эти результаты можно написать так

$$\sum \kappa u = 0, \quad \sum \kappa v = 0. \quad (9)$$

Так как напряжение каждого вихря от времени не зависит, то уравнения (9) выражают, что точка с координатами

$$\bar{x} = \frac{\sum \kappa x}{\sum \kappa}, \quad \bar{y} = \frac{\sum \kappa y}{\sum \kappa} \quad (10)$$

в течение всего движения остается неподвижной.

Эта точка совпадает с центром инерции тонкого слоя вещества, распределенного на плоскости  $xu$  с поверхностной плотностью  $\zeta$ , и мы можем назвать ее центром системы вихрей; прямую, параллельную оси  $z$ , проекцией которой служит эта точка, мы назовем осью системы. Если  $\sum \kappa = 0$ , то центр лежит в бесконечности или он неопределен.

§ 155. Некоторые интересные примеры можно получить в случаях, в которых имеется один или несколько изолированных вихрей с бесконечно малым сечением.

1) Предположим, что мы имеем только одну вихревую нить и что вектор вихря  $\zeta$  имеет всюду внутри бесконечно малого сечения один и тот же знак. Центр вихря в только что определенном смысле лежит теперь или внутри нити или бесконечно близко к ней. Так как этот центр находится в покое, то и нить, как целое, будет сохраняться, хотя ее части могут совершать относительные движения и ее центр не обязательно должен всегда лежать в том же самом элементе жидкости.

Каждая частица на конечном расстоянии  $r$  от центра нити будет описывать окружность около нити, как оси, с постоянной скоростью  $\frac{\kappa}{2\pi r}$ . Область вне вихря двусвязная, и циркуляция по всякой простой замкнутой кривой, заключающей вихрь, равна, конечно,  $\kappa$ . Безвихревое движение окружающей жидкости то же самое, как и в (2) § 27.

2) Предположим, что мы имеем два вихря с напряжениями  $\kappa_1, \kappa_2$ ,  $A$  и  $B$  означают их центры,  $O$  означает центр системы. Движение каждой из двух нитей, как целого, обусловлено вполне действием другой и поэтому всегда перпендикулярно к  $AB$ . Поэтому обе нити сохраняют всегда одинаковое расстояние друг от друга и вращаются с постоянной угловой скоростью около точки  $O$ , которая будет неподвижной. Эту угловую скорость легко найти; разделив скорость точки  $A$ , равную  $\frac{\kappa_2}{2\pi AB}$ , на расстояние  $AO$ , где

$$AO = \frac{\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} AB;$$

мы получим тогда

$$\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2\pi \cdot AB^2}.$$

Если  $\kappa_1, \kappa_2$  имеют одинаковый знак, т. е. направления вращения в обоих вихрях совпадают, то  $O$  лежит между  $A$  и  $B$ ; если же оба

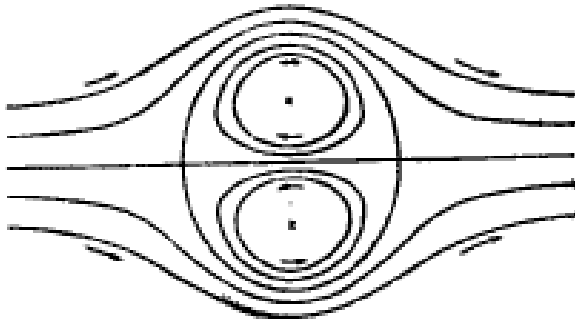
вращения имеют противоположные направления, то  $O$  лежит на продолжении  $AB$  и  $BA$ .

Если  $\kappa_1 = -\kappa_2$ , то  $O$  будет лежать в бесконечности, но легко видеть, что  $A$  и  $B$  движутся теперь с одинаковой скоростью  $\frac{\kappa_1}{2\pi \cdot AB}$  перпендикулярно к  $AB$ , в то время как  $AB$  само сохраняет свое направление. Подобного рода комбинация двух одинаковых, но противоположно направленных вихрей называется „парой вихрей“. Она представляет двумерную аналогию к круглому вихревому кольцу (§ 160) и обладает многими свойствами последнего.

Линии тока вихревой пары образуют систему соосных окружностей, как показывает фиг. 9 (стр. 93); вихри находятся в обеих пограничных точках  $(\pm a, 0)$ . Чтобы найти *относительные* линии тока, мы сообщим этой системе общую скорость, которая равна и противоположна скорости вихря; получим таким образом в качестве функции тока относительного движения в обозначениях п. 2 § 64

$$\psi = \frac{\kappa_1}{2\pi} \left( \frac{x}{2a} + \ln \frac{r_1}{r_2} \right). \quad (1)$$

Фиг. 34, которая для удобства повернута на  $90^\circ$ , показывает некоторые из этих линий. Линия  $\psi = 0$  состоит частично из оси  $y$  и частично из овала, окружающего оба вихря.



Фиг. 34.

Ясно, что заключенная в этом овале жидкость сопровождает вихревую пару в ее движении, в то время как движение вне овала в точности совпадает с движением, которое было бы вызвано твердым цилиндром с таким же контуром; ср. § 71.

Полуоси овала приблизительно имеют длину  $2,09a$  и  $1,73a$ <sup>1)</sup>.

В этом примере и в аналогичном примере с вихревыми кольцами иногда трудно осознать, почему вихри не могут быть неподвижными. Если заменить на фиг. 9 (стр. 93) нити твердыми цилиндрами с малым круглым сечением, то цилиндры могут действительно оставаться в покое, при предположении, что они будут связаны независимой от движения жидкости жесткой связью; если же такое соединение отсутствует, то оба цилиндра в первый момент будут притягиваться, согласно принципу, рассмотренному в § 23. Это притяжение, однако, прекращается, если наложить общую скорость  $V$  соответствующей величины, направление которой противоположно тому циклическому движению, которое существует в середине между обоими цилиндрами. Чтобы найти величину  $V$ , заметим, что скорости жидкости в обеих точках  $(a \pm c, 0)$ , при малых значениях  $c$ , приблизительно будут

<sup>1)</sup> Ср. Thomson W., On Vortex Atoms, Phil. Mag. (4), XXXIV, 20 (1867) [Papers, IV, 1] и Riecke, Göt. Nachr., 1888, где нарисованы также траектории частиц жидкости.

равны по абсолютной величине при условии, если  $V$  выбрано таким образом, что

$$V + \frac{\kappa}{2\pi c} - \frac{\kappa}{4\pi a} = \frac{\kappa}{2\pi c} + \frac{\kappa}{4\pi a} - V,$$

где  $\kappa$  означает циркуляцию. Поэтому имеем

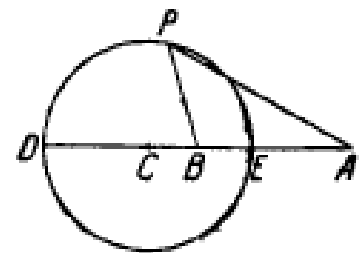
$$V = \frac{\kappa}{4\pi a},$$

а это есть в точности скорость поступательного движения вихревой пары в первоначальной форме задачи <sup>1)</sup>.

Так как скорость жидкости во всех точках плоскости симметрии всюду к ней касательна, то мы можем предположить, что эта плоскость образует с обеих сторон твердую границу для жидкости; таким образом получаем случай одного прямолинейного вихря вблизи твердой плоской стенки, к которой он параллелен. Нить движется параллельно этой плоской стенке со скоростью  $\frac{\kappa}{4\pi h}$ , где  $h$  означает расстояние от стенки.

Так как линии тока суть окружности, то мы можем получить также решение и для случая, когда единственная вихревая нить находится в пространстве, ограниченном изнутри или снаружи неподвижным круговым цилиндром.

Пусть, например,  $EPD$  на фиг. 35 есть поперечное сечение цилиндра,  $A$  — положение вихря (он находится в этом случае во внешнем пространстве) и  $B$  будет „зеркальное изображение“  $A$  относительно окружности  $EPD$ , т. е.



Фиг. 35.

$$CB \cdot CA = c^2,$$

где  $C$  есть центр круга, а  $c$  означает радиус круга. Если  $P$  есть произвольная точка окружности, то будем иметь

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AE}{BE} = \frac{AD}{BD} = \text{const.},$$

так что окружность занимает положение одной из линий тока, обусловленных вихревой парой в  $A, B$ . Так как движение вихря  $A$  перпендикулярно к  $AB$ , то, очевидно, все условия задачи будут выполняться, если мы предположим, что  $A$  описывает окружность около оси цилиндра с постоянной скоростью

$$-\frac{\kappa}{2\pi \cdot AB} = -\frac{\kappa \cdot CA}{2\pi (CA^2 - c^2)};$$

$\kappa$  обозначает при этом напряжение вихря  $A$ .

<sup>1)</sup> Более точное исследование дал Hicks, On the Condition of Steady Motion of two Cylinders in a Fluid, Quart. Journ. Math., XVII, 194 (1881).

Точно так же вихрь напряжением  $\kappa$ , который находится внутри неподвижного круглого цилиндра, например в  $B$ , будет описывать окружность с постоянной скоростью

$$\frac{\kappa CB}{2\pi (c^2 - CB^2)}.$$

Необходимо, однако, заметить <sup>1)</sup>, что в случае внешнего вихря движение только тогда определяется вполне, когда, кроме напряжения  $\kappa$ , задано также значение циркуляции по замкнутой кривой, окружающей цилиндр (но не вихрь).

При вышележащем решении эта циркуляция происходит от зеркального изображения вихря в  $B$  и равна  $-\kappa$ . Эта циркуляция может быть уничтожена присоединением вихря напряжения  $+\kappa$  в  $C$ ; мы будем иметь тогда для скорости вихря  $A$

$$-\frac{\kappa CA}{2\pi (CA^2 - c^2)} + \frac{\kappa}{2\pi CA} = -\frac{\kappa c^2}{2\pi CA (CA^2 - c^2)}.$$

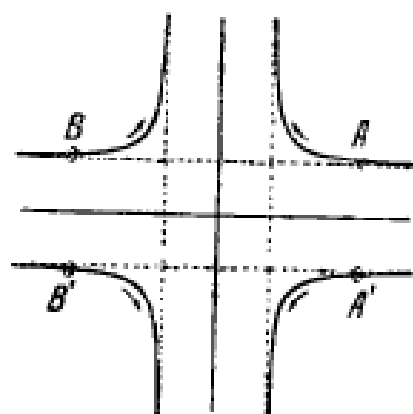
В случае заданной наперед циркуляции  $\kappa'$  мы должны прибавить еще к этому член  $\frac{\kappa'}{2\pi} CA$ .

Фёппль <sup>2)</sup> применил метод изображений для исследования случая, когда цилиндр, сопровождаемый вихревой парой, расположенной симметрично относительно линии движения центра цилиндра, движется в жидкости со скоростью  $U$ . Оказывается, что вихри могут сохранить свое положение относительно цилиндра, когда они лежат на кривой

$$2ry = r^2 - a^2,$$

и напряжения вихрей для данного положения на этой кривой равны

$$\pm 2Uy \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right).$$



Фиг. 36.

Фёппль нашел, однако, что это положение будет неустойчиво при несимметричных возмущениях.

Некоторые траектории вихрей в потоке, обтекающем цилиндр (с циркуляцией), были построены Уайльтоном <sup>3)</sup>. Траектория вихря в полукруговой области была исследована К. Де <sup>4)</sup> по методу Раута, на который будет ссылка на стр. 281.

3) Если мы имеем четыре параллельных прямолинейных вихря, центры которых образуют прямоугольник  $ABB'A'$  и напряжения которых для вихрей  $A'$  и  $B$  равны  $\kappa$ , а для вихрей  $A$  и  $B'$  равны  $-\kappa$ , то непосредственно ясно, что центры будут всегда образовывать прямоугольник. Из рассмотрения направлений вращений, указанных на фиг. 36, видно, что действие пары  $AA'$  и  $BB'$  состоит в том,

<sup>1)</sup> Tarleton F. A., On a Problem in Vortex Motion, Proc. R. I. A., 12 дек. 1892.

<sup>2)</sup> Föppl L., Wirbelbewegung hinter einem Kreisylinder. Sitzb. d. k. Bayr. Akad. d. Wiss., 1913.

<sup>3)</sup> Walton, Proc. R. I. Acad., XXXVIII, A (1928).

<sup>4)</sup> De K., Bull. of the Calcutta Math. Soc., XXI, 197 (1929).



чтобы удалить  $B$  и  $B'$  друг от друга и одновременно уменьшить их скорость, перпендикулярную к линии, их соединяющей. Плоскости, перпендикулярные и делящие пополам  $AB$  и  $AA'$ , могут (или одна, или обе) быть взяты как неподвижные твердые границы; мы получаем, следовательно, случай движения вихревой пары с одинаковыми, но противоположными по знаку напряжениями по направлению к твердой плоской стенке (или от нее) или случай движения одного вихря в углу между двумя перпендикулярными друг к другу стенками.

Если  $x$  и  $y$  означают координаты вихря  $A$  относительно плоскости симметрии, то легко находим

$$\dot{x} = -\frac{\kappa}{4\pi} \frac{x^2}{y^2}, \quad \dot{y} = \frac{\kappa}{4\pi} \frac{y^2}{x^2}, \quad (2)$$

где

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

После деления мы получаем дифференциальное уравнение траектории

$$\frac{dx}{x^2} + \frac{dy}{y^2} = 0,$$

откуда следует

$$a^2 (x^2 + y^2) = 4x^2y^2,$$

где  $a$  есть произвольная постоянная, или, введя полярные координаты,

$$r = \frac{a}{\sin 2\theta}. \quad (3)$$

Так как

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \frac{\kappa}{4\pi},$$

то вихрь движется таким образом, как если бы он находился под действием отталкивающей центральной силы с центром в начале координат, действующей по закону обратной пропорциональности третьей степени расстояния <sup>1)</sup>.

§ 156. Если положим, как в главе IV,

$$z = x + iy, \quad w = \varphi + i\psi, \quad (1)$$

то потенциальную функцию и функцию тока, представляющие ряд равноотстоящих вихрей, каждый из которых имеет напряжение  $\kappa$  и координаты которых соответственно равны

$$(0, 0), \quad (\pm a, 0), \quad (\pm 2a, 0), \quad \dots,$$

<sup>1)</sup> Greenhill, On Plane Vortex Motion, Quart. Journ. Math., XV (1887); Gröbli, Die Bewegung paralleler gerädliniger Wirbelfäden, Zürich, 1877. Эти работы содержат другие интересные примеры прямолинейных вихревых систем. Случай системы одинаковых и параллельных вихрей, точки пересечения которых с плоскостью образуют вершины правильного многоугольника, был рассмотрен J. J. Thomson, Motion of Vortex Rings, стр. 94. Он нашел, что такая конфигурация тогда и только тогда будет устойчива, когда число вихрей не превосходит шести. Дальнейшие литературные указания относительно специальных проблем см. Hicks, Brit. Ass. Rep., 1882, стр. 41 и т. д.; Love, см. примечание на стр. 240.

Остроумный метод преобразования плоских проблем вихревого движения принадлежит Routh, Some Applications of Conjugate Functions, Proc. Lond. Math. Soc., XII, 73 (1881).

получим из выражения

$$w = \frac{i\kappa}{2\pi} \ln \sin \frac{\pi z}{a}; \quad (2)$$

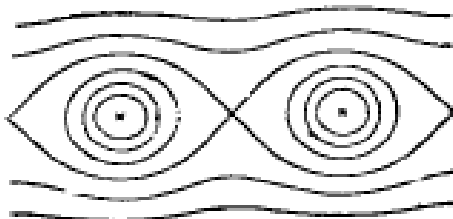
ср. § 64, п. 4. Это дает

$$u - iv = -\frac{dw}{dz} = -\frac{i\kappa}{2a} \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{a} \quad (3)$$

и затем

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\kappa}{2a} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{2\pi y}{a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{2\pi y}{a}\right) - \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}, \\ v &= \frac{\kappa}{2a} \frac{\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{2\pi y}{a}\right) - \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Эти выражения для  $y = \pm\infty$  дают  $u = \mp \frac{1}{2} \frac{\kappa}{a}$ ,  $v = 0$ ; для отдаленных томок ряд вихрей действительно эквивалентен вихревому слою с равномерным напряжением  $\frac{\kappa}{a}$  (§ 151).



Фиг. 37.

Фиг. 37 показывает расположение линий тока.

Легко теперь убедиться, что если мы имеем два параллельных ряда равноотстоящих вихрей, симметричных относительно плоскости  $y=0$ , причем напряжение вихря для верхнего ряда обозначено через  $\kappa$ , а для нижнего ряда через  $-\kappa$  (см. фиг. 38), то вся система как целое движется поступательно с постоянной скоростью, причем  $b$  есть расстояние между двумя рядами. Средняя скорость в

$$U = \frac{\kappa}{2a} \operatorname{cth} \frac{\pi b}{a}; \quad (5)$$



Фиг. 38.

Фиг. 39.

плоскости симметрии равна  $\frac{\kappa}{a}$ . Скорость с увеличением расстояния вне обоих рядов стремится к нулю.

Если расположение изменено таким образом, что каждый вихри одного ряда помещен против середины интервала между двумя соседними вихрями другого ряда, как показывает фиг. 39, то общая

поступательная скорость будет равна

$$V = \frac{\kappa}{2a} \operatorname{th} \frac{\pi b}{a}. \quad (6)$$

Средняя скорость в срединной плоскости равна опять  $\frac{\kappa}{a}$ .

Устойчивость этих различных расположений была исследована Карманом <sup>1)</sup>. Возьмем сначала случай одного вихревого ряда и предположим, что вихрь, невозмущенные координаты которого суть  $(ma, 0)$ , смещен в точку  $(ma + x_m, y_m)$ . Формулы § 154 для начального движения вихря в начале координат дают

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= -\frac{\kappa}{2\pi} \sum \frac{y_0 - y_m}{r_m^2}, \\ \frac{dy_0}{dt} &= \frac{\kappa}{2\pi} \sum \frac{x_0 - x_m - ma}{r_m^2}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где

$$r_m^2 = (x_0 - x_m - ma)^2 + (y_0 - y_m)^2, \quad (8)$$

а  $m$  под знаком суммы пробегает все положительные и отрицательные целые значения за исключением нуля. Если пренебречь членами второго порядка относительно перемещений, то мы получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= -\frac{\kappa}{2\pi a^2} \sum_m \frac{y_0 - y_m}{m^2}, \\ \frac{dy_0}{dt} &= -\frac{\kappa}{2\pi a^2} \sum_m \frac{1}{m} - \frac{\kappa}{2\pi a^2} \sum_m \frac{x_0 - x_m}{m^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Первый член в выражении для  $\frac{dy_0}{dt}$  может быть опущен, так как он не зависит от возмущения <sup>2)</sup>.

Рассмотрим теперь возмущение типа

$$x_m = \alpha e^{im\varphi}, \quad y_m = \beta e^{im\varphi}, \quad (10)$$

где предполагается, что  $\varphi$  лежит между 0 и  $2\pi$ . Если  $\varphi$  будет мало, то возмущение имеет характер волны с длиной  $\frac{2\pi a}{\varphi}$ . Мы получаем тогда

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\lambda\beta, \quad \frac{d\beta}{dt} = -\lambda\alpha, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\kappa}{\pi a^2} \left( \frac{1 - \cos \varphi}{1^2} + \frac{1 - \cos 2\varphi}{2^2} + \frac{1 - \cos 3\varphi}{3^2} + \dots \right) = \\ &= \frac{\kappa}{4\pi a^2} \varphi (2\pi - \varphi). \end{aligned} \quad (12)$$

<sup>1)</sup> v. Kármán, Flüssigkeits- und Luftwiderstand, Phys. Zeitschr., XIII (1912); Gött. Nachr., стр. 547 (1912). Исследование в этих работах дано только в общих чертах. Я сделал различные дополнения.

<sup>2)</sup> При суммировании вихри должны быть взяты попарно равноотстоящими от начала, так как иначе результат был бы неопределенным. Исследование относится в сущности к средним частям очень длинного, но не бесконечно длинного ряда; тогда можно пренебречь упомянутым членом.

Расположение это, следовательно, неустойчиво, так как возмущение в конце концов растет как  $e^{\lambda t}$ . Если длина волны велика по сравнению с  $a$ , то мы имеем приближенно

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{\kappa \varphi}{a^2}; \quad (13)$$

ср. § 234.

Перейдем к случаю *симметричного* двойного ряда; положения вихрей в верхнем и нижнем ряду (фиг. 33) в момент  $t$  могут быть заданы соответственно через

$$\begin{pmatrix} ma + Ut + x_m, & \frac{1}{2} b + y_m \\ na + Ut + x'_n, & -\frac{1}{2} b + y'_n \end{pmatrix},$$

где  $U$  означает общую скорость поступательного движения системы и начало координат лежит в плоскости симметрии.

Компоненты скорости какого-нибудь вихря *верхнего* ряда, например, вихря, для которого  $m=0$ , зависящие от остальных вихрей самого этого ряда, даны, как выше, формулой (9), причем  $\sum m^{-1}$  может быть отброшена. Компоненты же, обусловленные вихрем  $n$  *нижнего* ряда, будут таковы:

$$\frac{\kappa}{2\pi} \frac{b + y_0 - y'_n}{r_n^2}, \quad -\frac{\kappa}{2\pi} \frac{x_0 - x'_n - na}{r_n^2},$$

где

$$r_n^2 = (x_0 - x'_n - na)^2 + (y_0 - y'_n + b)^2.$$

Если пренебречь членами второго порядка относительно возмущений, то мы находим после небольшого приведения

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\kappa} \left( \frac{dx_0}{dt} + U \right) &= - \sum_m \frac{y_0 - y_m}{m^2 a^2} + \sum_n \frac{b}{n^2 a^2 + b^2} + \\ &+ \sum_n \frac{n^2 a^2 - b^2}{(n^2 a^2 + b^2)^2} (y_0 - y'_n) + \sum_n \frac{2nab}{(n^2 a^2 + b^2)^2} (x_0 - x'_n), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\kappa} \frac{dy_0}{dt} &= - \sum_m \frac{x_0 - x_m}{m^2 a^2} + \sum_n \frac{n^2 a^2 - b^2}{(n^2 a^2 + b^2)^2} (x_0 - x'_n) - \\ &- \sum_n \frac{2nab}{(n^2 a^2 + b^2)^2} (y_0 - y'_n), \end{aligned} \quad (15)$$

где суммирование по  $n$  распространяется от  $-\infty$  до  $+\infty$ , включая нуль. Те члены (14), которые независимы от возмущения, сокращаются, так как согласно (5)

$$U = \frac{\kappa}{2a} \operatorname{cth} \frac{\pi b}{a} = \frac{\kappa}{2\pi} \sum_n \frac{b}{n^2 a^2 + b^2}.$$

Если положить теперь

$$\left. \begin{aligned} x_m &= \alpha e^{im\varphi}, & y_m &= \beta e^{im\varphi}, \\ x'_n &= \alpha' e^{in\varphi}, & y'_n &= \beta' e^{in\varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где  $0 < \varphi < 2\pi$ , то уравнения (14), (15) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2\pi a^2}{\kappa} \frac{da}{dt} &= -A\beta - B\alpha' - C\beta' \\ \frac{2\pi a^2}{\kappa} \frac{d\beta}{dt} &= -A\alpha - C\alpha' + B\beta'. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Если положить для краткости

$$k = \frac{b}{a}, \quad (18)$$

то значения коэффициентов <sup>1)</sup> будут

$$A = \sum_m \frac{1 - e^{im\varphi}}{m^2} - \sum_n \frac{n^2 - k^2}{(n^2 + k^2)^2} = \frac{1}{2} \varphi (2\pi - \varphi) + \frac{\pi^2}{\text{sh}^2 k\pi}, \quad (19)$$

$$B = \sum_n \frac{2nke^{in\varphi}}{(n^2 + k^2)^2} = i \left\{ \frac{\pi\varphi \text{ch } k(\pi - \varphi)}{\text{sh } k\pi} - \frac{\pi^2 \text{sh } k\varphi}{\text{sh}^2 k\pi} \right\}, \quad (20)$$

$$C = \sum_n \frac{(n^2 - k^2)e^{in\varphi}}{(n^2 + k^2)^2} = -\frac{\pi^2 \text{ch } k\varphi}{\text{sh}^2 k\pi} - \frac{\pi\varphi \text{sh } k(\pi - \varphi)}{\text{sh } k\pi}. \quad (21)$$

Чтобы вывести теперь уравнение для *нижнего* ряда, мы должны только изменить знак  $\kappa$  и  $b$  и переставить буквы со штрихом и без него друг с другом.

Тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{2\pi a^2}{\kappa} \frac{da'}{dt} &= A\beta' - B\alpha + C\beta, \\ \frac{2\pi a^2}{\kappa} \frac{d\beta'}{dt} &= A\alpha' + C\alpha + B\beta. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Формулы (17) и (22) представляют уравнения движения вихревой системы при нормальном — если можно его так назвать — ее возмущении.

Решения получаются двух типов. При первом типе мы имеем

$$a = a', \quad \beta = -\beta', \quad (23)$$

и поэтому

$$\left. \begin{aligned} \frac{2\pi a^2}{\kappa} \frac{da}{dt} &= -B\alpha - (A - C)\beta, \\ \frac{2\pi a^2}{\kappa} \frac{d\beta}{dt} &= -(A + C)\alpha - B\beta. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Решение содержит в качестве множителя показательную функцию  $e^{\lambda t}$ , причем значения  $\lambda$  определяются из уравнения

$$\frac{2\pi a^2}{\kappa} \lambda = -B \pm \sqrt{A^2 - C^2}. \quad (25)$$

При втором типе имеем

$$a = -a', \quad \beta = \beta', \quad (26)$$

<sup>1)</sup> Значения сумм по  $n$  могут быть получены из ряда Фурье:

$$\frac{\text{ch } k(\pi - \varphi)}{\text{sh } k\pi} = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{k} + \frac{2k \cos \varphi}{1^2 + k^2} + \frac{2k \cos 2\varphi}{2^2 + k^2} + \dots \right\}.$$

и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \frac{2\pi a^2}{\kappa} \frac{da}{dt} &= B\alpha - (A+C)\beta, \\ \frac{2\pi a^2}{\kappa} \frac{d\beta}{dt} &= -(A-C)\alpha + B\beta. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Соответствующие значения  $\lambda$  даны уравнением

$$\frac{2\pi a^2}{\kappa} \lambda = B \pm \sqrt{A^2 - C^2}. \quad (28)$$

Так как  $B$  является чисто мнимым, в то время как  $A$  и  $C$  действительны, то для устойчивости в каждом из обоих случаев необходимо, чтобы для допускаемых значений  $\varphi$  величина  $A^2$  не была бы больше, чем  $C^2$ . Если  $\varphi = \pi$ , то получим

$$A+C = \frac{1}{2} \pi^2 \operatorname{th}^2 \frac{1}{2} k\pi, \quad A-C = \frac{1}{2} \pi^2 \operatorname{cth}^2 \frac{1}{2} k\pi, \quad (29)$$

и  $A^2 - C^2$  будет положительно. Отсюда мы заключаем, что оба типа неустойчивы.

Переходим теперь к *несимметрическому* случаю; обозначим положения смещенных вихрей соответственно через

$$\left( ma + Vt + x_m, \quad \frac{1}{2} b + y_m \right), \\ \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) a + Vt + x'_n, \quad -\frac{1}{2} b + y'_n \right],$$

где  $V$  дается формулой (6). Необходимые формулы мы получим, если в предыдущих результатах напомним  $n + \frac{1}{2}$  вместо  $n$ .

Уравнения (17) и (22) будут таким образом иметь место, если <sup>1)</sup> мы положим

$$A = \sum_m \frac{1 - e^{im\varphi}}{m^2} - \sum_n \frac{\left( n + \frac{1}{2} \right)^2 - k^2}{\left\{ \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 + k^2 \right\}^2} = \\ = \frac{1}{2} \varphi (2\pi - \varphi) - \frac{\pi^2}{\operatorname{ch}^2 k\pi}, \quad (30)$$

$$B = \sum_n \frac{(2n+1) k e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}}{\left\{ \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 + k^2 \right\}^2} = \\ = i \left\{ \frac{\pi\varphi \operatorname{sh} k(\pi - \varphi)}{\operatorname{ch} k\pi} + \frac{\pi^2 \operatorname{sh} k\varphi}{\operatorname{ch}^2 k\pi} \right\}, \quad (31)$$

$$C = \sum_n \frac{\left\{ \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 - k^2 \right\} e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}}{\left\{ \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 + k^2 \right\}^2} = \\ = \frac{\pi^2 \operatorname{ch} k\varphi}{\operatorname{ch}^2 k\pi} - \frac{\pi\varphi \operatorname{ch} k(\pi - \varphi)}{\operatorname{ch} k\pi}. \quad (32)$$

<sup>1)</sup> Значения сумм по  $n$  могут быть получены из ряда Фурье

$$\frac{\operatorname{sh} k(\pi - \varphi)}{\operatorname{ch} k\pi} = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{k \cos \frac{1}{2} \varphi}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + k^2} + \frac{k \cos \frac{3}{2} \varphi}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + k^2} + \dots \right\}.$$

Эти значения для  $A$ ,  $B$ ,  $C$  должны быть подставлены в (25) и (28). Как и в предшествующем случае, для устойчивости необходимо, чтобы  $A^2$  было не больше, чем  $C^2$ . Если теперь положить

$$\psi = \pi, \quad C = 0,$$

то  $A$  тоже должно обращаться в нуль или мы должны иметь

$$\operatorname{ch}^2 k\pi = 2, \quad k\pi = 0,8814, \quad \frac{b}{a} = k = 0,281. \quad (33)$$

Расположение, таким образом, является неустойчивым, если только отношение расстояния между обоими рядами к расстоянию между двумя соседними вихрями не будет иметь в точности указанное значение.

Чтобы решить, будет ли это расположение при указанных выше условиях на самом деле устойчивым для всех значений  $\varphi$  между 0 и  $2\pi$ , положим на мгновение

$$k(\pi - \varphi) = x, \quad k\pi = \mu,$$

так что

$$\left. \begin{aligned} k^2 A &= -\frac{1}{2} x^2, \\ k^2 C &= \frac{1}{2} (\mu x \operatorname{ch} \mu x \operatorname{ch} x - \mu^2 \operatorname{sh} \mu \operatorname{sh} x), \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

где  $x$  изменяется от  $-\mu$  до  $+\mu$ . Так как  $A$  есть четная, а  $C$  — нечетная функция от  $x$ , то для сравнения абсолютных значений достаточно предположить  $x$  положительным. Отсюда, полагая

$$y = \mu \operatorname{ch} \mu \operatorname{ch} x - \mu^2 \operatorname{sh} \mu \frac{\operatorname{sh} x}{x} - x, \quad (35)$$

мы должны определить, будет ли это выражение положительно для  $0 < x < \mu$ . Так как

$$\mu = 0,8814, \quad \operatorname{ch} \mu = \sqrt{2}, \quad \operatorname{sh} \mu = 1,$$

то  $y$  будет положительным для  $x=0$  и обращается в нуль для  $x=\mu$ . Далее имеем

$$\frac{dy}{dx} = \mu \operatorname{ch} \mu \operatorname{sh} x + \mu^2 \operatorname{sh} \mu \frac{\operatorname{sh} x}{x^2} - \mu^2 \operatorname{sh} \mu \frac{\operatorname{ch} x}{x} - 1, \quad (36)$$

и это равно  $-1$  для  $x=0$  и обращается в нуль для  $x=\mu$ . Наконец, имеем

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \mu \operatorname{ch} \mu \operatorname{ch} x - \mu^2 \operatorname{sh} \mu \frac{\operatorname{sh} x}{x} + 2\mu^2 \operatorname{sh} \mu \frac{\operatorname{ch} x}{x^2} - 2\mu^2 \operatorname{sh} \mu \frac{\operatorname{sh} x}{x^3}. \quad (37)$$

Легко определить, что это выражение для всех значений  $x$  будет положительным, так как  $\frac{\operatorname{th} x}{x} < 1$ . Если, таким образом,  $x$  возрастает от 0 до  $\mu$ ,

то  $\frac{dy}{dx}$  возрастает непрерывно от  $-1$  до 0 и поэтому будет отрицательным. Отсюда следует, что  $y$  убывает от своего первоначального положительного значения до нуля, т. е. оно будет положительным.

Мы заключаем отсюда, что данное расположение всегда будет устойчивым <sup>1)</sup>, за исключением случаев, в которых

$$x = \pm \mu, \text{ а } \varphi = 0 \text{ или } 2\pi;$$

в этих исключительных случаях  $B=0$ , согласно (31), и, следовательно,  $\lambda=0$ . Так как возмущенные частицы в этом случае все имеют одинаковую фазу, то причина того, почему период возмущения является бесконечным, легко может быть усмотрена.

Эти последние вихревые цепочки с несимметричным расположением вихрей представляют особый интерес потому, что они являются прообразом тех следов вихрей, которые часто наблюдают позади цилиндрического тела, перемещающегося в жидкости. Это обстоятельство и вызывает дальнейшие исследования.

То влияние, которое оказывают на устойчивость цепочек боковые твердые границы, равноотстоящие от средней линии, было исследовано Розенхедом <sup>2)</sup>. Он нашел, что когда отношение  $\frac{a}{h}$  интервала  $a$  между двумя соседними вихрями одного ряда к расстоянию  $h$  между стенками возрастает от 0 до 0,815, несимметричное расположение вихрей является устойчивым только для определенных значений отношения  $\frac{b}{a}$ , которое непрерывно уменьшается от 0,281 до 0,256. Но если  $\frac{a}{h} > 0,815$ , то устойчивость имеется для ряда значений  $\frac{b}{a}$ . А когда  $\frac{a}{h} > 1,419$ , то это расположение вихрей будет устойчивым для всех значений  $\frac{b}{a}$ .

Симметричное же расположение, с другой стороны, всегда будет неустойчивым.

**§ 157.** Если, как в случае вихревой пары или системы вихревых пар, алгебраическая сумма напряжений всех вихрей равна нулю, то мы можем разработать двухмерную теорию „импульса“ аналогично теории, данной в § 119, 152 для случаев конечной вихревой системы. Более подробный вывод предоставляем сделать читателю. Если  $P$  и  $Q$  обозначают компоненты импульса, соответственно параллельные оси  $x$  и оси  $y$ , и  $N$  обозначает момент импульса относительно оси  $Oz$ , причем все взято для слоя жидкости с толщиной по оси  $z$ , равной единице, то мы найдем, что

$$\left. \begin{aligned} P &= e \iint y \zeta \, dx \, dy, & Q &= -e \iint x \zeta \, dx \, dy, \\ N &= -\frac{1}{2} e \iint (x^2 + y^2) \zeta \, dx \, dy. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Если, например, в случае одной вихревой пары напряжение вихрей будет равно  $\pm \kappa$ , а их расстояние друг от друга равно  $c$ , то им-

<sup>1)</sup> Эта теорема была высказана Карманом без доказательства.

<sup>2)</sup> Rosenhead, Phil. Trans., CCVIII, 275 (1929), см. также Glauegt, Proc. Roy. Soc. A, CXX, 34 (1928).



пульс будет равен  $\rho \kappa c$  и направлен вдоль прямой, делящей под прямым углом отрезок  $c$  пополам.

Постоянство импульса дает

$$\sum \kappa x = \text{const.}, \quad \sum \kappa y = \text{const.}, \quad \sum \kappa (x^2 + y^2) = \text{const.} \quad (2)$$

Можно также показать, что в рассматриваемом случае кинетическая энергия движения будет

$$T = -\frac{1}{2} e \int \psi \zeta \, dx \, dy = -\frac{1}{2} e \sum \kappa \varphi. \quad (3)$$

Если  $\sum \kappa$  не равна нулю, то тогда как энергия, так и момент импульса оба будут бесконечны, что легко можно проверить в случае одного прямолинейного вихря.

Теория системы изолированных прямолинейных вихрей была приведена в очень изящный вид Кирхгофом <sup>1)</sup>.

Если обозначить положения центров соответствующих вихрей через  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$ , их напряжения через  $\kappa_1, \kappa_2, \dots$ , то согласно § 154 будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{\partial W}{\partial y_1}, & \kappa_1 \frac{dy_1}{dt} &= \frac{\partial W}{\partial x_1}, \\ \kappa_2 \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{\partial W}{\partial y_2}, & \kappa_2 \frac{dy_2}{dt} &= \frac{\partial W}{\partial x_2}, \\ &\dots & & \dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где

$$W = \frac{1}{2\pi} \sum \kappa_1 \kappa_2 \ln r_{12} \quad (5)$$

и  $r_{12}$  обозначает расстояние между вихрями  $\kappa_1, \kappa_2$ .

Так как  $W$  зависит только от *относительного* положения вихрей, то оно не изменяет своего значения, если  $x_1, x_2, \dots$  будут увеличены на одну и ту же величину; отсюда следует, что

$$\sum \frac{\partial W}{\partial x_1} = 0,$$

а также

$$\sum \frac{\partial W}{\partial y_1} = 0.$$

Это дает первые два уравнения (2); однако доказательство теперь не ограничивается случаем  $\sum \kappa = 0$ . Ход доказательства в основном такой же, как и в § 154. Далее из (4) получаем

$$\sum \kappa \left( x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right) = - \sum \left( x \frac{\partial W}{\partial y} - y \frac{\partial W}{\partial x} \right),$$

или, после введения полярных координат  $(r_1, \theta_1), (r_2, \theta_2), \dots$  для различных вихрей,

$$\sum \kappa r \frac{dr}{dt} = - \sum \frac{\partial W}{\partial \theta}. \quad (6)$$

<sup>1)</sup> Kirchhoff, *Mechanik*, 20-я лекция.

Так как  $W$  остается без изменения, если вращать координатные оси в их плоскостях около начала, то имеем

$$\sum \frac{\partial W}{\partial \theta} = 0;$$

отсюда следует

$$\sum \kappa r^2 = \text{const.}, \quad (7)$$

а это уравнение совпадает с третьим уравнением (2), но оно свободно от предполагаемого там ограничения.

Дальнейший интеграл (4) получается следующим путем. Мы имеем

$$\sum \kappa \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \sum \left( x \frac{\partial W}{\partial x} + y \frac{\partial W}{\partial y} \right),$$

или

$$\sum \kappa r^2 \frac{d\theta}{dt} = \sum r \frac{\partial W}{\partial r}. \quad (8)$$

Если все  $r$  будут увеличены в отношении  $1 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  бесконечно мало, то приращение  $W$  будет равно

$$\sum \varepsilon r \frac{\partial W}{\partial r}.$$

Но так как новое расположение вихревой системы геометрически подобно первоначальному, то расстояния  $r_{12}$  меняются в том же самом отношении  $1 + \varepsilon$ , и, следовательно, если принять во внимание (5), приращение  $W$  будет равно  $\frac{\varepsilon}{2\pi} \sum \kappa_1 \kappa_2$ . Следовательно, (8) может быть написано в форме

$$\sum \kappa r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum \kappa_1 \kappa_2. \quad (9)$$

**§ 158.** Полученные результаты независимы от формы поперечных сечений вихря до тех пор, пока размеры сечений малы сравнительно со взаимным расстоянием вихрей. Простейший случай круглого сечения и представляет интерес для исследования, является ли эта форма устойчивой. Этот вопрос был исследован Кельвином<sup>1)</sup>.

Когда возмущение происходит только в двух измерениях, вычисления делаются очень простыми. Предположим, как в § 27, что область внутри круга радиуса  $r = a$  с центром в начале наполнена жидкостью с повсюду равным вектором вихря  $\omega$  и что этот круг находится в жидкости с безвихревым движением. Если движение на границе круга будет непрерывно, то будем иметь для  $r < a$

$$\psi = -\frac{1}{4} \omega (a^2 - r^2) \quad (1)$$

и для  $r > a$

$$\psi = -\frac{1}{2} \omega a^2 \ln \frac{a}{r}. \quad (2)$$

Чтобы исследовать влияние небольшого безвихревого возмущения, предположим, что для  $r < a$

$$\psi = -\frac{1}{4} \omega (a^2 - r^2) + A \frac{r^2}{a^2} \cos (s\theta - \sigma t)$$

и для  $r > a$

$$\psi = -\frac{1}{2} \omega a^2 \lg \frac{a}{r} + A \frac{a^2}{r^2} \cos (s\theta - \sigma t), \quad (3)$$

<sup>1)</sup> W. Thomson, On the Vibrations of a Columnar Vortex, Phil. Mag. (5), X, 155 (1880) [Papers, IV, 152].

где  $s$  обозначает целое число, а  $\sigma$  подлежит еще определению. Постоянное  $A$  должно иметь в обоих этих выражениях одно и то же значение, так как радиальная компонента  $-\frac{\partial\psi}{r\partial\theta}$  скорости на контуре вихря, на котором приближенно  $r=a$ , должна быть непрерывна. Если в качестве уравнения контура мы возьмем

$$r = a + a \cos (s\theta - \sigma t), \quad (4)$$

то мы должны только еще выразить то, что поперечная компонента  $\frac{\partial\psi}{\partial r}$  скорости непрерывна. Это дает

$$\frac{1}{2} \omega r + s \frac{A}{a} \cos (s\theta - \sigma t) = \frac{\frac{1}{2} \omega a^2}{r} - \frac{sA}{a} \cos (s\theta - \sigma t).$$

Если мы из уравнения (4) подставим значение  $r$  и пренебрежем квадратом  $a$ , то получим

$$\omega a = -\frac{2sA}{a}. \quad (5)$$

До сих пор исследование было чисто кинематическим; динамическая теорема о том, что вихревые линии движутся вместе с жидкостью, показывает, что нормальная компонента скорости для частицы на контуре должна быть равна нормальной компоненте скорости самого контура. Это условие дает

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -\frac{\partial\psi}{r\partial\theta} - \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\partial r}{r\partial\theta'}$$

где  $r$  имеет значение (4), или в другом виде

$$\sigma a = s \frac{A}{a} + \frac{1}{2} \omega a \frac{sa}{a}. \quad (6)$$

Если исключить отношение  $\frac{A}{a}$  из уравнений (5) и (6), то найдем

$$\sigma = \frac{1}{2}(s-1)\omega. \quad (7)$$

Таким образом возмущение, представленное тригонометрическими функциями (3), представляет собой гофр, перемещающийся по окружности вихря с угловой скоростью

$$\frac{\sigma}{s} = \frac{(s-1)}{s} \frac{1}{2} \omega. \quad (8)$$

Это есть угловая скорость по отношению к пространству, которое мы считаем неподвижным; по отношению же к вращающейся жидкости угловая скорость будет равна

$$\frac{\sigma}{s} - \frac{1}{2} \omega = -\frac{1}{2} \frac{\omega}{s}, \quad (9)$$

и ее направление противоположно направлению вращения жидкости.

Для  $s=2$  возмущенное поперечное сечение есть эллипс, который вращается с угловой скоростью  $\frac{1}{4}\omega$  вокруг своего центра.

Поперечные и продольные колебания изолированного прямолинейного вихревого столба были также изучены Кельвином в цитированной работе. Прямолинейная форма оказывается устойчивой и для возмущений общего характера.

В недавней работе Розенхид <sup>1)</sup> исследовал вопрос об устойчивости несимметричной кармановской дорожки вихрей с конечным поперечным сечением. Оказывается, что такая дорожка будет устойчивой для строго двумерных возмущений и неустойчивой по отношению к синусоидальной продольной деформации, длина волны которой меньше некоторой доли диаметра.

§ 159. Частный случай эллиптического возмущения может быть решен точно следующим образом <sup>2)</sup>.

Предположим, что пространство внутри эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

наполнено жидкостью с равномерной завихренностью  $\omega$ , в то время как окружающая жидкость движется без вихрей. Оказывается, что все условия задачи будут удовлетворены, если мы предположим, что эллиптический контур без изменения вида вращается с угловой скоростью  $n$ , которая еще подлежит определению.

Формула для внешней области согласно (4) § 72 может быть написана сразу; мы будем иметь

$$\psi = \frac{1}{4} n (a+b)^2 e^{-2\xi} \cos 2\eta + \frac{1}{2} \omega ab \xi, \quad (2)$$

где  $\xi$ ,  $\eta$  обозначают теперь эллиптические координаты, рассмотренные в п. 3 § 71, а циклическая постоянная  $n$  положена равной  $lab\omega$ .

Значение  $\psi$  для внутренней области должно удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \omega \quad (3)$$

с граничным условием

$$\frac{ux}{a^2} + \frac{vy}{b^2} = -ny \frac{x}{a^2} + nx \frac{y}{b^2}. \quad (4)$$

Оба эти условия будут выполняться для функции

$$\psi = \frac{1}{2} \omega (Ax^2 + By^2) \quad (5)$$

при условии, что

$$A + B = 1, \quad Aa^2 - Bb^2 = \frac{n}{\omega} (a^2 - b^2). \quad (6)$$

Мы должны теперь еще выразить, что на контуре вихря не имеет места тангенциальное скольжение, т. е. значения для  $\frac{\partial \psi}{\partial \xi}$ , полученные из (2) и (5), там совпадают. Если мы положим

$$x = c \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = c \operatorname{sh} \xi \sin \eta,$$

где

$$c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

то получим после дифференцирования, приравнявая коэффициенты при  $\cos 2\eta$ , дополнительное условие

$$-\frac{1}{2} n (a+b)^2 e^{-2\xi} = \frac{1}{2} \omega c^2 (A-B) \operatorname{ch} \xi \operatorname{sh} \xi,$$

<sup>1)</sup> Proc. Roy. Soc. A., CXXVII, 590 (1930).

<sup>2)</sup> Kirchhoff, Mechanik, 20-я лекция; Basset, Hydrodynamics, II, 41.

где  $\xi$  есть параметр эллипса (1). Это условие эквивалентно уравнению

$$A - B = -\frac{n}{\omega} \frac{a^2 - b^2}{ab}, \quad (7)$$

так как для точек эллипса

$$\operatorname{ch} \xi = \frac{a}{c}, \quad \operatorname{sh} \xi = \frac{b}{c}.$$

В соединении с уравнением (6) это дает

$$Aa = Bb = \frac{ab}{a + b} \quad (8)$$

и

$$n = \frac{ab}{(a + b)^2} \omega. \quad (9)$$

Для  $a = b$  это совпадает с нашим прежним приближенным результатом.

Компоненты скорости  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  частицы вихря по отношению к главным осям эллипса определяются формулами

$$\dot{x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + ny, \quad \dot{y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - nx.$$

Отсюда получается

$$\frac{\dot{x}}{a} = -n \frac{y}{b}, \quad \frac{\dot{y}}{b} = n \frac{x}{a}. \quad (10)$$

Интегрируя, находим

$$\left. \begin{aligned} x &= ka \cos (nt + \epsilon), \\ y &= kb \sin (nt + \epsilon). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где  $k$  и  $\epsilon$  суть произвольные постоянные; *относительными* траекториями частиц будут эллипсы, которые подобны контуру вихря, и они описываются частицами по гармоническому закону.

Если  $x'$ ,  $y'$  обозначают координаты частицы по отношению к неизменной в пространстве системе координат, то мы получаем

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos nt - y \sin nt = \frac{1}{2} k (a + b) \cos (2nt + \epsilon) + \\ &\quad + \frac{1}{2} k (a - b) \cos \epsilon, \\ y' &= x \sin nt + y \cos nt = \frac{1}{2} k (a + b) \sin (2nt + \epsilon) - \\ &\quad - \frac{1}{2} k (a - b) \sin \epsilon. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Абсолютные траектории, таким образом, будут окружности, которые описываются с угловой скоростью  $2n$ <sup>1)</sup>.

**§ 159a.** Движение твердого тела в жидкости, имеющей завихрение, является очень интересной проблемой, но, к сожалению, она трудна для изучения. Единственный доступный рассмотрению случай есть двумерное движение жидкости с равномерным завихрением.

<sup>1)</sup> Что касается дальнейших исследований в этом направлении, см. Hill, On the Motion of Fluid part of which is moving rotationally and part irrotationally, Phil. Trans., 1884; Love, On the Stability of certain Vortex Motions, Proc. Lond. Math. Soc. (1), XXV, 18 (1893).

Пусть  $x_0, y_0$  обозначают координаты точки  $C$  (цилиндрического) тела относительно неподвижных осей;  $x, y$  — координаты произвольной точки жидкости относительно параллельных осей, проходящих через  $C$ , а  $(u, v)$  обозначают компоненты скорости относительно  $C$ . Тогда мы имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \ddot{x}_0 + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} - \zeta v &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \ddot{y}_0 + u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta u &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ср. (3) § 12 и (5) § 146. Так как

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (2)$$

и  $\zeta$  постоянна, то оказывается, что  $\frac{\partial u}{\partial t}$  и  $\frac{\partial v}{\partial t}$  являются производными от некоторой функции от  $x, y, t$  соответственно по  $x$  и  $y$ . Если мы обозначим эту функцию через  $-\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ , то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= -\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= -\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

а это есть условие того, что

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi + i\psi)$$

есть аналитическая функция комплексного переменного  $x + iy$ . Вследствие этого  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  будет вполне определено, если будет известен вид  $\varphi$ <sup>1)</sup>.

Уравнения (1) дают теперь

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - (\dot{x}_0 x + \dot{y}_0 y) - \frac{1}{2} q^2 + \zeta \varphi, \quad (4)$$

где

$$q^2 = u^2 + v^2. \quad (5)$$

Перейдем к применению этих результатов к некоторым случаям движения кругового цилиндра. Точку  $C$  естественно взять на оси.

Предположим сначала, что невозмущенное движение жидкости представляет равномерное вращение  $\omega$  около начала, так что  $\zeta = 2\omega$ . Функция тока для движения относительно движущейся точки  $(x_0, y_0)$  будет равна тогда

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{1}{2} \omega \{ (x_0 + x)^2 + (y_0 + y)^2 \} + \dot{x}_0 y - \dot{y}_0 x = \\ &= \frac{1}{2} \omega r^2 + \omega r (x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta) + \frac{1}{2} \omega (x_0^2 + y_0^2) + \\ &\quad + r (\dot{x}_0 \sin \theta - \dot{y}_0 \cos \theta), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

<sup>1)</sup> Proudman, On the Motion of Solids in a Liquid possessing Vorticity, Proc. R. S., XCII, 408 (1916).

причем мы ввели полярные координаты с началом  $C$ . Относительная функция тока для возмущенного движения будет

$$\psi = \frac{1}{2} \omega r^2 + \omega \left( r - \frac{a^2}{r} \right) (x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta) + \frac{1}{2} \omega (x_0^2 + y_0^2) + \left( r - \frac{a^2}{r} \right) (\dot{x}_0 \sin \theta - \dot{y}_0 \cos \theta), \quad (7)$$

так как она удовлетворяет уравнению  $\Delta_1 \psi = 2\omega$  и дает  $\psi = \text{const.}$  для  $r = a$ , а для  $r = \infty$  совпадает с (6).

Отсюда следует

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \omega \left( r - \frac{a^2}{r} \right) (\dot{x}_0 \cos \theta + \dot{y}_0 \sin \theta) + \left( r - \frac{a^2}{r} \right) (\ddot{x}_0 \sin \theta - \ddot{y}_0 \cos \theta) \quad (8)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\omega \left( r + \frac{a^2}{r} \right) (\dot{x}_0 \sin \theta - \dot{y}_0 \cos \theta) + \left( r + \frac{a^2}{r} \right) (\ddot{x}_0 \cos \theta + \ddot{y}_0 \sin \theta), \quad (9)$$

при этом мы опустили члены, независимые от  $r$  и  $\theta$ . Далее для  $r = a$  имеем

$$\frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = \omega a + 2\omega (x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta) + 2(\dot{x}_0 \sin \theta - \dot{y}_0 \cos \theta)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2} q^2 = 2\omega^2 a (x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta) + 2\omega a (\dot{x}_0 \sin \theta - \dot{y}_0 \cos \theta) + \dots, \quad (10)$$

где члены, не влияющие на результирующую силу давления на цилиндр, были опущены. Если мы теперь подставим это выражение в (4), то получим для  $r = a$

$$\frac{p}{\rho} = a (\ddot{x}_0 \cos \theta + \ddot{y}_0 \sin \theta) - 4\omega a (\dot{x}_0 \sin \theta - \dot{y}_0 \cos \theta) - 2\omega^2 a (x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta) + \dots \quad (11)$$

Компоненты силы, вызываемой давлениями жидкости на цилиндр, представляются тогда в следующем виде <sup>1)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} - \int_0^{2\pi} p \cos \theta a d\theta &= -M' (\ddot{x}_0 + 4\omega \dot{y}_0 - 2\omega^2 x_0); \\ - \int_0^{2\pi} p \sin \theta a d\theta &= -M' (\ddot{y}_0 - 4\omega \dot{x}_0 - 2\omega^2 y_0). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где  $M' = \pi \rho a^3$ . Если  $M$  означает массу самого цилиндра на единицу длины то уравнения движения будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \mu \ddot{x} + 4\omega \dot{y} - 2\omega^2 x &= \frac{X}{M'}, \\ \mu \ddot{y} - 4\omega \dot{x} - 2\omega^2 y &= \frac{Y}{M'}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

<sup>1)</sup> Cp. G. I. Taylor, Motion of Solids in Fluids when the Flow is not Irrotational, Proc. R. S. A., XCIII, 99 (1916).

где  $\mu = 1 + \frac{M}{M'}$  и индекс нуль опущен, так как он больше не нужен. Если мы положим

$$z = x + iy,$$

то уравнения (13) равнозначны с уравнением

$$\mu \ddot{z} - 4i\omega \dot{z} - 2\omega^2 z = \frac{X + iY}{M'}. \quad (14)$$

Чтобы найти свободное движение для случая, когда

$$X = 0, \quad Y = 0,$$

возьмем  $z$  пропорциональным  $e^{im\omega t}$ ; тогда получим

$$\mu m^2 - 4m + 2 = 0. \quad (15)$$

Когда  $\mu < 2$ , т. е. масса цилиндра меньше массы вытесненной жидкости, тогда  $m$  будет действительным и решение имеет вид

$$z = Ae^{im_1\omega t} + Be^{im_2\omega t} \quad (16)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  положительны. Этим представлено движение по „прямому“ эпициклу. В качестве частных случаев возможны круговые орбиты, и они будут устойчивыми. Если же  $\mu > 2$ , то для  $m$  получаются комплексные значения и решение будет иметь вид

$$z = (Ae^{at} + Be^{-at}) e^{ibt}, \quad (17)$$

орбита в таком случае с возрастанием  $t$  приближается к логарифмической спирали. Если  $\mu = 2$ , то  $(m-1)^2 = 0$  и

$$z = (A + Bt) e^{i\omega t}. \quad (18)$$

Хотя и возможен случай, как мы должны были ожидать, что цилиндр, имеющий с жидкостью одинаковую среднюю плотность, движется вместе с жидкостью по круговому пути, однако это движение, как только что было показано, будет неустойчивым.

Если имеется налицо радиально действующая сила, направление которой поворачивается вместе с жидкостью и которая дана формулой

$$X + iY = Re^{i\omega t}, \quad (19)$$

то уравнение (14) для  $\mu = 2$  удовлетворяется, полагая

$$z = re^{i\omega t}, \quad (20)$$

если только

$$\ddot{r} = \frac{1}{2} \frac{R}{M'}. \quad (21)$$

Цилиндр может, таким образом, двигаться по отношению к вращающейся жидкости вдоль радиуса <sup>1)</sup>, но это движение должно быть опять классифицировано как неустойчивое <sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Ср. Taylor, см. сноску на стр. 295.

<sup>2)</sup> Некоторые случаи, в которых шар движется во вращающейся жидкости, были исследованы Прудманом, см. примечание выше; S. F. Grace, Proc. R. S. A., CII, 89 (1922); Taylor, Proc. R. S. A., CII, 180 (1922).



Теперь предположим, что жидкость в невозмущенном состоянии находится в ламинарном движении, параллельном оси  $Ox$  с постоянным завихрением  $2\omega$ ; функция тока выразится тогда так:

$$\psi_0 = \omega (y_0 + y)^2 = \frac{1}{2} \omega r^2 (1 - \cos 2\theta) + 2\omega y_0 r \sin \theta + \omega y_0^2. \quad (22)$$

При возмущенном движении относительно цилиндра будем иметь

$$\begin{aligned} \psi = \frac{1}{2} \omega r^2 - \frac{1}{2} \omega \left( r^2 - \frac{a^4}{r^2} \right) \cos 2\theta + 2\omega y_0 \left( r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta + \\ + \omega y_0^2 + \left( r - \frac{a^2}{r} \right) (\dot{x}_0 \sin \theta - \dot{y}_0 \cos \theta). \end{aligned} \quad (23)$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = 2\omega \dot{y}_0 \left( r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta + \left( r - \frac{a^2}{r} \right) (\ddot{x}_0 \sin \theta - \ddot{y}_0 \cos \theta), \quad (24)$$

причем члены, которые не зависят от  $r$  и  $\theta$ , опущены. Мы будем иметь, таким образом,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 2\omega \dot{y}_0 \left( r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta + \left( r + \frac{a^2}{r} \right) (\ddot{x}_0 \cos \theta + \ddot{y}_0 \sin \theta). \quad (25)$$

Для  $r = a$  согласно формуле (23) имеем

$$\frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\omega a + 4\omega a \sin^2 \theta + 4\omega y_0 \sin \theta + 2(\dot{x}_0 \sin \theta - \dot{y}_0 \cos \theta), \quad (26)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} q^2 = -4\omega^2 a y_0 \sin \theta - 2\omega a (\dot{x}_0 \sin \theta - \dot{y}_0 \cos \theta) + \\ + 16\omega^2 a y_0 \sin^3 \theta + 8\omega a y_0 (\dot{x}_0 \sin^2 \theta - \dot{y}_0 \sin^2 \theta \cos \theta) + \dots \end{aligned} \quad (27)$$

при этом сохранены только те члены, которые входят в выражение результирующей силы давления на цилиндр. Подставляя это выражение в (4), для  $r = a$  получим

$$\begin{aligned} \frac{P}{\rho} = a (\ddot{x}_0 \cos \theta + \ddot{y}_0 \sin \theta) + 2\omega a \dot{x}_0 (\sin \theta - 4 \sin^3 \theta) + \\ + 2\omega a \dot{y}_0 (\cos \theta + 4 \sin^2 \theta \cos \theta) + 4\omega^2 a y_0 (\sin \theta - 4 \sin^3 \theta) + \dots \end{aligned} \quad (28)$$

Отсюда следует <sup>1)</sup>

$$\left. \begin{aligned} - \int_0^{2\pi} p \cos \theta a d\theta &= -M' (\ddot{x}_0 + 4\omega \dot{y}_0), \\ - \int_0^{2\pi} p \sin \theta a d\theta &= -M' (\ddot{y}_0 - 4\omega \dot{x}_0 - 8\omega^2 y_0). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

<sup>1)</sup> Ср. Taylor, см. примечание на стр. 295.

Если мы опустим значки, то уравнения движения цилиндра будут

$$\left. \begin{aligned} \mu \ddot{x} + 4\omega \dot{y} &= \frac{X}{M'} \\ \mu \ddot{y} - 4\omega \dot{x} - 8\omega^2 y &= \frac{Y}{M'} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Мы замечаем, что цилиндр может оставаться в относительном равновесии, если на него будет действовать сила

$$Y = -8\omega^2 M' y = 4\omega M' U = 2\kappa \rho U, \quad (31)$$

где  $U = -2\omega y$  есть скорость невозмущенного течения на уровне центра и  $\kappa = 2\pi a \omega$  есть циркуляция непосредственно вокруг цилиндра. Этот результат может быть сопоставлен с выражением (6) § 69.

Из уравнений (30) легко найти, что траектория для  $\mu < 2$ , при отсутствии внешних сил, есть трохоида, общее поступательное перемещение которой параллельно течению.

**§ 160.** В § 80 было указано, что движение несжимаемой жидкости в кривом слое малой и одинаковой толщины вполне определяется функцией тока  $\psi$ , так что всякая кинематическая задача этого рода может быть проектированием преобразована в задачу плоского слоя. Если, далее, отображение будет „ортоморфным“, то кинетические энергии соответствующих частиц жидкости и циркуляции по соответствующим замкнутым кривым для обоих движений будут равны. Из этого второго утверждения следует, что вихри преобразуются в вихри равного напряжения. Из § 145 следует сейчас же, что для случая замкнутой односвязной поверхности алгебраическая сумма напряжений всех наличных вихрей равна нулю.

Мы можем применить вышесказанное к движению в сферическом слое. Простейший случай — это тот, когда пара изолированных вихрей находится в диаметрально противоположных точках; линии тока будут тогда малые параллельные круги, а скорость будет обратно пропорциональна радиусу круга. Для пары вихрей, которые находятся в двух произвольных точках  $A$  и  $B$ , линии тока будут окружности с общей осью, как и в § 80. Методом стереографической проекции легко найти, что скорость произвольной точки  $P$  есть результирующая из двух скоростей

$$\frac{\kappa}{2\pi a} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \theta_1 \quad \text{и} \quad \frac{\kappa}{2\pi a} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \theta_2$$

которые перпендикулярны соответственно к дугам большого круга  $AP$  и  $BP$ ;  $\theta_1$  и  $\theta_2$  означают длины этих дуг,  $a$  — радиус круга и  $\pm \kappa$  — напряжения вихрей. Центр <sup>1)</sup> (см. § 154) каждого вихря движется со скоростью  $\frac{\kappa}{2\pi a} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} AB$  перпендикулярно к  $AB$ . Оба вихря, таким образом, описывают параллельные и одинаковые малые круги, оставаясь всегда на постоянном расстоянии друг от друга.

<sup>1)</sup> Чтобы предупредить возможное непонимание, заметим, что центры соответствующих вихрей не обязательно должны быть в соответствующих точках. Траектории этих центров, вообще говоря, не являются проекциями друг друга.

### Круговые вихри

§ 161. Рассмотрим теперь случай, когда все вихри, имеющиеся в жидкости (которую опять считаем безграничной), суть круговые и имеют ось  $x$  в качестве общей оси. Пусть  $\tilde{\omega}$  означает расстояние произвольной точки  $P$  от этой оси,  $v$  — скорость в направлении  $\tilde{\omega}$  и  $\omega$  — результирующее завихрение в  $P$ . Очевидно тогда  $u$ ,  $v$ ,  $\omega$  суть функции только от  $x$  и  $\tilde{\omega}$ .

При этих условиях существует функция тока, определенная, как и в § 94; именно мы будем иметь

$$u = -\frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\omega}}, \quad v = \frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad (1)$$

отсюда

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial \tilde{\omega}} = \frac{1}{\tilde{\omega}} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{\omega}^2} - \frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\omega}} \right). \quad (2)$$

Из выражения (7) § 148 легко видеть, что вектор  $(F, G, H)$  при настоящих условиях всегда перпендикулярен к оси  $x$  и радиусу  $\tilde{\omega}$ . Если мы обозначим через  $S$  величину этого вектора, то поток его через круг  $(x, \tilde{\omega})$  будет равен  $2\pi\tilde{\omega}S$ , отсюда следует, что

$$\psi = -\tilde{\omega}S. \quad (3)$$

Значение  $\psi$  в точке  $(x, \tilde{\omega})$ , которое обусловлено одной вихревой нитью с циркуляцией  $\kappa$  и координатами  $x'$ ,  $\tilde{\omega}'$  (заметим, что элемент вихревой нити имеет длину  $\tilde{\omega}' d\theta$ , где  $\theta$  означает угол элемента с направлением  $S$ ), согласно (1) § 149 будет

$$\psi = -\tilde{\omega}S = -\frac{\kappa\tilde{\omega}\tilde{\omega}'}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{r} d\theta, \quad (4)$$

где

$$r = \left\{ (x-x')^2 + \tilde{\omega}^2 + \tilde{\omega}'^2 - 2\tilde{\omega}\tilde{\omega}' \cos \theta \right\}^{1/2}. \quad (5)$$

Обозначив через  $r_1$  и  $r_2$  соответственно наименьшее и наибольшее расстояния точки  $P$  от точек вихря:

$$\left. \begin{aligned} r_1^2 &= (x-x')^2 + (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}')^2, \\ r_2^2 &= (x-x')^2 + (\tilde{\omega} + \tilde{\omega}')^2, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

будем иметь

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= r_1^2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta + r_2^2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta, \\ 4\tilde{\omega}\tilde{\omega}' \cos \theta &= r_1^2 + r_2^2 - 2r^2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

и, следовательно,

$$\psi = -\frac{\kappa}{8\pi} \left[ (r_1^2 + r_2^2) \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{r_1^2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta + r_2^2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta}} - 2 \int_0^\pi \sqrt{r_1^2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta + r_2^2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta} d\theta \right]. \quad (8)$$

Интегралы принадлежат к типу, известному из теории „арифметически-геометрического среднего“<sup>1)</sup>. В обычном, недостаточно симметрическом способе обозначения полного эллиптического интеграла имеем

$$\psi = -\frac{\kappa}{2\pi} (\tilde{\omega} \tilde{\omega}')^{1/2} \left\{ \left( \frac{2}{k} - k \right) F_1(k) - \frac{2}{k} E_1(k) \right\}, \quad (9)$$

где

$$k^2 = 1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{4\tilde{\omega} \tilde{\omega}'}{(x - x')^2 + (\tilde{\omega} + \tilde{\omega}')^2}. \quad (10)$$

Значение  $\psi$  в какой-нибудь данной точке можно, таким образом,

вычислить с помощью лежандровых таблиц.

Преобразование Ландена<sup>2)</sup> дает более изящное выражение для  $\psi$

$$\psi = -\frac{\kappa}{2\pi} (r_1 + r_2) \times \left\{ F_1(\lambda) - E_1(\lambda) \right\}, \quad (11)$$

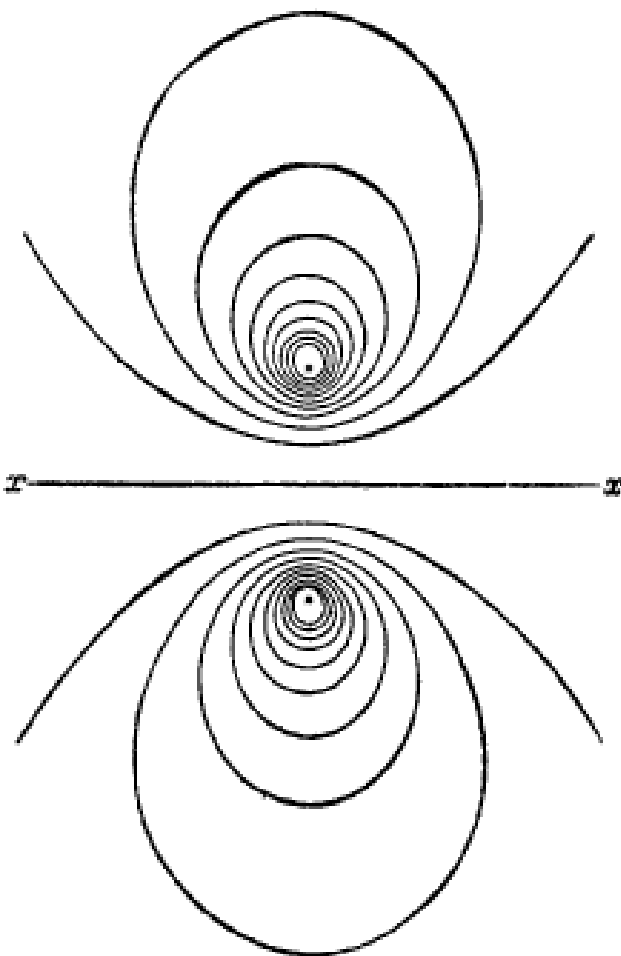
где

$$\lambda = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}. \quad (12)$$

Вид линий тока для равноотстоящих значений  $\psi$  показывает фиг. 40. Они нарисованы по методу, который, так же как и формула (11), принадлежит Максвеллу<sup>3)</sup>.

Выражения для потенциала скоростей и функции тока могут быть также получены в виде определенных интегралов, содержащих бесселевы функции.

Если мы для этой цели предположим, что вихрь занимает положение окружности  $x=0$ ,  $\tilde{\omega}=a$ , то, очевидно, части положительной стороны плоскости  $x=0$ , лежащие вну-



Фиг. 40.

<sup>1)</sup> См. Cayley, *Elliptic Functions*, Cambridge (1876), гл. XIII.

<sup>2)</sup> См. Cayley, см. сноски<sup>1)</sup>.

<sup>3)</sup> Maxwell, *Electricity and Magnetism*, § 704, 705; см. также Minchin *Phil. Mag.* (5) (1893); Nagaoaka, *Phil. Mag.* (6), VI (1903).

три и вне этого круга, образуют две различные эквипотенциальные поверхности.

Предполагая, что

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2} \kappa && \text{для } x=0, \tilde{\omega} < a, \\ \varphi &= 0 && \text{для } x=0, \tilde{\omega} > a, \end{aligned}$$

получим из (2) § 102

$$\varphi = \frac{1}{2} \kappa a \int_0^{\infty} e^{-kx} J_0(k\tilde{\omega}) J_1(ka) dk, \quad (13)$$

и, следовательно, в согласии с уравнением (5) § 100

$$\psi = -\frac{1}{2} \kappa a \tilde{\omega} \int_0^{\infty} e^{-kx} J_1(k\tilde{\omega}) J_1(ka) dk. \quad (14)$$

Эти формулы относятся, конечно, к области  $x > 0$  <sup>1)</sup>.

В § 150 было показано, что значение  $\varphi$  таково, как если бы оно зависело от некоторой системы дублетов, распределенных с равномерной плотностью  $\kappa$  на внутренней части окружности. Значения  $\varphi$  и  $\psi$  при равномерном распределении простых источников по этой поверхности были даны в выражениях (11) § 102. Формулы (13) и (14) могут быть получены отсюда дифференцированием по  $x$  и подходящим выбором постоянного множителя <sup>2)</sup>.

**§ 162.** Энергия произвольной системы круговых вихрей с осью  $x$  в качестве общей оси представляется после интегрирования по частям формулой

$$\begin{aligned} T &= \pi \rho \iint (u^2 + v^2) \tilde{\omega} dx d\tilde{\omega} = \pi \rho \iint \left( v \frac{\partial \psi}{\partial x} - u \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\omega}} \right) dx d\tilde{\omega} = \\ &= -\pi \rho \iint \psi \omega dx d\tilde{\omega} = -\pi \rho \sum \kappa \psi, \quad (1) \end{aligned}$$

так как члены, проинтегрированные по частям, на границах обращаются в нуль. Через  $\kappa$  мы обозначили здесь напряжение  $\omega \delta x \delta \tilde{\omega}$  элементарной вихревой нити.

Далее, формула (7) § 153 напишется теперь <sup>3)</sup>

$$T = 2\pi \rho \iint (\tilde{\omega} u - xv) \tilde{\omega} \omega dx dy = 2\pi \rho \sum \kappa \tilde{\omega} (\omega u - xv) \quad (2)$$

<sup>1)</sup> Формула для  $\psi$  имеется у Basset, Hydrodynamics, II, 93, см. также Nagaoка, см. выше.

<sup>2)</sup> Другие выражения для  $\varphi$  и  $\psi$  могут быть получены с помощью сферической функции. Так, значение  $\varphi$  дано у Thomson и Tait, § 546, а значение  $\psi$  может быть выведено из формулы (11) и (12) § 95 нашей книги. Выражение в эллиптических интегралах, однако, наиболее пригодно для всякого рода интерпретаций.

<sup>3)</sup> В какой-либо точке плоскости  $z=0$  имеем  $y=\tilde{\omega}$ ,  $\xi=0$ ,  $\eta=0$ ,  $\zeta=$   
 $= \frac{1}{2} \omega$ ,  $v=v$ ; остальное следует из соображений симметрии.

Импульс системы сводится, очевидно, к силе, действующей вдоль  $Ox$ . Согласно формуле (6) § 152 имеем

$$P = \frac{1}{2} \rho \iiint (y\zeta - z\eta) dx dy dz = \pi \rho \iint \tilde{\omega}^2 \tilde{\omega} dx d\tilde{\omega} = \\ = \pi \rho \sum \kappa \tilde{\omega}^2. \quad (3)$$

Если мы введем символы  $x_0$  и  $\tilde{\omega}_0$ , определяемые уравнениями

$$x_0 = \frac{\sum \kappa \tilde{\omega}^2 x}{\sum \kappa \tilde{\omega}^2}, \quad \tilde{\omega}_0^2 = \frac{\sum \kappa \tilde{\omega}^2}{\sum \kappa}, \quad (4)$$

то обе эти величины определяют окружность, положение которой, очевидно, зависит от напряжений и положений вихрей, но не от положения начала на оси симметрии. Эту окружность можно назвать „круговой“ осью всей системы вихревых колец.

Так как  $\kappa$  постоянна для каждого вихря, то из постоянства импульса согласно (3) и (4) следует, что круговая ось обладает постоянным радиусом. Чтобы найти ее движение параллельно оси  $x$ , мы воспользуемся уравнением

$$\sum \kappa \tilde{\omega}_0^2 \frac{dx_0}{dt} = \sum \kappa \tilde{\omega}^2 \frac{dx}{dt} + 2 \sum \kappa \tilde{\omega} x \frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \sum \kappa \tilde{\omega} (\tilde{\omega} u + 2xv), \quad (5)$$

которое следует из (4). С помощью формулы (2) мы можем теперь уравнение (5) привести к виду

$$\sum \kappa \tilde{\omega}_0^2 \frac{dx_0}{dt} = \frac{T}{2\pi\rho} + 3 \sum \kappa (x - x_0) \tilde{\omega} v; \quad (6)$$

здесь исчезают дополнительные члены, так как  $\sum \kappa \tilde{\omega} v = 0$  вследствие постоянства среднего радиуса  $\tilde{\omega}_0$ .

**§ 163.** Рассмотрим, в частности, случай изолированного вихревого кольца, размеры поперечных сечений которого сравнительно с радиусом  $\tilde{\omega}_0$  очень малы. Было уже показано, что

$$\psi = -\frac{1}{\pi} \iint \left\{ F_1 \left( \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} \right) - E_1 \left( \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} \right) \right\} (r_1 + r_2) \omega' dx' d\tilde{\omega}'; \quad (1)$$

входящие здесь величины  $r_1, r_2$  определены формулами (6) § 161. Для точек  $(x, \tilde{\omega})$  в области вихря или вблизи него отношение  $r_1$  к  $r_2$  будет мало, и модуль  $\lambda$  эллиптического интеграла поэтому близок к единице. Мы имеем тогда приближенно <sup>1)</sup>

$$\left. \begin{aligned} F_1(\lambda) &= \frac{1}{2} \ln \frac{16}{\lambda'^2}, \\ E_1(\lambda) &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

<sup>1)</sup> См. Cayley, Elliptik Funktionen, § 72, 77; Maxwell, см. выше.

где  $\lambda'$  обозначает дополнительный модуль, т. е.

$$\lambda'^2 = 1 - \lambda^2 = \frac{4r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2}, \quad (3)$$

или приближенно

$$\lambda'^2 = \frac{4r_1}{r_2}.$$

Для точек, лежащих внутри самого вихря, значение  $\psi$ , таким образом, будет порядка  $\kappa \tilde{\omega}_0 \ln \frac{\tilde{\omega}_0}{\varepsilon}$ , где  $\varepsilon$  есть малая линейная величина порядка размера поперечного сечения. Компоненты скорости в таких точках зависят (см. § 94) от производных функции  $\psi$  и будут порядка  $\frac{\kappa}{\varepsilon}$ .

Мы можем теперь оценить величину скорости поступательного движения  $\frac{dx_0}{dt}$  вихревого кольца. Согласно (1) § 162  $T$  есть величина порядка  $\rho \kappa^2 \tilde{\omega}_0 \ln \frac{\tilde{\omega}_0}{\varepsilon}$ ,  $v$  есть, как мы видели, порядка  $\frac{\kappa}{\varepsilon}$ , в то время как  $x - x_0$  — величина порядка  $\varepsilon$ . Поэтому второй член в правой части формулы (6) предыдущего параграфа в рассматриваемом случае мал сравнительно с первым членом, и скорость поступательного движения кольца будет порядка  $\frac{\kappa}{\tilde{\omega}_0} \ln \frac{\tilde{\omega}_0}{\varepsilon}$  и приблизительно постоянна.

Изолированное вихревое кольцо движется, таким образом без заметного изменения формы параллельно своей прямолинейной оси с приблизительно постоянной скоростью. Эта скорость мала по сравнению со скоростью жидкости в непосредственном соседстве с круговой осью, но она может быть больше или меньше чем  $\frac{1}{2} \frac{\kappa}{\tilde{\omega}_0}$ , т. е. скорости жидкости в центре кольца, с которой она совпадает по направлению.

Для случая *круглого* поперечного сечения более определенные результаты могут быть получены следующим образом. Если мы пренебрежем изменениями  $\tilde{\omega}$  и  $\omega$  внутри поперечного сечения, то формулы (1) и (2) дадут

$$\psi = -\frac{\omega}{2\pi} \tilde{\omega}_0 \iint \left( \ln \frac{8\tilde{\omega}_0}{r_1} - 2 \right) dx' d\tilde{\omega}',$$

или, если введем полярные координаты  $(s, \chi)$  в плоскости поперечного сечения, то

$$\psi = -\frac{\omega}{2\pi} \tilde{\omega}_0 \int_0^a \int_0^{2\pi} \left( \ln \frac{8\tilde{\omega}_0}{r_1} - 2 \right) s' ds' d\chi', \quad (4)$$

где  $a$  есть радиус поперечного сечения. Теперь имеем

$$\int_0^{2\pi} \ln r_1 d\chi' = \int_0^{2\pi} \ln \{ s^2 + s'^2 - 2ss' \cos(\chi - \chi') \}^{1/2} d\chi',$$

и этот определенный интеграл, как известно, равен  $2\pi \ln s'$  или  $2\pi \ln s$ , смотря по тому,  $s' \cong s$ . Отсюда для точек внутри поперечного сечения будем иметь

$$\begin{aligned} \psi &= -\omega\tilde{\omega}_0 \int_0^s \left( \ln \frac{8\tilde{\omega}_0}{s} - 2 \right) s' ds' - \omega\tilde{\omega}_0 \int_s^a \left( \ln \frac{8\tilde{\omega}_0}{s'} - 2 \right) s' ds' = \\ &= -\frac{1}{2} \omega\tilde{\omega}_0 a^2 \left\{ \ln \frac{8\tilde{\omega}_0}{a} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{s^2}{a^2} \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Единственный переменный член здесь есть  $\frac{1}{4} \omega\tilde{\omega}_0 s^2$ ; это показывает, что при нашей степени приближения линии тока внутри поперечного сечения образуют концентрические окружности, причем скорость на расстоянии  $s$  от центра равна  $\frac{1}{2} \omega s$ .

Если мы подставим полученное выражение в формулу (1) § 62, то найдем

$$\frac{T}{2\pi q} = -\frac{1}{2} \omega \int_0^a \int_0^{2\pi} \psi s ds d\chi = \frac{\kappa^2 \tilde{\omega}_0}{4\pi} \left\{ \ln \frac{8\tilde{\omega}_0}{a} - \frac{7}{4} \right\}. \quad (6)$$

Последний член в формуле (6) § 162 равен

$$\frac{3}{2} \tilde{\omega}_0 \omega \sum \kappa (x - x_0)^2;$$

при принятом обозначении это равно  $\frac{3}{8} \kappa^2 \frac{\tilde{\omega}_0}{\pi}$ , причем  $\kappa$  означает напряжение всего вихря. Таким образом формула для поступательной скорости вихря теперь напишется <sup>1)</sup>

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{\kappa}{4\pi\tilde{\omega}_0} \left\{ \ln \frac{8\tilde{\omega}_0}{a} - \frac{1}{4} \right\}. \quad (7)$$

Вихревое кольцо влечет за собой в своем движении некоторое количество жидкости, двигающейся безвихревым образом; ср. § 155, п. 2. Согласно формуле (7) поступательная скорость вихря будет равна скорости жидкости в центре, если имеем приблизительно  $\frac{\omega_0}{a} = 86$ . Сопровождающая масса будет кольцеобразной или нет, смотря по тому, будет ли значение  $\frac{\tilde{\omega}_0}{a}$  больше или меньше критического значения.

Отношение скорости жидкости на окружности вихря к скорости в центре кольца равно  $\frac{2\omega a \tilde{\omega}_0}{\kappa}$  или  $\frac{\tilde{\omega}_0}{\pi a}$ . Для  $a = \frac{1}{100} \tilde{\omega}_0$  это число приблизительно равно 32.

Условия, при которых вихревое кольцо *конечного* поперечного сечения с равномерным завихрением может перемещаться не изменяясь, были исследованы Лихтенштейном <sup>2)</sup>. Форма поперечного сечения, если оно мало, ока-

<sup>1)</sup> Этот результат был дан без доказательства Томсоном в прибавлении к переводу работы Гельмгольца, Phil. Mag. (+), XXXIII, 511 (1867) [russk., IV, 67]. Он был подтвержден Hicks, Phil. Trans, A, CLXXVI, 756 (1885); см. также Gray, Notes on Hydrodynamics Phil. Mag. (6), XXVIII, 13 (1914).

<sup>2)</sup> Math. Zeitsch., XXIII, с9, 310 (1925); см. также его Grundlagen der Hydrodynamik, Berlin (1929).



зывается приближенно эллиптической с меньшей осью, совпадающей с направлением поступательного движения. Он также исследовал аналогичный вопрос и по отношению к вихревой паре (§ 155).

**§ 164.** Если мы имеем произвольное число круговых вихревых колец — безразлично соосных или нет, — то движение каждого из них может быть представлено как состоящее из двух частей, из которых одна зависит от рассматриваемого кольца, в то время как другая зависит от влияния других колец.

Только что приведенные соображения показывают, что вторая часть сравнительно с первой незначительна, за исключением случая, когда два или несколько колец подходят друг к другу очень близко. Всякое кольцо, таким образом, будет двигаться без заметного изменения вида и размеров с приблизительно постоянной скоростью в направлении своей прямолинейной оси, до тех пор пока оно не подойдет на близкое расстояние ко второму кольцу.

Общее представление относительно последствий встречи двух вихревых колец можно в частных случаях получить из результатов, данных в (3) § 149. Так, например, предположим, что мы имеем два круговых кольца с одной и той же осью. Если направление вращения в обоих случаях одно и то же, то оба кольца будут перемещаться, как целое, в том же самом направлении.

Действие их взаимного влияния состоит в том, что радиус вихря, идущего впереди, увеличивается, а следующего за ним уменьшается. Как только радиус впереди идущего кольца делается больше радиуса следующего за ним, то движение впереди идущего кольца замедляется, а другого (идущего за ним) ускоряется. При благоприятных соотношениях между формой, а также и интенсивностью обоих колец может, таким образом, случиться, что второе кольцо нагонит первое и пройдет через него. Тогда оба кольца изменят свои роли; кольцо, которое сделалось теперь вторым, с своей стороны нагонит другое и пройдет через него; кольца таким образом попеременно постоянно будут проходить одно через другое <sup>1)</sup>.

Если оба кольца имеют противоположные направления вращения, то они приближаются друг к другу, и их взаимное влияние состоит в том, что радиусы обоих возрастают. Если оба кольца имеют кроме того одинаковые напряжения и форму, то скорость приближения будет непрерывно уменьшаться. В этом случае движение во всех точках плоскости, которая параллельна обоим кольцам и делит пополам расстояние между ними, тангенциально к этой плоскости. Мы можем, если пожелаем, эту плоскость рассматривать как твердую границу для жидкости с одной из обеих ее сторон и получить тогда случай од-

<sup>1)</sup> Ср. Hicks, On the Mutual Threading of Vortex-Rings. Proc. Roy. Soc. A., CII, 111 (1922). Соответствующий двухмерный случай был исследован и проиллюстрирован графически Gröbli, см. примечание на стр. 281; см. также Love, On the Motion of Paired Vortices with a Common Axis, Proc. Lond. Math. Soc., XXV, 185 (1894) и Hicks, см. выше.

ного вихревого кольца, которое движется к неподвижной твердой стенке.

Только что сделанные замечания заимствованы из работы Гельмгольца. Он в заключение к этому еще указал, что взаимное влияние вихревых колец легко можно изучать экспериментально в случае приблизительно полукруглых колец, которые появляются, когда концом ковша быстро проводят по свободной поверхности жидкости на протяжении короткого расстояния, причем места, в которых вихревые нити встречают поверхность, оказываются отмеченными небольшими углублениями (ср. § 27). Метод демонстративных опытов с помощью дымовых колец <sup>1)</sup> слишком известен, чтобы описывать его здесь подробно.

Прекрасный вариант опыта состоит в образовании колец в воде, при этом завихренную жидкость подкрашивают <sup>2)</sup>.

Движение вихревого кольца в жидкости, которая (внутри или снаружи) ограничена неподвижной сферической поверхностью для случая, когда прямолинейная ось кольца проходит через центр шара, было исследовано Леви <sup>3)</sup> с помощью метода зеркальных изображений. Следующее упрощенное доказательство принадлежит Лармору <sup>4)</sup>. Вихревое кольцо эквивалентно (§ 150) сферическому слою дублетов с равномерно распределенной плотностью, который concentричен твердой сфере. Зеркальное изображение этого слоя согласно § 96 есть другой concentрический однородный двойной слой, который, с своей стороны, эквивалентен вихревому кольцу, соосному с первым. Из только что названных параграфов легко получается теперь, что напряжения ( $\kappa, \kappa'$ ) и радиусы ( $\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'$ ) вихревого кольца и его изображения связаны соотношением

$$\kappa \tilde{\omega}^{1/2} + \kappa' \tilde{\omega}'^{1/2} = 0. \quad (1)$$

Рассуждение, очевидно, годится также для случая замкнутого вихря произвольной формы, если только он лежит на сфере, concentрической к границе.

Интерес, который вызвала устойчивая конфигурация кармановской системы вихрей малого сечения (§ 156), побудил к исследованию аналогичных конфигураций в трехмерном пространстве.

Рассматривая сначала ряд равных вихревых колец бесконечно малого поперечного сечения, наизанных на равных интервалах на общую ось, Леви и Форсдайк <sup>5)</sup> нашли, что конфигурация эта будет неустойчивой для того типа возмущений, когда радиусы и интервалы изменяются одновременно, причем кольца остаются строго плоскими и круговыми. С другой стороны, для случая, когда отношение интервала между двумя последовательными кольцами к общему радиусу превышает 1,20, становятся возможными периодические

<sup>1)</sup> Reusch, Über Ringbildung der Flüssigkeiten, Pogg. Ann., CX (1860); Tait, Recent Advances in Physical Science, London, 1876, гл. XII.

<sup>2)</sup> Reynolds, On the Resistance encountered by Vortex Rings etc., Brit. Ass. Rep., 1876; Nature, XIV, 477.

<sup>3)</sup> Lewis, On the Images of Vortices in a Spherical Vessel, Quart. Journ. Math., XVI, 338 (1879).

<sup>4)</sup> Larmor, Electro-Magnetic and other Images in Spheres and Planes Quart. Journ. Math., XXIII, 94 (1889).

<sup>5)</sup> Levi and Forsdyke, Proc. Roy. Soc. A., CXIV, 594; A., CXVI 352 (1927).



кости бесконечную систему поверхностей, из которых каждая покрыта сеткой линий тока и вихревых линий, и произведение  $q\omega \sin \beta \delta n$  на каждой из таких поверхностей должно быть постоянно, при этом  $\delta n$  означает длину отрезка нормали между соседними поверхностями системы <sup>1)</sup>.

Эти условия получаются также из соображения, что при стационарном движении линии тока совпадают с действительными траекториями частиц, затем, что произведение угловой скорости на поперечное сечение для всех точек вихря имеет одинаковое значение и что это произведение для одного и того же вихря не зависит от времени.

Положение, что функция  $\chi'$ , определенная с помощью выражения (2), на всякой поверхности только что рассмотренного вида постоянна, представляет обобщение высказанной в § 21 теоремы о том, что  $\chi'$  постоянно вдоль линии тока.

Вышеизложенные условия во всех случаях безвихревого движения выполняются тождественно, если только граничные условия совместимы со стационарным движением.

При движении жидкости в двух измерениях ( $xy$ ) произведение  $q \delta n$  постоянно вдоль линии тока, и вышеуказанные условия приводятся тогда к одному условию, что модуль вихря  $\zeta$  должен быть постоянным вдоль каждой линии тока или, согласно (5) § 59, что должно иметь место уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = f(\psi), \quad (5)$$

где  $f(\psi)$  есть произвольная функция от  $\psi$  <sup>2)</sup>.

Это условие всякий раз выполняется, например, когда имеет место движение по concentрическим окружностям вокруг начала. Другое, очевидное решение уравнения (5) есть

$$\psi = \frac{1}{2} (Ax^2 + 2Bxy + Cy^2); \quad (6)$$

в этом случае линиями тока будут подобные и соосные конические сечения. Угловая скорость во всякой точке равна  $\frac{1}{2}(A+C)$  и, следовательно, будет постоянна.

Если положить, далее,

$$f(\psi) = -k^2\psi,$$

где  $k$  есть постоянная, и если ввести полярные координаты  $r, \theta$ , то мы получим

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + k^2\psi = 0; \quad (7)$$

этому уравнению удовлетворяют функции (§ 101)

$$\left. \begin{aligned} \psi &= C J_0(kr) \cos s\theta, \\ \psi &= C J_0(kr) \sin s\theta. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

<sup>1)</sup> См. Lamb, On the Conditions for Steady Motion of Fluid, Proc. Lond. Math. Soc. (1), IX, 91 (1878).

<sup>2)</sup> Ср. Lagrange, Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin, 1781, [Oeuvres IV, 720]; далее Stokes, On the Steady Motion of Incompressible Fluids, Camb. Trans., VII (1842) [Papers, I, 15].

Эти функции представляют различные решения, которые совместимы с твердой круглой границей радиуса  $a$ , причем допустимые значения  $k$  определяются из уравнения

$$J_0(ka) = 0. \quad (9)$$

Предположим, например, что в безграничной массе жидкости функция тока внутри круга  $r = a$  дана с помощью

$$\psi = C J_1(kr) \sin \theta, \quad (10)$$

а вне этого круга с помощью

$$\psi = U \left( r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta. \quad (11)$$

Эти оба значения  $\psi$  совпадают при  $r = a$ , если  $J_1(ka) = 0$ . Кроме того, тангенциальная компонента скорости непрерывна на этой окружности, если только оба значения  $\frac{\partial \psi}{\partial r}$  между собой равны, т. е. когда

$$C = \frac{2U}{kJ_1'(ka)} = - \frac{2U}{kJ_0(ka)}. \quad (12)$$

Если мы теперь сообщим всей системе скорость  $U$  параллельно  $Ox$ , то получим как бы цилиндрический вихрь, который движется со скоростью  $U$  в жидкости, покоящейся в бесконечности. Наименьшее из возможных значений  $k$  дано равенством  $\frac{ka}{\pi} = 1,2197$ ; относительные линии тока *внутри* вихря показаны на второй фиг. 45, при условии, что пунктирная окружность принята в качестве границы ( $r = a$ ). Согласно (1) § 157 легко показать, что „импульс“ вихря равен  $2\pi a^2 U$ .

В случае симметричного движения вокруг оси (например, оси  $x$ ) выражение  $q \cdot 2\pi \tilde{\omega} \delta n$  постоянно вдоль линии тока, причем  $\tilde{\omega}$ , как в § 94, обозначает расстояние произвольной точки от оси симметрии. Условие стационарного движения состоит тогда в том, что отношение  $\frac{\omega}{\tilde{\omega}}$  должно быть постоянно вдоль каждой линии тока. Таким образом, если  $\psi$  есть функция тока, то согласно (2) § 161 должно иметь место следующее соотношение:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{\omega}^2} - \frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\omega}} = \tilde{\omega}^2 f(\psi), \quad (13)$$

где  $f(\psi)$  обозначает произвольную функцию от  $\psi$ <sup>1)</sup>.

Интересный пример представляет сферический вихрь Хилла<sup>2)</sup>. Если мы предположим, что для всех точек внутри шара  $r = a$  имеет место соотношение

$$\psi = \frac{1}{2} A \tilde{\omega}^2 (a^2 - r^2), \quad (14)$$

<sup>1)</sup> Этот результат принадлежит Стоксу, см выше.

<sup>2)</sup> Hill, On a Spherical Vortex, Phil. Trans. A, CLXXXV, 1894.

где  $r^2 = x^2 + \tilde{\omega}^2$ , то формула (2) § 161 дает

$$\omega = -\frac{5}{2} A \tilde{\omega},$$

так что условие для стационарного движения будет выполнено. Далее, принимая во внимание § 96 и 97, ясно, что безвихревое течение вокруг неподвижной сферической поверхности  $r = a$  с общей скоростью  $-U$  параллельно оси  $x$  выражается формулой

$$\psi = \frac{1}{2} U \tilde{\omega}^2 \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right). \quad (15)$$

Оба значения  $\psi$  совпадают для  $r = a$ ; благодаря этому нормальная компонента скорости на обеих сторонах равна нулю. Для того чтобы тангенциальная скорость была непрерывна, значения  $\frac{\partial \psi}{\partial r}$  должны также совпадать.

Если принять во внимание, что

$$\tilde{\omega} = r \sin \theta,$$

то из условия непрерывности  $\frac{\partial \psi}{\partial r}$  будем иметь

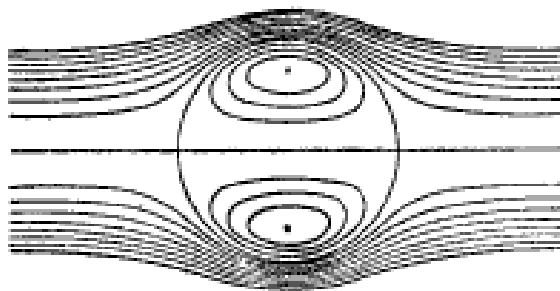
$$A = -\frac{3}{2} \frac{U}{a^2}$$

и, следовательно,

$$\omega = \frac{15}{2} U \frac{\tilde{\omega}}{a^2}. \quad (16)$$

Сумма напряжений вихревых нитей, образующих сферический вихрь, равна  $5Ua$ .

Фиг. 41 показывает линии тока как внутри, так и вне вихря; они, как обычно, нарисованы для равноотстоящих значений  $\psi$ .



Фиг. 41.

Если мы всей системе сообщим скорость  $U$  параллельно оси  $x$ , то получим случай сферического вихря, который движется поступательно с постоянной скоростью  $U$  в жидкости, покоящейся в бесконечности.

С помощью формул § 162 мы легко найдем, что квадрат „среднего радиуса“ вихря равен  $\frac{2}{5} a^2$ , „импульс“ равен  $2\pi \rho a^3 U$ , а энергия равна  $\frac{10}{7} \pi \rho a^3 U^2$ .

Как уже было выяснено в § 146, совершенно не нужно вычислять формулы для давления, чтобы убедиться в

его непрерывности на поверхности вихря. Непрерывность давления уже обеспечена непрерывностью скорости и постоянством циркуляции по всякой замкнутой движущейся кривой.

**§ 166.** Как было уже указано, теория вихревого движения была создана Гельмгольцем в 1858 г. Она привлекла еще больший интерес, когда в 1867 г. Кельвин предложил вихревую теорию атомов <sup>1)</sup>. В качестве физической теории вихревая теория атомов уже давно

<sup>1)</sup> См. сноску на стр. 278.

оставлена, но она послужила поводом к ряду интересных исследований, на которые вкратце необходимо указать. Мы упомянем исследования, относящиеся к устойчивости и периодам колебаний прямолинейных <sup>1)</sup> и кольцеобразных <sup>2)</sup> вихрей, а также аналогичные исследования относительно полых вихрей (у которых вращающееся ядро заменено пустотой) <sup>3)</sup>, и, наконец, вычисления формы пограничной поверхности для полого вихря, которая совместима со стационарным движением <sup>4)</sup>. Сводка некоторых важнейших результатов дана Лявом <sup>5)</sup>.

**§ 166a.** В данной главе все динамические теоремы имеют своей предпосылкой постоянство циркуляции по движущемуся контуру. Предполагалось (§ 146), что внешние силы суть консервативные, а также то, что жидкость либо однородна и несжимаема, либо подчинена определенному соотношению между давлением и плотностью.

Но, конечно, имеются многие естественные условия, в частности в метеорологии, когда эти предположения явно не выполняются. Если мы, следуя вычислениям § 33, не примем во внимание указанные допущения, то найдем, что скорость изменения циркуляции по движущемуся контуру будет

$$\frac{D}{Dt} \int (u dx + v dy + w dz) = - \int s \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right), \quad (1)$$

где  $s = \frac{1}{\rho}$  есть величина, обратная плотности жидкости, т. е. удельный объем. Криволинейный интеграл в правой части можно преобразовать по теореме Стокса в поверхностный интеграл — по какой-либо поверхности, опирающейся на контур; тогда получим

$$\frac{D}{Dt} \int (u dx + v dy + w dz) = \int (lP + mQ + nR) dS, \quad (2)$$

где

$$P = \frac{\partial(p, s)}{\partial(y, z)}, \quad Q = \frac{\partial(p, s)}{\partial(z, x)}, \quad R = \frac{\partial(p, s)}{\partial(x, y)}. \quad (3)$$

Теперь рассмотрим вектор, компоненты которого суть  $P, Q, R$ . Этот вектор является соленоидальным в силу соотношения

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

<sup>1)</sup> W. Thomson, см. сноску на стр. 290.

<sup>2)</sup> J. J. Thomson, см. сноску на стр. 271, Dyson, Phil. Trans., A, CLXXXIV, 1041 (1893).

<sup>3)</sup> W. Thomson, см. выше; Hicks, On the Steady Motion and the Small Vibrations of a Hollow Vortex, Phil. Trans, 1884; Pocklington, The Complete System of the Periods of a Hollow Vortex-Ring, Phil. Trans. A, CLXXXVI, 803 (1895); Carslaw, The Fluted Vibrations of a circular Vortex-Ring with a Hollow Core, Proc. Lond. Math. Soc. XXVIII, 97 (1896).

<sup>4)</sup> Hicks, см. выше; Pocklington, Hollow Straight Vortices, Camb. Proc., VIII, 178 (1894).

<sup>5)</sup> Love, см. сноску на стр. 240.

и его направление определяется пересечением поверхностей  $p = \text{const.}$ ,  $s = \text{const.}$  Если мы теперь представим ряд поверхностей равного давления, проведенных для равных бесконечно малых интервалов  $\delta p$ , и аналогично ряд поверхностей равного удельного объема для бесконечно малых интервалов  $\delta s$ , то эти поверхности разделяют все поле на систему трубок, поперечное сечение которых суть бесконечно малые параллелограммы. Если  $\delta \Sigma$  есть площадь одного из этих параллелограммов, то легко показать, что

$$\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} \cdot \delta \Sigma = \delta p \delta s. \quad (5)$$

Отсюда следует, что произведение вектора  $(P, Q, R)$  на поперечное сечение не только постоянно вдоль какой-либо трубки, но и является одинаковым для всех трубок.

Уравнение (2) тогда показывает, что скорость изменения циркуляции по движущемуся контуру пропорциональна числу указанных трубок, им охватываемых<sup>1)</sup>.

### Преобразование Клебша

§ 167. Представляет некоторый интерес вопрос, о котором, однако, мы здесь можем только коротко сообщить: это вопрос о преобразовании Клебша<sup>2)</sup> гидродинамических уравнений.

Легко видеть, что компоненты скорости в произвольный момент могут быть выражены в форме

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial z}, \quad (1)$$

где  $\varphi, \lambda, \mu$  суть функции от  $x, y, z$  при условии, что компоненты вихря могут быть представлены в форме

$$\xi = \frac{\partial (\lambda, \mu)}{\partial (y, z)}, \quad \eta = \frac{\partial (\lambda, \mu)}{\partial (z, x)}, \quad \zeta = \frac{\partial (\lambda, \mu)}{\partial (x, y)}. \quad (2)$$

Если мы предположим теперь, что дифференциальные уравнения вихревых линий

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta} \quad (3)$$

<sup>1)</sup> V. Bjerknes, Vid.-Selsk. Skrifter, Kristiania, 1918. Независимое доказательство приписывается Зильберштейну (1896). Другая теорема с менее простым содержанием, указанная Бьеркнесом, относится к циркуляции количества движения

$$\int \rho (u dx + v dy + w dz).$$

Некоторые применения этих теорем к метеорологическим и другим явлениям пояснены в Stockholm, Ak. Handl, XXXI (1898).

<sup>2)</sup> Clebsch, Über eine allgemeine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen, Crelle, LIV (1857) и LVI (1859); см. также Hill, Quart. Journ. Math., XVII (1881) и Camb. Trans., XIV (1863).



проинтегрированы в форме

$$\alpha = \text{const.}, \quad \beta = \text{const.}, \quad (4)$$

где  $\alpha, \beta$  означают функции от  $x, y, z$ , то мы должны иметь

$$\xi = P \frac{\partial (\alpha, \beta)}{\partial (y, z)}, \quad \eta = P \frac{\partial (\alpha, \beta)}{\partial (z, x)}, \quad \zeta = P \frac{\partial (\alpha, \beta)}{\partial (x, y)}, \quad (5)$$

где  $P$  есть определенная функция от  $x, y, z$ <sup>1)</sup>. Подставляя выражения (5) в тождество

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

получим

$$\frac{\partial (P, \alpha, \beta)}{\partial (x, y, z)} = 0, \quad (6)$$

которое показывает, что  $P$  имеет вид  $f(\alpha, \beta)$ . Если  $\lambda, \mu$  будут обозначать две произвольные функции от  $\alpha, \beta$ , то будем иметь

$$\frac{\partial (\lambda, \mu)}{\partial (y, z)} = \frac{\partial (\lambda, \mu)}{\partial (\alpha, \beta)} \frac{\partial (\alpha, \beta)}{\partial (y, z)} \quad \text{и т. д.};$$

уравнения (5) будут сводиться тогда к виду (2), если только  $\lambda, \mu$  выбраны таким образом, что удовлетворяется уравнение

$$\frac{\partial (\lambda, \mu)}{\partial (\alpha, \beta)} = f(\alpha, \beta). \quad (7)$$

Этот выбор может быть, очевидно, произведен бесконечным числом способов.

Из формулы (2) тотчас же следует, что линии пересечения поверхностей

$$\lambda = \text{const.}, \quad \mu = \text{const.}$$

представляют собой вихревые линии. Это означает, что можно предположить относительно входящих в (1) функций  $\lambda, \mu$ , что они меняются непрерывно в зависимости от  $t$  и именно так, что соответствующие поверхности движутся вместе с жидкостью<sup>2)</sup>. Для этого факта были даны различные аналитические доказательства; простейшее, пожалуй, доказательство основывается на уравнениях (2) § 15; эти уравнения дают (как в § 17)

$$u \, dx + v \, dy + w \, dz = u_0 \, da + v_0 \, db + w_0 \, dc - d\chi. \quad (8)$$

Было доказано, что мы сначала можем положить

$$u_0 \, da + v_0 \, db + w_0 \, dc = -d\varphi_0 + \lambda \, d\mu. \quad (9)$$

Отсюда следует, если мы примем во внимание изменение положения в момент  $t$ , что

$$u \, dx + v \, dy + w \, dz = -d\varphi + \lambda \, d\mu, \quad (10)$$

где  $\varphi = \varphi_0 + \chi$ , а  $\lambda, \mu$  имеют те же значения, как в (9), но только они выражены через  $x, y, z, t$ . Так как при лагранжевом методе независимые пространственные переменные связаны с индивидуальными частицами, то теорема этим самым доказана.

<sup>1)</sup> Ср. Forsyth, Differential Equations, § 174.

<sup>2)</sup> Не следует упускать из виду, что вследствие неполной определенности  $\lambda, \mu$  эти функции могут непрерывно меняться с  $t$ , не будучи связаны вместе с тем все время с одними и теми же частицами жидкости.

На основании этого соображения уравнения движения могут быть проинтегрированы тогда, когда внешние силы имеют потенциал и  $p$  есть функция только от  $q$ . Мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2v\zeta + 2w\eta &= \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + \left( u \frac{\partial \lambda}{\partial x} + v \frac{\partial \lambda}{\partial y} + w \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x} - \left( u \frac{\partial \mu}{\partial x} + v \frac{\partial \mu}{\partial y} + w \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial t} \right) + \frac{D\lambda}{Dt} \frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{D\mu}{Dt} \frac{\partial \lambda}{\partial x}. \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда следует, при сделанном предположении, что  $\frac{D\lambda}{Dt} = 0$ ,  $\frac{D\mu}{Dt} = 0$ , и согласно (5), (6) § 146 получим

$$\int \frac{dq}{q} + \frac{1}{2} q^2 + \Omega = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \lambda. \quad (12)$$

Произвольная функция от  $t$  предполагается включенной в  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ .

Если на  $\lambda$  и  $\mu$  не наложены вышеуказанные условия, то, полагая

$$H = \int \frac{dp}{q} + \frac{1}{2} q^2 + \Omega - \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial t}, \quad (13)$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{D\lambda}{Dt} \frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{D\mu}{Dt} \frac{\partial \lambda}{\partial x} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \frac{D\lambda}{Dt} \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{D\mu}{Dt} \frac{\partial \lambda}{\partial y} &= -\frac{\partial H}{\partial y}, \\ \frac{D\lambda}{Dt} \frac{\partial \mu}{\partial z} - \frac{D\mu}{Dt} \frac{\partial \lambda}{\partial z} &= -\frac{\partial H}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial (H, \lambda, \mu)}{\partial (x, y, z)} = 0, \quad (15)$$

а это показывает, что  $H$  есть выражение вида  $f(\lambda, \mu, t)$  и

$$\frac{D\lambda}{Dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mu}, \quad \frac{D\mu}{Dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad ^1). \quad (16)$$

## ГЛАВА ВОСЬМАЯ

### ПРИЛИВНЫЕ ВОЛНЫ

**§ 168.** Одно из наиболее интересных и плодотворных применений гидродинамической теории представляют малые колебания, которые совершает жидкость со свободной поверхностью под действием тяжести. В некоторых случаях, которые с теоретической точки зрения представляют до некоторой степени частные случаи, но практически особенно важны, эти колебания могут в комбинации образовать прогрессивные волны, которые (в первом приближении), не меняя своего вида, движутся поступательно на поверхности.

<sup>1)</sup> Автору было сообщено, что эти уравнения были даны в диссертации F. Stuart (Dublin, 1900).