Г. ЛАМБ

ГИДРОДИНАМИКА

ПЕРЕВОД С 6-го АНГЛИЙСКОГО ИЗДАНИЯ
А. В. ГЕРМОГЕНОВА и В. А. КУДРЯВЦЕВА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ проф. Н. А. СЛЕЗКИНА

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1947 ЛЕНИНГРАД

Редактор *Н. А. Слезкин.* Техн. редактор *Н. А. Тумаркина*

Подписано к печати 21—XII 1948 г. 58 печ. л. 76,05 авт. л. 77,95 уч.-изд. л.
55 600 тип. знак в печ. л. Тираж 8 000 экз. А 08272 Заказ 1929
Цена книги 47 р., переплет 1 р.

Тип. „Красный Печатник“, Ленинград, Международный пр., 73а.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книга Ламба, являясь фундаментальным руководством, несомненно принадлежит к числу самых лучших книг всей мировой литературы по гидродинамике. Выход в свет этой книги на русском языке принесет большую пользу не только студентам и аспирантам физико-математических факультетов университетов, но и большому кругу научных работников, деятельность которых соприкасается в той или иной мере с вопросами гидродинамики.

Впервые эта книга была издана в 1879 г. в значительно меньшем объеме. С каждым новым изданием содержание ее перерабатывалось и расширялось. Последние значительные дополнения были внесены самим автором в 1932 г. при шестом издании, незадолго до своей смерти.

В книге Ламба нашла свое отражение бо́льшая часть всей мировой литературы по многим вопросам гидродинамики, но не в одинаковой мере. Например, вопросам теории волн посвящена почти половина всей книги, тогда как вопросам, составляющим проблематику современной гидродинамики, уделялось раньше очень малое внимание. И лишь только в последнем, шестом, издании этим вопросам уделено бо́льшее внимание, в частности были внесены добавления по теории пограничного слоя, по теории вихревого сопротивления, по теории неустановившегося движения плоского контура в идеальной жидкости, по электромагнитной аналогии и др.

Следует также указать, что работы известных русских ученых Н. Е. Жуковского, С. А. Чаплыгина и др. по ряду вопросов, затрагиваемых в различных главах гидродинамики Ламба, были освещены в очень малой степени. В этом отношении преимущественное положение безусловно занимают английские авторы и в первую очередь сам Ламб, перу которого принадлежит очень много результатов.

Изложение в большинстве случаев является очень сжатым, но вполне ясным и достаточным для уяснения сущности того или иного вопроса, что несомненно и составляет одно из достоинств этой книги.

Первые двести шестьдесят четыре параграфа переведены В. А. Кудрявцевым, а остальные А. В. Гермогеновым, причем перевод ими выполнялся с пятого английского издания и немецкого перевода этой книги под редакцией Мизеса. При редактировании же этот перевод был сличен с шестым английским изданием и все изменения и добавления были полностью внесены самим редактором.

Н. А. Слезкин

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Эта книга может рассматриваться как шестое издание Treatise on Hie Mathematical Theory of the Motion of Fluids, опубликованной в 1879 г. Последующие издания, значительно переработанные и расширенные, выходили уже с заголовком настоящей книги.

В настоящем издании в общий план и расположение материала не внесено каких-либо изменений, но все содержание вновь просмотрено, некоторые важные упущения восполнены и много нового материала добавлено.

Сам предмет за последние годы получил значительное развитие, например, в теории приливов, в различных направлениях, имеющих отношение к проблемам воздухоплавания, и др. В этой связи интересно отметить, что „классическая" гидродинамика, на которую часто ссылаются теперь с оттенком пренебрежения, снова нашла себе широкое поле для практических приложений. Некоторые из этих новых достижений по причине их широкой разработанности нельзя было целиком включить в эту книгу; пришлось ограничиться лишь указаниями на более важные результаты и на применяемые методы.

Как и в предшествующих изданиях, были приложены все усилия к тому, чтобы в подстрочных примечаниях указать тех авторов, которым мы обязаны соответствующими результатами; однако следует указать, что в самом тексте оригинальные доказательства часто были значительно видоизменены.

Я должен еще раз поблагодарить штат университетского издательства за большую помощь при издании настоящей книги.

Г. Ламб

Апрель 1932.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I

Уравнения движения

Глава II

Интегрирование уравнений движения в частных случаях

Глава III

Безвихревое движение

Глава IV

Плоское движение несжимаемой жидкости

Глава V

Безвихревое движение жидкости: трехмерные задачи

Глава VI

Движение твердых тел в жидкости. Динамическая теория

Глава VII

Вихревое движение

Глава VIII

Приливные волны

Глава IX

Поверхностные волны

Глава X

Звуковые волны

Глава XI

Вязкость

Глава XII

Вращающиеся массы жидкости

ГЛАВА ПЕРВАЯ

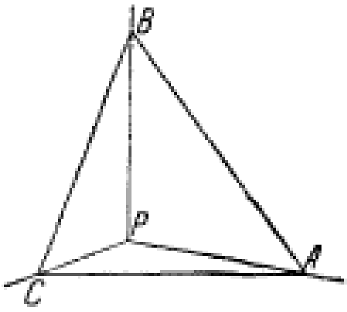
УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

§ 1. Все исследования этой книги основываются на предположении, что изучаемое вещество можно рассматривать практически непрерывным и однородным, т. е. что свойства наименьших частей, на которые мы можем мыслить вещество разделенным, являются такими же, как и свойства всей массы.

Основное свойство жидкости состоит в следующем: в напряженном состоянии жидкость не может быть в равновесии, если силы, действующие между двумя смежными частями жидкости, расположены наклонно к их общей поверхности. Гидростатика основывается на этом свойстве жидкости, и последнее подтверждается полным согласием между теорией и опытом. Однако непосредственное наблюдение показывает, что в движущихся жидкостях могут иметь место косо направленные напряжения. Пусть, например, сосуд, имеющий форму круглого цилиндра и содержащий воду (или другую жидкость), вращается около своей оси, направленной вертикально. Если угловая скорость сосуда постоянна, то мы очень скоро увидим, что жидкость с сосудом вращаются как одно твердое тело. Если затем привести сосуд в состояние покоя, то движение жидкости еще будет продолжаться некоторое время, становясь постепенно все более медленным, и, наконец, прекратится; мы увидим, что в течение этого процесса частицы жидкости, которые более удалены от оси, будут отставать от частиц, находящихся ближе к оси, и скорее потеряют свое движение. Это явление указывает на то, что между смежными частями жидкости возникают силы, одна из компонент которых направлена тангенциально к их общей поверхности. В самом деле, если бы силы взаимодействия между частицами жидкости были направлены нормально к их общей поверхности, то ясно, что момент количества движения относительно оси сосуда каждой части жидкости, ограниченной поверхностью вращения около этой оси, был бы постоянен. Далее мы заключаем, что тангенциальные силы отсутствуют, пока жидкость движется как твердое тело; они появляются только тогда, когда имеет место изменение формы частиц жидкости и эти силы направлены так, что они стремятся помешать изменению формы.

§ 2. Однако принято сначала совершенно опускать из рассмотрения тангенциальные напряжения. Их действие во многих практических случаях очень мало и, независимо от этого, целесообразно расчленить довольно значительные трудности нашей задачи путем рассмотрения сначала лишь действий одних нормальных напряжений. В соответствии с этим дальнейшие исследования тангенциальных напряжений мы откладываем до XI главы.

Если напряжение, приложенное к какому-нибудь элементу поверхности, проходящему через точку P жидкости, направлено нормально к этому элементу, то величина этого напряжения (на единицу площади) не зависит от направления этого элемента поверхности. Докажем эту теорему сейчас, чтобы потом иметь возможность на нее ссылаться. Проведем через точку P три взаимно перпендикулярные прямые PA, PB, PC; пусть плоскость, лежащая бесконечно близко к точке P и имеющая с указанными прямыми направляющие косинусы l, m, n, пересекает эти прямые в точках A, B, C. Пусть будут p, p_1, p_2, p_3 напряжения [1]) для граней ABC, PBC, PCA, PAB тетраедра $PABC$. Если мы обозначим площадь первого треугольника через Δ, то площади остальных треугольников будут соответственно равны $l\Delta$, $m\Delta$, $n\Delta$. Отсюда, составляя уравнение движения тетраедра параллельно PA, получим



Фиг. 1.

$$p_1 \cdot l\Delta = pl \cdot \Delta;$$

мы пренебрегли здесь как членами, представляющими изменение количества движения, так и компонентами внешних сил, так как эти величины пропорциональны массе тетраедра и потому являются бесконечно малыми третьего порядка, тогда как оставленные нами члены суть второго порядка малости. Отсюда следует, что $p = p_1$ и аналогично $p = p_2 = p_3$, что и доказывает нашу теорему.

§ 3. Уравнения движения жидкости можно представить в двух различных формах соответственно двум способам, которые можно предложить при исследовании движения жидкой массы под действием данных сил и при определенных граничных условиях. Именно, или мы можем сделать предметом нашего исследования определение для любого момента времени скорости, давления и плотности во всех точках пространства, наполненного жидкостью, или же мы можем стремиться определить историю каждой отдельной жидкой частицы. Уравнения, которые получаются этими двумя способами, называются

---

[1]) Напряжения считаются положительными в случае давления и отрицательными, если имеет место растяжение. Однако большинство жидкостей при обыкновенных условиях может испытывать только очень малое растяжение, так что p почти всегда положительно.

обыкновенно, в согласии с немецкими математиками, как эйлерова и лагранжева формы уравнений гидродинамики, хотя на самом деле обе формы принадлежат Эйлеру [1]).

Уравнения Эйлера

§ 4. Пусть будут u, v, w компоненты скорости в точке (x, y, z) в момент t, параллельные осям координат. Таким образом эти компоненты суть функции независимых переменных x, y, z, t. Для каждого частного значения t количества u, v, w определяют движение в этот момент для всех точек пространства, наполненного жидкостью; напротив, для определенных значений переменных x, y, z количества u, v, w дают историю того, что происходит в этом определенном месте.

В большинстве случаев мы будем предполагать, что не только u, v, w суть конечные непрерывные функции от x, y, z, но что и их производные по координатам первого порядка $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}\right.$ и т. д.$\Big)$ также всюду конечны [2]); мы будем понимать под непрерывным движением такое движение, которое подчинено этим ограничениям. Исключения, если они встретятся, потребуют особых исследований. При определенном таким образом непрерывном движении относительная скорость двух смежных частиц P и P' всегда бесконечно мала, так что отрезок PP' остается всегда величиной одного и того же порядка. Отсюда следует, что если мы предположим, что вокруг P расположена малая замкнутая поверхность, которая движется вместе с жидкостью, то эта поверхность будет содержать внутри себя постоянно одно и то же вещество, и всякая поверхность, которая движется вместе с жидкостью, разделяет всегда и полностью массу жидкости на две части, расположенные по обе стороны этой поверхности.

§ 5. Значения u, v, w для последовательных значений t дают некоторым образом картину отдельных состояний движения, но они, однако, не дают прямой возможности установить тождество каждой частицы.

Чтобы определить изменение какой-нибудь функции $F(x, y, z, t)$, обусловливаемое движением частиц, заметим, что частица, которая в

---

[1]) Euler, Principes généraux du mouvement des fluides, Hist. de l'Acad. de Berlin, 1755. De principiis motus fluidorum, Novi Comm. Acad. Petrop., XIV, I (1759). Лагранж опубликовал три сочинения об уравнениях движения; первое в связи с принципом наименьшего действия в Miscellanea Taurinensia, II (1760) [Oeuvres, Paris, 1867—1892, I]; второе — в своем Mémoire sur la Théorie du Mouvement des Fluides, Nouv. mém. de l'Acad. de Berlin, 1781 [Oeuvres IV; наконец, третье — в Mécanique Analytique. В этом последнем изложении он начинает со второй формы уравнений (§ 14 в настоящей книге), но переходит сейчас же к обозначениям Эйлера.

[2]) Полезно заметить, принимая во внимание дальнейшие исследования, приведенные под заглавием „Вихревое движение", что эти производные не обязательно должны предполагаться непрерывными.

момент t была в положении (x, y, z), в момент $t+\delta t$ будет находиться в положении $(x+u\,\delta t,\ y+v\,\delta t,\ z+w\,\delta t)$, так что соответствующее значение F будет равно

$$F(x+u\,\delta t,\ y+v\,\delta t,\ z+w\,\delta t,\ t+\delta t)=$$
$$=F+u\,\delta t\,\frac{\partial F}{\partial x}+v\,\delta t\,\frac{\partial F}{\partial y}+w\,\delta t\,\frac{\partial F}{\partial z}+\delta t\,\frac{\partial F}{\partial t}.$$

Если, следуя Стоксу, мы введем символ $\frac{D}{Dt}$ для обозначения диференцирования, вытекающего из рассмотрения движения любой индивидуальной частицы жидкости, то новое значение F выразится через $F+\frac{DF}{Dt}\delta t$, где

$$\frac{DF}{Dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+u\,\frac{\partial F}{\partial x}+v\,\frac{\partial F}{\partial y}+w\,\frac{\partial F}{\partial z}. \tag{1}$$

§ 6. Чтобы получить уравнения движения, обозначим через p давление, через ϱ плотность, через X, Y, Z компоненты внешних сил, отнесенные к единице массы, для точки (x, y, z) в момент t. Рассмотрим элемент объема, имеющий центр в точке (x, y, z), ребра δx, δy, δz которого параллельны прямоугольным осям координат. Величина, на которую возрастает компонента по оси x количества движения этого элемента в единицу времени, равна $\varrho\,\delta x\,\delta y\,\delta z\,\frac{Du}{Dt}$; эта величина должна равняться проекции на ось x сил, действующих на этот элемент. Проекция на ось x внешних сил равна $\varrho\,\delta x\,\delta y\,\delta z\,X$. Давление на грань, параллельную плоскости yz, лежащую ближе к началу координат, равно

$$\left(p-\frac{1}{2}\,\frac{\partial p}{\partial x}\,\delta x\right)\delta y\,\delta z\ [1]).$$

Давление же на противолежащую грань равно

$$\left(p+\frac{1}{2}\,\frac{\partial p}{\partial x}\,\delta x\right)\delta y\,\delta z.$$

Разность этих давлений равна результирующему давлению

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\,\delta x\,\delta y\,\delta z$$

в направлении положительной оси x. Давления же на остальные грани перпендикулярны к оси x. Таким образом мы имеем

$$\varrho\,\delta x\,\delta y\,\delta z\,\frac{Du}{Dt}=\varrho\,\delta x\,\delta y\,\delta z\,X-\frac{\partial p}{\partial x}\,\delta x\,\delta y\,\delta z.$$

---

[1]) Легко видеть, что, согласно теореме о среднем значении, среднее давление на какую-нибудь боковую грань элемента можно положить равным давлению в центре соответствующей грани.

Вставляя значение для $\frac{Du}{Dt}$ из выражения (1) и составляя аналогичные уравнения относительно остальных осей, будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}&=X-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}&=Y-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}&=Z-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

§ 7. К этим динамическим уравнениям мы должны прежде всего присоединить определенное кинематическое соотношение между u, v, w, ϱ, которое получается следующим образом.

Обозначая через Q объем движущегося элемента жидкости, согласно закону сохранения массы, мы будем иметь

$$\frac{D(\varrho Q)}{Dt}=0,$$

или

$$\frac{1}{\varrho}\frac{D\varrho}{Dt}+\frac{1}{Q}\frac{DQ}{Dt}=0. \qquad (1)$$

Чтобы вычислить значение $\frac{1}{Q}\frac{DQ}{Dt}$, рассмотрим элемент, заполняющий в момент t параллелепипед $\delta x\,\delta y\,\delta z$, вершина P которого лежит в точке (x, y, z), а ребра PL, PM, PN параллельны координатным осям. В момент $t+\delta t$ рассматриваемый элемент образует косой параллелепипед, и так как скорости частицы L относительно частицы P равны

$$\frac{\partial u}{\partial x}\delta x,\quad \frac{\partial v}{\partial x}\delta x,\quad \frac{\partial w}{\partial x}\delta x,$$

то по прошествии времени δt проекции ребра PL на координатные оси будут равны

$$\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\delta t\right)\delta x,\quad \frac{\partial v}{\partial x}\delta t\,\delta x,\quad \frac{\partial w}{\partial x}\delta t\,\delta x.$$

Пренебрегая членами высшего порядка относительно δt, мы найдем, что длина этого ребра будет равна

$$\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\delta t\right)\delta x;$$

аналогично находим и остальные ребра. Так как углы параллелепипеда только бесконечно мало отличаются от прямых углов, то объем его, если мы пренебрежем членами высшего порядка относительно δt, выразится произведением трех ребер, т. е. мы получим

$$Q+\frac{DQ}{Dt}\delta t=\left\{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\delta t\right\}\delta x\,\delta y\,\delta z,$$

или

$$\frac{1}{Q}\frac{DQ}{Dt}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}. \qquad (2)$$

Следовательно, из (1) мы находим

$$\frac{D\varrho}{Dt} + \varrho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0. \tag{3}$$

Это уравнение называется уравнением неразрывности.

Выражение

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \tag{4}$$

которое, как мы видим, измеряет увеличение единицы объема жидкости в единицу времени в точке (x, y, z), обыкновенно называется объемным расширением в этой точке. С более общей точки зрения выражение (4) называется дивергенцией (расхождением) вектора u, v, w); часто оно обозначается следующим образом:

$$\operatorname{div}(u, v, w).$$

Предыдущее рассуждение в существенном принадлежит Эйлеру [1]). Другой, теперь более употребительный метод вывода уравнения неразрывности состоит в том, что вместо того, чтобы следовать, как выше, за движением элемента жидкости, рассматривают элемент объема $\delta x\,\delta y\,\delta z$ и исследуют, как изменяется заключенная в нем масса вследствие протекания жидкости через поверхность этого элемента объема. Если центр элемента находится в точке (x, y, z), то масса, которая входит за единицу времени в рассматриваемый элемент через его грань, ближайшую к началу координат и параллельную плоскости yz, равна

$$\left(\varrho u - \frac{1}{2}\,\frac{\partial \varrho u}{\partial x}\,\delta x\right)\delta y\,\delta z,$$

а масса, которая выходит через противоположную грань, равна

$$\left(\varrho u + \frac{1}{2}\,\frac{\partial \varrho u}{\partial x}\,\delta x\right)\delta y\,\delta z.$$

Следовательно, при движении жидкости через обе эти грани, получается в единицу времени внутри элемента объема излишек жидкости, равный

$$-\frac{\partial \varrho u}{\partial x}\,\delta x\,\delta y\,\delta z.$$

Подсчитывая таким же образом результат протекания жидкости через остальные грани, мы получим для общего излишка массы в объеме $\delta x\,\delta y\,\delta z$ за единицу времени выражение

$$-\left(\frac{\partial \varrho u}{\partial x} + \frac{\partial \varrho v}{\partial y} + \frac{\partial \varrho w}{\partial z}\right)\delta x\,\delta y\,\delta z.$$

Так как изменение количества вещества в некоторой области может обусловливаться только протеканием вещества через границу области,

---

[1]) См. прим. на стр. 15.

то предыдущее выражение должно равняться

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho\, \delta x\, \delta y\, \delta z).$$

Отсюда получаем уравнение неразрывности в следующем виде:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}+\frac{\partial\, \varrho u}{\partial x}+\frac{\partial\, \varrho v}{\partial y}+\frac{\partial\, \varrho w}{\partial z}=0. \tag{5}$$

§ 8. Рассмотрим теперь некоторые физические свойства жидкости, поскольку они влияют на величины, входящие в наши уравнения.

Для несжимаемой, сохраняющей постоянный объем, или капельной, жидкости мы имеем $\frac{D\varrho}{Dt}=0$. В этом случае уравнение неразрывности принимает простой вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{1}$$

При этом не предполагается, что жидкость имеет однородную (всюду одинаковую) плотность, хотя это, конечно, в дальнейшем есть наиболее важный случай.

Если мы желаем принять во внимание малую сжимаемость действительных капельных жидкостей, то должны взять уравнение вида

$$p=\varkappa\frac{(\varrho-\varrho_0)}{\varrho_0}, \tag{2}$$

или

$$\frac{\varrho}{\varrho_0}=1+\frac{p}{\varkappa}, \tag{3}$$

где $\varkappa$ обозначает так называемую объемную упругость. В случае газа, температура которого постоянна в пространстве и времени, имеет место изотермическое соотношение

$$\frac{p}{p_0}=\frac{\varrho}{\varrho_0}, \tag{4}$$

где p_0, ϱ_0 есть некоторая пара соответствующих друг другу значений для рассматриваемой температуры.

Однако во многих случаях движения газа его температура не остается постоянной, но повышается или понижается для каждого элемента, смотря по тому, сжимается газ или расширяется. Если этот процесс происходит так быстро, что мы можем пренебречь излишком или потерей тепла, происходящими вследствие проводимости и излучения, то мы получаем адиабатическое соотношение

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\gamma}, \tag{5}$$

где p_0 и ϱ_0 есть некоторая пара соответственных значений для рассматриваемого элемента. Постоянная γ есть отношение обеих удельных теплоемкостей газа; для атмосферного воздуха и некоторых других газов ее значение равно 1,408.

§ 9. На пограничных поверхностях жидкости (если они имеются) уравнение неразрывности должно быть заменено специальным условием на поверхности. Так, на *неподвижной* пограничной поверхности проекция скорости на нормаль к поверхности должна равняться нулю, т. е. если l, m, n суть направляющие косинусы нормали к поверхности, то должно быть

$$lu + mv + nw = 0. \tag{1}$$

Напротив, на поверхности разрыва, т. е. на поверхности, на которой значения u, v, w меняются скачками при переходе с одной стороны поверхности на другую, мы должны иметь

$$l\,(u_1 - u_2) + m\,(v_1 - v_2) + n\,(w_1 - w_2) = 0, \tag{2}$$

причем индексы служат для отличия количеств на обеих сторонах поверхности. Такое же соотношение должно иметь место и на поверхности раздела между жидкостью и движущимся твердым телом.

Приведенные выше случаи суть частные случаи следующего общего условия на поверхности (граничного условия). Если $F(x, y, z, t) = 0$ есть уравнение граничной поверхности, то для всякой точки этой поверхности имеем

$$\frac{DF}{Dt} = 0. \tag{3}$$

В самом деле, относительная скорость каждой частицы, лежащей на поверхности, должна быть направлена в точности тангенциально к поверхности (или равна нулю); в противном случае через поверхность имел бы место конечный поток жидкости. Отсюда следует, что скорость изменения F в любой момент времени для всякой частицы поверхности должна равняться нулю.

Более полное доказательство, данное Кельвином [1]), состоит в следующем. Чтобы найти компоненту скорости ($\dot{v}$) поверхности $F(x, y, z, t) = 0$, нормальную к этой поверхности, рассмотрим уравнение

$$F(x + l\dot{v}\,\delta t,\ \ y + m\dot{v}\,\delta t,\ \ z + n\dot{v}\,\delta t,\ \ t + \delta t) = 0,$$

где l, m, n суть направляющие косинусы нормали в любой точке (x, y, z) к этой поверхности. Отсюда следует

$$\dot{v}\left(l\,\frac{\partial F}{\partial x} + m\,\frac{\partial F}{\partial y} + n\,\frac{\partial F}{\partial z}\right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Так как

$$l = \frac{\partial F}{\partial x} : R, \quad m = \frac{\partial F}{\partial y} : R, \quad n = \frac{\partial F}{\partial z} : R,$$

где

$$R = \left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

---

[1]) Thomson W., Notes on Hydrodynamics, Cambr. and Dub. Math. Journ., Febr. 1848 (Mathematical and Physical Papers. Cambridge, 1882. I, 83).

то мы имеем

$$\dot{\nu} = \frac{1}{R}\,\frac{\partial F}{\partial t}\,. \tag{4}$$

Так как во всякой точке поверхности должно быть

$$\dot{\nu} = lu + mv + nw,$$

то, подставляя сюда вышеприведенные значения для l, m, n, мы и получим уравнение (3).

Уравнение с частными производными (3) удовлетворяется на всякой поверхности, движущейся вместе с жидкостью. Это вытекает непосредственно из смысла оператора $\frac{D}{Dt}$. Возникает вопрос, существует ли обязательно обратная теорема, т. е. должна ли движущаяся поверхность, уравнение которой $F=0$ удовлетворяет условию (3), всегда состоять из тех же самых частиц. Рассмотрим такую поверхность и отметим некоторую частицу P, лежащую на ней в момент t. Из уравнения (3) следует, что скорость, с которой P удаляется от поверхности, в момент t равна нулю, и легко видеть, что при *непрерывном движении* (согласно определению в § 4) компонента скорости частицы, находящейся на бесконечно малом расстоянии ζ от поверхности, взятая по нормали к движущейся поверхности, будет порядка ζ, т. е. что она равна $G\zeta$, где G конечно. Поэтому уравнение движения частицы P относительно поверхности может быть представлено следующим образом:

$$\frac{D\zeta}{Dt} = G\zeta.$$

Отсюда следует, что $\ln\zeta$ растет с конечной скоростью ко времени, и так как он в начальный момент, когда $\zeta=0$, равен отрицательной бесконечности, то он остается таким всегда, т. е. ζ остается для частицы P постоянно равной нулю.

Этот же результат следует из свойства решения уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u\,\frac{\partial F}{\partial x} + v\,\frac{\partial F}{\partial y} + w\,\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \tag{5}$$

рассматриваемого, как уравнение с частными производными для F *). Вспомогательная система обыкновенных диференциальных уравнений для уравнения (5) будет

$$dt = \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}\,, \tag{6}$$

где x, y, z рассматриваются как функции независимого переменного t. Очевидно, что это суть уравнения, из которых определяются траектории частиц; интегралы уравнений (6) можно представить в виде

$$x = f_1(a, b, c, t); \quad y = f_2(a, b, c, t); \quad z = f_3(a, b, c, t), \tag{7}$$

причем произвольные постоянные a, b, c суть количества, определяющие частицу; например, эти постоянные могут изображать начальные координаты частицы. Общее решение (5) получается исключением a, b, c из (7) и

$$F = \psi(a, b, c), \tag{8}$$

где ψ обозначает произвольную функцию. Это показывает, что частица, которая лежала однажды на поверхности $F=0$, остается на ней постоянно в течение всего движения.

*) L a g r a n g e, Oeuvres, IV, стр. 706.

Уравнение энергии

§ 10. В большинстве случаев, которые мы будем изучать, внешние силы имеют потенциал, т. е. будет

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \\ Y &= -\frac{\partial\Omega}{\partial y}, \\ Z &= -\frac{\partial\Omega}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Физический смысл Ω состоит в том, что функция Ω представляет потенциальную энергию единицы массы в точке (x, y, z) сил, действующих на расстоянии. Предварительно достаточно рассмотреть случай, когда поле внешних сил постоянно относительно времени, т. е. когда

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = 0.$$

Умножая уравнения (2) из § 6 соответственно на u, v, w и складывая, получим результат, который можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{2}\varrho\frac{D}{Dt}(u^2+v^2+w^2)+\varrho\frac{D\Omega}{Dt} = -\left(u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}\right).$$

Если мы умножим это уравнение на $\delta x\,\delta y\,\delta z$ и проинтегрируем по некоторой области, то найдем

$$\frac{D}{Dt}(T+V) = -\iiint\left(u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz, \qquad (2)$$

где

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\iiint\varrho\,(u^2+v^2+w^2)\,dx\,dy\,dz, \\ V &= \iiint\Omega\varrho\,dx\,dy\,dz, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

т. е. T и V обозначают кинетическую энергию и происходящую от поля внешних сил потенциальную энергию для жидкости, которая в даный момент наполняет рассматриваемую область.

Трехкратный интеграл в правой части (2) можно преобразовать при помощи приема, к которому мы часто будем прибегать в наших исследованиях. Именно, интегрируя по частям, мы получим

$$\iiint u\frac{\partial p}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint [pu]\,dy\,dz - \iiint p\frac{\partial u}{\partial x}\,dx\,dy\,dz,$$

где $[pu]$ означает, что значения pu должны быть взяты, и притом с надлежащими знаками, в точках, в которых граница области пересекается прямой, параллельной оси x.

Обозначая через l, m, n направляющие косинусы *внутренней* нормали к элементу δS границы области, имеем

$$\delta y\,\delta z = \pm\, l\,\delta S,$$

причем знаки меняются в следующих друг за другом только что рассмотренных точках пересечения границы области с прямой, параллельной оси x. Мы находим отсюда

$$\iint [pu]\, dy\, dz = -\iint pu\, l\, dS,$$

где интегрирование надо распространить на всю ограничивающую поверхность. Если мы преобразуем остальные члены подобным же образом, то получим

$$\frac{D}{Dt}(T+V) = \iint p\,(lu+mv+nw)\, dS + \\ + \iiint p\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz. \tag{4}$$

В случае несжимаемой жидкости это уравнение принимает вид

$$\frac{D}{Dt}(T+V) = \iint (lu+mv+nw)\, p\, dS. \tag{5}$$

Так как $lu+mv+nw$ обозначает скорость частицы жидкости в направлении нормали, то интеграл в правой части выражает работу, которую производит давление $p\,\delta S$, направленное снаружи на различные элементы δS ограничивающей поверхности. Поэтому общий прирост энергии как кинетической, так и потенциальной для какой-нибудь части жидкости равен работе, которую производит давление на поверхность, ограничивающую эту часть жидкости.

В частном случае, когда жидкость со всех сторон ограничена твердыми неподвижными стенками, мы имеем на границе

$$lu+mv+nw=0,$$

и отсюда следует, что

$$T+V = \text{const.} \tag{6}$$

Подобное истолкование можно дать и более общему уравнению (4), если мы примем, что p есть функция только от ϱ. Если мы положим

$$E = -\int p\, d\left(\frac{1}{\varrho}\right), \tag{7}$$

то E определяет меру для работы, которую единица массы жидкости производит против внешнего давления, когда она при данном соотношении между p и ϱ переходит от рассматриваемого объема к определенному первоначальному объему. Если, например, единица массы заключена в цилиндре со скользящим поршнем, поверхность которого равна A, и поршень выдвинут на отрезок δx, то произведенная при этом работа будет равна $pA\,\delta x$, где множитель $A\,\delta x$ обозначает приращение объема, т. е. приращение ϱ^{-1}.

Для случая адиабатического изменения состояния мы получим:

$$E = \frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{p}{\varrho}-\frac{p_0}{\varrho_0}\right). \tag{8}$$

Количество E можно назвать внутренней энергией жидкости, приходящейся на единицу массы. Обращаясь к данному в § 7 истолкованию выражения

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z},$$

мы видим, что объемный интеграл в (4) измеряет потерю внутренней энергии, которую испытывают различные элементы при расширении [1]; следовательно, этот интеграл равен

$$-\frac{DW}{Dt},$$

где

$$W=\iiint E\varrho\, dx\, dy\, dz. \tag{9}$$

Следовательно, мы имеем

$$\frac{D}{Dt}\,(T+V+W)=\iint p\,(lu+mv+nw)\,dS, \tag{10}$$

т. е. полная энергия, которая слагается в этом случае частью из кинетической, частью из потенциальной по отношению к не зависящему от времени силовому полю, частью из внутренней энергии, изменяется со временем в той мере, в какой производится работа внешнего давления на ограничивающей поверхности.

При изотермическом законе мы имели бы

$$E=c^2\ln\frac{\varrho}{\varrho_0}, \tag{11}$$

где $c^2=\frac{p_0}{\varrho_0}$. Это выражение представляет свободную энергию единицы массы. При таком определении E мы получим уравнение в той же форме, что и уравнение (10), но только смысл его будет отличен.

Перенос количества движения

§ 10а. Пусть в момент времени t жидкость занимала некоторую область. Область, которую займет эта жидкость по прошествии времени δt, будет отличаться от первоначальной на поверхностный слой толщины (положительной или отрицательной)

$$(lu+mv+nw)\,\delta t,$$

где (l, m, n) — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности. Отсюда легко видеть, что мера возрастания количества движения выделенной части жидкости в момент t равна мере возрастания

---

[1]) Или иначе:

$$p\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\delta x\,\delta y\,\delta z=-p\cdot\frac{1}{\varrho}\,\frac{D\varrho}{Dt}\cdot\delta x\,\delta y\,\delta z=$$

$$=p\,\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\varrho\,\delta x\,\delta y\,\delta z=-\frac{DE}{Dt}\,\varrho\,\delta x\,\delta y\,\delta z.$$

количества движения, содержащегося в неизменяемой области, сложенной с перенесенным количеством движения наружу через границу.

Рассматривая проекцию количества движения на ось x, мы будем иметь

$$\iiint \frac{Du}{Dt}\varrho\, dx\, dy\, dz = \iiint \varrho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz =$$
$$= \iiint \varrho \frac{\partial u}{\partial t}\, dx\, dy\, dz + \iint \varrho u\,(lu + mv + nw)\, dS -$$
$$- \iiint u\left(\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz =$$
$$= \frac{d}{dt}\iiint \varrho u\, dx\, dy\, dz + \iint \varrho u\,(lu + mv + nw)\, dS \ldots, \qquad (1)$$

при этом мы использовали соотношение (5) § 7.

В случае установившегося движения (§ 21) первый член правой части (1) обращается в нуль, и поэтому *мера* возрастания количества движения какой-либо части жидкости равна перенесенному количеству движения наружу через ее границу.

Обратно, если мы применим данную теорему к жидкости, содержащейся в какой-либо момент в прямоугольном параллелепипеде $\delta x\, \delta y\, \delta z$, то мы можем воспроизвести уравнения движения § 6.

Мгновенно вызванное движение

§ 11. Если на жидкость в некоторый момент времени действуют мгновенные силы или если граничные условия внезапно изменяются, то может иметь место внезапное изменение движения. Последнее обстоятельство, может, например, наступить, если некоторое погруженное в жидкость тело внезапно привести в движение.

Пусть будут ϱ — плотность, u, v, w — компоненты скорости непосредственно перед ударом, u', v', w' — непосредственно после удара, X', Y', Z' — компоненты внешних импульсивных сил на единицу массы, ϖ — импульсивное давление в точке (x, y, z). Изменение количества движения, параллельного оси x, для элемента, определенного в § 6, равно

$$\varrho\, \delta x\, \delta y\, \delta z\, (u' - u);$$

компонента внешних импульсивных сил, параллельная оси x, равна

$$\varrho\, \delta x\, \delta y\, \delta z\, X',$$

и результирующее импульсивное давление в том же направлении равно

$$-\frac{\partial \varpi}{\partial x}\, \delta x\, \delta y\, \delta z.$$

Так как удар можно рассматривать как бесконечно большую силу, действующую в течение бесконечно малого промежутка времени (например τ), то мы можем пренебречь действием всех конечных сил в течение этого промежутка времени.

Поэтому мы имеем

$$\varrho\,\delta x\,\delta y\,\delta z\,(u'-u)=\varrho\,\delta x\,\delta y\,\delta z\,X'-\frac{\partial\bar\omega}{\partial x}\,\delta x\,\delta y\,\delta z,$$

или

и аналогично:

$$\left.\begin{aligned} u'-u&=X'-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\bar\omega}{\partial x},\\ v'-v&=Y'-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\bar\omega}{\partial y},\\ w'-w&=Z'-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\bar\omega}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Эти уравнения можно получить также из уравнений (2), данных в § 6, если мы умножим эти уравнения на δt, проинтегрируем их между пределами 0 и τ, сделаем подстановку

$$X'=\int_0^\tau X\,dt,\ Y'=\int_0^\tau Y\,dt,\ Z'=\int_0^\tau Z\,dt,\ \widetilde{\omega}=\int_0^\tau p\,dt$$

и затем положим τ бесконечно малым.

В несжимаемой жидкости мгновенное изменение движения может быть вызвано одними импульсивными давлениями даже тогда, когда на жидкую массу не действуют внешние импульсивные силы. В этом случае мы имеем

$$X'=Y'=Z'=0,$$

так что

$$\left.\begin{aligned} u'-u&=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\bar\omega}{\partial x},\\ v'-v&=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\bar\omega}{\partial y},\\ w'-w&=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\omega}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Если мы продиференцируем эти уравнения соответственно по x, y, z, затем сложим результаты и предположим далее, что плотность постоянна (относительно x, y, z), то найдем согласно § 8 (1), что

$$\frac{\partial^2\widetilde{\omega}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\widetilde{\omega}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\widetilde{\omega}}{\partial z^2}=0.$$

Отсюда ясно, что задача состоит в том, чтобы в каждом данном случае определить значение $\widetilde{\omega}$, удовлетворяющее этому уравнению, при специальных условиях на границе[1]); тогда внезапное изменение движения определится из уравнений (2).

---

[1]) В главе III мы увидим, что значение $\bar\omega$ определится отсюда вплоть до аддитивной константы.

Уравнения, отнесенные к подвижной системе координат

§ 12. В некоторых задачах иногда бывает полезно пользоваться прямоугольной системой координат, которая сама находится в движении. Движение самой системы координат можно характеризовать при помощи компонент скорости начала координат $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ и компонент $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ вращения относительно мгновенного положения осей. Если u, v, w суть компоненты скорости частицы жидкости в точке (x, y, z), то скорость изменения ее координат относительно подвижной системы осей координат выражается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{Dx}{Dt} &= u - \mathbf{u} + \mathbf{r}y - \mathbf{q}z, \\
\frac{Dy}{Dt} &= v - \mathbf{v} + \mathbf{p}z - \mathbf{r}x, \\
\frac{Dz}{Dt} &= w - \mathbf{w} + \mathbf{q}x - \mathbf{p}y.
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

По истечении времени δt компоненты скорости частицы, параллельные новым положениям осей координат, будут равны

$$u + \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{Dx}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{Dy}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{Dz}{Dt}\right)\delta t \quad \text{и т. д.} \tag{2}$$

Чтобы найти компоненты ускорения, мы должны найти проекции скорости по истечении времени δt на направления, параллельные первоначальным направлениям осей координат, по приемам, изложенным в учебниках Динамики.

Отсюда мы получим следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \mathbf{r}v + \mathbf{q}w + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{Dx}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{Dy}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{Dz}{Dt}, \\
&\frac{\partial v}{\partial t} - \mathbf{p}w + \mathbf{r}u + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{Dx}{Dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{Dy}{Dt} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{Dz}{Dt}, \\
&\frac{\partial w}{\partial t} - \mathbf{q}u + \mathbf{p}v + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{Dx}{Dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{Dy}{Dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{Dz}{Dt}.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Чтобы получить искомые уравнения движения, надо заменить левые части формул (21) § 6 [1]) этими значениями.

Общее уравнение неразрывности принимает вид

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho\frac{Dx}{Dt}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varrho\frac{Dy}{Dt}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varrho\frac{Dz}{Dt}\right) = 0 \tag{4}$$

и приводится для несжимаемых жидкостей к прежнему виду

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{5}$$

---

[1]) Greenhill, On the General Motion of a Liquid Ellipsoid. Proc. Camb. Soc., IV. 4 (1880).

Уравнения Лагранжа

§ 13. Пусть будут a, b, c начальные координаты некоторой частицы жидкости, x, y, z — ее координаты в момент t. Мы рассматриваем здесь x, y, z как функции независимых переменных a, b, c, t. Их значения как функций этих величин дают историю каждой частицы жидкости. В момент t компоненты скорости частицы (a, b, c), параллельные осям координат, суть

$$\frac{\partial x}{\partial t}, \quad \frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{\partial z}{\partial t},$$

и компоненты ускорения по тем же направлениям будут равны

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Пусть будут p давление и ϱ плотность в области этой частицы в момент t, X, Y, Z — компоненты внешних сил, действующих на единицу массы. Рассматривая движение жидкой массы, занимающей в момент t бесконечно малый элемент пространства $\delta x\,\delta y\,\delta z$, мы при помощи рассуждения, аналогичного рассуждению § 6, получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Эти уравнения содержат производные по x, y, z, тогда как независимые переменные суть a, b, c, t. Чтобы исключить эти производные, умножим сначала приведенные уравнения соответственно на $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial y}{\partial a}$, $\frac{\partial z}{\partial a}$ и сложим, затем умножим на $\frac{\partial x}{\partial b}$, $\frac{\partial y}{\partial b}$, $\frac{\partial z}{\partial b}$ и сложим и, наконец, умножим соответственно на $\frac{\partial x}{\partial c}$, $\frac{\partial y}{\partial c}$, $\frac{\partial z}{\partial c}$ и сложим. Тогда мы получим три уравнения:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial a} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial a} &= 0, \\
\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial b} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial b} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial b} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial b} &= 0, \\
\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial c} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial c} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial c} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial c} &= 0.
\end{aligned}$$

Эти уравнения представляют лагранжеву форму уравнений движения.

§ 14. Чтобы определить, какой вид примет уравнение неразрывности относительно наших теперешних переменных, рассмотрим элемент жидкости, который первоначально наполнял прямоугольный параллелепипед с центром в (a, b, c) и с ребрами δa, δb, δc, параллельными осям координат. В момент t этот самый элемент образует косой параллелепипед. Его центр имеет теперь координаты x, y, z, и проекции его ребер на оси координат будут соответственно равны

$$\frac{\partial x}{\partial a}\delta a,\ \frac{\partial y}{\partial a}\delta a,\ \frac{\partial z}{\partial a}\delta a,$$
$$\frac{\partial x}{\partial b}\delta b,\ \frac{\partial y}{\partial b}\delta b,\ \frac{\partial z}{\partial b}\delta b,$$
$$\frac{\partial x}{\partial c}\delta c,\ \frac{\partial y}{\partial c}\delta c,\ \frac{\partial z}{\partial c}\delta c.$$

Отсюда находим для объема этого косого параллелепипеда выражение

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} \delta a\, \delta b\, \delta c,$$

или, согласно часто употребляемому обозначению:

$$\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (a, b, c)}\delta a\, \delta b\, \delta c.$$

Так как масса элемента остается неизменной, то должно быть

$$\varrho \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (a, b, c)} = \varrho_0, \tag{1}$$

где ϱ_0 обозначает первоначальную плотность в точке (a, b, c).

В случае несжимаемой жидкости $\varrho = \varrho_0$ и (1) принимает вид

$$\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (a, b, c)} = 1. \tag{2}$$

Преобразование Вебера

§ 15. Если, как указано в § 10, силы X, Y, Z имеют потенциал Ω, то уравнения движения § 13 можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial a} = -\frac{\partial \Omega}{\partial a} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial a} \quad \text{и т. д.}$$

Проинтегрируем эти уравнения по t между пределами 0 и t. Заметим, что

$$\int_0^t \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial a}\,dt = \left[\frac{\partial x}{\partial t}\,\frac{\partial x}{\partial a}\right]_0^t - \int_0^t \frac{\partial x}{\partial t}\,\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial t}\,dt =$$
$$= \frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial x}{\partial a} - u_0 - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}\int_0^t \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 dt,$$

где u_0 есть начальное значение компоненты скорости частицы (a, b, c)

в направлении оси x. Полагая

$$\chi = \int_0^t \left[\int \frac{dp}{\varrho} + \Omega - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 \right\} \right] dt, \tag{1}$$

имеем [1])

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial a} - u_0 = -\frac{\partial \chi}{\partial a}, \\ \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial b} - v_0 = -\frac{\partial \chi}{\partial b}, \\ \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial b} - w_0 = -\frac{\partial \chi}{\partial c}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Эти три уравнения вместе с уравнением

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \int \frac{dp}{\varrho} + \Omega - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 \right\} \tag{3}$$

и уравнением неразрывности суть уравнения с частными производными, которым должны удовлетворять пять неизвестных величин x, y, z, p, χ; при этом мы считаем, что ϱ уже исключено при помощи одного из соотношений § 8.

Начальные условия, которым надлежит удовлетворить, суть

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c, \quad \chi = 0.$$

§ 16. Необходимо отметить, что количества a, b, c не должны обязательно обозначать начальные координаты частицы; они могут обозначать какие-нибудь три количества, которые служат для определения частицы и меняются непрерывно от частицы к частице. Если мы обобщим таким образом смысл a, b, c, то форма уравнений движения в § 13 не изменится; чтобы найти форму, которую принимает уравнение неразрывности, обозначим через x_0, y_0, z_0 координаты начального положения частицы, которой соответствуют a, b, c. Начальный объем параллелепипеда, центр которого лежит в точке (x_0, y_0, z_0) и ребра которого соответствуют вариациям δa, δb, δc параметров a, b, c, равен

$$\frac{\partial (x_0, y_0, z_0)}{\partial (a, b, c)} \delta a \, \delta b \, \delta c,$$

так что мы имеем

$$\varrho \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (a, b, c)} = \varrho_0 \frac{\partial (x_0, y_0, z_0)}{\partial (a, b, c)}, \tag{1}$$

или — для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (a, b, c)} = \frac{\partial (x_0, y_0, z_0)}{\partial (a, b, c)}. \tag{2}$$

---

[1]) Weber, H., Über eine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen, Crelle, LXVIII (1868). В (1) предполагается, что плотность ϱ, если она непостоянна, есть функция только p.

Уравнения в полярных координатах

§ 16а. В предшествующих рассуждениях были использованы декартовы координаты, которые обычно более удобны при доказательствах общих теорем. Но при разрешении некоторых частных задач оказывается удобнее пользоваться полярными координатами. Поэтому мы, следуя плану Эйлера, здесь для справок приводим соответственные формулы.

В полярных координатах на плоскости мы можем через u и v обозначить соответственно радиальную и трансверсальную скорости в точке $(r,\ \theta)$ в момент t. Так как радиус-вектор частицы вращается со скоростью $\frac{v}{r}$, то согласно обычной теории вращения осей получим для компонент ускорения следующие выражения:

$$\frac{Du}{Dt}-\frac{v}{r}\,v,\qquad \frac{Dv}{Dt}+\frac{v}{r}\,u, \tag{1}$$

где, следуя методу § 5, принято

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\,\frac{\partial}{\partial r}+v\,\frac{\partial}{r\,\partial\theta}. \tag{2}$$

Расхождение (Δ) мы найдем, если подсчитаем количество жидкости, втекшей в квазипрямоугольный элемент, стороны которого суть δr и $r\,\delta\theta$, следовательно,

$$\Delta=\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial v}{r\,\partial\theta}. \tag{3}$$

В сферических координатах мы обозначим радиальную скорость в точке $(r,\ \theta,\ \varphi)$ через u, скорость, перпендикулярную к r в плоскости изменения θ, через v и скорость, перпендикулярную к плоскости отсчета θ, через w. Из начала координат проведем три линии, параллельные указанным направлениям, именно так, чтобы они, как это обычно принимается, образовали правую систему координат. Изменения угловых координат частицы за время δt будут представляться в виде

$$r\,\delta\theta=v\,\delta t,\quad r\sin\theta\,\delta\varphi=w\,\delta t.$$

Эти изменения составят вращение указанной системы относительно ее мгновенного положения с компонентами:

$$\cos\theta\,\delta\varphi,\quad -\sin\theta\,\delta\varphi,\quad \delta\theta.$$

Отсюда, если мы через $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ обозначим компоненты мгновенной угловой скорости системы координат, получим

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{p}&=\frac{w}{r}\,\operatorname{ctg}\theta,\\ \mathbf{q}&=-\frac{w}{r},\\ \mathbf{r}&=\frac{v}{r}.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Следовательно, компоненты требуемого ускорения частицы в точке $(r,\ \theta,\ \varphi)$ будут представляться в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} - \mathfrak{r}v + \mathfrak{q}w &= \frac{Du}{Dt} - \frac{v^2+w^2}{r},\\ \frac{Dv}{Dt} - \mathfrak{p}w + \mathfrak{r}u &= \frac{Dv}{Dt} + \frac{uv}{r} - \frac{w^2}{r}\operatorname{ctg}\theta,\\ \frac{Dw}{Dt} - \mathfrak{q}u + \mathfrak{p}v &= \frac{Dw}{Dt} + \frac{wu}{r} + \frac{vw}{r}\operatorname{ctg}\theta, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial r} + v\frac{\partial}{r\,\partial\theta} + w\frac{\partial}{r\sin\theta\,\partial\varphi}. \tag{6}$$

Расхождение может быть найдено вычислением втекшего потока в квазипрямоугольный параллелепипед, ребра которого суть δr, $r\,\delta\theta$, $r\sin\theta\,\delta\varphi$; таким образом

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r\,\partial\theta} + \frac{v}{r}\operatorname{ctg}\theta + \frac{\partial w}{r\sin\theta\,\partial\varphi}. \tag{7}$$

ГЛАВА ВТОРАЯ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯХ

§ 17. Существует обширный и важный класс случаев, когда компоненты скорости u, v, w могут быть выражены через однозначную функцию φ следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x},\\ v &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y},\\ w &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{1 *)}$$

Эта функция φ называется *потенциалом скоростей* вследствие аналогии с потенциальной функцией теории тяготения, электростатики и т. д. Общая теория потенциала скоростей будет изложена в следующей главе, но уже здесь мы дадим доказательство следующей важной теоремы:

Если в некоторый момент времени для некоторой конечной части совершенной жидкости, двигающейся под действием сил, обладающих потенциалом, существует потенциал скоростей, причем плотность жидкости постоянна или есть функция только давления, то потенциал скоростей должен существовать для указанной части жид-

*) Теория „циклических" потенциалов скоростей будет разобрана впоследствии.

кости для всех предшествующих и для всех последующих моментов времени [1]).

Если в уравнениях § 15 мы возьмем момент времени в начале отсчета, для которого существует потенциал скоростей φ, то мы должны иметь

$$u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc = -d\varphi_0$$

во всей рассматриваемой части жидкой массы. Умножая уравнения (2) § 15 соответственно на da, db, dc и складывая их, получим

$$\frac{\partial x}{\partial t}\,dx + \frac{\partial y}{\partial t}\,dy + \frac{\partial z}{\partial t}\,dz - (u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc) = -d\chi,$$

или в обозначениях Эйлера

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = -d(\varphi_0 + \chi) = -d\varphi,$$

где $\varphi_0 + \chi$ обозначено через φ. Так как верхняя граница в (1) § 15 может быть как положительной, так и отрицательной, то наше предложение тем самым доказано.

Необходимо особенно отметить, что существование потенциала скоростей относится не к частям пространства, а к частям жидкости. Часть жидкости, для которой существует потенциал скоростей, движется дальше и несет с собой это свойство, в то время как часть пространства, которую жидкость первоначально занимала, с течением времени может быть занята жидкостью, которая сначала не обладала этим свойством и поэтому не сможет его приобрести.

Класс случаев, в которых существует однозначный потенциал скоростей, охватывает все те движения, которые возникают из состояния покоя под действием сил рассмотренного здесь типа. В самом деле, мы имеем в начале движения

$$u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc = 0,$$

т. е.

$$\varphi_0 = \text{const}.$$

Ограничения, при которых доказана рассмотренная выше теорема, ни в коем случае не следует упускать из виду. Было не только допущено, что внешние, отнесенные к единице массы, силы X, Y, Z обладают потенциалом, но также, что плотность или постоянна, или есть функция, зависящая только от p. Это последнее условие, например, не выполняется при конвекционных течениях, которые возникают от неравномерного нагревания жидкости, а также при волно-

[1]) Lagrange, Mémoire sur la Théorie du Mouvement des Fluides, Nouv. mém. de l'Acad. de Berlin, 1781 (Oeuvres, IV, 714). Доказательство воспроизводится в Mécanique Analitique. Теорема, высказанная Лангранжем, и ее доказательство были не вполне строгие; первое строгое доказательство было дано Коши в Mémoire sur la Théorie des Ondes, Mém. de l'Acad. roy. des Sciences, I (1827) (Oeuvres Complétes, Paris, 1882, 1-я серия, I, 38); мемуар датирован 1815 годом. Другое доказательство дано Стоксом, Camb. Trans., VIII (1845) (Смотреть также Math. and Phys. Papers, Cambridge, 1880, I, 106, 158, и II, 36 стр.); там же дано прекрасное историческое и критическое изложение всего вопроса.

вом движении неоднородной, но несжимаемой жидкости, которая первоначально располагалась в горизонтальных слоях одинаковой плотности. Другой исключительный случай образуют „электромагнитные" вращения; см. § 29.

§ 18. Сравнение формул (1) с уравнениями (2) § 11 приводит к простому физическому истолкованию функции φ.

Всякое действительное состояние движения жидкости, для которого существует однозначный потенциал скоростей, может быть мгновенно получено из состояния покоя приложением подходяще выбранной системы импульсивных давлений. Это предложение получается из указанных уравнений, из которых, кроме того, следует, что

$$\varphi = \frac{\widetilde{\omega}}{\varrho} + \text{const},$$

так что

$$\widetilde{\omega} = \varrho\varphi + C$$

дает искомую систему импульсивных давлений. Точно так же

$$\widetilde{\omega} = -\varrho\varphi + C$$

представляет систему импульсивных давлений, мгновенно приводящих движение вполне к состоянию покоя [1]). Появление произвольной постоянной в этих выражениях показывает только, что всюду одинаковое давление, действующее во всей жидкой массе, не может оказать влияния на движение.

В случае газа φ может быть истолковано как потенциал тех внешних импульсивных сил, благодаря которым действительное движение в некоторый момент могло бы произойти мгновенно из состояния покоя.

Состояние движения, для которого не существует потенциала скоростей, не может ни возникнуть, ни уничтожиться под действием импульсивных давлений или внешних сил, обладающих потенциалом.

§ 19. Существование потенциала скоростей обусловливает, кроме того, еще определенные *кинематические* свойства движения.

Будем называть *линией тока* такую линию, направление касательной в каждой точке которой совпадает с направлением движения жидкости. Диференциальные уравнения системы этих линий будут

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}. \tag{2}$$

Соотношение (1) показывает, что если существует потенциал скоростей, то линии тока всюду перпендикулярны к системе поверхностей $\varphi = \text{const}$, которые называются *поверхностями равного потенциала*.

---

[1]) Это истолкование дано Коши (см. прим. на стр. 33) и Пуассоном, Poisson, Mém. de l'Acad. roy. des Sciences, I (1816).

Проведем из точки (x, y, z) линейный элемент δs в направлении (l, m, n); тогда компонента скорости в этом направлении будет равна $lu+mv+nw$, или

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds}-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{ds};$$

последнее выражение равно $-\frac{\partial\varphi}{\partial s}$. Следовательно, скорость в любом направлении равна производной с обратным знаком, взятой в этом направлении, от функции φ.

Проведем поверхности равного потенциала, соответствующие определенным значениям φ, отличающимся одно от другого на бесконечно малое количество. Если мы возьмем элемент δs, нормальный к какой-нибудь поверхности $\varphi=\text{const}$, то получим, что скорость в любой точке рассматриваемой поверхности обратно пропорциональна взаимному расстоянию в области этой точки двух соседних поверхностей равного потенциала. Поэтому, если какая-нибудь поверхность равного потенциала пересекает самое себя, то скорость жидкости для линии пересечения равна нулю. Пересечение же двух *различных* поверхностей равного потенциала указывает на бесконечно большую скорость.

§ 20. При условиях, допущенных в § 17, можно непосредственно интегрировать уравнения движения для той части жидкости, где существует потенциал скоростей, в случаях если ϱ постоянно или есть определенная функция от p. В самом деле, в силу соотношений

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial y},\quad \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x},$$

вытекающих из соотношений (1), уравнения § 6 можно представить в виде

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{\partial\Omega}{\partial x}-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}\quad \text{и т. д.} \tag{3}$$

Эти уравнения имеют интеграл

$$\int\frac{dp}{\varrho}+\frac{1}{2}q^2+E+\Omega=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+F(t), \tag{4}$$

где q обозначает результирующую скорость $(u^2+v^2+w^2)$, $F(t)$ есть произвольная функция только от t, а E определяется выражением (7) § 10 и может быть истолковано (в случае газа), как и выше.

В случае несжимаемой жидкости это уравнение принимает особенно простой вид; именно, в этом случае мы имеем

$$\frac{p}{\varrho}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\Omega-\frac{1}{2}q^2+F(t), \tag{5}$$

к которому надо присоединить уравнение неразрывности

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0, \tag{6}$$

эквивалентное уравнению (1) § 8. Если, как это будет во многих случаях, которые мы будем изучать, граничные условия суть чисто кинематические, то процесс решения состоит в том, чтобы найти функцию, удовлетворяющую как уравнению (6), так и заданным условиям на граничной поверхности. Тогда давление определится из соотношения (5) с точностью до аддитивной функции от t. Его можно будет определить вполне только тогда, когда значение p в некоторой точке жидкости дано для всех значений t. Так как член $F(t)$ не влияет на *результирующую* давлений, то его часто опускают.

Предположим, например, что одно или несколько твердых тел движутся в ограниченной со всех сторон твердыми стенками жидкости, и пусть возможно, например, при помощи поршня произвести произвольное давление в определенной точке ее границы. Как бы мы ни меняли величину давления на поршень, движение жидкости и твердых тел при этом останется без всякого изменения, так как давление во всех точках жидкости будет при этом одновременно и одинаковым образом повышаться и падать. Физическое основание этого парадокса (а таковой здесь налицо) заключается в том, что жидкость рассматривается как абсолютно несжимаемая. В действительности же изменения давления в капельных жидкостях распространяются хотя и с очень большой, однако же не с бесконечно большой скоростью.

Если координатная система находится в движении, то формула для давления будет иметь вид

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \Omega - \frac{1}{2} q^2 - \mathbf{p}\left(y\frac{\partial\varphi}{\partial z} - z\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) - \\ - \mathbf{q}\left(z\frac{\partial\varphi}{\partial x} - x\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) - \mathbf{r}\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right), \tag{7}$$

где

$$q^2 = (u - \mathbf{u})^2 + (v - \mathbf{v})^2 + (w - \mathbf{w})^2. \tag{8}$$

Это легко получить из данных в § 12 формул (3) для ускорения.

Установившееся движение

§ 21. Если в каждой точке скорость постоянна по величине и направлению, т. е. если

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

то движение называется *установившимся*.

При установившемся движении линии тока совпадают с траекториями частиц. В самом деле, если P, Q суть две бесконечно близкие точки линии тока, то частица, которая в некоторый момент времени находилась в P, будет двигаться в направлении касательной в точке P и потому по истечении бесконечно малого промежутка времени попадет в точку Q. Так как движение установившееся, то линии тока остаются неизменными; поэтому направление движения частицы в точке Q совпадет с касательной к той же самой линии тока, т. е. частица описывает и дальше эту линию тока, которая совпадает таким образом с траекторией.

Линии тока, проведенные через бесконечно малую замкнутую кривую, образуют трубку, которая называется *трубкой тока*.

При установившемся движении из уравнения (4) предыдущего параграфа мы получим

$$\int \frac{dp}{\varrho} = -\Omega - \frac{1}{2} q^2 + \text{const}. \tag{2}$$

Однако в этом случае закон изменения давления *вдоль линии тока* можно найти и без допущения существования потенциала скоростей. В самом деле, если δs обозначает элемент линии тока, то ускорение в направлении движения равно $q \frac{\partial q}{\partial s}$, и мы имеем

$$q \frac{\partial q}{\partial s} = -\frac{\partial \Omega}{\partial s} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial s}. \tag{3}$$

Отсюда, интегрируя вдоль линии тока, получим

$$\int \frac{dp}{\varrho} = -\Omega - \frac{1}{2} q^2 + C. \tag{4}$$

Это уравнение формально очень похоже на уравнение (2) но оно более общо, поскольку оно не предполагает существования потенциала скоростей. Необходимо, однако, заметить, что const уравнения (2) и C уравнения (4) имеют различные значения; первое есть абсолютное постоянное, в то время как последнее постоянно только вдоль определенной линии тока, но может меняться при переходе от одной линии тока к другой.

§ 22. Уравнение (4) находится в тесной связи с принципом энергии. Если существование последнего допустить независимо, то формулу (4) можно вывести следующим образом[1]). Возьмем сначала частный случай капельной жидкости и рассмотрим линию тока, которая в некоторый момент времени занимает положение AB трубки тока, причем движение происходит в направлении от A к B. Пусть p есть давление, q — скорость, Ω — потенциал внешних сил, σ — площадь поперечного сечения в A; соответствующие количества в B отметим значками. Через короткий промежуток времени нить тока принимает положение A_1B_1; пусть m есть масса, заключенная между сечениями A и A_1 или B и B_1. Так как движение установившееся, то приращение энергии при движении жидкости будет равно

$$m\left(\frac{1}{2} q'^2 + \Omega'\right) - m\left(\frac{1}{2} q^2 + \Omega\right).$$

Далее, произведенная работа равна

$$p \frac{m}{\varrho} - p' \frac{m}{\varrho}.$$

Приравняв приращение энергии произведенной работе, мы будем иметь

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2} q^2 + \Omega = \frac{p'}{\varrho} + \frac{1}{2} q'^2 + \Omega',$$

[1]) По существу это есть не что иное, как обращение метода Даниила Бернулли, Bernoulli, Hydrodynamica, Argentorati, 1738.

или, употребляя C в том же смысле, как выше, мы получим

$$\frac{p}{\varrho}=-\Omega-\frac{1}{2}q^2+C; \tag{5}$$

а это и есть уравнение (4) § 21 при постоянном ϱ.

Чтобы вывести соответствующую формулу для сжимаемых жидкостей, заметим, что жидкость в каком-нибудь сечении обладает в этом случае, кроме кинетической и потенциальной энергии, еще *внутренней* или свободной энергией на единицу массы, равной

$$-\int p\,d\left(\frac{1}{\varrho}\right), \quad \text{или} \quad -\frac{p}{\varrho}+\int\frac{dp}{\varrho}.$$

Прибавляя это выражение к (5), получим уравнение (4).

В случае газа, подчиненного адиабатическому закону, мы имеем

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^\gamma, \tag{6}$$

и уравнение (4) принимает вид

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\,\frac{p}{\varrho}=-\Omega-\frac{1}{2}q^2+C. \tag{7}$$

§ 23. Из предыдущих уравнений видно, что при установившемся движении давление для точек вдоль линии тока [1]), при прочих равных условиях, будет наибольшее там, где скорость наименьшая, и обратно. Это предложение само собой будет понятно, если мы заметим, что движение точки должно ускоряться, если она переходит от места с более высоким давлением к месту с более низким давлением, и обратно [2]).

В тех случаях, когда имеют место уравнения предыдущего параграфа, из них вытекает существование предела, который скорость не может превзойти [3]). Вообразим, например, жидкость, вытекающую из резервуара, в котором мы можем пренебречь скоростью и внешними силами и где давление равно p_0. Поэтому в формуле (5) мы должны положить $C=\frac{p_0}{\varrho}$; следовательно, мы имеем

$$p=p_0-\frac{1}{2}\varrho q^2. \tag{8}$$

Хотя и найдено, что жидкость, из которой удалены все следы воздуха или других растворенных газов, может выдерживать отрицательное давление, или растяжение, заметной величины [4]), все же, од-

---

[1]) Мы в дальнейшем покажем, что это ограничение отпадает, когда существует потенциал скоростей.

[2]) Некоторые интересные практические разъяснения этого принципа были даны Фрудом (Froude) в Nature, XIII (1875).

[3]) Ср. Helmholtz, Über discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen, Berl. Monatsberichte, April, 1868; Phil. Mag. Nov., 1868 (Wissenschaftliche Abhandlungen, Leipzig, 1882—1883, I. 146).

[4]) Reynolds O., Manch. Mem., VI (1877) (Scientific Papers, Cambridge, 1900, I, 231).

нако, это не имеет места для жидкостей при нормальных условиях. Таким образом из уравнения (8) следует, что практически q не может превосходить значения $\left(\frac{2p_0}{\varrho}\right)^{1/2}$. Эта предельная скорость есть та самая скорость, с которой жидкость вытекала бы из резервуара в пустоту. В случае воды, находящейся под атмосферным давлением, она равна скорости, которая соответствует высоте водяного столба в барометре и равна приблизительно 14 *м/сек*.

Если в каком-нибудь случае движения жидкости, аналитическое выражение которого нам удалось установить, мы предположим, что движение постепенно ускоряется, до тех пор пока скорость в некотором месте, наконец, достигает указанного здесь предела, то в этом месте образуется разрыв и, следовательно, условия задачи должны быть в той или иной степени изменены.

В следующей главе (§ 44) будет показано, что при безвихревом движении капельной жидкости, будет ли оно установившимся или нет, место самого низшего давления находится всегда в точке, лежащей на границе области; при этом предполагается, что внешние силы обладают потенциалом Ω, который удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}=0.$$

Сюда, конечно, относится и случай силы тяжести.

В общем случае жидкости, для которой p есть данная функция от ϱ, мы получим, полагая в уравнении (4) $\Omega=0$, $q_0=0$, выражение

$$q^2=2\int\limits_p^{p_0}\frac{dp}{\varrho}. \tag{9}$$

Для газа, подчиненного адиабатическому закону, это дает

$$q^2=\frac{2\gamma}{\gamma-1}\,\frac{p_0}{\varrho_0}\left\{1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right\}, \tag{10}$$

или

$$q^2=\frac{2}{\gamma-1}\,(c_0^2-c^2), \tag{11}$$

где $c=\left(\frac{\gamma p}{\varrho}\right)^{1/2}=\left(\frac{dp}{d\varrho}\right)^{1/2}$ означает скорость звука в рассматриваемом газе при давлении p и плотности ϱ, а c_0 есть скорость звука в газе при условиях, имеющих место в резервуаре (см. гл. X). Отсюда предельная скорость равна

$$\left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{1/2}c_0$$

или $2{,}214\,c_0$, если $\gamma=1{,}408$.

§ 24. Закончим эту главу некоторыми простыми применениями уравнений движения.

Истечение капельных жидкостей

Как первый пример мы возьмем истечение капельной жидкости из малого отверстия в стенке сосуда, который всегда остается наполненным до одинаковой высоты, так что движение можно рассматривать как установившееся.

Пусть начало координат лежит на свободной поверхности, ось z направлена вертикально вниз, так что $\Omega = -gz$. Если мы возьмем площадь свободной поверхности большой сравнительно с сечением отверстия, то скоростью находящихся на ней частиц можно пренебречь. Если значение C мы определим из § 21 (4) таким образом, что для $z = 0$ будет $p = P$ (равно атмосферному давлению), то получим [1])

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{P}{\varrho} + gz - \frac{1}{2} q^2. \tag{1}$$

На поверхности вытекающей струи мы имеем $p = P$, и поэтому

$$q^2 = 2gz; \tag{2}$$

это есть скорость при свободном падении с поверхности уровня. Этот факт известен, как теорема Торричелли [2]).

Мы не можем, однако, этот результат применить непосредственно к вычислению количества вытекающей жидкости по следующим двум основаниям. Во-первых, вытекающая жидкость должна рассматриваться как совокупность большого числа элементарных струй, которые со всех сторон сходятся к отверстию; поэтому их движение не во всех точках будет перпендикулярно к сечению отверстия, но будет тем более наклонно, чем дальше мы удаляемся от центра к краю. Во-вторых, сходящееся движение элементарных струй обусловливает повышение давления в отверстии внутри струи по сравнению с поверхностью струи, где давление равно атмосферному. Поэтому скорость внутри струи несколько меньшая, чем дает уравнение (2).

Однако опыты показывают, что только что рассмотренное движение перестает быть сходящимся на незначительном расстоянии от отверстия, и в случае круглого отверстия струя делается почти цилиндрической. Отношение площади сечения S' в самом сжатом месте к площади S отверстия называется *коэфициентом сжатия*. Если отверстие есть просто дыра в тонкой стене, то для этого коэфицента найдено экспериментально значение, приблизительно равное 0,62.

Так как траектории частиц в сжатом сечении струи приблизительно прямолинейны, то при переходе от оси струи к ее поверхности давление или вовсе не изменяется или изменяется очень мало. Поэтому мы можем считать здесь скорость постоянной на всем поперечном сечении и принять ее равной значению, данному формулой (2), где z есть глубина сжатого сечения относительно свобод-

---

[1]) Этим результатом мы обязаны Д. Бернулли, см. стр. 37.

[2]) Torricelli, De motu gravium naturaliter accelerato. Firenze, 1643.

ной поверхности жидкости в сосуде. Поэтому количество жидкости, вытекающее в единицу времени, будет равно

$$(2gz)^{1/2}\,\varrho S'. \tag{3}$$

Определение формы вытекающей струи представляет трудности, которые могли быть преодолены только в немногих идеальных случаях плоского движения жидкости (см. гл. IV)[1]). Можно, однако, показать, что коэфициент сжатия должен заключаться между $^1/_2$ и 1. Чтобы дать доказательство в простейшей форме, предположим сначала, что жидкость вытекает из сосуда, в котором давление в некотором отдалении от отверстия превосходит давление вне сосуда на величину P, причем силой тяжести мы пренебрегаем. Когда отверстие закрыто пластинкой, то результирующая всех действующих на сосуд давлений равна, конечно, нулю. Если теперь мы удалим пластинку и предположим на мгновение, что давление на стенки сосуда остается равным P, то на сосуд будет действовать неуравновешенное давление PS в направлении, противоположном направлению вытекающей струи, которое стремится подвинуть сосуд назад. Одинаковая, но направленная в противоположную сторону реакция на жидкость дает в единицу времени массе $\varrho qS'$, протекающей через сжатое сечение, скорость q. Следовательно, мы имеем

$$PS = \varrho q^2 S'. \tag{4}$$

Принцип энергии § 22 дает

$$P = \frac{1}{2}\,\varrho q^2; \tag{5}$$

сравнивая между собой (4) и (5), мы находим, что $S' = {}^1/_2 S$. Формула (1) показывает, что давление на стенки, особенно вблизи отверстия, на самом деле падает немного ниже статического давления P, так что левая часть (4) при подстановке значения P из (5) будет значительно преуменьшена. Следовательно, отношение S'/S будет, вообще, больше $^1/_2$.

В частном случае, именно если приставить к отверстию изнутри короткую цилиндрическую трубку, вышеуказанное допущение будет достаточно точно, и получающееся для коэфициента значение $^1/_2$ совпадает с опытом.

Можно легко видоизменить рассуждение с тем, чтобы учесть также силу тяжести (или другие консервативные силы). Мы должны только взять для P разность статического давления на уровне отверстия и внешнего давления. Разностью уровней между отверстием и сжатым сечением струи при этом пренебрегаем [2]).

---

[1]) В настоящее время удалось решить и некоторые задачи для случая осевой симметрии (Vasilesco). *Прим. ред.*

[2]) Вышеизложенной теорией мы обязаны Borda (Mém. de l'Acad. des Sciences, 1766), который производил также опыты со специального вида насадками (мундштуками), описанными здесь, и нашел $\frac{S}{S'} = 1{,}942$. Вопрос был

Другое важное применение теоремы Бернулли заключается в измерении скорости течения при помощи трубки Пито. Этот прибор состоит из тонкой трубки, открытый конец которой направлен против потока, в то время как другой конец связан с манометром. Вдоль линии тока, которая совпадает с осью трубки, скорость быстро падает от q до 0, так что манометр показывает значение $p+{}^1/_2\varrho q^2$. Статическое давление p определяет второй манометр, связанный с трубкой, вставленной в малое отверстие стенки, вдоль которой скользит поток. Так как плотность ϱ известна, то сравнение отсчетов манометров дает значение q. Оба приспособления часто соединяются в один прибор. Особенно этот метод находит применение в аэродинамике, так как найдено, что сжимаемость воздуха вплоть до скоростей порядка 60 *м/сек* не имеет значения.

Истечение газов

§ 24а. Установившееся течение газа, подчиненного адиабатическому закону, представляет некоторые интересные свойства.

Обозначим через σ поперечное сечение в некоторой точке трубки тока и через δs — элемент длины в направлении течения. Пренебрегая внешними силами, мы получим вместо уравнения (10) § 23

$$q^2-q_0^2=\frac{2\gamma}{\gamma-1}\,\frac{p_0}{\varrho_0}\left\{1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right\}, \tag{1}$$

причем индекс 0 относится к какому-нибудь определенному сечению трубки. Если обозначить через c скорость звука для значений p и ϱ в рассматриваемом месте, то уравнение (1) можно представить в виде

$$q^2+\frac{2}{\gamma-1}\,c^2=q_0^2+\frac{2}{\gamma-1}\,c_0^2. \tag{2}$$

Так как масса жидкости, протекающей в единицу времени через различные сечения, всегда одна и та же, то мы имеем

$$\varrho q\sigma=\varrho_0 q_0\sigma_0. \tag{3}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\sigma}\,\frac{d\sigma}{ds}=-\frac{1}{q}\,\frac{dq}{ds}-\frac{1}{\varrho}\,\frac{d\varrho}{dp}\,\frac{dp}{ds}=-\frac{1}{q}\,\frac{dq}{ds}\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right). \tag{4}$$

Из формул (2) и (4) следует, что в сужающейся трубке q будет расти, а c уменьшаться, или обратно, смотря по тому, будет ли q меньше или больше, чем c. Для расширяющейся трубки имеет место противоположное заключение. Резюмируя, можно утверждать, что

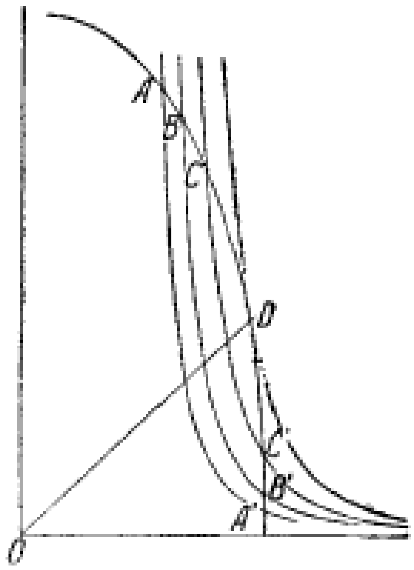
вновь изучен Hanlon, Proc. Lond. Math. Soc., III, 4 (1869); далее он был разработан в заметке, прибавленной Максвеллом к этой статье. См. также Froude и J. Thomson, Proc. Glasgow. Phil. Soc., X (1876). Различными авторами было замечено, что в случае насадки, представляющей по направлению внутрь расходящийся конус, поперечное сечение в сжатом месте может быть меньше, чем половина площади *внутреннего* отверстия.

в сужающейся трубке скорость течения и местная скорость звука постоянно приближаются друг к другу, в то время как в расширяющейся трубке они все более удаляются друг от друга.

Эти результаты следуют также из графического представления уравнений (2) и (3). Так как c^2 пропорционально $\varrho^{\gamma-1}$, то формулу (3) можно представить в виде

$$c^{\frac{2}{\gamma-1}}\,q\sigma = c_0^{\frac{2}{\gamma-1}}\,q_0\sigma_0. \tag{5}$$

Если мы возьмем абсциссы пропорциональными c и ординаты пропорциональными q, то уравнение (2) представляет неподвижный эллипс, проходящий через точку (c_0, q_0). Для каждого определенного значения $\frac{\sigma}{\sigma_0}$ уравнению (5) соответствует некоторый вид гиперболической кривой. При некотором значении σ' для σ эта кривая будет касаться эллипса и для этой точки мы получим $q = c$.



Фиг. 2.

Кривые AA', BB', CC' на представленной фигуре соответствуют отношениям

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = 8,\ 4,\ 2,$$

причем точка D соответствует наименьшему сечению σ'. Для еще меньших значений σ точки пересечения с эллипсом будут мнимые, и установившееся адиабатическое течение окажется невозможным. Из диаграммы следует, что для сечения, площадь которого больше чем σ', существуют две возможные пары значений q и c, как это заметили Осборн Рейнольдс и другие.

Если q меньше c, то соответствующая точка эллипса лежит ниже OD. В суживающейся трубке она занимает последовательно положения A', B', C', причем скорость течения возрастает, а скорость звука уменьшается, пока не будет достигнуто критическое сечение σ'. Если, с другой стороны, q больше c, то соответствующие точки лежат над OD. В суживающейся трубке мы имеем последовательные положения точек A, B, C, при которых скорость течения уменьшается, а скорость звука возрастает.

§ 25. Изучим теперь особо случай, когда газ вытекает через малое отверстие из сосуда, в котором давление равно p_0 и плотность равна ϱ_0, в пространство, в котором давление равно p_1.

До тех пор пока отношение $\frac{p_0}{p_1}$ давления внутри сосуда к давлению вне сосуда не превосходит определенного предела, который мы сейчас укажем, истечение будет происходить так же, как и в случае капельных жидкостей, и мы найдем количество вытекшей массы, если положим в формуле (10) § 23, что $p = p_1$, и полученное значение для q умножим на площадь σ_1 сжатого сечения. Отсюда для количества вытекающей в единицу времени массы мы получим [1])

$$q_1\varrho_1\sigma_1 = \left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{1/2} c_0\varrho_0 \left\{ \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right\}^{1/2} \sigma_1. \tag{6}$$

[1]) Результат эквивалентен результату, данному Saint Venant и Wantzel, Journal de l'École Polyt., XVI, 92 (1839) и исследованному Stokes, Brit. Ass. Reports, 1846 (Papers, I, 176).

Ясно, однако, что применимость этого результата должна быть ограничена, так как иначе мы пришли бы к парадоксальному заключению, что для $p_1=0$, т. е. при истечении в пустоту, вытекающее количество газа должно быть равно нулю. Разъяснением этого положения мы обязаны Осборну Рейнольдсу [1]). Можно показать, что ϱq есть максимум, т. е. что площадь поперечного сечения элементарной струи есть минимум, когда, как то следует из формулы (4), скорость течения равна скорости звука в газе при данном давлении и данной плотности. Из формулы (11) § 23 мы имеем при адиабатической гипотезе

$$\frac{c}{c_0}=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/2}, \tag{7}$$

и поэтому

$$\left.\begin{aligned}\frac{\varrho}{\varrho_0}&=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}},\\ \frac{p}{p_0}&=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

или, если $\gamma=1{,}408$, то

$$\left.\begin{aligned}\varrho&=0{,}634\varrho_0,\\ p&=0{,}527p_0.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Если p_1 меньше этого значения, то поток после того, как он перешел за рассматриваемую точку, вновь расширяется, пока на некотором расстоянии благодаря внутреннему трению не образуются вихри. Минимальные сечения элементарных струек должны лежать вблизи отверстия, из которого происходит истечение, и сумму этих сечений S можно принять за действующую площадь отверстия. Скорость истечения, вычисленная по формуле (2), будет равна

$$q=0{,}911c_0.$$

Следовательно, количество жидкости, вытекшей в единицу времени, равно $q\varrho S$, где q и ϱ имеют только что найденные значения, и оно поэтому почти не зависит от внешнего давления p_1, пока последнее остается меньшим $0{,}527p_0$. Физическое основание этого состоит в том, как утверждает Рейнольдс, что до тех пор, пока скорость в какой-либо точке превосходит при допущенных условиях скорость звука, из этой точки не может распространяться назад никакое изменение давления, которое могло бы сообщить движение, противоположное течению [2]).

Новейшие опыты Стантона [3]) подтверждают в общем точку зрения Рейнольдса и разъясняют некоторые кажущиеся противоречия.

При аналогичных соотношениях для давления, скорости истечения различных газов, поскольку можно допустить, что γ для каждого из них имеет то же самое значение, пропорциональны соответствующим скоростям звука. Поэтому, как мы увидим в главе X, скорость истечения будет меняться обратно, а вытекающее в единицу времени количество жидкости прямо пропорционально квадратному корню из плотности [4]).

---

[1]) Reynolds, On the Flow of Gases, Proc. Manch. Lit. and Phil. Soc., Nov. 17 (1885); Phil. Mag., March., 1886 (Papers, II, 311). Аналогичное разъяснение дано Hugoniot, Comptes Rendus, June 28, July 26, Decembre 13, 1886.

[2]) Дальнейшие обсуждения и литературные указания см. Rayleigh, On the Discharge of Gases under High Pressures, Phil. Mag. (6), XXXII, 177 (1916) (Scientific Papers, Cambridge, 1899—1920, VI, 407).

[3]) Stanton, Proc. Roy. Soc. A, CXI, 306 (1926).

[4]) Cp. Graham, Phil. Trans, 1846.

Вращение капельной жидкости

§ 26. Рассмотрим сначала случай, когда масса жидкости равномерно вращается с постоянной угловой скоростью ω около направленной вверх оси z и находится только под действием силы тяжести.

Согласно предположению мы имеем

$$u = -\omega y, \quad v = \omega x, \quad w = 0,$$
$$X = 0, \qquad Y = 0, \quad Z = -g.$$

Уравнение неразрывности выполняется тождественно, и уравнения движения, очевидно, имеют вид

$$-\omega^2 x = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad -\omega^2 y = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad 0 = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} - g. \tag{1}$$

Эти уравнения имеют общий интеграл

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2) - gz + \text{const}. \tag{2}$$

Поэтому свободная поверхность $p = \text{const}$ есть параболоид вращения около оси z, который обращен кверху вогнутостью и имеет параметр $\frac{2g}{\omega^2}$.

Так как

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega,$$

то потенциала скоростей здесь существовать не может. В „совершенной жидкости, т. е. в такой, в которой невозможны тангенциальные напряжения, движение такого рода при помощи консервативной системы сил вызвано быть не может.

§ 27. Вместо того чтобы предполагать угловую скорость ω всюду одинаковой, примем ее за функцию расстояния r от оси и найдем, какой вид должна иметь эта функция, чтобы для движения существовал потенциал скоростей. Мы имеем в этом случае

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega + r\frac{d\omega}{dr};$$

чтобы правая часть обращалась в нуль, должно быть $\omega r^2 = \mu$, где μ постоянное. В этом случае скорость в любой точке равна $\frac{\mu}{r}$, так что из уравнения (2) § 21, при отсутствии внешних сил, мы имеем

$$\frac{p}{\varrho} = \text{const} - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{r^2}. \tag{1}$$

Применяя полярные координаты, мы получим для определения φ уравнения

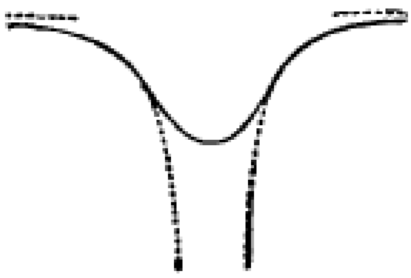
$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{r\,\partial \theta} = -\frac{\mu}{r},$$

следовательно,

$$\varphi = -\mu\theta + \text{const} = -\mu \operatorname{arctg} y/x + \text{const}. \tag{2}$$

Мы имеем здесь пример *циклической* функции. Функция называется *однозначной* в некоторой области, если каждой точке этой области соответствует одно и только одно определенное значение функции таким образом, что эти значения образуют непрерывную систему. Это невозможно для функции (2), так как значение φ меняется на $-2\pi\mu$ всякий раз, когда соответствующая точка описывает замкнутую линию около начала координат. Общая теория циклических потенциалов скоростей будет дана в следующей главе.

Если действует сила тяжести, и мы примем ось z направленной вертикально вверх, то мы должны к правой части уравнения (1) прибавить еще член $-gz$. В этом случае свободная поверхность жидкости есть поверхность, образованная вращением гиперболической кривой $x^2z = \text{const}$ вокруг оси z.



Фиг. 3.

Соединяя надлежащим образом оба вышеизложенных решения, мы получаем случай „комбинированного вихря" Ранкина. При этом движение происходит всюду по соосным кругам; предположим, что скорость равна ωr при r, заключенном между $r=0$ и $r=a$, и равна $\frac{\omega a^2}{r}$ при $r > a$. Соответствующие виды свободной (фиг. 3) поверхности представлены уравнениями

$$z = \frac{\omega^2}{2g}(r^2 - a^2) + C \quad \text{и} \quad z = \frac{\omega^2}{2g}\left(a^2 - \frac{a^4}{r^2}\right) + C$$

и переходят при $r = a$ непрерывно друг в друга. Отсюда глубина понижения в центре относительно общего уровня свободной поверхности равна $\frac{\omega^2 a^2}{g}$.

§ 28. В качестве примера, противоположного предыдущему, рассмотрим случай внешних сил, которые не имеют потенциала. Предположим, что жидкая масса, заполняющая прямой круглый цилиндр, начинает двигаться из положения покоя под действием сил

$$X = Ax + By, \quad Y = B'x + Cy, \quad Z = 0,$$

причем ось z совпадает с осью цилиндра.

Если мы положим $u = -\omega y$, $v = \omega x$, $w = 0$, где ω есть функция только от t, то эти выражения удовлетворяют уравнению неразрывности и граничным условиям. Очевидно, что уравнения движения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} -y\frac{d\omega}{dt} - \omega^2 x &= Ax + By - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ x\frac{d\omega}{dt} - \omega^2 y &= B'x + Cy - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Если мы продиференцируем первое из этих уравнений по y, второе по x и вычтем, то исключим p и получим

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}(B' - B). \tag{2}$$

Мы видим, что жидкость вращается, как твердое тело, с равномерно ускоренной угловой скоростью вокруг оси z, за исключением частного случая, когда $B=B'$. Чтобы найти p, подставим найденное для $\frac{d\omega}{dt}$ значение в уравнения (1) и проинтегрируем их; мы получим

$$\frac{p}{\varrho}=\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)+\frac{1}{2}(Ax^2+2\beta xy+Cy^2)+\text{const.},$$

где

$$2\beta=B+B'.$$

§ 29. В качестве последнего рассмотрим пример, связанный с теорией „электромагнитных вращений".

Если в равномерном магнитном поле через проводящую жидкость к металлическим стенкам цилиндрического сосуда течет по радиусам электрический ток от проводника, служащего осью, то внешние силы должны иметь следующий вид[1]:

$$X=-\frac{\mu y}{r^2},\quad Y=\frac{\mu x}{r^2},\quad Z=0.$$

Полагая $u=-\omega y$, $v=\omega x$, $w=0$, где ω есть функция только от r и t, имеем

$$\left.\begin{aligned}-y\frac{\partial\omega}{\partial t}-\omega^2x&=-\frac{\mu y}{r^2}-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x},\\ x\frac{\partial\omega}{\partial t}-\omega^2y&=\frac{\mu x}{r^2}-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

Исключая p, получим

$$2\frac{\partial\omega}{\partial t}+r\frac{\partial^2\omega}{\partial r\,\partial t}=0.$$

Решение этого уравнения есть

$$\omega=\frac{F(t)}{r^2}+f(r),$$

где F и f обозначают произвольные функции. Если ω обращается в нуль одновременно с t, то должно быть

$$\frac{F(0)}{r^2}+f(r)=0;$$

поэтому

$$\omega=\frac{F(t)-F(0)}{r^2}=\frac{\lambda}{r^2},\tag{2}$$

где λ есть функция от t, которая при $t=0$ обращается в нуль. Вставляя это выражение в уравнения (1) и интегрируя, мы получим

$$\frac{p}{\varrho}=\left(\mu-\frac{d\lambda}{dt}\right)\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\omega^2r^2+\chi(t).$$

Так как p обязательно есть однозначная функция, то должно быть $\frac{d\lambda}{dt}=\mu$ или $\lambda=\mu t$. Поэтому жидкость вращается с угловой скоростью, которая обратно пропорциональна квадрату расстояния от оси и прямо пропорциональна времени.

---

[1]) Если через C обозначить полное количество электричества на единицу длины оси, текущее наружу, и γ — компоненту магнитных сил, параллельную оси, то мы имеем $\mu=\frac{\gamma C}{2\pi\varrho}$. Выше разобранный случай особенно прост, так как силы X, Y, Z имеют потенциал, хотя и „*циклический*" ($\Omega=-\mu\operatorname{arctg} y/x$). Вообще, как правило, механические силы X, Y, Z при электромагнитных вращениях потенциала не имеют.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

БЕЗВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ

§ 30. Настоящая глава посвящена главным образом изложению некоторых общих теорем, относящихся к тому роду движения, о котором мы говорили еще в § 17—20, т. е. движения, для которого в определенной части жидкой массы выражение

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

есть полный диференциал. Начнем со следующего, принадлежащего Стоксу[1]), анализа движения элемента жидкости в самом общем случае.

Пусть компоненты скорости в точке (x, y, z) будут u, v, w; тогда компоненты относительной скорости в бесконечно близкой точке $(x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z)$ будут

$$\left.\begin{aligned}
\delta u &= \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\delta z,\\
\delta v &= \frac{\partial v}{\partial x}\delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\delta y + \frac{\partial v}{\partial z}\delta z,\\
\delta w &= \frac{\partial w}{\partial x}\delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\delta y + \frac{\partial w}{\partial z}\delta z.
\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

Если мы положим

$$\left.\begin{aligned}
a &= \frac{\partial u}{\partial x}, & b &= \frac{\partial v}{\partial y}, & c &= \frac{\partial w}{\partial z},\\
f &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, & g &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, & h &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y},\\
\xi &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, & \eta &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, & \zeta &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},
\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

то уравнение (1) можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned}
\delta u &= a\,\delta x + \frac{1}{2}h\,\delta y + \frac{1}{2}g\,\delta z + \frac{1}{2}(\eta\,\delta z - \zeta\,\delta y),\\
\delta v &= \frac{1}{2}h\,\delta x + b\,\delta y + \frac{1}{2}f\,\delta z + \frac{1}{2}(\zeta\,\delta x - \xi\,\delta z),\\
\delta w &= \frac{1}{2}g\,\delta x + \frac{1}{2}f\,\delta y + c\,\delta z + \frac{1}{2}(\xi\,\delta y - \eta\,\delta x).
\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

---

[1]) Stokes, On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion etc. Cambr. Phil. Trans., VIII (1845) (Papers, I, 80).

Здесь мы отклоняемся от традиционного обозначения. Более часто символы ξ, η, ζ (Гельмгольц) или $\omega', \omega'', \omega'''$ (Стокс) применялись для обозначения компонент вихря

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right),\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

элемента жидкости. Основная кинематическая теорема — это как раз теорема, данная в § 32 (3), а употребляемое здесь в тексте определение ξ, η, ζ в этих формулах и в целом ряде последующих, относящихся к вихревому движению, избавляет от введения ненужного множителя 2 (или $^1/_2$, смотря по смыслу). Оно оказывается также удобным и при рассмотрении в § 148 электромагнитной аналогии.

Таким образом движение малого элемента с центром (x, y, z) можно мыслить состоящим из трех частей.

Первая часть, компоненты которой суть u, v, w, есть поступательное движение элемента, взятого как целое.

Вторая часть, выражаемая первыми тремя членами правой части уравнений (3), представляет движение, при котором каждая точка, если δx, δy, δz рассматривать как текущие координаты, движется в направлении той нормали к поверхности второго порядка

$$a(\delta x)^2+b(\delta y)^2+c(\delta z)^2+f\,\delta y\,\delta z+g\,\delta z\,\delta x+h\,\delta x\,\delta y=\text{const}, \qquad (4)$$

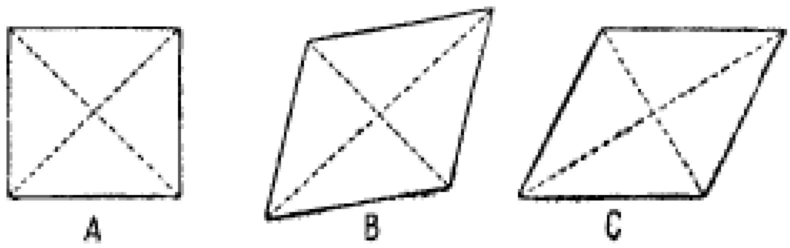
на которой она лежит. Если мы отнесем эту поверхность второго порядка к ее главным осям, то соответствующие части компонент скорости, параллельных этим осям, будут

$$\delta u'=a'\,\delta x',\ \ \delta v'=b'\,\delta y',\ \ \delta w'=c'\,\delta z', \qquad (5)$$

а уравнение (4) после преобразования будет иметь вид

$$a'(\delta x')^2+b'(\delta y')^2+c'(\delta z')^2=\text{const}.$$

Формулы (5) выражают то, что длина всякого отрезка элемента, параллельного x', удлиняется на (положительную или отрицательную) величину, пропорциональную a', в то время как отрезки, параллельные y' и z', соответственно удлиняются пропорционально b' и c'. Такое движение называется *чистым растяжением*, а главные оси поверхностей второго порядка (4) называются осями растяжения.



Фиг. 4.

Последние два члена в правой части уравнений (3) означают вращение элемента как целого около мгновенной оси. Компоненты угловой скорости этого вращения суть $\frac{1}{2}\xi$, $\frac{1}{2}\eta$, $\frac{1}{2}\zeta$ [1]).

Вектор, компоненты которого суть ξ, η, ζ, обыкновенно называют *вихрем среды* в точке (x, y, z).

Эти исследования могут быть иллюстрированы при помощи так называемого *ламинарного* движения жидкости. Именно, если

$$u=\mu y,\quad v=0,\quad w=0,$$

то

$$a=b=c=f=g=\xi=\eta=0,\quad h=\mu,\quad \zeta=-\mu.$$

Если A (фиг. 4) представляет элементарный жидкий параллелепипед, ограниченный плоскостями, параллельными координатным плоскостям, то B

---

[1]) Величины, которые соответствуют количествам $\frac{1}{2}\xi$; $\frac{1}{3}\eta$, $\frac{1}{2}\zeta$, в теории бесконечно малых перемещений непрерывной среды были истолкованы Коши как выражение „среднего вращения" элемента. Cauchy, Exercices d'Analyse et de Physique, II, 302 (Paris, 1841).

показывает изменение этого элемента, происшедшее в короткое время вследствие только растяжения, а C выражает изменение, произведенное растяжением совместно с вращением.

Легко убедиться, что указанное выше разложение движения является единственным. В самом деле, если мы предположим, что движение относительно точки (x, y, z) может быть составлено из растяжения и из вращения так, что оси и коэфициенты растяжения, а также ось и угловая скорость вращения произвольны, то тогда, вычисляя компоненты относительной скорости δu, δv, δw, мы получим такие же выражения, как и в правой части (3), но с произвольными значениями $a, b, c, f, g, h, \xi, \eta, \zeta$. Сравнивая коэфициенты при δx, δy, δz, мы найдем, однако, что a, b, c и т. д. должны иметь те же значения, что и прежде. Отсюда следует, что направления осей растяжения, величины растяжения или сжатия вдоль них, а также ось и величина завихрения в какой-либо точке зависят только от состояния относительного движения в этой точке, но не от выбора координатных осей.

Если в конечной части жидкости все три компоненты ξ, η, ζ равны нулю, то относительное движение для всякого элемента этой части состоит только из чистого растяжения и называется *безвихревым*.

§ 31. Значение интеграла

$$\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz)$$

или

$$\int \left(u\frac{dx}{ds} + v\frac{dy}{ds} + w\frac{dz}{ds}\right) ds,$$

взятого вдоль произвольной линии $ABCD$, называется *потоком* жидкости вдоль этой линии от A к D[1]). Мы обозначим его для краткости через $J(ABCD)$.

Если A и D совпадают, так что линия $ABCD$ образует замкнутую кривую (или контур), то значение интеграла называют *циркуляцией* вдоль этой замкнутой кривой; будем обозначать ее через $J(ABCA)$. Если мы изменим направление интегрирования в каждом из этих случаев, то знаки величин $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ изменятся на противоположные, и мы будем иметь

$$J(AD) = -J(DA) \quad \text{и} \quad J(ABCA) = -J(ACBA).$$

Также ясно, что

$$J(ABCD) = J(AB) + J(BC) + J(CD).$$

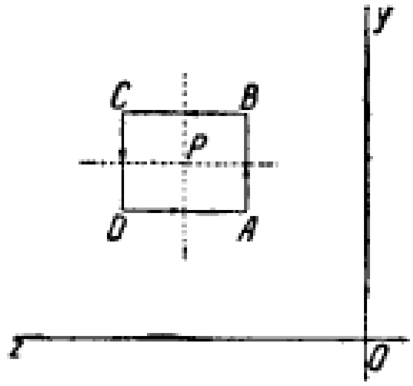
Всякая поверхность может быть разбита на бесконечно малые элементы при помощи двух семейств лежащих на ней линий (фиг. 5). Общая сумма циркуляций вдоль границ элементов, взятых в одном и том

---

[1]) Thomson W., On Vortex Motion, Edin. Trans., XXV (1869) (Papers, IV, 13).

же направлении, равна циркуляции вдоль первоначальной границы поверхности. Если предположить на мгновение, что граница поверхности состоит из одной единственной замкнутой кривой, тогда в рассматриваемой сумме поток вдоль каждой общей пограничной линии двух элементов встречается дважды, по одному разу для каждого элемента, но с противоположными знаками, и поэтому при суммировании он выпадает из общего результата. В результате сохраняются только потоки вдоль тех сторон, которые являются частями первоначального контура; этим и доказывается выше формулированная теорема.

Фиг. 5.



Фиг. 6.

Отсюда, из соображений непрерывности, следует, что циркуляция вдоль границы элемента поверхности δS, данного по положению и направлению, в основном пропорциональна площади элемента.

Если элементом будет прямоугольник $\delta y\, \delta z$ (фиг. 6) с центром в точке (x, y, z), то, вычисляя циркуляцию вокруг него в направлении, указанном стрелкой на фигуре, получим

$$\begin{aligned} J(AB) &= \left\{v - \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial z}\delta z\right\}\delta y, \\ J(BC) &= \left\{w + \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\delta y\right\}\delta z, \\ J(CD) &= -\left\{v + \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial z}\delta z\right\}\delta y, \\ J(DA) &= -\left\{w - \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\delta y\right\}\delta z, \end{aligned}$$

и поэтому

$$J(ABCDA) = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\delta y\, \delta z.$$

Таким путем мы заключаем, что циркуляция вокруг каждой бесконечно малой площадки $\delta S_1\, \delta S_2\, \delta S_3$ в плоскостях, параллельных координатным плоскостям, равна

$$\xi\, \delta S_1, \quad \eta\, \delta S_2, \quad \zeta\, \delta S_3. \tag{1}$$

Если мы далее воспользуемся фигурой (1) и обозначениями § 2, то будем иметь

$$\begin{aligned} J(ABCA) &= J(PBCP) + J(PCAP) + J(PABP) = \\ &= \xi\, l\Delta + \eta\, m\Delta + \zeta\, n\Delta, \end{aligned}$$

откуда мы заключаем, что циркуляция вдоль границы *всякой* бесконечно малой площадки δS равна

$$(l\xi+m\eta+n\zeta)\,\delta S. \tag{2}$$

Этим самым мы даем независимое доказательство того, что определенные в (2) § 30 величины ξ, η, ζ могут быть рассматриваемы как компоненты вектора.

Заметим, что необходимо условиться относительно связи между направлением, в котором взята циркуляция вокруг контура элемента δS, и направлением нормали (l, m, n). Для определенности будем принимать в этой книге, что оси координат образуют правую систему; так что если оси x и y соответственно указывают на восток и на север, то ось z будет направлена вертикально вверх [1]). Направление, в котором взята циркуляция, данная формулой (2), находится к направлению нормали (l, m, n) в отношении, характеризуемом правым винтом [2]).

§ 32. Выражая теперь то положение, что циркуляция по контуру конечной площади равна сумме циркуляций по контурам бесконечно малых элементов, на которые может быть разбита площадь, мы согласно (2) § 31 будем иметь

$$\int(u\,dx+v\,dy+w\,dz)=\iint(l\xi+m\eta+n\zeta)\,dS, \tag{3}$$

или, вставляя для ξ, η, ζ их значения из § 30,

$$\int(u\,dx+v\,dy+w\,dz= \\ =\iint\left\{l\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)+m\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)+n\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}dS, \tag{4}$$

где простой интеграл берется вдоль пограничной кривой, а двойной интеграл — по поверхности [3]). В этой формуле величины l, m, n обозначают направляющие косинусы нормали, восставленной всегда с одной и той же стороны поверхности; мы будем называть эту сторону поверхности положительной стороной. Направление интегрирования в интеграле, находящемся в левой части формулы (4), будет тогда такое, по какому надо итти на положительной стороне поверхности вблизи контура, чтобы иметь площадь всегда с левой стороны.

Формула (3) или (4) может быть распространена, очевидно, на поверхность, граница которой состоит из двух или многих замкнутых кривых, при условии, что интегрирование в левой части формулы (4) проводится в надлежащем смысле, т. е. согласно установ-

---

[1]) Maxwell, Proc. Lond. Math. Soc., III, 279, 280. В помещенной выше фигуре ось x принимается направленной на читателя.

[2]) См. Maxwell, Electricity and Magnetism, Oxford, 1873, § 23.

[3]) Эта теорема принадлежит Стоксу (Smith's Prize Examination Papers, 1854). Первое опубликованное доказательство дал Hankel, Zur allgem. Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten, Göttingen, 1861. Вышеизложенное доказательство принадлежит Кельвину, см. выше стр. 50; см. также Thomson and Tait, Natural Philosophy, § 190 (j) и Maxwell, Electricity and Magnetism, § 24.

ленному выше правилу. Таким образом, если интеграл по поверхности в формуле (4) распространен по заштрихованной части фиг. 7, то направления, по которым надо брать циркуляции, в различных частях ограничивающей кривой, указаны стрелками, причем положительная сторона поверхности та, которая обращена к читателю.

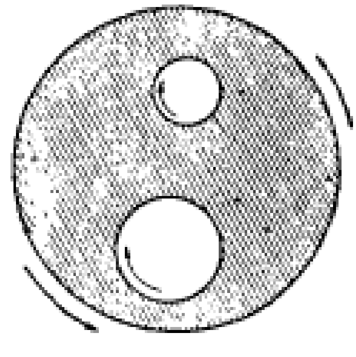
Значение поверхностного интеграла, взятого по *замкнутой* поверхности, равно нулю.

Отметим, что (4) представляет чисто математическую теорему и имеет место для любых функций u, v, w от x, y, z, предполагая только, что они во всех точках поверхности непрерывны и диференцируемы [1]).

§ 33. Конец этой главы посвящается изучению кинематических свойств общего безвихревого движения, которое определяется равенствами

$$\xi=\eta=\zeta=0, \tag{1}$$

т. е. мы предполагаем, что циркуляция по всякой *бесконечно малой* замкнутой кривой равна нулю. Существование потенциала скоростей и его свойства в различных встречающихся случаях будут являться следствиями этого определения.



Фиг. 7.

Физическое значение этих исследований состоит именно в том, что движение части жидкой массы при известных, очень общих условиях остается все время безвихревым, если оно было безвихревым в некоторый момент. Это положение в действительности уже установлено, как мы увидим, при помощи доказанной в § 17 теоремы Лагранжа, однако ввиду важности вопроса позволительно повторить доказательство в обозначениях Эйлера в форме, данной Кельвином [2]).

Рассмотрим сначала некоторую проведенную в жидкости конечную линию AB и предположим, что каждая точка этой линии движется с той же скоростью, какую имеет жидкость в этой точке. Вычислим затем величину, на которую возрастает в единицу времени поток вдоль этой линии, считая от A к B. Если обозначить через δx, δy, δz проекции элемента линии на оси координат, то имеем

$$\frac{D}{Dt}(u\,\delta x)=\frac{Du}{Dt}\delta x+u\frac{D\,\delta x}{Dt}.$$

Но $\frac{D\,\delta x}{Dt}$, скорость, с которой растет δx вследствие движения жидкости, равна разности компонент скорости, параллельных оси x, на обоих концах элемента, т. е. равна δu, а значение $\frac{Du}{Dt}$ дано в § 5.

---

[1]) При этом нет необходимости, чтобы производные были непрерывны.
[2]) См. выше стр. 50.

Отсюда и из аналогичных вычислений получим, что если ϱ есть функция только p и внешние силы X, Y, Z имеют потенциал Ω, то

$$\frac{D}{Dt}(u\,\delta x+v\,\delta y+w\,\delta z)=-\frac{\delta p}{\varrho}-\delta\Omega+u\,\delta u+v\,\delta v+w\,\delta w.$$

Интегрируя по линии от A до B, получим

$$\frac{D}{Dt}\int\limits_A^B(u\,dx+v\,dy+w\,dz)=\left[-\int\frac{dp}{\varrho}-\Omega+\frac{1}{2}q^2\right]_A^B, \tag{2}$$

или: скорость возрастания потока вдоль линии от A к B равна разности значений выражения $-\int\frac{dp}{\varrho}-\Omega+\frac{1}{2}q^2$ в точках B и A. Эта теорема включает в себе всю динамику совершенной жидкости. Например, отсюда могут быть получены уравнения (2) § 15, если в качестве линии AB взять бесконечно малый линейный элемент, проекции которого были первоначально δa, δb, δc, и затем коэфициенты этих бесконечно малых величин положить в отдельности равными нулю.

Если Ω однозначно, то выражение в скобках в правой части уравнения (2) есть однозначная функция от x, y, z. Поэтому, распространяя интегрирование в левой части по замкнутой кривой, когда B совпадает с A, мы получим

$$\frac{D}{Dt}\int(u\,dx+v\,dy+w\,dz)=0, \tag{3}$$

т. е. циркуляция по замкнутой кривой, двигающейся с жидкостью, со временем не меняется.

Отсюда следует, что если движение части жидкости было сначала безвихревым, то оно сохраняет это свойство и в дальнейшем; ибо в противном случае циркуляция по всякой бесконечно малой замкнутой кривой согласно уравнению (3) § 32 не равнялась бы постоянно нулю, как это имело место вначале.

§ 34. Рассмотрим какую-нибудь область, которая наполнена жидкостью, имеющей безвихревое движение. Согласно (3) § 32, в этом случае циркуляция равна нулю для всякой замкнутой кривой, через которую можно провести непрерывную, целиком находящуюся в нашей области поверхность или, другими словами, для всякой замкнутой кривой, которую, не выходя из области, можно стянуть в одну точку. Такая замкнутая кривая называется *приводимой*.

Рассмотрим, далее, два пути ACB, ADB, которые соединяют две точки области A и B и каждый из которых может быть непрерывным изменением переведен в другой, не выходя за пределы области. Такие пути называют *взаимно переводимыми*. Так как замкнутая кривая $ACBDA$ приводима, то

$$J(ACBDA)=0$$

или, так как
$$J(BDA) = -J(ADB),$$
то
$$J(ACB) = J(ADB),$$
т. е. поток для двух взаимно переводимых кривых имеет одно и то же значение.

Область, в которой *все* пути, соединяющие одну и ту же пару точек области, взаимно переводимы, называется *односвязной*. Такова область, ограниченная сферой или двумя концентрическими сферами. В дальнейшем вплоть до § 46 мы будем рассматривать только односвязные области.

§ 35. Безвихревое движение жидкости в односвязной области характеризуется существованием однозначного потенциала скоростей. Если обозначить через $-\varphi$ поток от фиксированной точки A к переменной точке P, то будем иметь
$$\varphi = -\int_A^P (u\,dx + v\,dy + w\,dz). \tag{1}$$

Мы показали, что значение φ не зависит от пути интегрирования, если этот путь лежит всецело внутри области. Поэтому φ есть однозначная функция положения точки P; при этом предполагаем, что это положение дано значениями координат (x, y, z) точки P. Перемещая P последовательно на бесконечно малые отрезки параллельно каждой из осей координат, мы найдем
$$u = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \tag{2}$$
а это значит, что φ согласно определению, данному в § 17, есть потенциал скоростей.

Если за нижний предел интеграла в (1) вместо A взять другую точку B, то к значению φ прибавляется только произвольная постоянная, представляющая значение потока от A к B. Первоначальное определение φ в § 17 и физическая интерпретация в § 18 определяют эту функцию также только вплоть до аддитивной произвольной постоянной.

Если следовать по линии тока, то φ монотонно убывает, поэтому в односвязной области линии тока не могут образовать замкнутых кривых.

§ 36. Функция φ, с которой мы имеем здесь дело, и ее первые производные естественно являются конечными, непрерывными и однозначными функциями для всех точек рассматриваемой области. Для несжимаемых жидкостей, к более подробному рассмотрению которых мы теперь приступаем, φ должно удовлетворять также уравнению неразрывности (5) § 20 или, как мы в будущем будем писать для краткости, для каждой точки области должно быть
$$\Delta\varphi = 0. \tag{1}$$

Следовательно, φ подчиняется теперь тем же математическим условиям, что и потенциал масс, притягивающихся или отталкивающихся по закону обратной пропорциональности квадрату расстояния, для всех точек вне указанных масс. Поэтому многие из результатов, доказанных в теории притяжения, электростатике, теории магнетизма и в теории стационарного течения тепла, имеют также и гидродинамическое применение. Мы теперь приступаем к рассмотрению тех из них, которые наиболее важны с последней точки зрения.

При произвольном движении несжимаемой жидкости поверхностный интеграл от нормальной компоненты скорости, распространенный по какой-либо незамкнутой или замкнутой поверхности, вообще называется *потоком* через эту поверхность. Он равен, конечно, объему массы жидкости, протекающей через поверхность в единицу времени.

Если движение не вихревое, то поток определяется интегралом

$$-\iint \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS,$$

где δS есть элемент поверхности, а δn — элемент восстановленной к ней в соответственном направлении нормали. Во всякой области, наполненной целиком жидкостью, полный поток через границу равен нулю, т. е.

$$\iint \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS = 0, \tag{2}$$

причем элемент δn нормали проводится всегда в одинаковую сторону (именно внутрь), а интегрирование распространяется по всей границе. Уравнение (2) можно рассматривать как обобщенную форму уравнения неразрывности (1).

Линии тока, проведенные через точки бесконечно малой замкнутой кривой, определяют трубку, которая называется трубкой тока. Произведение из скорости q на площадь поперечного сечения (назовем ее через σ) постоянно для всех сечений такой трубки.

Мы можем, если угодно, все пространство, наполненное жидкостью, воображать составленным из трубок тока и допустить, что форма трубок такова, что для каждой из них произведение $q\sigma$ будет иметь одно и то же значение. В таком случае поток через поверхность пропорционален числу пересекающих ее трубок тока. Если поверхность замкнута, то уравнение (2) выражает тот факт, что через поверхность столько же трубок тока входит, сколько выходит. Поэтому линия тока не может ни начинаться, ни кончаться во внутренней точке жидкости.

§ 37. Функция φ не может иметь максимум или минимум ни в какой точке, лежащей внутри жидкости; ибо если бы это имело место, то $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ должно было бы быть на малой замкнутой поверхности вокруг рассматриваемой точки или всюду положительно, или всюду отрицательно. Каждый из этих случаев несовместим, однако, с уравнением (2).

Далее, квадрат скорости ни в какой точке, лежащей внутри жидкости, не может иметь максимума; для доказательства возьмем ось x параллельно направлению скорости в произвольной точке P. Уравнение (1) и поэтому также уравнение (2) удовлетворяется, если мы напишем $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ вместо φ. Вышеизложенное рассуждение показывает тогда, что $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ в P не может иметь ни максимума, ни минимума. Поэтому в непосредственной близости с P должны существовать точки, в которых $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2$ и, следовательно, тем более

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2$$

больше, чем квадрат скорости в P *).

С другой стороны, квадрат скорости в какой-нибудь точке жидкости может иметь минимум. Простейший такой случай есть тот, когда скорость равна *нулю*; смотри, например, фигуру § 69.

§ 38. Применим теперь уравнение (2) к конечной части жидкости, содержащейся внутри поверхности шара. Пусть r обозначает расстояние какой-либо точки от центра, а $\delta\tilde{\omega}$ есть телесный угол, под которым виден из центра элемент δS поверхности; тогда имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=-\frac{\partial\varphi}{\partial r} \text{ и } \delta S=r^2\,\delta\tilde{\omega}.$$

Если отбросить множитель r^2, то уравнение (2) представится в виде

$$\iint\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,d\tilde{\omega}=0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial r}\iint\varphi\,d\tilde{\omega}=0. \qquad (3)$$

Так как

$$\frac{1}{4\pi}\iint\varphi\,d\tilde{\omega}, \text{ или } \frac{1}{4\pi r^2}\iint\varphi\,dS$$

дает среднее значение φ на поверхности шара, то уравнение (3) показывает, что это среднее значение не зависит от радиуса. Среднее значение φ поэтому одно и то же для всякого шара, который концентричен данному и может быть переведен в него постепенным изменением радиуса, не выходя из области, наполненной жидкостью с безвихревым движением. Таким образом мы можем рассматривать

*) Эта теорема была высказана в другой связи Кельвином. Lord Kelvin, Phil. Mag., Oct., 1850 (Reprint of Papers on Electrostatics, etc., London, 1872 Art. 665). Вышеизложенное доказательство принадлежит Кирхгофу. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, Mechanik, Leipzig, 1876. Другое доказательство см. § 44.

шар стянутым в одну точку, а тогда получаем простое доказательство теоремы, данной впервые Гауссом в его трактате [1]) по теории притяжения, что среднее значение φ на произвольной шаровой поверхности, внутри которой имеет место уравнение (1), всегда равно значению φ в центре. Доказанная в § 37 теорема, что φ ни в одной точке, лежащей внутри жидкости, не может иметь максимума или минимума, есть, очевидно, следствие вышеизложенной теоремы.

Данное здесь доказательство принадлежит в существенном Фросту [2]). Другое доказательство, несколько отличающееся по форме, дано Рэлеем [3]). Так как уравнение (1) линейно, то оно удовлетворяется средним арифметическим некоторого числа отдельных решений φ_1, φ_2, φ_3,... Предположим, что вокруг точки P, как начала координат, проведено бесконечное множество прямоугольных систем координат, и пусть φ_1, φ_2, φ_3, ... означают потенциалы скоростей того движения, которое относительно этих отдельных систем равно первоначальному, определяемому через φ, движению относительно системы x, y, z. В этом случае среднее арифметическое (назовем его через $\overline{\varphi}$) функций φ_1, φ_2, φ_3, ... есть функция только от r — расстояния точки P. Если мы хотим теперь выразить, что при движении, характеризуемом потенциалом скоростей $\overline{\varphi}$ (если только такое существует), поток через шаровую поверхность, которая, не выходя из области, наполненной жидкостью, может быть стянута в одну точку, равняется нулю, то мы должны положить

$$4\pi r^2 \cdot \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial r} = 0 \quad \text{или} \quad \overline{\varphi} = \text{const}.$$

§ 39. Предположим, что область, наполненная жидкостью с безвихревым движением, перифрактическая [4]), т. е. что она изнутри ограничена одной или многими замкнутыми поверхностями. Применим теперь уравнение (2) к области, которая заключена между одной или многими из этих внутренних поверхностей и сферической поверхностью, причем последняя охватывает внутренние поверхности и целиком лежит внутри жидкости. Если M обозначает полный поток, входящий через внутренние границы в указанную область, то, применяя те же обозначения, что и раньше, мы найдем

$$\iint \frac{\partial \varphi}{\partial r}\, dS = -M,$$

где поверхностный интеграл распространяется только по поверхности

[1]) Gauss, Allgemeine Lehrsätze..., Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins, 1839 (Werke, Göttingen, 1870—1880, V, 199).

[2]) Frost, Quarterly, Journal of Mathematics, XII (1873).

[3]) Rayleigh, Messenger of Mathematics, VII, 69 (1878 (Papers, I, 347).

[4]) См. Maxwell, Electricity and Magnetism, Arts. 18, 22. Область называется аперифрактической, если всякая построенная в ней замкнутая поверхность может быть стянута в одну точку, не выходя из области.

сферы. Это можно также представить в виде

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\iint \varphi\, d\widetilde{\omega} = -\frac{M}{4\pi r^2},$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{4\pi}\iint \varphi\, d\widetilde{\omega} = \frac{1}{4\pi r^2}\iint \varphi\, dS = \frac{M}{4\pi r} + C. \tag{4}$$

Это значит, что среднее значение φ на всякой сферической поверхности, взятой при указанных выше условиях, равно $\frac{M}{4\pi r}+C$, где r есть радиус, M — абсолютное постоянное и C — не зависящая от r величина, которая, однако, может зависеть от положения центра [1]).

Если, однако, первоначальная область безвихревого движения является снаружи неограниченной и если первые (а следовательно, и все высшие) производные от φ в бесконечности равны нулю, то C имеет одно и то же значение для *всех* сферических поверхностей, которые окружают все внутренние поверхности. В самом деле, если переместить такую сферическую поверхность, не изменяя ее вида, параллельно оси x [2]), то изменение C вследствие такого перемещения равно, согласно формуле (4), среднему значению $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ на поверхности. Так как $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ в бесконечности равно нулю, то мы можем, выбирая сферу достаточно большой, это среднее значение сделать как угодно малым. Следовательно, C не будет меняться от перемещения центра сферы параллельно оси x. Подобным же образом мы можем убедиться, что C не будет также меняться и при перемещении параллельно оси y или z; а это значит, что C есть абсолютная постоянная.

Если внутренние граничные поверхности области таковы, что полный поток через них равен нулю, например, если они представляют поверхности твердых тел или частей несжимаемой завихренной жидкости, то тогда будет $M=0$, и, следовательно, φ на *всякой* сферической поверхности, заключающей все внутренние границы, имеет одно и то же среднее значение.

§ 40. (a) Если потенциал скоростей φ постоянен на границе односвязной области, наполненной жидкостью с безвихревым движением, то он имеет то же постоянное значение также и внутри области. Ибо, если бы функция φ не была постоянной, то она имела бы непременно максимум или минимум в какой-нибудь точке области.

Иначе: в § 35 и § 36 мы видели, что линии тока не могут начинаться или кончаться ни в какой точке области и что они не могут образовать замкнутые кривые, лежащие целиком внутри области. Они должны, следовательно, так проходить через область, чтобы начинаться и кончаться на границе. В нашем случае, однако, это

---

[1]) Следует помнить, что сферические поверхности, к которым относятся эти теоремы, переводимы друг в друга в том смысле, о котором шла речь в § 34.

[2]) Kirchhoff, Mechanik, стр. 191.

невозможно, так как такая линия должна переходить всегда от точек, где φ больше, к таким точкам, где φ меньше. Следовательно, здесь движение не может иметь места, т. е.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0,$$

и поэтому φ постоянно и равно своему значению на границе.

(β). Если $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ равно нулю для всякой точки на границе такой области, о которой речь шла выше, то φ должно быть постоянной всюду внутри области. В самом деле, условие $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$ указывает, что ни одна из линий тока не может войти в область или выйти из нее, но что все они находятся внутри области. Это, однако, как мы видели, несовместимо с теми условиями, которым подчинены линии тока. Поэтому, как и выше, здесь никакое движение не может иметь места, и φ постоянна.

Эта теорема иначе может быть выражена следующим образом. В односвязной области, полностью ограниченной неподвижными твердыми стенками, не может иметь места непрерывное безвихревое движение жидкости.

(γ). Пусть граница рассматриваемой области состоит частично из поверхностей S, на которых φ имеет постоянное значение, и частично из поверхностей Σ, на которых $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$. Согласно вышеизложенным рассуждениям, никакая линия тока не может итти от одной точки S к другой точке S, и никакая из этих линий не может пересекать Σ. А следовательно, вообще не могут существовать такие линии; функция φ поэтому, как и выше, постоянна и равна своему значению на S.

Из этих теорем следует, что безвихревое движение несжимаемой жидкости в односвязной области вполне определено, когда даны для всех точек границы или значения φ, или значения компоненты скорости $-\frac{\partial\varphi}{\partial n}$, направленной по внутренней нормали, или, наконец, когда даны значения φ для одной части поверхности и значения $-\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ для другой. В самом деле, если φ_1, φ_2 означают потенциалы скоростей двух движений, из которых каждое удовлетворяет заданным граничным условиям в одном из этих случаев, то функция $\varphi_1-\varphi_2$ удовлетворяет условию (α), или (β), или (γ) этого параграфа и должна поэтому быть постоянной во всей области.

§ 41. Имеется ряд очень важных случаев, которые не вполне охватываются совокупностью вышеизложенных теорем, именно те случаи, в которых область, наполненная несжимаемой жидкостью с безвихревым движением, простирается в бесконечность, а изнутри ограничена одной или несколькими замкнутыми поверхностями. Мы предположим пока, что эта область односвязна, и φ, следовательно, однозначна.

Если φ на внутренних границах области постоянна и на бесконечном расстоянии от них всюду стремится к тому же самому постоянному значению, то она постоянна во всей области. Ибо иначе в некоторой точке внутри области функция φ имела бы максимум или минимум.

Совершенно так же, как и в § 40, мы заключаем, что значение φ всюду вполне определено, если эта функция задана произвольно на внутренних границах и имеет постоянное значение в бесконечности.

Большее значение в рассматриваемых нами исследованиях имеет теорема, что, если компонента скорости по нормали для каждой точки внутренней границы равна нулю и жидкость в бесконечности находится в покое, то функция φ всюду постоянна. Мы не можем, однако, сделать такое заключение прямо из доказательства соответствующей теоремы в § 40. Действительно, мы можем предположить область ограниченной снаружи бесконечно большой поверхностью, в каждой точке которой $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ как угодно мало; но это не исключает того, что сам интеграл $\iint \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS$, распространенный по некоторой части этой поверхности, может быть все еще конечным, вследствие чего указанная ссылка была бы несостоятельной. Мы поступим поэтому следующим образом.

Так как скорость на бесконечном расстоянии от внутренних границ (назовем их через S) стремится к пределу нуль, то можно провести замкнутую поверхность Σ, полностью заключающую S, вне которой скорость всегда меньше, чем наперед заданное значение ε; если Σ взять достаточно большой, то ε можно сделать как угодно малым. Возьмем теперь некоторую точку P в произвольном направлении по отношению S, но вне Σ и на таком расстоянии от нее, что телесный угол, под которым Σ видно из P, бесконечно мал; около P, как центра, опишем теперь две сферы, из которых одна как раз охватывает S, а другая, наоборот, ее исключает. Мы покажем теперь, что средние значения φ вдоль каждой из этих двух сферических поверхностей могут отличаться друг от друга только на бесконечно малую величину. В самом деле, пусть Q, Q' — точки на этих сферических поверхностях, лежащие на общем радиусе PQQ'; если Q и Q' попадают внутрь Σ, то соответствующие значения для φ могут отличаться на конечную величину; но так как часть каждой из сферических поверхностей, заключенная внутри Σ, составляет только бесконечно малую часть всей сферы, то для разности средних значений не может получиться конечное число. Если, напротив, Q и Q' лежат вне Σ, то соответствующие значения φ не могут отличаться более чем на $\varepsilon \cdot QQ'$, так как ε, согласно определению, дает верхнюю границу для величины изменения φ вне Σ. Поэтому средние значения φ на этих обеих сферических поверхностях могут отличаться только меньше, чем на $\varepsilon \cdot QQ'$. Так как QQ' конечно, а ε, выбирая Σ достаточно большой, можно сделать как угодно малым, то разность средних значений, если взять P достаточно далеко, может быть сделана бесконечно малой.

Из § 38 и 39 мы знаем, что среднее значение φ на внутренней сферической поверхности равно значению φ в центре P и что среднее значение на внешней сферической поверхности (так как $M=0$) равно постоянной величине C. Отсюда следует, наконец, что значение φ в бесконечности всюду стремится к постоянному значению C.

Тот же самый результат имеет место и тогда, когда компонента скорости по нормали на внутренней границе не равна нулю. Ибо в теореме § 39 M делится на r, который в нашем случае бесконечен.

Следовательно, если для всех точек внутренней границы будет $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$ и жидкость в бесконечности находится в покое, то она должна всюду быть в покое. В самом деле, на внутренних границах никакая линия тока не может ни начинаться, ни кончаться; поэтому такие линии должны, если они существуют, приходить из бесконечности, пересекать область, занятую жидкостью, и снова возвращаться в бесконечность, т. е. они должны образовать бесконечно длинные пути между местами, в которых значения φ с точностью до бесконечно малой величины имеют одно и то же значение C, что невозможно.

Теорема о том, что для покоящейся в бесконечности жидкости движение вполне определено, как только будет дано значение $-\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ на всей внутренней границе, выводится при помощи такого же рассуждения, как в § 40.

Теорема Грина

§ 42. В учебниках электростатики и др. многие важные свойства потенциала доказываются обыкновенно с помощью одной теоремы, которой мы обязаны Грину. Свойства, наиболее важные для наших целей, мы уже получили; но так как эта теорема, между прочим, приводит к употребительному выражению для кинетической энергии в случае общего безвихревого движения, то ее надлежит здесь изложить.

Пусть имеем U, V, W три любые функции, которые конечны, однозначны и диференцируемы для всех точек связной области, целиком ограниченной одной или несколькими замкнутыми поверхностями S. Пусть δS — элемент одной из этих поверхностей и l, m, n — направляющие косинусы его нормали, направленной внутрь.

Мы докажем сначала, что

$$\iint (lU+mV+nW)dS=-\iiint\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz, \quad (1)$$

где тройной интеграл распространяется по всей области, а двойной интеграл — по ограничивающим ее поверхностям.

Если мы проведем ряд поверхностей так, что они разобьют область на некоторое число отдельных частей, то интеграл

$$\iint (lU + mV + nW)\, dS, \tag{2}$$

взятый по первоначальной граничной поверхности, равен сумме подобных интегралов, из которых каждый распространен по поверхности, ограничивающей одну из этих частей. В самом деле, для всякого элемента $\delta\sigma$ разделяющей поверхности в интегралы, которые соответствуют областям, лежащим по обе стороны этой поверхности, входят элементы

$$(lU + mV + nW)\,\delta\sigma$$

и

$$(l'U + m'V + n'W)\,\delta\sigma.$$

Но так как нормали, к которым относятся значения l, m, n и l', m', n', направлены всегда внутрь, то должно быть

$$l' = -l,\ m' = -m,\ n' = -n,$$

поэтому при составлении суммы названных интегралов элементы, соответствующие разделяющей поверхности, сократятся, и останутся только те, которые относятся к первоначальной ограничивающей поверхности.

Предположим, что разделяющие поверхности состоят из трех систем плоскостей, которые проведены параллельно координатным плоскостям на бесконечно малых расстояниях друг от друга. Если назовем через x, y, z координаты центра какого-либо выделенного таким образом параллелепипеда и через δx, δy, δz — длины его ребер, то значение интеграла (2), взятое по грани, параллельной плоскости yz и лежащей ближе к началу, равно

$$\left(U - \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x}\,\delta x\right)\delta y\,\delta z,$$

а значение интеграла, отнесенного к противоположной грани, равно

$$-\left(U + \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x}\,\delta x\right)\delta y\,\delta z.$$

Сумма этих значений равна

$$-\frac{\partial U}{\partial x}\,\delta x\,\delta y\,\delta z.$$

Вычислив подобным же образом значения интегралов, которые относятся к другим парам граней, мы получим конечный результат в виде

$$-\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x}\right)\delta x\,\delta y\,\delta z.$$

Таким образом формула (1) просто выражает тот факт, что поверхностный интеграл (2), распространенный по границе области, равен сумме соответствующих интегралов, распространенных по поверхностям пространственных элементов, из которых может быть составлена рассматриваемая область.

Из формулы (1) следует или это может быть доказано непосредственно с помощью преобразования координат, что если U, V, W рассматриваются как компоненты вектора, то выражение

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}$$

представляет скалярную величину, т. е. что значение его при всяком таком преобразовании остается неизменным. Это выражение называют обыкновенно *дивергенцией* векторного поля в точке (x, y, z).

Интерпретация формулы (1) в случае, когда (U, V, W) представляют компоненты скорости непрерывной среды, вполне очевидна. В частном случае безвихревого движения мы получим

$$\iint \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS=-\iiint \Delta\varphi\, dx\, dy\, dz, \qquad (3)$$

где ∂n есть элемент направленной внутрь нормали к поверхности S.

Если, далее, положить

$$U=\varrho u,\quad V=\varrho v,\quad W=\varrho w,$$

то мы воспроизведем в основном второе исследование § 7.

Другой важный результат получится, если положить

$$U=u\varphi,\quad V=v\varphi,\quad W=w\varphi,$$

где u, v, w удовлетворяют внутри области соотношению

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

а на границе

$$lu+mv+nw=0.$$

Мы получим тогда, что

$$\iiint\left(u\frac{\partial \varphi}{\partial x}+v\frac{\partial \varphi}{\partial y}+w\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)dx\, dy\, dz=0. \qquad (4)$$

Функция φ подчинена здесь только тому ограничению, что она во всей области остается конечной, однозначной и непрерывной и обладает конечными первыми производными.

§ 43. Обозначим через φ, φ' две произвольные функции, которые вместе с их первыми и вторыми производными конечны и однозначны в рассматриваемой области. Положим

$$U=\varphi\frac{\partial \varphi'}{\partial x},\quad V=\varphi\frac{\partial \varphi'}{\partial y},\quad W=\varphi\frac{\partial \varphi'}{\partial z},$$

так что

$$lU+mV+nW=\varphi\frac{\partial \varphi'}{\partial n}.$$

Вставляя это в уравнение (1), найдем

$$\iint \varphi\frac{\partial \varphi'}{\partial n}\, dS=-\iiint\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi'}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \varphi'}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \varphi'}{\partial z}\right)dx\, dy\, dz-$$
$$-\iiint \varphi\,\Delta\varphi'\, dx\, dy\, dz. \qquad (5)$$

Переставляя φ и φ', получим

$$\iint \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS = -\iiint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \varphi'}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \varphi'}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz - \iiint \varphi' \Delta\varphi\, dx\, dy\, dz. \qquad (6)$$

Уравнения (5) и (6) вместе и выражают теорему Грина[1]).

§ 44. Пусть φ и φ' представляют потенциалы скоростей двух различных безвихревых движений жидкости. Так как

$$\Delta\varphi = 0, \; \Delta\varphi' = 0, \qquad (1)$$

то мы получим

$$\iint \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n}\, dS = \iint \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS. \qquad (2)$$

Вспоминая данное в § 18 физическое истолкование потенциала скоростей и предполагая движение полученным мгновенно из состояния равновесия, мы усматриваем в этом уравнении частный случай динамической теоремы

$$\sum p_r \dot{q}'_r = \sum p'_r \dot{q}_r,$$

где p_r, $\dot{q}_r$ и p'_r, $\dot{q}'_r$ суть обобщенные компоненты импульса и скорости для двух произвольных возможных движений системы[2]).

Если положить в формуле (6) § 43

$$\varphi' = \varphi$$

и допустить, что φ есть потенциал скоростей несжимаемой жидкости, то мы получим

$$\iiint \left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\} dx\, dy\, dz = -\iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS. \qquad (3)$$

Чтобы истолковать это уравнение, умножим обе части его на $\frac{1}{2}\varrho$. Тогда $-\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ в правой части обозначает направленную внутрь нормальную компоненту скорости жидкости, а $\varrho\varphi$, согласно § 18, есть необходимое для образования движения импульсивное давление. Существует теорема динамики[3]), которая утверждает, что произведенная импульсивной силой работа измеряется произведением импульса на полусумму компонент, взятых по направлению импульса, начальной и конечной скорости точки, на которую подействовал импульс. Поэтому правая сторона формулы (3), умноженная на $\frac{1}{2}\varrho$, выражает работу, произведенную теми импульсивными давлениями, которые, будучи распределены по поверхности S, могут вызвать рассматри-

---

[1]) Green G., Essay on Electricity and Magnetism, Nottingham, 1828, § 3 (Mathematical Papers (ed. Ferrers), Cambridge, 1871, стр. 3).

[2]) Thomson and Tait, Natural Philosophy, § 313, уравнение (11).

[3]) Thomson and Tait, Natural Philosophy, § 308.

ваемое движение; левая сторона, напротив, дает кинетическую энергию этого движения. Сама же формула указывает на равенство обеих этих величин. Отсюда, если T обозначает общую кинетическую энергию жидкости, следует очень важная формула

$$2T = -\varrho \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \qquad (4)$$

Если в формулу (3) подставить $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ вместо φ, которая, конечно, удовлетворяет уравнению

$$\Delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

и применить получающуюся формулу к области, которая ограничена сферической поверхностью, описанной радиусом r около произвольного центра (x, y, z), то мы будем иметь в обозначениях § 39

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \iint u^2 d\widetilde{\omega} = \iint u \frac{\partial u}{\partial r} dS = -\iint \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dS =$$
$$= \iiint \left\{\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}\right)^2\right\} dx\, dy\, dz.$$

Полагая $q^2 = u^2 + v^2 + w^2$, получим

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \iint q^2 d\widetilde{\omega} = \iiint \left\{\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + 2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)^2\right\} dx\, dy\, dz. \qquad (5)$$

Так как правая часть этого уравнения существенно положительна, то среднее значение q^2 на сферической поверхности, описанной около произвольного центра, возрастает вместе с радиусом сферы. Поэтому q^2 ни в какой точке жидкости не может иметь максимума, что уже доказано другим путем в § 37.

Если мы теперь вспомним формулу для давления в общем случае безвихревого движения жидкости:

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Omega - \frac{1}{2} q^2 + F(t), \qquad (6)$$

то, предполагая, что потенциал Ω внешних сил удовлетворяет условию

$$\Delta \Omega = 0, \qquad (7)$$

заключаем, что среднее значение p на сферической поверхности, описанной около произвольного центра, лежащего внутри жидкости, уменьшается при возрастании радиуса. Область с наименьшим давлением будет находиться поэтому где-нибудь на границе жидкости. Это обстоятельство имеет отношение к вопросу, рассматриваемому в 23.

§ 45. В связи с этим обратим внимание на замечательную теорему, открытую Кельвином [1]) и впоследствии им обобщенную настолько, что она представляет теперь общее свойство динамических систем, которые мгновенно приводятся в движение из состояния покоя при заданных условиях для скоростей [2]):

---

[1]) Thomson W., On the Vis-viva of a Liquid in Motion, Camb. and Dub. Math. Journ., 1849 (Papers, I, 107).

[2]) Thomson and Tait, 312.

Безвихревое движение капельной жидкости в односвязной области обладает меньшей кинетической энергией, чем всякое другое движение с одинаковой нормальной компонентой скорости на границе.

Пусть T есть кинетическая энергия безвихревого движения, которой соответствует потенциал скоростей φ, и T_1 — кинетическая энергия другого движения, заданного выражениями

$$u = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} + u_0,\ v = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} + v_0,\ w = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} + w_0, \qquad (8)$$

причем вследствие уравнения неразрывности внутри области должно быть

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0,$$

а в силу заданных условий на границе

$$lu_0 + mv_0 + nw_0 = 0.$$

Полагая далее

$$T_0 = \frac{1}{2}\varrho\iiint (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)\,dx\,dy\,dz, \qquad (9)$$

мы найдем, что

$$T_1 = T + T_0 - \varrho\iiint\left(u_0\frac{\partial\varphi}{\partial x} + v_0\frac{\partial\varphi}{\partial y} + w_0\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz.$$

Так как этот последний интеграл вследствие (4) § 42 обращается в нуль, то будем иметь

$$T_1 = T + T_0, \qquad (10)$$

что и доказывает нашу теорему [1]).

§ 46. Для дальнейшего необходимо знать, каким будет выражение (4) для кинетической энергии, если жидкость простирается в бесконечность, находится там в покое и изнутри ограничена одной или несколькими замкнутыми поверхностями S. Проведем большую замкнутую поверхность Σ так, чтобы она заключала в себе совокупность поверхностей S. Энергия заключенной между S и Σ жидкости равна

$$-\frac{1}{2}\varrho\iint\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS - \frac{1}{2}\varrho\iint\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\Sigma, \qquad (11)$$

где интегрирование в первом члене проводится по S, а во втором по Σ. Так как вследствие уравнения неразрывности

$$\iint\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS + \iint\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\Sigma = 0,$$

то выражение (11) может быть представлено в виде

$$-\frac{1}{2}\varrho\iint(\varphi - C)\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS - \frac{1}{2}\varrho\iint(\varphi - C)\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\Sigma, \qquad (12)$$

[1]) Некоторые обобщения этого результата даны Leathem, Cambridge Tracts № 1, 2 изд. (1913). Они дают дальнейшие интересные иллюстрации общего динамического принципа Кельвина.

где C может быть некоторой произвольной постоянной; здесь же мы допускаем, что она имеет то постоянное значение, к которому, согласно § 39, стремится φ на бесконечном расстоянии от S. Представим теперь всю наполненную жидкостью область составленною из трубок тока, каждая из которых или должна итти от одной точки внутренней границы к другой точке ее или же от внутренней границы простираться в бесконечность. Поэтому значение интеграла

$$\iint \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\,\Sigma,$$

взятого по некоторой незамкнутой или замкнутой, конечной или бесконечной поверхности, лежащей внутри области, должно быть конечно. А тогда, если взять Σ бесконечно большой и всюду бесконечно удаленной от S, второй член (12) должен в конечном счете исчезнуть, и мы будем иметь

$$2T = -\varrho \iint (\varphi - C)\, \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS, \tag{13}$$

где интеграл берется только по внутренней границе.

Если полный поток через внутреннюю границу равен нулю, то

$$\iint \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS = 0,$$

и формулу (13) можно представить просто в виде

$$2T = -\varrho \iint \varphi\, \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS. \tag{14}$$

О многосвязных областях

§ 47. Прежде чем рассматривать свойства безвихревого движения в многосвязных областях, мы должны ближе изучить свойства и классификацию таких областей. В нижеследующем обозрении этой ветви геометрии (топология) мы ради полноты повторим одно или два уже ранее данных определения.

Рассмотрим некоторую связную область пространства, заключенного внутри какой-то границы. Область называют связной, если возможно от некоторой произвольной точки ее перейти к другой произвольной ее точке вдоль бесконечно большого числа путей, каждый из которых лежит всецело внутри области.

Такие два произвольные пути или две какие-нибудь замкнутые кривые, которые непрерывным изменением, не выходя из области, можно совместить, называются *взаимно переводимыми*. Всякая замкнутая кривая, которая, оставаясь внутри области, может быть стянута в точку, называется *приводимой*. Два взаимно переводимые пути образуют вместе приводимую замкнутую кривую. Если два пути или две замкнутые кривые взаимно переводимы, то возможно натянуть на них непрерывную, целиком расположенную внутри области поверхность, для которой эти кривые образуют полную границу, и наоборот. Далее целесообразно делать различие между просто и кратно неприводимыми контурами. Неприводимый контур называется кратно неприводимым, если его можно перевести с помощью непрерывного изменения всецело или частично в другой несколько раз пробегаемый неприводимый контур. Простой неприводимый контур есть такой, для которого это невозможно.

Перегородкой или диафрагмой называется проведенная через область поверхность, граница которой образована линией или линиями, по которым эта поверхность пересекает границу области. Поэтому перегородка необходимо должна быть связной поверхностью и не может состоять из двух или нескольких отдельных частей.

Область называется односвязной, если все пути, проведенные между какими-нибудь ее точками, взаимно переводимы или все взятые в ней замкнутые кривые приводимы.

Область называется двусвязной, если между двумя ее точками A и B могут быть проведены два и только два пути взаимно непереводимые; всякий другой путь между A и B переводим в один из этих обоих или в комбинацию их, в которой каждый может входить несколько раз. Другими словами: область такова, что в ней может быть проведен один и только один неприводимый простой контур; все другие контуры переводимы или в этот (или возможно в кривую, образованную из него через повторение) или же они приводимы. Как пример двусвязной области мы можем взять область, заключенную внутри кольца (тора), или область вне кольца, простирающуюся в бесконечность.

Вообще область называется n-связной, если в ней могут быть проведены можду двумя точками n и только n взаимно непереводимых путей или если могут быть проведены $n-1$ и не больше (простых) неприводимых и взаимно непереводимых замкнутых кривых. Заштрихованная часть фиг. 6 есть двухмерная трехсвязная область.

Можно показать, что вышеизложенное определение n-связной области непротиворечиво. В простых случаях, когда $n=2$, $n=3$, это ясно без доказательства.

§ 48. Предположим, что мы имеем n-связную область с $n-1$ независимыми просто неприводимыми замкнутыми кривыми. В этом случае можно провести перегородку, которая одну из этих замкнутых кривых пересечет в одной только точке, а остальные $n-2$ замкнутых кривых совсем не пересечет. Такая перегородка не нарушит связности области, так как пересеченная ею замкнутая кривая останется как путь от одной стороны перегородки до другой. Однако порядок связности области понижается на *единицу*; ибо всякая замкнутая кривая в измененной области должна быть переводима в одну или несколько из $n-2$ не пересеченных нашей перегородкой замкнутых кривых.

Вторая подобным образом проведенная перегородка понизит порядок связности опять на единицу, и т. д.; таким образом, проводя $n-1$ перегородок, мы можем привести область к односвязной.

Односвязная область разбивается перегородкой на две отдельные части; ибо иначе можно бы было перейти от точки на одной стороне перегородки к соседней точке на второй стороне ее вдоль лежащего целиком внутри области пути, который в первоначальной области представлял бы неприводимую замкнутую кривую.

Таким образом в n-связной области, не нарушая связности ее, можно провести $n-1$, но не больше, перегородок. Этим свойством пользуются иногда для определения n-связной области.

Безвихревое движение в многосвязных областях

§ 49. В области, наполненной жидкостью с безвихревым движением, циркуляция по двум взаимно переводимым замкнутым кривым $ABCA$ и $A'B'C'A'$ имеет одно и то же значение. В самом деле, две замкнутые кривые могут быть связаны друг с другом при помощи непрерывной, целиком лежащей внутри области, поверхности; если мы применим теорему § 32 к этой поверхности, то, принимая во внимание правило относительно направления интегрирования, получим

$$J(ABCA)+J(A'C'B'A')=0,$$

или

$$J(ABCA)=J(A'B'C'A').$$

Если замкнутая кривая $ABCA$ переводима в комбинацию двух или нескольких замкнутых кривых $A'B'C'A'$, $A''B''C''A''$ и т. д., то мы можем все эти замкнутые кривые связать непрерывной поверхностью, которая лежит всецело внутри области и для которой эти контуры составляют полную границу. Поэтому будем иметь

$$J(ABCA)+J(A'C'B'A')+J(A''C''B''A'')+\ldots=0,$$

или

$$J(ABCA)=J(A'B'C'A')+J(A''B''C''A'')+\ldots,$$

т. е. циркуляция по произвольной замкнутой кривой равна сумме циркуляций по отдельным кривым той совокупности замкнутых кривых, в которые переводима первоначальная кривая.

Пусть порядок связности области будет $n+1$, так что в ней можно провести n независимых просто неприводимых замкнутых кривых $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Пусть циркуляции по этим замкнутым кривым будут соответственно $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$. Знак каждого $\varkappa$ будет зависеть, естественно, от направления интегрирования вдоль соответствующей замкнутой кривой; мы назовем направление, по которому взято $\varkappa$, положительным направлением замкнутой кривой. Значение циркуляции по другой произвольной замкнутой кривой можно сразу определить. В самом деле, данная замкнутая кривая должна быть переводимой в какую-либо комбинацию кривых $a_1, a_2, \ldots, a_n$; a_1 может при этом проходиться p_1 раз, $a_2 - p_2$ раз и т. д., причем p_1, естественно, будет отрицательным, если соответствующая замкнутая кривая проходится в отрицательном направлении. Искомая циркуляция тогда равна

$$p_1\varkappa_1 + p_2\varkappa_2 + \ldots + p_n\varkappa_n. \tag{1}$$

Так как два произвольные пути, которые соединяют две точки A и B области, вместе образуют замкнутую кривую, то отсюда следует, что значения потока по обоим путям могут отличаться только на величины вида (1), причем, конечно, в частных случаях некоторые или все p могут равняться нулю.

§ 50. Обозначим через $-\varphi$ поток от фиксированной точки A к переменной точке P, т. е.

$$\varphi = -\int_A^P (u\,dx + v\,dy + w\,dz). \tag{2}$$

До тех пор, пока путь интегрирования от A до P не установлен, значение φ будет определяться с точностью до величины вида (1).

Если, однако, провести n перегородок по способу, указанному в § 48, для того чтобы привести область к односвязной и ограничить путь интегрирования в выражении (2) так, чтобы он лежал внутри преобразованной таким образом области (т. е. он не должен пересекать ни одну из перегородок), то φ будет однозначной функцией, как и в § 35. Далее, φ будет непрерывной функцией в преобразованной области, но ее значения в двух соседних точках на различных сторонах перегородки отличаются на $\pm\varkappa$. Чтобы получить значение φ для случая, когда интегрирование взято вдоль произвольного пути внутри непреобразованной области, мы должны *вычесть* величину вида (1), где какое-то p указывает, сколько раз этот путь пересекает соответствующую перегородку. При этом пересечение перегородки в положительном направлении той замкнутой кривой, для которой проведена перегородка, будет считаться положительным, а пересечение в противоположном направлении будет отрицательным.

Перемещая P на бесконечно малый отрезок параллельно каждой координатной оси, мы найдем, что

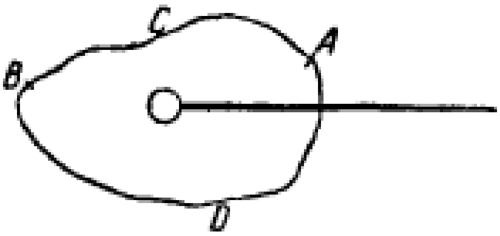
$$u = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Функция φ удовлетворяет, таким образом, определению потенциала скоростей (§ 17). Однако, она будет теперь многозначной или циклической, т. е. нельзя будет каждой точке первоначальной области поставить в соответствие единственное определенное значение φ таким образом, чтобы эти значения образовали непрерывную систему. Напротив, когда P будет описывать неприводимую замкнутую кривую, то φ, вообще говоря, не будет возвращаться к своему первоначальному значению, но будет отличаться от него на величину вида (1).

Количества $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$, представляющие величины, на которые уменьшается φ, когда P проходит различные независимые замкнутые кривые области, мы назовем *циклическими* постоянными функции φ.

В качестве непосредственного следствия теоремы о циркуляции § 33, при допускаемых там условиях, будет следовать, что эти циклические постоянные не зависят от времени. Насколько необходимы эти условия, будет выяснено на примере § 29, где потенциал внешних сил сам есть циклическая функция.

Вышеизложенная теория может быть иллюстрирована случаем (2) § 27; область там двусвязная (так как она изнутри ограничена малым кругом около начала координат, где формула дает бесконечно большое значение для скорости); поэтому две произвольные точки A и B (фиг. 8) области могут быть соединены при помощи двух взаимно непереводимых путей, которые расположены по обе стороны оси z, например, ACB и ADB на приложенной фигуре. Ту часть плоскости xz, для которой x положительно, мы можем взять в качестве перегородки и этим самым превратить область в односвязную. Циркуляция по произвольной замкнутой кривой, которая пересекает эту перегородку только один раз как, например, $ACBDA$, равна



Фиг. 8.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mu}{r} r\, d\theta, \quad \text{или} \quad 2\pi\mu.$$

Циркуляция же по замкнутой кривой, не пересекающей перегородки, равна нулю. В преобразованной области можно положить φ равной однозначной функции, например — $\mu\theta$. Однако ее значение на положительной стороне перегородки равно нулю, в то время как в соседней точке на отрицательной стороне равно $-2\pi\mu$.

Более сложные примеры безвихревого движения в многосвязных двухмерных областях встретятся в следующей главе.

§ 51. Прежде чем перейти к дальнейшему, мы дадим вкратце несколько другой метод изложения этой теории.

Исходя из существования потенциала скоростей как основной характеристики того класса движений, который мы намереваемся изучать, и принимая второе данное в § 48 определение $n+1$-связной области, мы замечаем, что в односвязной области всякая поверхность уровня (поверхность равного потенциала) или должна быть замкнутой поверхностью, или должна представлять перегородку, разбивающую область на две отдельные части. Отсюда, предполагая, что проведена целая система таких поверхностей, мы видим, что всякая замкнутая кривая, которая пересекает однажды произвольную из заданных эквипотенциальных поверхностей, должна пересечь ее вторично, но в противоположном направлении. Поэтому каждому элементу этой кривой, заключенному между двумя последовательными эквипотенциальными поверхностями, соответствует второй элемент кривой, такой, что поток вдоль второго, будучи равным разности соответствующих значений φ, равен и противоположен потоку вдоль первого. Поэтому величина циркуляции вдоль всей замкнутой кривой равна нулю.

Если, однако, область многосвязная, то эквипотенциальная поверхность может образовать перегородку, не разбивая области на две отдельные части. Проведем теперь столько таких поверхностей, сколько возможно, чтобы не разрушить связности области. Их число не может по определению быть больше, чем n. Всякая другая незамкнутая эквипотенциальная поверхность должна, очевидно, быть переводимой в одну или больше из этих перегородок. Если провести кривую с одной стороны перегородки к другой ее стороне, притом не пересекая какой-нибудь другой перегородки, то всякая эквипотенциальная поверхность, переводимая в первую перегородку, пересекается этой кривой нечетное число раз, а всякая другая эквипотенциальная поверхность — четное число раз. Поэтому циркуляция по образованной таким образом замкнутой кривой не равна нулю, и φ будет циклической функцией.

В методе, развитом выше, мы обосновали всю теорию на уравнениях

$$\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{3}$$

и вывели из них, как необходимые следствия, существование и свойства потенциала скоростей в различных случаях. Действительно, содержание § 34, 35 и 49, 50 может рассматриваться, как исследование о свойствах решений этой системы диференциальных уравнений в зависимости от характера области, для которой они имеют место.

Интегрирование уравнений (3) для случая, когда мы с правой стороны вместо нуля будем иметь известные функции от x, y, z, будет разобрано в главе VII.

§ 52. Переходя теперь, как в § 36, к частному случаю несжимаемой жидкости, мы заметим, что, все равно, будет ли φ циклической или нет, ее первые производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, а следовательно, и все производные высшего порядка, суть существенно однозначные функции, и при этом φ всегда будет удовлетворять уравнению неразрывности

$$\Delta\varphi=0, \tag{1}$$

или эквивалентному уравнению

$$\iint \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS=0, \tag{2}$$

где поверхностный интеграл распространяется по всей границе произвольной части жидкости.

Теорема (a) § 40 о том, что функция φ должна внутри всякой области, для точек которой имеет место уравнение (1), быть постоянной, если она постоянна на границе ее, имеет место также и тогда, когда область многосвязна. Ибо φ должна быть обязательно однозначна, если она постоянна на всей границе.

Другие теоремы § 40, которые опираются на допущение, что линии тока не могут образовать замкнутые кривые, потребуют некоторых изменений. Именно мы должны присоединить еще условие, что циркуляция по всякой замкнутой кривой области должна равняться нулю.

Если мы отбросим это ограничение, то будем иметь следующую теорему: безвихревое движение несжимаемой жидкости в n-связной области вполне определено, если даны как нормальная компонента скорости для всякой точки границы, так и значение циркуляции для всякой из n независимых неприводимых замкнутых кривых, которые можно провести в данной области. В самом деле, если φ_1, φ_2 суть (циклические) потенциалы скоростей двух движений, удовлетворяющих вышеизложенным условиям, то

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

есть однозначная функция, которая для всякой точки области удовлетворяет уравнению (1), а для всякой точки границы удовлетворяет условию $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$. Поэтому φ согласно § 40 постоянна, и движения, определяемые с помощью φ_1 и φ_2, тождественны.

Теория многосвязности развита, повидимому, впервые Риманом[1]) для двухмерных областей в связи с его исследованиями по теории функции комплексного переменного. Там встречаются также циклические функции, которые удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

в многосвязных областях.

Значение этой теории для гидродинамики и существование многозначных потенциалов скоростей в некоторых случаях впервые отмечено Гельмгольцем[2]). Вопрос о циклическом безвихревом движении в многосвязных областях был впоследствии опять поднят Кельвином и вполне исследован в его уже цитированной работе о вихревом движении[3]).

Обобщение Кельвина для теоремы Грина

§ 53. При доказательстве теоремы Грина предполагалось, что как φ, так и φ' суть однозначные функции. Формулировка теоремы должна быть изменена, если одна из двух функций циклична, что может случиться, когда область, по которой производится интегрирование в § 43, будет многосвязной. Предположим, например, что φ циклична; поверхностный интеграл на левой стороне и второй тройной интеграл на правой стороне уравнения (5) § 43 будут тогда по своему значению неопределенны, так как φ само неопределенно. Чтобы устранить эту неопределенность, проведем указанные в § 48 перегородки, которые превратят область в односвязную. В преобразован-

---

[1]) Riemann, Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse, Göttingen, 1851 (Mathematische Werke, Leipzig, 1876, p. 3) и Lehrsätze aus der Analysis Situs, Crelle, LIV (1857) (Werke, p. 84).

[2]) Helmholtz, Crelle, LV (1858).

[3]) См. также Kirchhoff, Über die Kräfte, welche zwei unendlich dünne starre Ringe in einer Flüssigkeit scheinbar auf einander ausüben können, Crelle, LXXI (1869) (Ges. Abh., p. 404).

ной таким образом области мы можем φ принять непрерывной и однозначной; указанное только что уравнение сохранит свое значение, если предположить, что обе стороны каждой перегородки будут рассматриваться как части поверхности, ограничивающей область, и будут приняты во внимание в поверхностном интеграле на левой стороне. Обозначим через $\delta\sigma_1$ элемент перегородки, через $\varkappa_1$ — циклическую постоянную для этой перегородки, через $\frac{\partial\varphi'}{\partial n}$ — первую производную от φ' по положительному направлению нормали к $\delta\sigma_1$. Так как в частях поверхностного интеграла, относящихся к противоположным сторонам элемента $\delta\sigma_1$, величина $\frac{\partial\varphi'}{\partial n}$ должна быть взята с противоположными знаками, в то время как значение φ на положительной стороне превышает значение φ на отрицательной стороне на $\varkappa_1$, то для элемента интеграла, отнесенного к $\delta\sigma_1$, мы получим значение

$$\varkappa_1 \frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,\delta\sigma_1.$$

Благодаря этим изменениям условий, уравнение (5) § 43 переходит в следующее:

$$\iint \varphi \frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,dS + \varkappa_1 \iint \frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,d\sigma_1 + \varkappa_2 \iint \frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,d\sigma_2 + \ldots =$$
$$= -\iiint \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi'}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi'}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz -$$
$$- \iiint \varphi\,\Delta\varphi'\,dx\,dy\,dz, \qquad (1)$$

где первый из поверхностных интегралов на левой стороне распространяется только по первоначальной границе области, а остальные — по различным перегородкам области. Множитель при каждом $\varkappa$ представляет, очевидно, взятый со знаком *минус* полный расход через соответствующую перегородку при движении с потенциалом скоростей φ'. Значения φ в первом и последнем членах уравнения определяются по методу, данному в § 50.

Если φ' будет также циклической функцией с циклическими постоянными $\varkappa_1'$, $\varkappa_2'$, ..., то уравнение (6) § 43 с помощью тех же самых рассуждений примет вид

$$\iint \varphi' \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS + \varkappa_1' \iint \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma_1 + \varkappa_2' \iint \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma_2 + \ldots =$$
$$= -\iiint \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi'}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi'}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz -$$
$$- \iiint \varphi'\,\Delta\varphi\,dx\,dy\,dz. \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) вместе и составляют то обобщение теоремы Грина, которое предложено Кельвином.

§ 54. Если обе функции φ и φ' будут представлять потенциалы скоростей несжимаемой жидкости, то

$$\left.\begin{aligned}\Delta\varphi=0,\\ \Delta\varphi'=0\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

и поэтому

$$\iint\varphi\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,dS+\varkappa_1\iint\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,d\sigma_1+\varkappa\iint\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,d\sigma_2+\ldots= \\ =\iint\varphi'\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS+\varkappa_1'\iint\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma_1+\varkappa_2'\iint\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma_2+\ldots \tag{4}$$

Чтобы получить физическое истолкование этой теоремы, необходимо сначала изложить предложенный Кельвином способ, при помощи которого можно получить любое циклическое безвихревое движение капельной жидкости в многосвязной области.

Предположим, что жидкость заключена в совершенно гладкую и изгибаемую оболочку, форма которой совпадает с формой ограничивающей поверхности. Для того чтобы превратить область в односвязную, проведем n перегородок, как в § 48; допустим, далее, что эти перегородки представляют такие же бесконечно тонкие и невесомые пленки.

В начальный момент жидкость находится в покое, затем пусть каждый элемент выше названной оболочки внезапно начинает двигаться внутрь с данной (положительной или отрицательной) нормальной компонентой скорости $-\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$; одновременно к отрицательным сторонам перегородок пусть будут приложены импульсивные давления $\varkappa_1\varrho, \varkappa_2\varrho, \ldots, \varkappa_n\varrho$. Вызванное таким способом движение будет характеризоваться следующими свойствами. Оно будет безвихревым, так как образовалось из состояния покоя; нормальная компонента скорости для всякой точки первоначальной границы будет иметь заданное значение; значения же импульсивных давлений в двух соседних точках на разных сторонах перегородки будут отличаться на соответствующие значения $\varkappa\varrho$, а значения потенциала скоростей тем самым будут отличаться на соответствующее значение $\varkappa$; наконец, движения на обеих сторонах перегородки переходят непрерывно друг в друга. Чтобы доказать это последнее положение, заметим сначала, что компоненты скорости, перпендикулярные к перегородке в двух соседних точках на разных ее сторонах, равны между собой, так как обе равны нормальной компоненте скорости соответствующей частицы пленки. Пусть далее P, Q суть две рядом лежащие точки перегородки, φ_P, φ_Q — соответствующие значения φ на положительной стороне, φ'_P, φ'_Q — на отрицательной стороне этой перегородки, тогда будем иметь

$$\varphi_P-\varphi'_P=\varkappa=\varphi_Q-\varphi'_Q$$

и поэтому

$$\varphi_Q-\varphi_P=\varphi'_Q-\varphi'_P,$$

т. е., если

$$PQ = \delta s,$$

то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi'}{\partial s}.$$

Следовательно, тангенциальные компоненты скорости двух соседних точек на различных сторонах перегородки также равны. Если мы теперь вообразим, что сейчас же после толчка пленки перегородок стали жидкими, то мы и будем иметь искомое безвихревое движение.

Физическое истолкование уравнения (4) после умножения на $-\varrho$ будет таким же, как в § 44. Величины $\varrho\varkappa$ будут представлять дополнительные компоненты импульса, а значения

$$-\iint \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma,$$

т. е. количества жидкости, прошедшей через различные отверстия области, будут являться соответствующими обобщенными скоростями.

§ 55. Если мы в формуле (2) положим $\varphi' = \varphi$ и допустим, что φ есть потенциал скоростей несжимаемой жидкости, то получим

$$2T = \varrho \iiint \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right\} dx\, dy\, dz =$$
$$= -\varrho \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS - \varrho\varkappa_1 \iint \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma_1 - \varrho\varkappa_2 \iint \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma_2 - \ldots \qquad (5)$$

Последняя часть этой формулы получает простое истолкование с помощью только что изложенного сейчас искусственного способа образования циклического безвихревого движения. Первый член, как мы уже видели, есть удвоенная работа, которую совершает действующее на все части первоначальной границы жидкости импульсивное давление $\varrho\varphi$.. Далее, $\varrho\varkappa_1$ есть импульсивное давление, которое действует в положительном направлении на бесконечно тонкую невесомую пленку, которую мы вообразили на месте первой перегородки. А тогда выражение

$$-\frac{1}{2} \iint \varrho\varkappa_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma_1$$

будет обозначать работу, произведенную действующими на пленку импульсивными силами; то же самое относится к остальным перегородкам. Поэтому формула (5) выражает тот факт, что энергия движения равна работе, производимой всей системой импульсивных сил, которая, как мы допустили, способна образовать данное движение.

Применяя (5) к случаю, когда жидкость простирается в бесконечность и там находится в покое, мы можем первый член третьей части заменить через

$$-\varrho \iint (\varphi - C) \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS, \qquad (6)$$

где интегрирование распространяется только на внутренние границы.

Доказательство этого такое же, как и в § 46. Если полный поток через границу равен нулю, то выражение (6) сводится к

$$-\varrho\iint\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS. \tag{7}$$

Данная в § 45 теорема Кельвина о минимуме может быть теперь обобщена следующим образом:

Безвихревое движение несжимаемой жидкости в многосвязной области обладает меньшей кинетической энергией, чем всякое другое движение с теми же самыми нормальными компонентами скорости на границе и одинаковыми значениями полного расхода через каждый из различных независимых каналов области.

Провести доказательство предоставляем читателю.

Источники и стоки. Дублеты

§ 56. Аналогия с теорией электростатики, теплопроводности и т. д. может простираться еще далее, если ввести понятия источника и стока.

Простой источник есть точка, из которой мы воображаем жидкость вытекающей равномерно во все стороны. Если полный поток наружу через малую замкнутую поверхность, окружающую точку, равен m, то величина m называется мощностью источника. Отрицательный источник называется стоком. Существование источника или стока предполагает, конечно, непрерывное образование или уничтожение жидкости в рассматриваемой точке.

Для простого источника в жидкости, покоящейся в бесконечности, потенциал скоростей в некоторой точке P равен

$$\varphi=\frac{m}{4\pi r}, \tag{1}$$

где r означает расстояние точки P от источника. В самом деле, этот потенциал скоростей дает течение в радиальном направлении от этой точки и, если

$$\delta S=r^2\,\delta\tilde{\omega}$$

есть элемент сферической поверхности с центром в источнике, то

$$-\iint\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,dS=m,$$

где m — постоянное; таким образом уравнение неразрывности удовлетворяется, и поток наружу равен мощности источника.

Совокупность источника и стока мощности $+m'$ и $-m'$ с взаимным расстоянием δs, причем в пределе δs берется бесконечно малым, а m' бесконечно большим, но так, что произведение $m'\,\delta s$ остается конечным и равным, скажем, μ, называется *диполем*, или *дублетом* мощности μ. Проведенная в направлении от $-m'$ к $+m'$ прямая, на которой лежит δs, называется *осью дублета*.

Чтобы найти потенциал скоростей в точке (x, y, z) жидкости при наличии в ней в точке (x', y', z') дублета мощности μ с направлением оси (l, m, n), заметим, что имеет место равенство

$$f(x' + l\,\delta s,\ y' + m\,\delta s,\ z' + n\,\delta s) - f(x', y', z') =$$
$$= \left(l\frac{\partial}{\partial x'} + m\frac{\partial}{\partial y'} + n\frac{\partial}{\partial z'}\right) f(x', y', z')\,\delta s,$$

если f есть любая непрерывная функция. Полагая

$$f(x', y', z') = \frac{m'}{4\pi r},$$

где

$$r = \left\{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\right\}^{1/2},$$

мы найдем

$$\varphi = \frac{\mu}{4\pi}\left(l\frac{\partial}{\partial x'} + m\frac{\partial}{\partial y'} + n\frac{\partial}{\partial z'}\right)\frac{1}{r} = \qquad (2)$$

$$= -\frac{\mu}{4\pi}\left(l\frac{\partial}{\partial x} + m\frac{\partial}{\partial y} + n\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r} = \qquad (3)$$

$$= \frac{\mu}{4\pi}\,\frac{\cos\vartheta}{r^2}, \qquad (4)$$

где ϑ есть угол между проведенной из точки (x', y', z') в (x, y, z) прямой r и осью (l, m, n).

Продолжая таким же образом (см. § 82), мы можем образовать источники более высокого порядка; но сказанного уже достаточно для нашей непосредственной цели.

Наконец, мы можем вообразить, что простые источники или дублеты встречаются не в изолированных точках, а распределены непрерывно вдоль линии, поверхности или объема.

§ 57. Теперь мы можем доказать, что всякое непрерывное, ациклическое безвихревое движение жидкости может быть вызвано действием простых и двойных источников, распределенных по границе области.

Это утверждение основывается на доказанной в § 44 теореме, выраженной уравнением

$$\iint \varphi\,\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,dS = \iint \varphi'\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS, \qquad (5)$$

где φ и φ' суть две любые однозначные функции, для которых удовлетворяются уравнения $\Delta\varphi = 0$ и $\Delta\varphi' = 0$ во всей рассматриваемой области, причем интегрирование производится по всей границе. Для данного случая мы должны φ взять в качестве потенциала скоростей рассматриваемого движения и φ' положить равным обратному значению расстояния любой точки жидкости от неподвижной точки P, т. е.

$$\varphi' = \frac{1}{r}.$$

Мы будем сначала предполагать, что P лежит внутри области, занятой жидкостью. Так как в этом случае функция φ' в точке P равна бесконечности, то необходимо эту точку исключить из области, к которой применяется формула (5). Это можно сделать, описав малую сферическую поверхность Σ около P, как центра. Если мы предположим теперь, что $\delta\Sigma$ есть элемент этой сферической поверхности, а δS — элемент первоначальной границы, то указанная формула дает

$$\iint \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\Sigma + \iint \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \iint \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\Sigma + \iint \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS. \qquad (6)$$

На поверхности Σ имеем

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}.$$

А тогда, если мы положим $\delta\Sigma = r^2 d\widetilde{\omega}$ и затем будем приближать r к нулю, то первый интеграл в левой части (6) будет равняться $-4\pi\varphi_P$, где φ_P есть значение φ в точке P; первый же интеграл в правой части обратится в нуль; следовательно, мы получим

$$\varphi_P = -\frac{1}{4\pi}\iint \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS + \frac{1}{4\pi}\iint \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS. \qquad (7)$$

Эта формула дает значение φ в любой точке жидкости, выраженное через значения φ и $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ на границе. Сравнивая с формулами (1) и (2), мы видим, что первый член формулы (7) есть потенциал скоростей для простых источников, распределенных по границе с плотностью, равной $-\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ на единицу площади; второй член есть потенциал скоростей для дублетов, распределенных по границе, с плотностью φ на единицу площади, причем направление оси дублетов совпадает с направлением нормали к ограничивающей поверхности. Ниже из уравнения (10) будет следовать, что это есть только одно из бесконечно большого числа возможных распределений источников на поверхности, которые все дают одно и то же значение φ для внутренней части области.

Если жидкость простирается по всем направлениям в бесконечность и там находится в покое, то мы можем с некоторой предосторожностью рассматривать интегралы в формуле (7) как интегралы, распространенные только по внутренним границам. Чтобы в этом убедиться, возьмем в качестве внешней пограничной поверхности бесконечно большую шаровую поверхность с центром в точке P. Соответствующая часть первого интеграла в формуле (7) обращается в нуль, в то время как во втором интеграле она равна C, т. е. равна постоянному значению, к которому, как мы видели в § 41, стремится φ в бесконечности. Теперь для упрощения формулировки нашей теоремы удобно положить $C=0$; это вполне законно, так как мы имеем право всегда прибавить к φ произвольное постоянное.

Если точка P лежит вне пограничной поверхности, то тогда φ' будет конечной во всей первоначальной области, и формула (5) дает тотчас

$$0=-\frac{1}{4\pi}\iint\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS+\frac{1}{4\pi}\iint\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS, \tag{8}$$

причем опять, в том случае, когда жидкость простирается в бесконечность и там находится в покое, можно опустить члены, относящиеся к бесконечно далекой части пограничной поверхности.

§ 58. Выраженное формулой (7) распределение источников, далее, может быть заменено через распределение либо только простых источников, либо только дублетов.

Пусть φ есть потенциал скоростей жидкости, которая занимает определенную область, а φ' обозначает потенциал скоростей любого возможного ациклического безвихревого движения в остальной части неограниченного пространства, при условии, что φ или φ', в зависимости от случая, в бесконечности обращается в нуль. Тогда, если точка P лежит внутри вышеуказанной определенной области и, следовательно, вне остальной части пространства, то мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned}\varphi_P&=-\frac{1}{4\pi}\iint\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS+\frac{1}{4\pi}\iint\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS,\\ 0&=-\frac{1}{4\pi}\iint\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi'}{\partial n'}\,dS+\frac{1}{4\pi}\iint\varphi'\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r}\right)dS,\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где δn, $\delta n'$ суть элементы нормали к dS, направленной внутрь (соответственно в первую и вторую области), так что

$$\frac{\partial}{\partial n'}=-\frac{\partial}{\partial n}.$$

Складывая, мы получим

$$\varphi_P=-\frac{1}{4\pi}\iint\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\frac{\partial\varphi'}{\partial n'}\right)dS+\frac{1}{4\pi}\iint(\varphi-\varphi')\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS. \tag{10}$$

Функция φ' определяется в свою очередь через значения φ' и $\frac{\partial\varphi'}{\partial n'}$ на пограничной поверхности области, которые еще находятся в нашем распоряжении.

Положим сначала, что на границе

$$\varphi'=\varphi;$$

тогда тангенциальные компоненты скорости на обеих сторонах границы непрерывны, нормальные же компоненты, наоборот, разрывны. Чтобы легче такой случай представить, вообразим, что все бесконечное пространство, наполненное капельной жидкостью, разделено на две части бесконечно тонкой двуслойной поверхностью; в промежутке между слоями можно вдоль поверхности распределить такое импульсивное давление, которое могло бы породить данное движение из состояния покоя. В этом случае последний член формулы (10) обращается в нуль, так что

$$\varphi_P = -\frac{1}{4\pi}\iint \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\frac{\partial\varphi'}{\partial n'}\right) dS, \tag{11}$$

т. е. движение жидкости (по обе стороны) обусловливается простыми источниками, распределенными по границе с поверхностной плотностью

$$-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\frac{\partial\varphi'}{\partial n'}\right)$$ [1].

Далее, мы можем предположить на границе

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n};$$

тогда будем иметь непрерывные нормальные компоненты скорости и, наоборот, разрывные тангенциальные компоненты на первоначальной границе. В этом случае можно вообразить движение происходящим вследствие того, что каждой точке бесконечно тонкой оболочки, которая занимает положение границы, мы сообщаем заданную нормальную компоненту скорости $-\frac{\partial\varphi}{\partial n}$. Теперь первый член формулы (10) обращается в нуль, и мы получим

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi}\iint (\varphi-\varphi')\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS. \tag{12}$$

Эта формула показывает, что движение по обе стороны оболочки может быть представлено, как вызванное при помощи дублетов, которые распределены по границе с поверхностной плотностью

$$\varphi-\varphi'.$$

Можно показать, что это представление φ либо только через простые источники, либо только через двойные источники будет единственным, в то время как представление, данное в § 57, является неопределенным [2].

Ясно, что *циклическое*, безвихревое движение несжимаемой жидкости не может быть вызвано через распределение только простых источников. Однако легко видеть, оно может быть представлено через некоторое распределение двойных источников по границе вместе с равномерным распределением двойных источников по каждой перегородке, которые превращают область, наполненную жидкостью, в односвязную область. В самом деле, в обозначениях § 53 мы будем иметь

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi}\iint (\varphi-\varphi')\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS + \frac{\varkappa_1}{4\pi}\iint \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma_1 + $$
$$+\frac{\varkappa_2}{4\pi}\iint \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma_2 + \ldots, \tag{13}$$

---

[1] Это исследование дано впервые Грином при рассмотрении соответствующих вопросов электростатики, см. прим. на стр. 65.

[2] Larmor C., On the Mathematical Expression of the Principle of Huyghens, Proc. Lond. Math. Soc. (2), ч. I (1903) (Math. and Phys. Papers, Cambridge, 1929, II, 240)

где φ есть однозначный потенциал скоростей, который мы получаем в измененной области, а φ' обозначает потенциал скоростей ациклического движения, которое образуется во внешнем пространстве, когда каждому элементу δS оболочки, совпадающей по положению с первоначальной границей, мы сообщим надлежащую нормальную компоненту скорости $-\frac{\partial\varphi}{\partial n}$

Другой способ представления безвихревого движения, безразлично, будет ли оно циклическим или нет, будет описан в главе о вихревом движении.

На этом мы заканчиваем изучение теории безвихревого движения. Математически образованный читатель, без сомнения, заметит отсутствие некоторых важных звеньев в цепи наших заключений. Например, не было дано независимого от физических рассуждений доказательства существования функции φ, которая удовлетворяет уравнениям § 36 внутри произвольно данной односвязной области и принимает заданные значения на границе. В данном руководстве мы не приводим строгого доказательства соответствующих „теорем существования". Чтобы получить обозрение литературы по этой части вопроса, читатель может обратиться к цитированным ниже авторам [1]).

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

§ 59. Если компоненты скорости u, v суть функции только от x, y, в то время как w равно нулю, то движение происходит в плоскостях, параллельных плоскости xy, и оно одинаково во всех таких плоскостях. Исследование движения жидкости при этих предположениях характеризуется определенными аналитическими особенностями, и многие очень интересные проблемы могут быть решены при этом достаточно просто.

Так как все движение будет известно, если мы знаем его в плоскости $z=0$, то мы можем ограничить наше внимание только этой плоскостью. Точки и линии в этой плоскости могут всегда рассматриваться, соответственно, как следы прямых, параллельных оси z, или как следы цилиндрических поверхностей с образующими, параллельными оси z.

Под потоком (расходом) через некоторую кривую мы будем понимать объем жидкости, протекающей в единицу времени через ту часть цилиндрической поверхности, которая заключена между плоскостями

$$z=0, \quad z=1$$

и следом которой является указанная кривая.

---

[1]) Burkhardt H. und W. F. Meyer, Potentialtheorie, и Sommerfeld A., Randwerthaufgaben in der Theorie d. part. Diff.-Gleichungen, Encycl. d. math. Wiss., 2 (1900).