



## АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ [80]

### 1. Введение

Как известно, дифференциальные уравнения аэродинамики не линейны, и решение их в общей форме представляет значительные математические трудности. Однако в применении к акустике обыкновенно упрощают эти уравнения, откидывая в них члены, в которых множителями являются малые величины в степенях выше первой.

Это называется *линеаризировать* уравнения, т. е. сделать их линейными и, таким образом, более доступными решению. Можно сказать, что почти вся теоретическая акустика основана на таких линеаризованных уравнениях (акустика первой степени), и только в редких случаях прибегают к поправкам, применяя к основным дифференциальным уравнениям способ последовательных приближений.

Впрочем, Риман (1859) показал, что в некоторых случаях можно провести интегрирование уравнений акустики и в точной форме.

Положим, что мы, применив способ Римана, нашли для какой-либо величины  $S$  зависимость ее от другой величины  $s$  в виде

$$S = f(s).$$

Если величина  $s$  сама по себе сравнительно мала, то мы можем разложить найденное решение в виде

$$S = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots,$$

а при вычислениях принимать во внимание только те члены этого ряда, которые имеют для нас первостепенное значение. Так, например, если величина  $s$  настолько мала, что высшими степенями ее можно пренебречь по сравнению

с первой степенью, то мы можем при расчете ограничиться формулой

$$S_1 = a_0 + a_1 s.$$

Но эта формула будет представлять собой именно то решение, которое мы могли получить непосредственно из линеаризованного уравнения.

Если же мы будем рассчитывать по формуле

$$S_2 = a_0 + a_1 s + a_2 s^2,$$

то получим результат, который мы могли получить из линеаризованного уравнения с прибавлением к нему второго приближения, и т. д.

Конечно, точное решение с математической точки зрения всегда предпочтительнее, и мы применим способ Римана к проходящим волнам. Однако в применении к стоячим волнам способ Римана оказывается слишком сложным и недостаточно наглядным с физической точки зрения; а так как в применениях все равно приходится довольствоваться приближениями, то я применил способ последовательных приближений, но не к основному уравнению, как это обычно делается, а к промежуточной ступени расчета, к так называемым *характеристикам* основных дифференциальных уравнений. Этот способ обладает физической наглядностью и может быть с успехом применяем и в других отделах теоретической физики.

## 2. Адиабата

Прежде чем перейти к самим уравнениям, нам необходимо условиться относительно свойств среды, в которой распространяются рассматриваемые нами акустические волны. Мы будем предполагать воздух однородной плотности  $\rho_0$ , которая при прохождении волн несколько изменяется и принимает в разных местах и в разное время различные значения  $\rho$ ; точно так же и давление  $p_0$  может изменяться в  $p$ ; эти изменения мы примем адиабатическими, применяя закон Пуассона

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^k.$$

Здесь  $k$  есть отношение теплоемкости газа при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме.

Применение закона адиабаты к акустическим волнам подтверждается непосредственными опытами над скоростью распространения звука и объясняется тем, что при быстрых акустических колебаниях и сравнительно небольших амплитудах теплота сжатия газа не успевает распространяться теплопроводностью.

Для дальнейшего нам удобно будет ввести величину относительного сжатия:

$$s = \frac{p - p_0}{p_0}, \quad p = p_0(1 + s).$$

При этом закон Пуассона напишется так:

$$p = p_0(1 + s)^k = p_0 \left[ 1 + ks + k(k-1)\frac{s^2}{2} + \dots \right].$$

Известно, что скорость распространения звука определяется формулой

$$C = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}},$$

и, следовательно, при адиабатическом сжатии мы получим [81]:

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{\frac{p_0 k}{\rho_0}} \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{k-1}{2}} = \\ &= C_0 \left[ 1 + \frac{k-1}{2}s + \frac{k-1}{2} \cdot \frac{k-3}{2} \frac{s^2}{2} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

Таким образом, для малых амплитуд относительного сжатия  $s$  (т. е. в первом приближении) мы можем применять формулы:

$$\begin{aligned} p &= p_0(1 + ks), \\ C &= C_0 = \sqrt{\frac{p_0 k}{\rho_0}}. \end{aligned}$$

Последняя из написанных формул была получена Лапласом и подтверждается на опыте:

$$C_0 = \sqrt{\frac{p_0 k}{\rho_0}} = 332 \text{ м/сек}, \quad (2)$$

между тем как формула Ньютона (для изотермического сжатия)

$$C_0 = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}} = 280 \text{ м/сек}$$

с опытом не согласуется.

Нужно, однако, иметь в виду, что при больших амплитудах ни та, ни другая формулы не описывают наблюдаемые явления с достаточной точностью.

### 3. Линеаризирование уравнений

Мы будем изучать явления, происходящие в *плоской* акустической волне, плоскость которой параллельна плоскости координат  $OYZ$  и в которой все движения происходят параллельно оси  $\pm OX$ . Обозначим через  $u$ ,  $p$ ,  $\rho$  скорость движения, давление и плотность некоторого элемента объема воздуха, находящегося в момент времени  $t$  в точке  $x$ . Для этого случая аэродинамика дает нам два уравнения Эйлера:

уравнение импульсов

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{C^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Подставляя в эти уравнения формулы предыдущего параграфа, получаем в первом приближении линеаризированные уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -C_0^2 \frac{\partial s}{\partial x},$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Продифференцировав первое уравнение по  $t$ , а второе по  $x$ , мы легко можем исключить величину  $s$  и получаем для  $u$  дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

решение которого хорошо известно еще со времен Даламбера:

$$u = F_1\left(t - \frac{x}{c_0}\right) + F_2\left(t + \frac{x}{c_0}\right),$$

где  $F_1$  и  $F_2$  — функции произвольного вида; их можно выбрать сообразно с другими условиями задачи. Решение Даламбера представляет собой две волны, распространяющиеся вдоль оси  $\pm OX$  по противоположным направлениям, но с одинаковыми скоростями.

#### 4. Гармонические волны

Рассмотрим случай, когда в начале координат задано гармоническое колебание вида

$$u_0 = A \sin \frac{2\pi}{T} t,$$

где  $A$  — амплитуда и  $T$  — период колебания. От этого колебания вдоль положительной оси  $+OX$  распространяются волны

$$u = A \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{c_0}\right).$$

Это выражение есть не что иное, как первый член решения Даламбера. Обратимся опять к уравнению непрерывности, написав его для данного случая в линеаризованном виде

$$\frac{\partial s}{\partial t} = - \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Подставляя сюда величину производной  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и интегрируя по  $t$ , получаем:

$$s = \frac{A}{c_0} \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{c_0}\right).$$

А приняв во внимание выражение для  $u$ , мы видим, что между скоростью движения элемента объема воздуха и его плотностью имеется соотношение

$$s = + \frac{u}{c_0},$$

Для проходящей волны, идущей вдоль отрицательной оси —  $OX$ , мы получим таким же образом соотношение

$$s = -\frac{u}{C_0}.$$

Подставляя эти соотношения в формулу для давления, получаем соотношение между давлением и скоростью

$$p = p_0 \left( 1 \pm k \frac{u}{C_0} \right).$$

## 5. Малые и большие амплитуды

Спрашивается, в каких же случаях мы можем пользоваться линеаризированными уравнениями и формулами первого порядка. Для решения этого вопроса мы должны обратиться к опыту; опыт показывает, что при самых сильных звуках, употребляемых в музыке (фортиссимо), давление воздуха колеблется в пределах от 10 и до 50 бар<sup>1)</sup>. Следовательно, отношение избыточного давления  $p - p_0$  воздуха к нормальному давлению  $p_0$  в сильных звуках равно приблизительно [32]

$$\frac{p - p_0}{p_0} = \text{от } 10^{-5} \text{ до } 5 \cdot 10^{-5} \text{ ат.}$$

Формулы предыдущего параграфа показывают, что такого же порядка будут величина сжатия  $s$  и величина отношения скорости движения воздуха к скорости распространения звука:

$$\frac{p - p_0}{p_0} = k \frac{u}{C_0}; \quad s = \frac{u}{C_0}.$$

Исходя из этого, условимся считать амплитуды малыми, если они дают отношения, меньшие, чем

$$r_1 = 10^{-4}.$$

<sup>1)</sup> Один бар равняется давлению в одну дину на квадратный сантиметр, или примерно одной миллионной нормальной атмосферы:  $10^{-8}$  ат.

Эту величину мы будем называть величиной первого порядка малости. В таком случае величина

$$r_2 = r_1^2 = 10^{-8} = 10^{-4} r_1$$

будет представлять собой величину второго порядка. Если производимый нами опыт или наблюдение не обладает точностью  $10^{-4}$ , то величинами второго порядка малости можно пренебречь по сравнению с величинами первого порядка; это и делается обычно в теоретической акустике. Далее, величина

$$r_3 = r_1^3 = 10^{-12} = 10^{-8} r_1$$

будет при нашем условии представлять собой величину третьего порядка и т. д.

Но, с другой стороны, опыт показывает, что чувствительность нашего уха ограничена и что колебания давлений, меньшие, чем  $10^{-9}$  ат, совсем не воспринимаются нашим слухом.

На основании этих данных мы можем сказать, что в теории большинства акустических явлений мы можем ограничиться первым приближением, т. е. применять линеаризованные уравнения. Однако в некоторых случаях и явления второго порядка будут слышимы, так как все же

$$10^{-8} > 10^{-9}.$$

Но явления, обуславливаемые амплитудами третьего порядка малости, не только не будут слышимы ( $10^{-12} < 10^{-9}$ ), но будут даже за пределами чувствительности самых чувствительных современных акустических приборов.

Однако при лабораторных опытах мы можем произвести колебания, которые имеют амплитуду в 100 и даже в 1000 раз бóльшую. Но такие сильные звуки делаются уже невыносимыми и могут быть даже опасными для нашего слуха. Наконец, при взрывах образуются так называемые *ударные* волны, которые к акустике в ее более тесном смысле уже не относятся и могут иметь амплитуды еще бóльшие, но мы их здесь рассматривать не будем.

## 6. Проходящая волна большой амплитуды

Формулы для проходящей акустической волны большой амплитуды были даны сначала Пуассоном (1808), затем Ирншоу (1859), но общее решение уравнений как для проходящих, так и для стоячих волн было впервые дано Риманом (1859). Способ интегрирования Римана получил в настоящее время большое значение не только для акустических волн одного измерения, но вообще для теории уравнений с частными производными.

Мы должны опустить здесь математические выкладки, но постараемся представить результаты в наиболее наглядной (для физика) форме.

Нам необходимо знать, во-первых, скорость распространения проходящих волн большой амплитуды и, во-вторых, соотношение между скоростью распространения и скоростью движения  $u$ . Оба эти соотношения мы можем получить, исходя из следующих (схематических) соображений.

Мы уже сказали (§ 2), что скорость распространения волн в спокойном воздухе определяется формулой

$$C = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}.$$

Но во время прохождения волны воздух уже не спокоен, и его части имеют различные скорости движения; отсюда следует, что скорость распространения звука относительно неподвижного пространства нужно принять равной

$$C_1 = C + u.$$

Для волн, распространяющихся в противоположном направлении (по  $-OX$ ), мы будем иметь скорость

$$C_2 = C - u.$$

Далее представим себе, что в воздухе уже распространяется звуковая волна и что в некоторой ее точке мы имеем скорость элементарного объема воздуха  $u$  и плотность  $\rho$ . На эту волну мы мысленно наложим еще добавочную волну очень малой амплитуды  $du$  и соответственно добавочной плотности  $d\rho$ . Мы уже знаем, что для волн малых амплитуд,



распространяющихся вдоль оси  $+OX$ , имеется соотношение (§ 4)

$$u = C_0 s = C_0 \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}.$$

Для нашей добавочной волны это соотношение превратится в

$$du = C \frac{d\rho}{\rho}.$$

Но если рассматриваемая нами теперь волна большой амплитуды целиком, всеми своими частями, распространяется только по направлению  $+OX$ , то написанное соотношение должно сохраняться и для всех частей волны. Поэтому, интегрируя это соотношение, мы получаем для целой волны большой амплитуды соотношение

$$u = \int_{\rho_0}^{\rho} C_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{k-1}{2}} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{2C_0}{k-1} \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{k-1}{2}} - 1 \right]. \quad (3)$$

Сравнивая полученный результат с формулой для скорости  $C$ , мы получаем чрезвычайно простое соотношение [33]

$$u = \frac{2}{k-1} (C - C_0),$$

откуда

$$C = C_0 + \frac{k-1}{2} u.$$

Теперь мы можем выразить скорость распространения волн большой амплитуды следующими формулами:

для волны, идущей по положительному направлению,

$$C_1 = C + u = C_0 + \frac{k+1}{2} u;$$

для волны, идущей по противоположному направлению,

$$C_2 = C - u = C_0 + \frac{k-3}{2} u.$$

Итак, для гармонической волны большой амплитуды, распространяющейся вдоль  $+OX$ , мы имеем следующие формулы [34]:

$$u = A \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{C_0 + \frac{k+1}{2} u} \right),$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + s = \left( 1 + \frac{k-1}{2} \frac{u}{C_0} \right)^{\frac{2}{k-1}}$$

и закон адиабаты [35]

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^k = \left( \frac{\vartheta}{\vartheta_0} \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Все эти формулы вполне точны, в чем можно убедиться, подставив их в основные уравнения аэродинамики, и в следующих параграфах мы займемся рассмотрением, какие явления можно ожидать в проходящих волнах большой амплитуды, и чем эти волны отличаются от акустических волн, обычно рассматриваемых в акустике первого приближения.

## 7. Деформация волн

Формула для скорости распространения волны:

$$C_1 = C_0 + \frac{k+1}{2} u$$

показывает нам, что величина этой скорости для различных частей волны неодинакова. Только нулевые точки волны, где  $u = 0$ , распространяются с нормальной скоростью по формуле Лапласа:

$$C_0 = \sqrt{\frac{p_0 k}{\rho_0}}.$$

В тех местах, где скорость  $u$  положительна, т. е. направлена в сторону распространения волны, там скорость распространения больше  $C_0$ , и наоборот, там, где скорость  $u < 0$ , скорость распространения  $C < C_0$ . Но если различные части волны имеют различную скорость, то волна по мере своего движения вперед должна изменять свою форму;

если в начале, у самого источника волн, колебания и волна имели форму синусообразную, то в некотором расстоянии  $x$  от этого источника этого уже не будет. Волна будет деформироваться.

Для того чтобы проследить эту деформацию наиболее наглядно, мы можем применить следующий графический способ. Нарисуем на координатной плоскости  $OXi$  распределение скоростей и в рассматриваемой волне в виде синусоиды (рис. 1) дадим мысленно всей волне движение в обратную

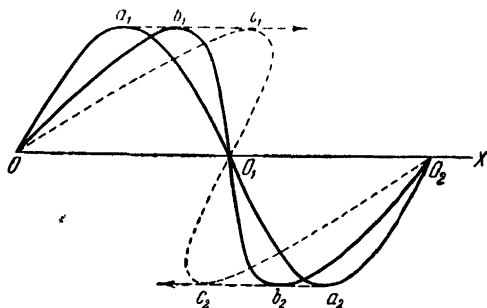


Рис. 1. Деформация волны.

сторону со скоростью  $C_0$ ; тогда все нулевые точки волны (где  $C_1 = C_0$ ) будут стоять на месте, а другие точки будут иметь относительное движение со скоростью

$$\frac{k+1}{2} u.$$

Эта относительная скорость оказывается пропорциональной  $u$ ; мы можем поэтому получить деформированную волну, производя чистый сдвиг (ср. теорию упругости) верхних частей волны вправо, а нижних влево относительно нулевой линии, остающейся в покое. Величина этого сдвига (который ведь происходит с равномерной скоростью) будет тем большая, чем большее расстояние  $x$  волна прошла за рассматриваемое время. Таким образом, мы получим последовательно формы волны (распределение скоростей), изображенные на рис. 1 в виде кривых  $Oa_1O_1a_2O_2$ ,  $Ob_1O_1b_2O_2$  и т. д.

## 8. Абсорбция волн

С математической точки зрения деформация волны, указанная в предыдущем параграфе, влечет за собой некоторое затруднение, на которое было указано Стоксом (1848). Действительно, если волна будет прогрессировать все дальше и дальше и одновременно с этим будет деформироваться в указанном смысле, то наступит такой момент, когда положительные части волны опередят нулевую точку, а отрицательные части волны отстанут от нее, и мы получим на чертеже  $S$ -образную кривую, в которой одной и той же абсциссе (например,  $O_1$ ) будут соответствовать три различные ординаты (см. кривую  $Oc_1O_1c_2O_2$ ). Это означало бы, что в одной и той же точке мы имеем три различные скорости движения  $u$  — результат, который не имеет никакого физического смысла.

Подобное явление возможно для (продольно-поперечных) волн, распространяющихся на поверхности воды, и действительно наблюдается в прибое морских волн к берегу, когда вершины волн, забегая вперед, закручиваются и образуют пенные водовороты. Получается нечто похожее на наш рис. 1 (кривая  $Oc_1O_1c_2O_2$ ).

Но что же может происходить в таких случаях в акустических (чисто продольных) волнах?

Все дело в том, что наши исходные уравнения не полны, в них не принят во внимание целый ряд обстоятельств, имеющих место в действительности, а именно: внутреннее трение воздуха, явление теплопроводности, диффузия, образование вихрей и т. п. Все эти явления служат причиной рассеяния энергии волн и обнаруживаются в явлении поглощения (абсорбции) волн. Влияние трения и теплопроводности можно ввести в линеаризованные уравнения (Стокс, Гельмгольц, Кирхгоф), причем в результате получается уменьшение амплитуды волн по закону

$$e^{-rx},$$

где коэффициент  $r$  оказывается пропорциональным квадрату частоты колебаний. Следовательно, высокие звуки должны поглощаться гораздо сильнее низких звуков, что и подтверждается на опыте.

Однако опыты Н. Неклепаса (1911), произведенные в лаборатории П. Н. Лебедева в Москве, показали, что акустические волны длиной в 2,5 и 0,8 мм, т. е. волны очень больших частот в 130 тыс. и до 400 тыс. колебаний в секунду, поглощаются в воздухе гораздо сильнее, чем того требует теория. Пирс (1925) подтвердил результат Неклепаева; по мнению Пирса, эту аномальную абсорбцию нужно приписать присутствию в воздухе углекислоты, и он показал, что углекислота действительно сильно поглощает короткие акустические волны. Но весьма возможно, что волны Неклепаева нужно причислить к волнам большой амплитуды, для которых линеаризованные уравнения даже с прибавлением трения и теплопроводности оказались недостаточными. Если же мы введем все эти факторы в более точные уравнения аэродинамики, то их сложность увеличится настолько, что и способ Римана нам мало поможет.

Постараемся, однако, уяснить себе и без детальных расчетов, что происходит в волнах большой амплитуды. Мы уже выяснили, что волна при своем движении вперед должна деформироваться, причем передняя сторона ее положительной части (около точки  $O_1$ , рис. 1) будет делаться все круче и круче; от этого элементы объема воздуха с большими разностями давлений и температур будут располагаться все ближе и ближе друг к другу, и влияние теплопроводности должно усилиться, в том же направлении будет влиять и диффузия, не говоря уже о том, что закон адиабаты потеряет свою силу. Кроме того, явление теплопроводности и диффузии будет сглаживать эти разности, и крутизна волны должна будет уменьшиться. Мы имеем, таким образом, в волнах большой амплитуды две причины, действующие одновременно в противоположных направлениях: с одной стороны, различие в скоростях распространения отдельных частей волны увеличивает крутизну ее переднего спуска, а с другой стороны, эта крутизна сглаживается теплопроводностью. Когда обе эти причины окажутся в равновесии, то крутизна кривой достигнет своего максимального значения, а при дальнейшем движении волны она даже начнет уменьшаться. Таким образом, та многозначность функции  $u$ , к которой приводит неполная теория, в действительности устраняется сама собой.

Мы уже сказали, что дифференциальные уравнения такой расширенной теории делаются чрезвычайно сложными; тем не менее Беккеру (1921) удалось выяснить, в каком виде получается волна, когда крутизна ее достигла крайних пределов. Оказывается, что эта максимальная крутизна волны при обычных условиях опыта получается настолько значительной, что ее можно уже принять за прерывность; другими словами, касательную в точке  $O_1$  (рис. 1) можно принять вертикальной. Такие волны, в которых переход от положительных значений величин  $u$ ,  $p$ ,  $\rho$  к отрицательным происходит на ничтожной длине (прерывно), называются *ударными* волнами. Мы приходим, таким образом, к заключению, что всякая волна, в том числе и волна с гармоническими колебаниями, какую мы обычно рассматриваем в акустике, при своем движении вперед постепенно превращается в ударную волну. Риман, предвидя это, занялся ударными волнами и дал их теорию, которая была затем усовершенствована Гюгонио и другими учеными. Теория ударных волн получила в настоящее время значение и при объяснении распространения взрывов и детонации (см. А. Эйхенвальд, Теоретическая физика, ч. IV, гл. XV).

### 9. Опыты Вотье

Зависимость скорости распространения акустических волн (а в особенности ударных волн) от амплитуды была замечена уже давно (Реньо, Тиндаль и др.). Однако наиболее интересными в этом отношении нужно признать опыты, произведенные недавно Вотье. Вотье воспользовался только что построенным и еще не заполненным водой водоводом в Лионе. Водовод имел диаметр 1 м и длину 1660 м. В одном конце этого водовода производились небольшие взрывы пороха и других взрывчатых веществ, а в некотором расстоянии от этого места в трубу водовода был вделан прибор, основанный на интерференции света и позволявший регистрировать давление (плотность) воздуха во время прохождения волны у этого прибора. Хотя водовод имел длину всего  $1\frac{1}{2}$  км, однако многократные отражения волн от концов водовода позволяли регистрировать форму одной и той же волны несколько раз и даже после того, как она прошла расстояние в 15 км. Опыты

Вотье настолько поучительным, что я считаю полезным привести здесь одну из его многочисленных диаграмм (рис. 2), разработанных как им самим, так и его сотрудниками.

Первая из кривых (рис. 2) представляет форму волны в самом начале ее появления; при взрыве черного пороха получилось наибольшее давление в 10 ат. Волну на чер-

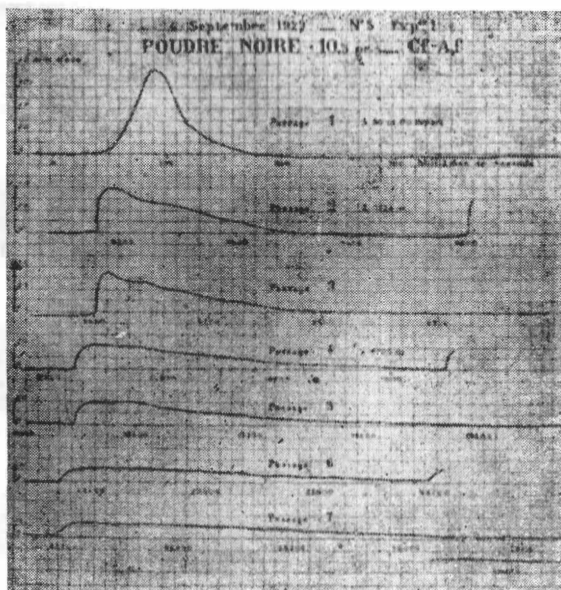


Рис. 2. Опыты Вотье.

теже нужно себе представлять идущей справа налево. Вторая кривая представляет ту же волну, но уже прошедшую расстояние в 3224 м. Здесь ясно видно, как волна деформировалась: ее передняя (левая) часть стала гораздо круче. На следующем затем изображении мы видим, что крутизна передней части волны увеличилась настолько, что волну можно считать ударной.

Одновременно с деформацией волны происходила и ее абсорбция. На первых рисунках абсорбция обнаруживается только в общем уменьшении амплитуды, однако на четвертом

рисунке (после прохождения волной 6505 м) мы видим, что и крутизна передней части уменьшилась и вообще абсорбция увеличена.

Таким образом, все явление оказывается выясненным и в теории и на опыте.

## 10. Переход гармонической волны в ударную

Вернемся опять к нашим исходным уравнениям и определим то расстояние  $x_m$ , на котором крутизна волны делается максимальной, т. е. для которого мы можем положить

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \infty.$$

Для большей наглядности мы предположим первоначальную форму волны в виде гармонического колебания и напишем:

$$u = A \sin \varphi = A \sin \frac{2\pi}{T} \left[ t - \frac{x}{C_0 + \frac{k+1}{2}u} \right].$$

Вычисляя производную по  $x$  этого выражения и приняв, конечно, во внимание, что величина  $u$  входит и под знаком  $\sin$ , мы получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \left[ 1 + A \cos \varphi \frac{2\pi}{T} \frac{k+1}{2C_0^2} x \right] = A \cos \varphi \frac{2\pi}{C_0}.$$

Для того чтобы уклон линии был вертикален  $\left( \frac{\partial u}{\partial x} = \infty \right)$ , необходимо прежде всего, чтобы  $\cos \varphi$  был отрицателен; это означает, что максимальную крутизну нужно ожидать в передней части волны (на рис. 1 в точке  $O_1$ ). Максимум крутизны мы получим, положив

$$\cos \varphi = -1,$$

$$\left[ 1 - A \frac{2\pi}{T} \frac{k+1}{2C_0^2} x_m \right] = 0.$$

Отсюда определяется:

$$x_m = \frac{C_0}{A} \frac{C_0 T}{2\pi} \frac{2}{k+1}.$$



Так, например, для звука свистка в 1000 колебаний в секунду ( $T = 10^{-3}$ , высокое «до» сопрано) и при силе звука, соответствующей отношению

$$\frac{A}{C_0} = 10^{-3},$$

мы должны получить ударную волну на расстоянии

$$x_m = \text{примерно } 2 \text{ км},$$

если не принимать во внимание явления поглощения. Этот результат близко подходит и к опытам Вотье, хотя Вотье делал опыты не с гармоническими волнами.

Из этого (примерного) подсчета мы видим, что чем выше произведенный звук и чем больше его амплитуда, тем скорее должна волна такого звука превращаться в ударную волну.

## 11. Изменение тембра звука

Изменение формы волны с музыкально-акустической точки зрения эквивалентно изменению тембра звука. Покажем, действительно, что в чисто гармонической волне

$$u = A \sin \frac{2\pi}{T} \left[ t - \frac{x}{C_0 + \frac{k+1}{2} u} \right]$$

прежде всего ясно обнаруживается октава. Для этого мы разложим это выражение в ряд по восходящим степеням отношения  $\frac{A}{C_0}$ . Имея в виду в этом ряде остановиться на членах второго порядка малости, мы можем под знаком синуса ограничиться членами первого порядка малости и написать:

$$\begin{aligned} u &= A \sin \frac{2\pi}{T} \left[ t - \frac{x}{C_0} + x \frac{k+1}{2} \frac{u}{C_0} \right] = \\ &= A \sin \left[ \varphi + x \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{k+1}{2} \cdot \frac{u}{C_0} \right]. \end{aligned}$$

При разворачивании этой формулы, ограничиваясь вторым приближением, мы с удобством можем воспользоваться соотношением

$$\sin(\varphi + \alpha) = \sin \varphi \cos \alpha + \cos \varphi \sin \alpha,$$

положив в нем

$$\cos \alpha = 1, \quad \sin \alpha = \alpha.$$

Тогда получим:

$$u = A \sin \varphi + x \frac{2\pi}{T} \frac{k+1}{4} \left( \frac{A}{C_0} \right)^2 \sin 2\varphi. \quad (4)$$

При таком приближении мы действительно получили, кроме основного звука, еще добавочный звук двойной частоты, т. е. октаву от основного звука. Амплитуда этой октавы пропорциональна  $x$  и, следовательно, будет постепенно увеличиваться по мере движения звуковой волны вперед. При дальнейшем развертывании ряда мы получили бы звуки тройной, четверной и т. д. частот. Вообще мы можем сказать, что при распространении звука тембр его изменяется. Музыкант сказал бы, что чем дальше стоять от источника звука, тем звук кажется белее.

Появляющиеся при этом звуки высших частот нужно причислить к так называемым комбинационным тонам. Для того, чтобы это выступило яснее, мы предположим, что источник звука дает одновременно два простых тона:

$$u_0 = A \sin(mt) + B \sin(nt).$$

В плоской волне, исходящей из этого источника, мы получим:

$$u = A \sin m \left[ t - \frac{x}{C_0 + \frac{k+1}{2}u} \right] + B \sin n \left[ t - \frac{x}{C_0 + \frac{k+1}{2}u} \right].$$

Здесь величина  $u$ , стоящая под знаками синусов, содержит в себе *обе* частоты колебаний  $m$  и  $n$ , а потому, разлагая это выражение в ряд, мы получим формулу вида

$$u = A \sin \varphi + B \sin \psi + \\ + x [A_1 \sin 2\varphi + B_1 \sin 2\psi + C_1 \sin(\varphi + \psi) + C_2 \sin(\varphi - \psi)] \dots,$$

которая указывает нам на появление суммовых и разностных комбинационных волн.

Полученная нами выше октава тоже представляет собой комбинационный суммовый тон по формуле

$$2\varphi = \varphi + \varphi.$$

Интересно определить, какова будет амплитуда этой появившейся октавы, когда волна достигнет своей максимальной крутизны. Для этого достаточно подставить в формулу [36]:

$$A_1 = x \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{k+1}{4} \left( \frac{A}{C_0} \right)^2$$

величину  $x$ , полученную нами в предыдущем параграфе:

$$x_m = \frac{C_0}{A} \frac{C_0 T}{2\pi} \frac{2}{k+1}.$$

Мы получаем:

$$A_{1, m} = \frac{1}{2} A.$$

Как видим, октава может вырасти настолько, что ее амплитуда делается равной половине амплитуды первоначального тона. Не нужно, однако, забывать, что все подобные расчеты далеко не точны и могут служить нам только для общей ориентировки в изучаемом нами явлении.

## 12. Координаты Эйлера и Лагранжа

Уравнения гидродинамики, как известно, можно представлять или в обычных координатах  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (как это здесь сделано в § 3), определяющих положение точки относительно неподвижного пространства (локальные координаты Эйлера), или же можно взять за независимые переменные те координаты  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , которые рассматриваемый нами элемент объема вещества занимал в некоторый определенный момент времени  $t_0$  (субстанциальные, вещественные координаты Лагранжа). Разница между этими двумя координатами отражается и на самих формулах и на их толковании. Но для теоретической акустики первого порядка эта разница не имеет значения.

Положим, что мы имеем некоторую (вещественную) плоскость  $OYZ$ , например мембрану телефона, колеблющуюся гармонически по направлению оси  $\pm OX$  по закону

$$u_{a, 0} = A \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

Смещение этой мембраны будет выражаться формулой

$$y_{a,0} = -A \frac{T}{2\pi} \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

От этой колеблющейся мембраны пойдут вдоль оси  $\perp OX$  акустические (продольные) волны, которые мы примем за плоские (как будто они распространяются внутри трубы, а не расходятся во все стороны).

Формула для плоской волны в лагранжевых координатах получается совершенно аналогично, как и в эйлеровых координатах, только величина скорости распространения  $C_a$  получается несколько иная, чем в координатах Эйлера, но сейчас это различие для нас не имеет значения, и мы можем даже написать формулу волны, как в первом приближении, положив  $C_1 = C_0$ :

$$u_a = A \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{a}{C_0} \right).$$

Для отклонений колеблющихся точек от их положения равновесия мы имеем, следовательно, формулу

$$y_a = -A \frac{T}{2\pi} \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{a}{C_0} \right).$$

Если мы теперь пожелаем перейти от лагранжевых координат к эйлеровым координатам, то должны принять во внимание, что каждая из колеблющихся плоскостей в волне, которая занимала во время  $t_0$  положение  $a$ , в некоторое другое время  $t$  будет занимать положение

$$x = a + y_a.$$

Подставляя полученную отсюда величину  $a$  в уравнение волны, мы получаем ее выражение в эйлеровых координатах

$$u = A \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x - y}{C_0} \right).$$

Развертывая это выражение в ряд и ограничиваясь вторыми степенями, мы получаем:

$$u_x = A \sin \varphi - \frac{A^2}{C_0} \cos^2 \varphi = A \sin \varphi - \frac{A^2}{2C_0} - \frac{A^2}{2C_0} \cos 2\varphi.$$

Эта формула показывает нам, что в каждой неподвижной точке пространства  $x$  колебания воздуха будут сопровождаться октавой (и вообще комбинационными тонами), а между тем волновое движение самого воздуха

$$u_a = A \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{a}{C_0} \right)$$

вполне симметрично и содержит в себе только один основной тон периода  $T$ .

Это явление, повидимому, наблюдалось многими экспериментаторами, как, например, Линдигом (1903), который тщательно исследовал появление октавы вблизи колеблющейся ножки камертона, между тем как сам камертон не давал октавы. Линдиг назвал обнаруженные им звуки «асимметричными тонами», объясняя их происхождение различием в движении воздуха в полупериод, когда ножка камертона оттекает воздух и когда он снова возвращается на свое место. Но если принять во внимание, что Линдиг выслушивал звуки при помощи слуховой трубки, один конец которой был вставлен в ухо, тогда как другой конец устанавливался вблизи колеблющейся ножки камертона в различных неподвижных точках пространства, то уже этого обстоятельства, по вышеизложенному, было бы достаточно для того, чтобы услышать не только октаву, но и дуодециму (квинту от октавы, комбинационный тон третьего порядка), колебания которой совершенно симметричны. Еще ранее Линдига Штумпф (1895) исследовал звуки большого камертона (100 колебаний в секунду) при очень больших амплитудах колебаний и мог слышать не только октаву, но и все кратные колебания до четвертой октавы включительно. С точки зрения излагаемой теории это были звуки уже шестнадцатого порядка! Они имели, очевидно, совсем иное происхождение.

### 13. Средние величины

При сравнении теории с опытом часто приходится определять средние значения во времени различных величин. Для расчета этих средних нам будет удобнее иметь разложения в ряды, так как мы решили ограничиваться вторым

приближением (ср. § 6):

$$\begin{aligned}\rho - \rho_0 &= \rho_0 \left[ \frac{u}{C_0} + \frac{3-k}{4} \left( \frac{u}{C_0} \right)^2 + \dots \right], \\ p - p_0 &= k p_0 \left[ \frac{u}{C_0} + \frac{k+1}{4} \left( \frac{u}{C_0} \right)^2 + \dots \right], \\ \vartheta - \vartheta_0 &= (k-1) \vartheta_0 \left[ \frac{u}{C_0} + \frac{k-1}{4} \left( \frac{u}{C_0} \right)^2 + \dots \right].\end{aligned}$$

Определяя средние величины во времени, нам придется, следовательно, вычислять значения интегралов:

$$\overline{u}^t = \frac{1}{T} \int_0^T u \, dt, \quad \overline{u^2}^t = \frac{1}{T} \int_0^T u^2 \, dt.$$

Так как мы рассматриваем волну гармонической формы, то второй из этих интегралов, представляя среднее из квадратов гармонических колебаний, будет равен половине квадрата амплитуды  $A$  [37]:

$$\overline{u^2}^t = \frac{1}{2} A^2.$$

Что же касается первого интеграла, то он будет иметь различное значение, будем ли мы определять средние во времени субстанциальные или локальные. В первом случае, т. е. по отношению к колеблющемуся воздуху, интеграл

$$\overline{u}_a^t = \frac{1}{T} \int_0^T A \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{a}{C_0} \right) dt = 0,$$

так как колебания вполне симметричны. Между тем как, вычисляя интеграл в эйлеровых координатах, мы получаем (см. § 12).

$$\overline{u}_x^t = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ A \sin \varphi - \frac{A^2}{C_0} \cos^2 \varphi \right] dt = -\frac{A^2}{2C_0},$$

так как функция скорости  $u_x$  по отношению к локальным координатам несимметрична,

Приняв это замечание во внимание и ограничиваясь при расчетах величинами второго порядка малости, мы получаем средние значения во времени для всех трех интересующих нас величин, как это сопоставлено в нижеследующей таблице:

	$a = \text{const}$	$x = \text{const}$
$\overline{p - p_0} \, t$	$+\frac{3-k}{8} \rho_0 \left(\frac{A}{C_0}\right)^2$	$-\frac{k+1}{8} \rho_0 \left(\frac{A}{C_0}\right)^2$
$\overline{p - p_0} \, t$	$+\frac{k+1}{8} k p_0 \left(\frac{A}{C_0}\right)^2$	$-\frac{3-k}{8} k p_0 \left(\frac{A}{C_0}\right)^2$
$\overline{\vartheta - \vartheta_0} \, t$	$+\frac{k+1}{8} (k-1) \vartheta_0 \left(\frac{A}{C_0}\right)^2$	$-\frac{5-k}{8} (k-1) \vartheta_0 \left(\frac{A}{C_0}\right)^2$

Интересно обратить внимание на то, что значения средних величин по отношению к субстанциальным и по отношению к локальным координатам отличаются друг от друга не только по величине, но также и по знаку: субстанциальные средние вообще положительны, между тем как локальные средние тех же величин отрицательны.

Если мы остановим свое внимание на субстанциальных величинах, то получим следующий результат. В звуковых волнах большой амплитуды среднее давление и средняя температура немного выше нормального давления и нормальной температуры воздуха при отсутствии звука. Правда, разница эта незначительна и для сильных звуков имеет относительную величину всего  $10^{-6}$  (одна миллионная). Тем не менее, при современных экспериментальных средствах такие разницы температур доступны наблюдению и измерению. Более того, все полученные нами средние как для субстанциальных, так и для местных (эйлеровых) координат по величине своей того же порядка, как и то давление звука, которое наблюдали и измеряли не в проходящих, а в стоячих волнах Альтберг, Зернов и др. (см. ниже).

### 14. Акустический ветер

Вычислим поток воздуха, образующийся в акустической волне. Масса воздуха, проходящая в каждую секунду через квадратный сантиметр, поставленный перпендикулярно к направлению распространения волны, определится из формулы

$$\rho u_x = \rho_0 u_x \left[ 1 + \frac{k-1}{2} \frac{u}{C_0} \right]^{k-1} = \rho_0 u_x + \rho_0 \frac{u_x^2}{C_0}.$$

Если бы величина  $u_x$  колебалась симметрично относительно неподвижной точки пространства  $x$ , то мы получили бы:

$$\overline{u_x^t} = 0, \quad \overline{u_x^2} = \frac{1}{2} A^2;$$

средний во времени поток воздуха был бы равен

$$\overline{\rho u_x^t} = + \rho_0 \frac{A^2}{2C_0},$$

т.е. получили бы одностороннее движение воздуха, которое можно было бы назвать «акустический ветер». Но мы уже видели в § 13, что волны, исходящие от симметрично колеблющегося источника, выражаются относительно эйлеровых координат несимметричной функцией и что нам нужно в написанной формуле положить:

$$\overline{u_x^t} = \left[ A \sin \varphi - \frac{A^2}{C_0} \cos^2 \varphi \right] = - \frac{A^2}{2C_0}.$$

А в таком случае средняя величина потока определится по формуле

$$\overline{\rho u_x^t} = - \rho_0 \frac{A^2}{2C_0} + \rho_0 \frac{A^2}{2C_0} = 0.$$

Это означает, что никакого акустического ветра не получается!

Тем не менее Гартман-Кемпф (1909) наблюдал акустический ветер, который получался от колеблющейся мембраны телефона. Мембрана приводилась в колебание переменным током с частотой 600 колебаний в секунду. При этом получался сильный односторонний поток воздуха по оси теле-



фона в сторону распространения волн; одновременно с этим получался и обратный поток воздуха, обходявший осевой поток со всех сторон и доставлявший новые количества воздуха к мембране. Но из этого описания мы уже видим, что вблизи колеблющейся мембраны образовался кольцевой вихрь, ось которого совпадала с осью, нормальной к плоскости мембраны. Подобные вихри могут образоваться только под действием трения, которое мы в наших исходных уравнениях не вводили. Аналогичные вихри образуются и при стоячих волнах; они были замечены Дворжаком и объяснены теоретически Рэлеем.

### 15. Общая теория комбинационных тонов

Комбинационные тоны известны еще со времен Зорге и Тартини (1754), и теория их была дана Гельмгольцем (1856). Тем не менее и до сих пор встречаются в литературе по этому поводу некоторые недоразумения, которые надлежит устранить, а поэтому я позволяю себе остановиться на этой теории несколько подробнее.

Мы видели уже на нескольких примерах, что соотношение между различными акустическими величинами часто бывает нелинейное. Поэтому, когда одна из этих величин, например плотность  $\rho$ , колеблется гармонически, производя, например, два колебания с частотами

$$\frac{2\pi}{T_1} = m, \quad \frac{2\pi}{T_2} = n$$

и колеблется по закону

$$A \sin mt + B \sin nt,$$

то в то же самое время некоторая другая величина (например, давление  $p$ ) будет выражаться формулой со степенями

$$(A \sin mt + B \sin nt)^\alpha.$$

Но подобные формулы содержат в себе произведения вида

$$C (\sin mt)^\alpha (\sin nt)^\beta,$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  суть целые числа. А эти произведения, в свою

очередь, могут быть представлены в виде гармонических колебаний с частотами [38]

$$\nu = \alpha m \pm \beta n.$$

Эти соображения лежат в основе теории Гельмгольца; теория настолько гениальна, насколько она проста.

В частном случае, когда  $m = n$  или когда мы имеем дело с системой, дающей один основной тон, мы получим комбинационные тоны с частотами

$$\nu = (\alpha \pm \beta) n.$$

Все эти высшие тоны имеют частоты, кратные частоте основного звука. Однако их не нужно смешивать с обычными гармоническими (тоже кратными) обертонами колеблющихся систем (струна, труба и т. п.). Гармонические, а также и негармонические (искратные) обертоны различных акустических аппаратов имеют совсем иное происхождение и не обусловлены нелинейностью соотношений. К сожалению, однако, термин «обертоны» часто применяется (в особенности в электротехнике) и к таким колебаниям, которые на самом деле представляют собой комбинационные.

Другое весьма распространенное недоразумение заключается в том, что ищут причины появления комбинационных тонов в асимметрии системы (ср. § 12). Повод к этому дал сам Гельмгольц, применив свою теорию к образованию комбинационных тонов в барабанной перепонке нашего уха; барабанная перепонка действительно асимметрична. Однако Гельмгольц не хотел этим сказать, что комбинационные тоны возникают только в асимметричных системах. Согласно приведенным здесь соображениям мы можем сказать, что все комбинационные тоны четной степени асимметричны, как, например,

$$(A \sin nt)^2 = \frac{1}{2} A^2 - \frac{1}{2} A^2 \cos 2nt;$$

но наряду с этим имеются комбинационные тоны нечетной степени (или порядка), которые совершенно симметричны.

Важна не асимметрия, а нелинейность соотношений.

Иное дело мы имеем при вычислении и наблюдении средних величин: здесь асимметрия играет главную роль.

При втором приближении, на котором мы остановились, средние значения определялись вторыми степенями малых величин; но, строго говоря, эти средние величины, как, например, обнаруженное опытом давление звука, определяются не одними членами второй степени, а суммой всех членов четной степени соответствующего выражения.

## 16. Отношение к музыке

В теории музыкальных диссонансов Гельмгольца играют большую роль так называемые биения двух близких друг к другу звуков. Если такие два звука попадут на нелинейную систему, то мы получим, кроме них, еще разностный (очень низкий) звук и суммовой (близкий к октаве) звук. От этого могут произойти два явления: во-первых, тембр созвучия изменится и, во-вторых, могут возникнуть неприятные биения в обертонах.

Если какая-либо система (музыкальный инструмент) издает только кратные (так называемые гармонические) обертоны, то и все от них происходящие комбинационные тоны тоже будут кратными основной частоте. В этом случае комбинационные тоны никаких новых звуков дать не могут. Тем не менее, они имеют музыкальное значение, так как в сумме они изменяют амплитуды слышимых обертонов, а от распределения амплитуд обертонов зависит ощущаемый нами тембр суммарного звука.

Если же система сама дает ряд некрatных обертонов (камертон, мембраны), то появившиеся комбинационные тоны будут уже по своим частотам отличаться от обертонов, и тембр изменится гораздо сильнее.

Неоднократно ставился вопрос о том, зависит ли тембр звука от относительной фазы обертонов. На этот вопрос мы можем ответить утвердительно в тех случаях, когда образуются комбинационные тоны. Действительно, возьмем, например, звук, составленный из основного тона, сопровождаемого октавой, как это часто бывает в различных музыкальных инструментах:

$$A \sin nt + B \sin (2nt + \delta).$$

Если такой звук попадает на нелинейную систему, то основной тон  $A$  прежде всего образует октаву, которая при сложении с обертоновой октавой  $B$  даст сумму

$$\frac{1}{2} A^2 \cos 2nt + B \sin(2nt + \delta),$$

зависящую от относительной фазы  $\delta$ . Далее произведение

$$2AB \sin nt \sin(2nt + \delta)$$

даст разностный звук ( $2n - n = n$ ) одной частоты с основным звуком, и при сложении мы получим амплитуду основного звука

$$A \sin nt + AB \cos(nt - \delta),$$

зависящую также и от относительной фазы первоначальных тонов  $\delta$  [33].

Этот простой пример уже показывает нам, что не только амплитуда, но и относительные фазы обертонов могут оказать влияние на тембр воспринимаемого нами звука, поскольку от этой фазы зависят комбинационные звуки. Впрочем, практически это замечание не имеет большого значения, так как для появления комбинационных тонов имеется много других причин.

## 17. Возникновение комбинационных тонов

Места, где могут возникать комбинационные тоны, чрезвычайно многочисленны и разнообразны. Я укажу здесь только на главнейшие из них.

1. В большинстве случаев колеблющиеся системы, употребляемые на практике (в музыке), обладают линейной упругостью (отклонение пропорционально действующей силе: закон Гука). В таких системах никаких комбинационных тонов не образуется. Однако при больших амплитудах колебаний, когда упругость делается нелинейной (отклонения от закона Гука), мы получаем комбинационные тоны. Такие комбинационные тоны действительно наблюдались Гельмгольцем и многими другими. Между прочим, в камертоне можно услышать октаву, хотя сам стержень камертона при малых колебаниях не дает гармонических обертонов; эта

октава есть тон комбинационный  $1 + 1 = 2$ . В сиренах, а в особенности в сиренах типа Кенига, где звук образуется вдуванием воздуха в край вращающегося диска, обод которого вырезан по синусоиде или по другой какой-либо периодической кривой, движения воздуха, производящие звук, настолько сложны, что комбинационные тоны должны образовываться в сильной степени; это подтверждается и на опыте. В трубах при вдувании воздуха тоже образуется звук сложного состава, но он затем фильтруется самой конструкцией трубы.

2. Во всех источниках, в которых пользуются колебаниями воздуха (органные трубы, кларнеты, гобой, фисгармонии и т. п.), сам воздух служит причиной появления комбинационных тонов, так как соотношение между давлением и сжатием воздуха нелинейно, а именно

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^k.$$

3. Далее, когда волна, образованная каким-либо источником звука, распространяется в воздухе, мы получаем комбинационные звуки вследствие деформации волны (§ 11). Эти комбинационные тоны усиливаются по мере движения волн вперед.

4. В некоторых случаях комбинационные тоны могут быть кажущимися и обусловленными тем, что источник находится в колебательном движении, тогда как воспринимающий аппарат бывает обыкновенно в покое (ср. § 12).

5. Наконец, сам воспринимающий аппарат может иметь нелинейную упругость, как, например, барабанная перепонка нашего уха, а также большинство современных приемных аппаратов радио с многочисленными усилителями. В таком случае аппарат может обнаружить колебания, которых совсем нет в приходящей звуковой волне. Ко всему этому нужно еще прибавить влияние трения, образование вихрей и т. п. (§ 14).

Мы перечислили здесь только главнейшие причины возникновения комбинационных звуков, но, как видим, причин этих так много, что получение чистого гармонического тона, лишенного комбинационных тонов, представляет экспериментальную задачу чрезвычайной трудности. Точно так же

бывает иногда очень трудно указать, откуда (§ 12) именно появился наблюдаемый комбинационный тон, и это может дать повод к самым разнообразным ошибочным суждениям (ср. конец § 12).

В литературе возникал несколько раз спор о том, могут ли биения двух звуков ощущаться нами в виде разностного тона (так думали Юнг, Кениг и многие другие); точно так же спорили о том, влияет ли относительная фаза двух одновременно слышимых звуков на ощущаемый нами тембр звука.

На оба эти вопроса имеется исчерпывающий ответ у самого Гельмгольца, а именно: биения сами по себе не дают еще разностного звука, точно так же и фаза не влияет на тембр звука; но все это верно только в первом приближении. Как только появляются комбинационные тоны (нелинейные соотношения), так сейчас же и биения дадут разностный тон, и фаза будет иметь влияние на тембр звука (см. § 16).

### 18. Стоячие волны малых амплитуд

Интегрирование уравнений § 3 для случая стоячих волн (и вообще для двух волн, идущих одновременно навстречу друг другу) по методу Римана гораздо сложнее, чем для одной проходящей волны. Но так как мы уже решили ограничиться в наших расчетах вторым приближением, то мы можем применить метод последовательного приближения, причем с физической точки зрения предпочтительнее применить его к дифференциальным уравнениям характеристик. Здесь я должен опустить подробности расчета и ограничиться кратким изложением общей идеи.

Положим, что данное нам волновое движение ограничено по оси  $\pm OX$  двумя непроницаемыми стенками, поставленными на расстоянии  $l = \frac{\lambda}{2}$  друг от друга. Как известно из акустики первой степени, между этими стенками возможны колебания с частотой

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{C_0}{\lambda},$$

где  $\lambda$  означает длину волны рассматриваемого колебания. Возможны также и колебания с частотами, кратными ука-

занной, но мы пока не будем принимать их во внимание. Стоячие волны между данными нам двумя непроницаемыми стенками можно рассматривать как составленные из двух проходящих волн одинаковой амплитуды и периода, но идущих навстречу друг другу:

$$u_1 = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - C_0 t),$$

$$u_2 = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x + C_0 t).$$

Если мы сложим эти две формулы и разделим на два, то получим распределение скоростей в стоячей волне:

$$u = \frac{1}{2} (u_1 + u_2) = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \cos \frac{2\pi}{\lambda} t.$$

Если же мы составим полуразность тех же выражений и разделим на  $C_0$ , то (ср. соотношение между  $u$  и  $s$  в § 4) получим распределение относительного сжатия в стоячей волне [40]:

$$s = \frac{1}{2C_0} (u_2 - u_1) = \frac{1}{C_0} A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \frac{2\pi}{\lambda} t.$$

Эти формулы удовлетворяют данным нам условиям. Действительно, у стенок  $x=0$  и  $x=l=\frac{\lambda}{2}$  скорость  $u$  все время равна нулю; у стенок мы имеем узлы колебаний, тогда как посередине между стенками мы имеем их пучность. Наоборот, относительное сжатие  $s$  имеет пучность у стенок и узел посередине.

Напомню читателю способ графического построения стоячих волн. На двух полосках бумаги чертят две одинаковые синусоиды и, положив одну синусоиду над другой, составляют при помощи циркуля суммы и разности их ординат, нанося их каждый раз на соответствующие абсциссы. Таким образом получают две результирующие кривые, которые, конечно, опять будут синусоиды, но уже другой амплитуды. Затем сдвигают одну полоску бумаги вправо, а другую полоску сдвигают *на столько же* влево и опять повторяют графическую операцию сложения и вычитания. Затем производят сдвиги полосок вправо и влево еще раз и притом

на то же расстояние и опять чертят сумму и разность и т. д. Если производить сдвиги каждый раз на длину в  $\frac{1}{8}$  длины волны, то через восемь построений мы получим два чертежа: рис. 3, а, изображающий распределение скоростей

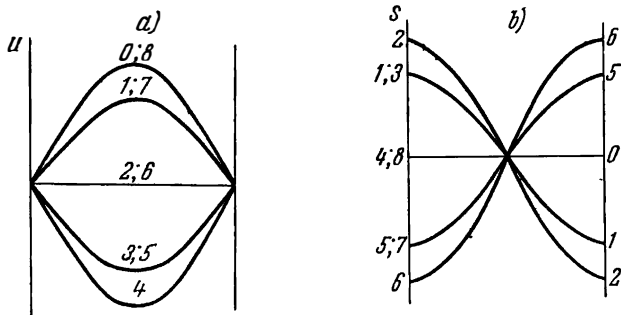


Рис. 3. Стоячие волны.

в стоячей волне в различные моменты времени, отстоящие друг от друга на  $\frac{1}{8}$  периода, и рис. 3, б, изображающий распределение относительных сжатий  $s$  в различные моменты времени (те же моменты, как и на предыдущем чертеже), в той же самой стоячей волне.

### 19. Стоячие волны большой амплитуды

Аналогично с тем, как мы поступили при расчете стоячих волн малой амплитуды, мы можем и при больших амплитудах рассматривать стоячие волны как результат одновременного движения двух проходящих волн, идущих навстречу друг другу. Мы зададимся проходящими волнами в такой же форме, как это мы сделали в предыдущем параграфе, а именно:

$$u_1 = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - C_1 t) = A \sin \varphi,$$

$$u_2 = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x + C_2 t) = A \sin \psi.$$

Можно убедиться непосредственной подстановкой, что каждая из этих формул вполне удовлетворяет основному



дифференциальному уравнению (§ 3). Тем не менее, сумма или разность этих выражений уже не будет удовлетворять этому уравнению. Это объясняется тем, что уравнения наши нелинейны. А с физической точки зрения это означает, что при двух волнах каждая из них распространяется в воздухе, уже возмущенном встречной волной, между обеими волнами возникает некоторое взаимодействие. Я подсчитал это взаимодействие, ограничиваясь вторым приближением, которое, как мы выяснили, для наших целей вполне достаточно (тем же способом можно получить и дальнейшие приближения). Оказывается, что взаимодействие между двумя встречными волнами сказывается в периодическом изменении их фазы, и на место вышенаписанных формул, годных для каждой волны в отдельности, мы теперь получаем следующие формулы:

$$u_1 = A \sin \left( \varphi + \frac{k-3}{4} \frac{A}{C_0} \sin bx \sin mt \right),$$

$$u_2 = A \sin \left( \psi - \frac{k-3}{4} \frac{A}{C_0} \sin bx \sin mt \right),$$

причем

$$b = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad m = \frac{2\pi}{T}, \quad \lambda = C_0 T.$$

Нетрудно проверить, что эти формулы удовлетворяют (во втором приближении) основным дифференциальным уравнениям. Выражения, стоящие в больших скобках, приравненные к какой-либо постоянной, и представляют собой уравнения тех характеристик, о которых говорилось в § 1.

Полусумма этих выражений дает нам, как и в предыдущем параграфе, распределение скоростей в результирующей стоячей волне:

$$u = \frac{1}{2} (u_1 + u_2),$$

между тем как полуразность

$$v = \frac{1}{2} (u_2 - u_1)$$

еще не дает нам непосредственно распределение плотностей  $\xi$ , так как при больших амплитудах соотношения слож-

нее; на место линейных соотношений §§ 4 и 18 мы теперь получаем (ср. § 6):

$$1 + s = \left(1 + \frac{k-1}{2} \frac{v}{C_0}\right)^{\frac{2}{k-1}}.$$

Ограничиваясь вторым приближением, мы можем написать (ср. § 13, заменив  $u$  через  $v$ ):

$$s = \frac{v}{C_0} + \frac{3-k}{4} \left(\frac{v}{C_0}\right)^2.$$

Но, как бы то ни было, раз мы нашли выражения  $u_1$  и  $u_2$  с достаточной для нас точностью, то по написанным формулам мы можем определить и все остальные величины в стоячей волне: распределение скоростей, плотностей, давлений, температур и т. д.

Развернув полученные выражения (как это мы делали в § 11) и ограничиваясь вторым приближением, мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(u_1 + u_2) = A \sin bx \cos mt - \\ &\quad - t \frac{2\pi}{\lambda} \frac{k+1}{8} A^2 \sin 2bx \cos 2mt + \\ &\quad + \frac{k-3}{16C_0} A^2 \sin 2bx \sin 2mt, \\ v &= \frac{1}{2}(u_2 - u_1) = -A \cos bx \sin mt + \\ &\quad + t \frac{2\pi}{\lambda} \frac{k+1}{8} A^2 \cos 2bx \sin 2mt + \\ &\quad + \frac{k-3}{16C_0} A^2 \sin^2 bx \sin^2 mt. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Теперь мы можем убедиться в том, что полученные формулы удовлетворяют не только основным дифференциальным уравнениям, но также и пограничным условиям, а именно: у стенок  $x=0$  и  $x=\frac{\lambda}{2}$  мы опять получаем узлы колебаний и пучности для величин  $v$ ,  $s$ ,  $p$  и т. д.

Положив в этих выражениях  $t=0$ , мы получаем те начальные условия, к которым относятся наши решения, а именно:

$$u = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} x, \quad v = 0.$$

Впрочем, аналогичным способом можно найти решения и для других пограничных и начальных условий.

Но мы замечаем здесь еще одну особенность стоячих волн большой амплитуды: во втором члене каждой из формул у нас оказался множитель  $t$ . Это означает, что форма волны изменяется со временем; в проходящей волне мы имели нечто подобное (множитель  $x$ ); она тоже изменяла свою форму по мере продвижения вперед. Как и в проходящей волне, так и здесь в стоячей волне прежде всего обнаруживается октава основного тона, но затем, конечно, появятся и другие высшие комбинационные тоны.

Для того чтобы представить себе нагляднее, как будет деформироваться стоячая волна со временем, мы можем и здесь применить графический способ (§ 18). Для упрощения мы можем откинуть переменную фазу, так как она не растет со временем и составляет полусумму и полуразность двух уже деформированных волн, полученных нами тоже графическим способом «сдвига» в § 7. Производя такое графическое построение с двумя деформированными волнами (как на рис. 1,  $Ob_1O_1b_2O_2$ ), причем в волне, идущей вправо, возьмем наклон вправо, а в волне, идущей влево, — наклон влево, мы получаем для  $u$  и  $v$  рис. 4. Сравнивая эти чертежи

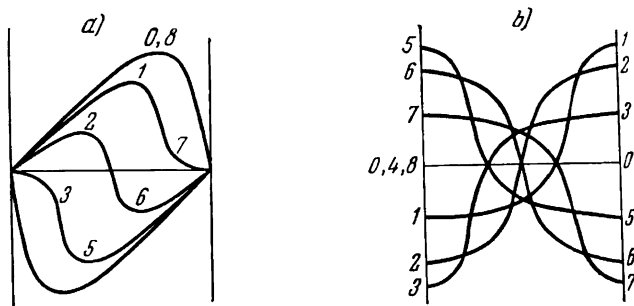


Рис. 4. Деформированные стоячие волны.

с соответствующими чертежами синусообразной недеформированной волны (рис. 3), мы можем проследить явление деформации стоячей волны. Прежде всего нам бросается в глаза изменение кривой  $u$  (рис. 4,  $a$ ), указывающее на

появление комбинационных тонов и, в первую очередь, октавы. Это заключение подтверждается и на рис. 4, *b*, который отличается от соответственного рис. 3, *b* тем, что посредине между стенками мы получили колебания величины  $v$ , а следовательно, и величины сжатия  $s$  и давления  $p$ . Все эти величины уже перестали образовывать узел посредине между стенками, как это имело место в начале движения (рис. 3, *b*).

Наконец, то, что мы сказали о влиянии трения и теплопроводности в проходящих волнах, применимо и здесь, а именно: стоячая волна будет деформироваться со временем, делаясь все круче и круче (например, на рис. 4, *a* и *b*); в конце концов на месте синусоиды мы получим почти острый треугольник. Затем, кроме уменьшения амплитуды, трение и теплопроводность будут сглаживать и крутизну волны; волна опять делается более симметричной относительно середины рис. 4, *a*, пока, наконец, она не затухнет совсем.

Конечно, как это видно и из нашего изложения, полученные нами рисунки только приблизительны, но они совершенно достаточны для того, чтобы дать нам общее понятие о том, что происходит в стоячих волнах большой амплитуды.

## 20. Принужденные стоячие волны

В предыдущем параграфе мы видели, что стоячие акустические волны, предоставленные самим себе, понемногу изменяют свою форму, причем в них прежде всего появляется октава основного тона (как и в проходящих волнах). Можно уяснить себе появление этой октавы следующим образом. Когда в самом начале движения происходят колебания воздуха и изменение величины относительного сжатия  $s$ , то вследствие нелинейности адиабатического закона

$$p = p_0(1 + s)^k = p_0 \left[ 1 + ks + k(k-1) \frac{s^2}{2} + \dots \right]$$

в различных частях стоячей волны начинает действовать давление, пропорциональное  $s^2$ , с частотой, вдвое большей; мы получаем как бы новую силу, действующую на волны и раскачивающую их с двойной частотой. Но двойная частота колебаний имеет длину волны, вдвое меньшую, которая тоже укладывается на длине  $l$  целое число раз (два

раза); мы должны, следовательно, получить *явление резонанса* и постепенное увеличение амплитуды октавы пропорционально времени  $t$  (если не принимать во внимание влияния трения). Это и обнаружилось у нас в формулах. По тем же причинам вместе с октавой начнут расти колебания дуодецимы и других комбинационных тонов. Мы могли бы назвать это явление *самораскачиванием* или *авторезонансом*.

Из этого рассуждения следует дальше, что если мы сами внешним воздействием будем раскачивать воздух между стенками  $x = 0$  и  $x = \frac{\lambda}{2}$ , но с периодом, не совпадающим ни с одним из собственных колебаний рассматриваемой системы, то у нас (вследствие нелинейности адиабаты) опять появятся волны двойной, тройной и т. д. частоты; но все эти колебания тоже не будут совпадать ни с одним из периодов собственных колебаний системы, и мы никакого резонанса не получим. Отсюда мы заключаем, что если период внешней силы не совпадает ни с одним из периодов собственных колебаний системы, то формулы принужденных колебаний стоячей волны не будут содержать в себе членов со множителем  $t$ , и волна не будет деформироваться, между тем как члены с двойной частотой все-таки останутся [41].

На основании этих соображений мы можем для принужденных стоячих волн написать следующие формулы:

$$\begin{aligned}
 u &= A \sin bx \cos mt - A_1 \sin 2bx \cos 2mt + \\
 &\quad + \frac{k-3}{16C_0} A^2 \sin 2bx \sin 2mt, \\
 v &= -A \cos bx \sin mt + A_1 \cos 2bx \sin 2mt + \\
 &\quad + \frac{k-3}{16C_0} A^2 \sin^2 bx \sin^2 mt.
 \end{aligned}$$

Коэффициенты  $A$  и  $A_1$  будут зависеть от амплитуды внешней силы и от отношения периода внешней силы к периоду собственных колебаний системы. Не нужно, однако, упускать из виду, что эти формулы относятся лишь к принужденным колебаниям и что мы предполагаем, что соф-

ственные колебания системы, если они и возникли от каких-либо причин, уже успели затухнуть в достаточной мере.

Исходя из этих формул, мы получаем для распределения плотностей и давления в принужденных стоячих волнах формулы:

$$(\rho - \rho_0) = -\rho_0 \frac{A}{C_0} \cos bx \sin mt + \rho_0 \frac{A_1}{C_0} \cos 2bx \sin 2mt + \\ + \frac{3-k}{4} \rho_0 \left( \frac{A}{C_0} \right)^2 \cos 2bx \sin^2 mt,$$

$$(p - p_0) = -\rho_0 C_0 A \cos bx \sin mt + \rho_0 C_0 A_1 \cos 2bx \sin 2mt + \\ + \rho_0 \left[ \frac{k+1}{4} \cos^2 bx - \frac{3-k}{4} \sin^2 bx \right] A^2 \sin^2 mt.$$

## 21. Средние величины

Принужденные стоячие волны мы производим, например, в известном приборе Кундта. Если трубка Кундта хорошо замкнута, то количество воздуха, которое было заключено в трубке до возбуждения волн, должно остаться неизменным и во время колебаний. С математической точки зрения это означает, что средняя плотность воздуха по всей длине трубки

$$\bar{\rho} = \frac{1}{l} \int_0^l \rho dx = \rho_0$$

должна оставаться неизменной. Формулы, полученные для  $\rho - \rho_0$  в предыдущем параграфе, действительно удовлетворяют этому условию, так как средние величины  $\cos bx$  и  $\cos 2bx$  равны нулю.

Тем не менее, средние величины во времени, определенные за время одного или нескольких периодов колебаний, не равны нулю:

$$\overline{(\rho - \rho_0)^t} = \frac{1}{T} \int_0^T (\rho - \rho_0) dt = + \frac{3-k}{8} \rho_0 \left( \frac{A}{C_0} \right)^2 \cos 2bx.$$

Следовательно, колебание плотности во всех частях волны происходит асимметрично. То же самое мы должны

сказать о колебаниях давления и температуры. Мы выпишем здесь еще формулу для давления, так как среднее давление может быть наблюдаемо на опыте:

$$\begin{aligned} \overline{(p - p_0)}^t &= \left[ \frac{k+1}{8} \cos^2 bx - \frac{3-k}{8} \sin^2 bx \right] \rho_0 A^2 = \\ &= \left[ \frac{k+1}{8} - \frac{1}{2} \sin^2 bx \right] \rho_0 A^2. \end{aligned}$$

Это распределение среднего давления по длине  $x$  изображено у нас на рис. 5, в котором для случая воздуха с коэффициентом  $k = 1,4$  мы должны принять за ось  $p = p_0$ ,

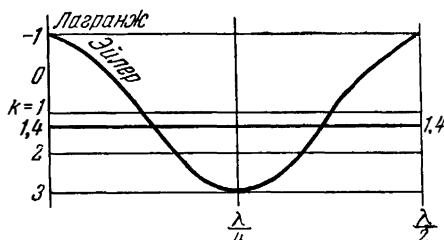


Рис. 5. Средние значения величин в различных местах стоячей волны.

от которой нужно отсчитывать давления в различных точках волны, жирную линию 1,4. Но тот же чертеж может служить и для отсчета давлений при других значениях коэффициента  $k$ ; нужно только соответственным образом поднять или опустить ось нулевых давлений, как это указано на нашем рисунке.

Из этого рисунка, а также и из наших формул следует, что в узлах колебаний, а следовательно, и у отражающих стенок среднее давление будет равно

$$\overline{(p - p_0)}^t = \frac{k+1}{8} \rho_0 A^2;$$

эта величина — положительная, и, следовательно, давление в этих точках будет больше, чем в отсутствии звука.

Между тем как из тех же формул следует, что в пучностях  $\left(x = \frac{\lambda}{4}\right)$

$$\overline{(p - p_0)}^t = -\frac{3-k}{8} \rho_0 A^2,$$

среднее давление будет отрицательное.

Избыточное давление у отражающей стенки было впервые наблюдеено Дворжаком (1876) и объяснено теоретически лордом Рэлеем (1878). Применяв метод приближения к основным уравнениям, Рэлей выразил среднее давление у отражающей стенки формулой

$$\overline{(p - p_0)}^t = \frac{k+1}{2} E,$$

где  $E$  означает среднюю плотность энергии всей стоячей волны во времени:

$$E = \frac{1}{\lambda T} \int_0^\lambda \int_0^T E_0 dx dt.$$

Если ограничиться первым приближением, то мы получим для стоячей волны:

$$E = \frac{1}{4} \rho_0 A^2.$$

Из этого мы видим, что формула Рэлея совпадает и с нашей формулой в частном случае, а именно в применении к узлам колебаний.

Формула Рэлея была подтверждена количественно на тщательных опытах Альтберга (1903) и Зернова (1906), произведенных в лаборатории П. Н. Лебедева в Московском университете.

Полученная нами формула средних давлений для различных частей стоячей волны:

$$\overline{(p - p_0)}_x^t = \left[ \frac{k+1}{8} - \frac{1}{2} \sin^2 bx \right] \rho_0 A^2$$

относится к координатам  $x$  (Эйлера), между тем как аналогичный расчет, произведенный в координатах Лагранжа, дает нам формулу

$$\overline{(p - p_0)}_a^t = \frac{k+1}{8} \rho_0 A^2,$$

которая показывает, что по отношению к субстанциальным координатам среднее давление для *всех* точек волны — *одно и то же* и притом оно равно среднему давлению проходящей волны той же амплитуды.



Все полученные нами здесь результаты подсчетов средних величин мы можем представить в виде таблицы.

Проходящие волны	$a = \text{const}$		$x = \text{const}$
Стоячие волны	$a = \text{const}$ везде	$x = \text{const}$ в узлах	$x = \text{const}$ в пучностях
$\overline{\left(\frac{p-p_0}{p_0}\right)^2} = s$	$+$	$\frac{3-k}{8}$	$-\frac{k+1}{8}$
$\overline{\left(\frac{p-p_0}{p_0 k}\right)^2}$	$+$	$\frac{k+1}{8}$	$-\frac{3-k}{8}$
$\overline{\left(\frac{\vartheta-\vartheta_0}{\vartheta_0(k-1)}\right)^2}$	$+$	$\frac{k-1}{8}$	$-\frac{5-k}{8}$

В этой таблице в первом ее столбце обозначены те величины, для которых определяется среднее значение во времени. Надписи  $a = \text{const}$  и  $x = \text{const}$  означают, что в первом случае средние относятся к субстанциальным координатам ( $a$ ), тогда как во втором случае средние во времени отнесены к локальным координатам ( $x$ ). Во втором и третьем столбцах показаны коэффициенты, на которые нужно помножить величину

$$\left(\frac{A}{C_0}\right)^2,$$

чтобы получить соответствующее среднее значение в рассматриваемом случае.

Заметим еще, что все рассматриваемые нами средние — одинакового порядка малости.

### Добавочное замечание

Почти все наши формулы могут быть применяемы и к волнам, распространяющимся или образующимся на поверхности воды в канале, с тем, конечно, ограничением, что и волны в канале можно трактовать как явление, обусловленное

только одной координатой  $x$  и временем  $t$ , как это часто и делается при расчетах. Более того, мы можем получить формулы для волн в канале непосредственно из наших формул, положив в них  $k=2$ . При такой замене  $k=2$ , и рис. 5 остается в силе.

## ЛИТЕРАТУРА

Помещаемая здесь статья представляет собой сокращенное и переработанное изложение некоторых глав «Теоретической физики» автора (ч. IV, гл. от 13-й до 15-й, «Теория волн»). Что касается до содержания, то оно было докладываемо по частям в Московском физическом обществе имени П. Н. Лебедева и в Московском обществе теоретической музыки в 1918 г. Теоретическая часть, а именно, применение способа последовательных приближений к характеристикам дифференциальных уравнений, была доложена Миланскому математическому семинарию в 1931 г. и отпечатана в *Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano*, т. VI, 1932.

### *Теория*

- I. Newton, *Phil. Nat. Princ.* London II, 1687.  
 S. Laplace, *Méc. Céleste* V, 1823.  
 Poisson, *Mémoire sur la théorie du son*. *Journ. de l'École Pol.* 7, 319, 1808.  
 Stokes, *On a difficulty in the theory of sound*. *Phil. Mag.*, Nov. 1848.  
 Earnshaw, *Phil. Trans.* 146, 1859, 133, 1860; *Proc. of the R. S.*, 1859.  
 Riemann, *Über die Fortpflanzung der Luftwellen endlicher Schwingungsweite*; *Gött. Nach.* 19, 1859; *Gött. Abh.* 8, 1860; *Ges. Werke* 165.  
 Hugoniot, *Journ. de l'École Pol.* 57, 1887, 58, 1889, *Journ. de Math.* IV, 1887.  
 R. Becker, *Stosswelle und Detonation*, *Zeits. für Phys* 8, 321, 1921.

### *Опыты (деформация волн)*

- V. Regnault, *Mem. de l'Acad. Paris* 37, 1868; *C. R.* 66, 209, 1868.  
 P. Violle, *Vitesse de propagation des discontinuités*, *C. R.* 126, 127, 129, 130, 1898—1900; *Memorial des poudres et salpêtres* 10, 177, 1899—1900; *Journ. d. Phys.* (3) 9, 621, 1900.  
 Ph. Vautier, *Propagation d'ondes aériennes*, *Ann. de phys.* (10) XIV, Nov. 1930; XVI, Nov. 1931.

*Давление звука*

- V. Dvořák, Pogg. Ann. **157**, 42, 1876; Wied. Ann. **3**, 328, 1878.  
Lord Rayleigh, Note on acoustic repulsion, Phil. Mag. VI, 270, 1878; Phil. Mag. **3**, 338, 1902; Phil. Mag. **10**, 364, 1905; Theory of sound, II, § 253.  
W. Altberg, Über die Druckkräfte der Schallwellen und die absolute Messung der Schallintensität, Ann. d. Phys. **11**, 405, 1903; **23**, 267, 1907.  
W. Zernow, Über absolute Messungen der Schallintensität, Ann. d. Phys. **21**, 131, 1906.  
N. Neklepajev, Ann. d. Phys. **35**, 175, 1911.  
P. N. Lebedev, Wied. Ann. **59**, 116, 1896; **62**, 158, 1897; Ann. d. Phys. **35**, 171, 1911.

