

---

## О ПОЛЕ СВЕТОВЫХ ВОЛН ПРИ ОТРАЖЕНИИ И ПРЕЛОМЛЕНИИ [18]

Мы ставим себе задачу изобразить поле световых волн в некоторых важнейших случаях; мы ограничимся здесь отражением и преломлением плоских световых волн вида

$$D = D_u \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{u}{c} \right), \quad (1)$$

где  $D_u$  означает амплитуду,  $T$  — период,  $t$  — время,  $u$  — координату, нормальную к плоскости волны, и  $c$  — скорость распространения; в дальнейшем введем еще длину волны  $\lambda_u = cT$ .

Очевидно, является достаточным сделать рисунок для какого-либо момента  $t$ , например  $t = 0$ , и затем представить себе всю фигуру движущейся в направлении  $u$  со скоростью  $c$ .

### 1. Падающая волна

Допустим, что первая среда изотропна и не обладает поглощением. Пусть свет поляризован так, что электрическое (или магнитное) напряжение [19] параллельно плоскости рисунка, а магнитное (или в этом случае электрическое) нормально к этой плоскости. Тогда на рисунке мы получаем систему параллельных прямых. Так как плотность линий сил должна быть пропорциональна  $D$ , то расстояние между соседними прямыми следует брать обратно пропорциональным  $D$ . Если мы обозначим через  $\Delta u$  это переменное расстояние, а через  $\Delta a$  — постоянную, которая зависит от выбранного масштаба, то (для  $t = 0$ )

$$D_u \cos \frac{2\pi}{\lambda_u} u \Delta u = \Delta a. \quad (2)$$

Отсюда следует [20]:

$$D_u \sin \frac{2\pi}{\lambda_u} u = \frac{2\pi}{\lambda_u} n \Delta a.$$

Чтобы рассчитать соответствующее значение  $u$ , следует здесь для  $n$  подставлять ряд целых чисел от  $n = 0$  (для  $u = 0$ ) до  $n = n_0 = \frac{\lambda_u}{2\pi \Delta a} D_u$  (для  $u = \frac{\lambda_u}{4}$ ) [21].

Если мы для нашего рисунка выберем какое-либо определенное значение  $n_0$ , то для каждой длины волны мы полу-

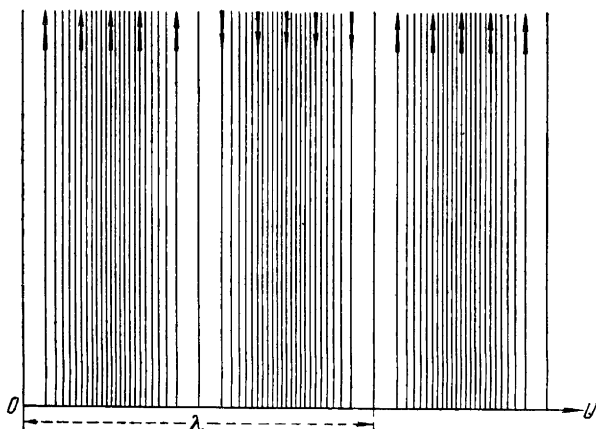


Рис. 1. Плоская волна.

чим  $4n_0$  расстояний соседних линий сил, т. е.  $4n_0$  так называемых *трубок сил*.

На рис. 1 представлено поле плоской поляризованной волны;  $n_0$  здесь положено равным 12.

## 2. Падающая и отраженная волны

Если свет отражается от плоскости раздела двух сред, то поля падающей и отраженной волн налагаются друг на друга. Соответствующее результирующее поле получается по способу Кл. Максвелла <sup>1)</sup> путем наложения двух рисунков, подобных рис. 1.

<sup>1)</sup> Cl. Maxwell, Treatise, § 123.

Наиболее удобно начертить поле первой (падающей) волны на картоне, а поле второй (отраженной) волны на кальке. Если положить второй рисунок на первый в произвольном положении, то будет видна сеть параллелограммов различной величины. На положенном сверху втором листе кальки чертятся соответствующие диагонали этих параллело-

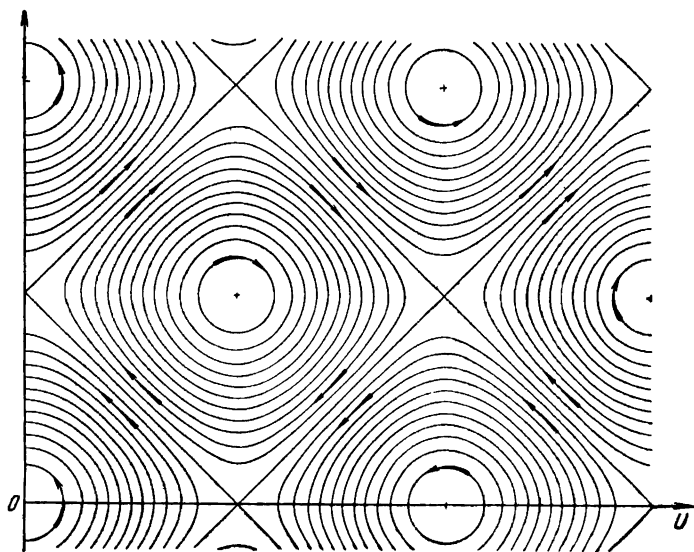


Рис. 2. Две плоские волны, пересекающиеся под прямым углом;  $R = \mathcal{E}$ .

граммов, и таким образом получают линии сил результирующего поля. Для черчения самых разнообразных случаев результирующего силового поля можно использовать одни и те же начальные рисунки.

Угол, образуемый обеими системами линий сил, равен, очевидно,  $180^\circ - 2\varphi$ , где  $\varphi$  — угол падения. Для углов падения  $\varphi$  и  $90^\circ - \varphi$  результирующее поле получается одинаковым, только движение поля в этих двух случаях различно: направление движения результирующего поля всегда перпендикулярно нормали к плоскости раздела, т. е. движение

происходит вдоль этой плоскости со скоростью  $\frac{c}{\sin \varphi}$ .

В общем случае оба ряда волн обладают различными амплитудами, например  $\mathcal{E}$  и  $R$ ; поэтому на обоих начальных рисунках число линий сил  $n_0$  следует брать соответственно различным. Можно, однако, воспользоваться теми же двумя рисунками с одинаковым  $n_0$  и начертить результирующее

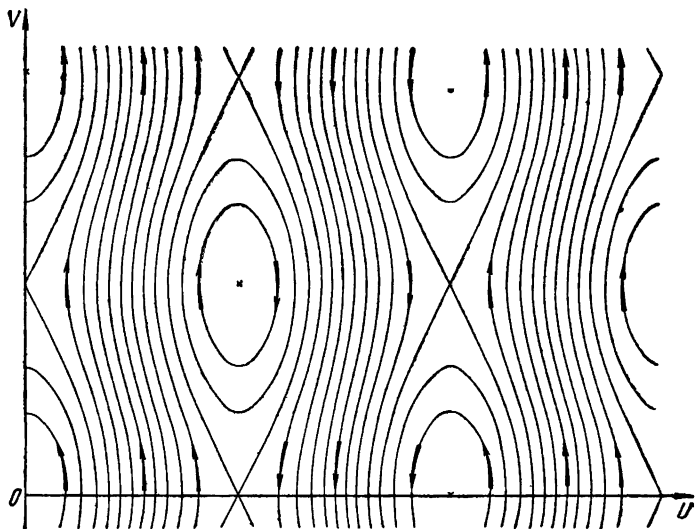


Рис. 3. Две плоские волны, пересекающиеся под прямым углом;  $R = 0,25\mathcal{E}$ .

поле и для неравных амплитуд; для этого нужно на одном рисунке использовать не все линии сил, а через одну, через две и т. д. Приведенные здесь рисунки (рис. 2, 3, 4) осуществлены практически этим способом.

Рис. 2 изображает поле двух волн равной амплитуды, пересекающихся под прямым углом ( $\varphi = 45^\circ$ ).

На рис. 3 оба луча также перпендикулярны один к другому, но у луча  $U$  амплитуда в четыре раза больше, чем у луча  $V$ .

Рис. 4 показывает силовые линии света при отражении с углом падения  $\varphi = 30^\circ$  (или  $\varphi = 60^\circ$ ) и с отношением

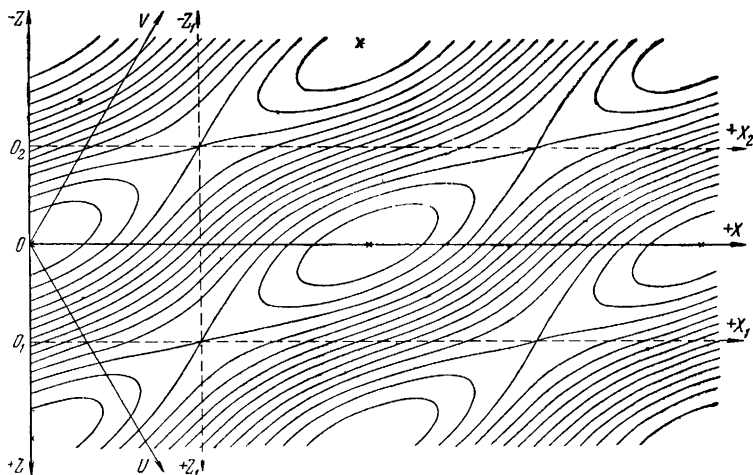


Рис. 4. Две плоские волны в направлениях  $U$  и  $V$ ; угол  $UOV = 120^\circ$   
 $R = 0,25\mathcal{E}$

амплитуд  $R : \mathcal{E} = 1 : 4$ . Здесь  $OX$  (или  $ZZ$ ) изображает плоскость раздела двух сред,  $OU$  и  $OV$  — направления обоих лучей.

### 3. Уравнение силовых линий

Легко вывести общее уравнение всех полученных выше кривых. Действительно, из уравнения (2) для двух рядов волн, начерченных в одном и том же масштабе, следует:

$$D_u \cos \frac{2\pi}{\lambda_u} u \, du = D_v \cos \frac{2\pi}{\lambda_v} v \, dv = da, \quad (3)$$

откуда непосредственно получается уравнение семейства кривых

$$\frac{D_u}{\lambda_u} \sin \frac{2\pi}{\lambda_u} u - \frac{D_v}{\lambda_v} \sin \frac{2\pi}{\lambda_v} v = K. \quad (4)$$

здесь  $K$  — параметр семейства.

Путем соответствующего выбора начала координат можно одно и то же семейство кривых выразить суммой или разностью синусов или косинусов.

В этом уравнении направления  $U$  и  $V$  могут не быть перпендикулярны между собой; следует только заметить, что применяемые координаты  $u$  и  $v$  не являются обычными косоугольными координатами с отсчетом, параллельным осям, а представляют собой проекции радиуса-вектора на оси координат. Например, если  $P$  есть какая-либо точка кривой, и если опустить на оси  $OU$  и  $OV$  перпендикуляры  $Pa$  и  $Pb$ , то в нашем уравнении  $u = Oa$  и  $v = Ob$ .

Уравнение (4) относится к общему случаю двух рядов волн неравной длины волны. Если мы имеем дело с падающим и отраженным лучами, то полагаем  $\lambda_u = \lambda_v$ ; кроме того, мы, как правило, принимаем за оси координат две биссектрисы угла  $UOV$ , причем  $OX$  направляется в плоскости  $XU$  раздела обеих сред, а  $OZ$  — перпендикулярно к этой плоскости из первой среды во вторую. Чтобы сохранить согласие с обычно принятыми направлениями осей<sup>1)</sup>, мы будем писать в уравнении (4) знак  $+$ ; таким образом, мы получаем уравнение семейства кривых в прямоугольных координатах  $XZ$ :

$$\mathcal{E} \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x \sin \varphi + z \cos \varphi) + R \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x \sin \varphi - z \cos \varphi) = K. \quad (5)$$

#### 4. Свойства семейства кривых

Важнейшие свойства этих кривых следующие:

а) Семейству принадлежит система точек, для которых  $K$  приобретает наибольшее (абсолютное) значение, а именно

$$\pm K = \mathcal{E} + R.$$

Эти точки мы будем называть *центрами*.

Вокруг этих центров завиваются кривые с меньшими значениями  $K$ . Здесь напряжение поля обоих лучей, а также их разность фаз равны нулю (при знаке  $+$  в уравнении (5)) [23].

<sup>1)</sup> P. Drude, Lehrbuch der Optik, 1906, стр. 265, рис. 83 [22].

Расстояния между центрами вдоль  $X$  и  $Z$  равны  $\frac{1}{2}\lambda_x$  и  $\frac{1}{2}\lambda_z$ , где

$$\lambda_x = \frac{\lambda}{\sin \varphi}, \quad \lambda_z = \frac{\lambda}{\cos \varphi}.$$

б) Между этими центрами лежат точки, где поле также равно нулю, но где разность фаз обоих лучей равна  $\pm \pi$ . В этих точках пересекаются силовые линии с параметром

$$\pm K = \mathcal{E} - R.$$

Эти точки мы будем называть узлами.

в) В случае равной интенсивности обоих лучей  $\mathcal{E} = R$  узлы соединяются между собой двумя системами прямых линий с параметром  $K = 0$ . Прямые проходят параллельно осям  $X$  и  $Z$ , следовательно, образуют прямоугольники со сторонами  $\frac{1}{2}\lambda_x$  и  $\frac{1}{2}\lambda_z$ , которые при  $\varphi = 45^\circ$  переходят в квадраты <sup>1)</sup>. В отдельных клетках возникшей таким образом сети все остальные линии образуют замкнутые эллипсы или кругообразные кривые.

г) Если же  $R$  и  $\mathcal{E}$  не равны, то на рисунке мы уже не получаем прямых линий; вместе с тем не все линии замкнуты. Часть замкнутых линий сил раскрывается и сливается с соседними, образуя кривые в виде синусоид, последние при уменьшении отношения  $R:\mathcal{E}$  увеличиваются в числе и все более выпрямляются, пока, наконец, при  $R = 0$  не перейдут снова в прямые линии (рис. 1).

Легко видеть, что число замкнутых трубок сил относится к общему числу трубок сил, как  $R$  к  $\mathcal{E}$ .

д) Если мы пересечем какой-либо из наших рисунков прямой линией, параллельной оси  $X$ , то во всех точках этого сечения обе волны будут иметь одинаковую разность

---

<sup>1)</sup> При неравных длинах волн обоих лучей кривые получаются аналогичные, но прямые линии получаются только в том случае, если отношение амплитуды к соответствующей длине волны в обоих лучах одинаково; кроме того, эти прямые проходят не всегда параллельно  $X$  и  $Y$  и в общем случае образуют не прямоугольники, а параллелограммы.

фаз  $\delta$ ; из (5) получаем:

$$\frac{\delta}{2} = \frac{2\pi}{\lambda_z} Z. \quad (6)$$

Угол  $\psi_1$ , образуемый линиями сил в этом сечении с осью  $+Z$ , определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \psi_1 = - \frac{\mathcal{E} \cos \frac{2\pi}{\lambda} u - R \cos \frac{2\pi}{\lambda} v}{\mathcal{E} \cos \frac{2\pi}{\lambda} u + R \cos \frac{2\pi}{\lambda} v} \operatorname{ctg} \varphi. \quad (7)$$

Этот угол различен для различных  $x$ , а так как вся фигура движется вдоль  $OX$ , то в какой-либо неподвижной точке пространства должно возникать вращающееся поле. Только в тех случаях, когда сечение проходит через центры ( $OX$  на рис. 4), следовательно, разность фаз равна нулю, или если оно проходит через узлы, так что разность фаз равна  $\pm\pi$ , угол  $\psi_1$  постоянен, а именно

$$\operatorname{tg} \psi_0 = - \frac{\mathcal{E} - R}{\mathcal{E} + R} \operatorname{ctg} \varphi, \quad \operatorname{tg} \psi_\pi = - \frac{\mathcal{E} + R}{\mathcal{E} - R} \operatorname{ctg} \varphi. \quad (8)$$

Отсюда попутно получается соотношение

$$\operatorname{tg} \psi_0 \operatorname{tg} \psi_\pi = \operatorname{ctg}^2 \varphi. \quad (8a)$$

Все эти сечения могут представлять собой плоскости раздела в самых разнообразных случаях отражения от второй среды с произвольными показателями преломления и поглощения.

На основании известных пограничных условий для электрических и магнитных линий сил:

$$\frac{\operatorname{tg} \psi_1}{\operatorname{tg} \psi_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad \text{или} \quad \frac{\operatorname{tg} \psi_1}{\operatorname{tg} \psi_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad (9)$$

первые испытывают на границе излом, вторые же нет, так как для световых волн следует принять  $\mu_1 = \mu_2$ . Поэтому для магнитных линий сил углы, которые с ними образуют сечения  $OX$  и  $O_1X_1$ , равны соответствующим углам преломления  $\chi$  во второй среде <sup>1)</sup> [24].

<sup>1)</sup> При угле падения  $90^\circ - \varphi$  ту же роль играют сечения  $ZZ$  и  $Z_1Z_1$ .



Проходит ли плоскость раздела через центры или через узлы, лучше всего можно решить по знаку известных формул Френеля для отражения<sup>1)</sup>. В случае полного внутреннего отражения, или отражения от многих параллельных плоскостей, или, наконец, в случае поглощающего действия второй среды на границе возникает разность фаз между нулем и  $\pi$ , и плоскость раздела должна лежать между  $OX$  и  $O_1X_1$  (рис. 4).

е) Для дальнейшего необходимо начертить к нашему семейству кривых ортогональные траектории. Эти траектории, проходящие перпендикулярно к электрическим и к магнитным напряжениям изображаемого поля, представляют собой по Пойнтингу [26] линии потока энергии.

Чтобы получить уравнение этих линий энергии, нужно проинтегрировать

$$\frac{dx}{dz} = -\operatorname{ctg} \psi_1.$$

Мы ограничимся случаем, когда  $U$  и  $V$  друг к другу перпендикулярны, т. е. угол падения  $\varphi = 45^\circ$ ; тогда мы можем непосредственно из уравнения (3) для ортогональных траекторий интегрировать соотношение

$$\frac{du}{dv} = \frac{\mathcal{E} \cos \frac{2\pi}{\lambda} u}{R \cos \frac{2\pi}{\lambda} v}$$

и получить, таким образом, уравнение семейства кривых

$$\frac{1}{\mathcal{E}} \ln \operatorname{ctg} \frac{\pi u}{\lambda} = \frac{1}{R} \ln \operatorname{ctg} \frac{\pi v}{\lambda} + C,$$

или [27]

$$\operatorname{tg} \frac{\pi v}{\lambda} = K \left[ \operatorname{tg} \frac{\pi u}{\lambda} \right]^{\frac{R}{\mathcal{E}}}. \quad (10)$$

С помощью обычных таблиц логарифмов можно легко начертить и эти кривые. На рис. 5, 6, 8 эти кривые изображены сплошными линиями; мы вернемся к ним позже.

1) P. D r u d e, цит. выше, стр. 268 [25].

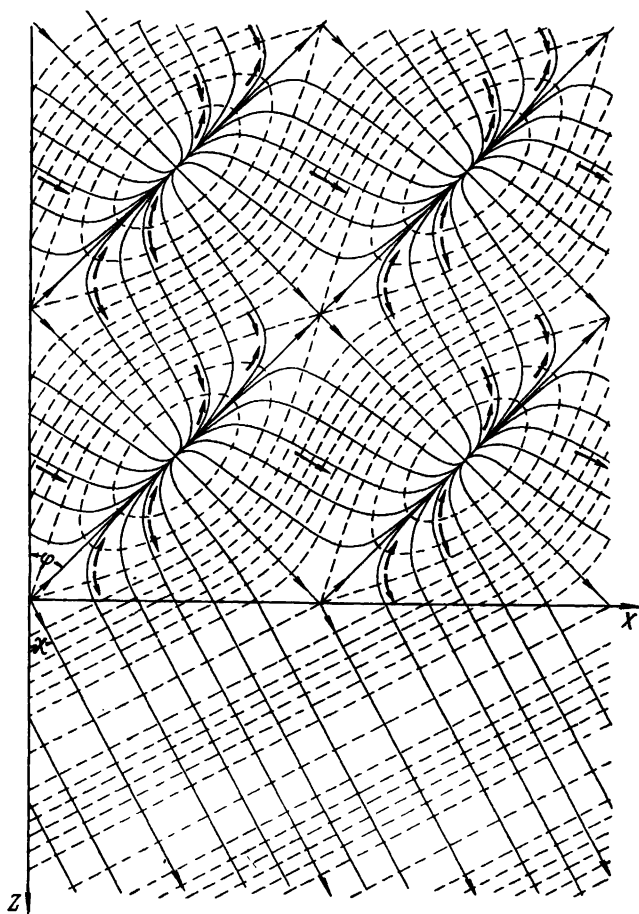


Рис. 5. Отражение и преломление.

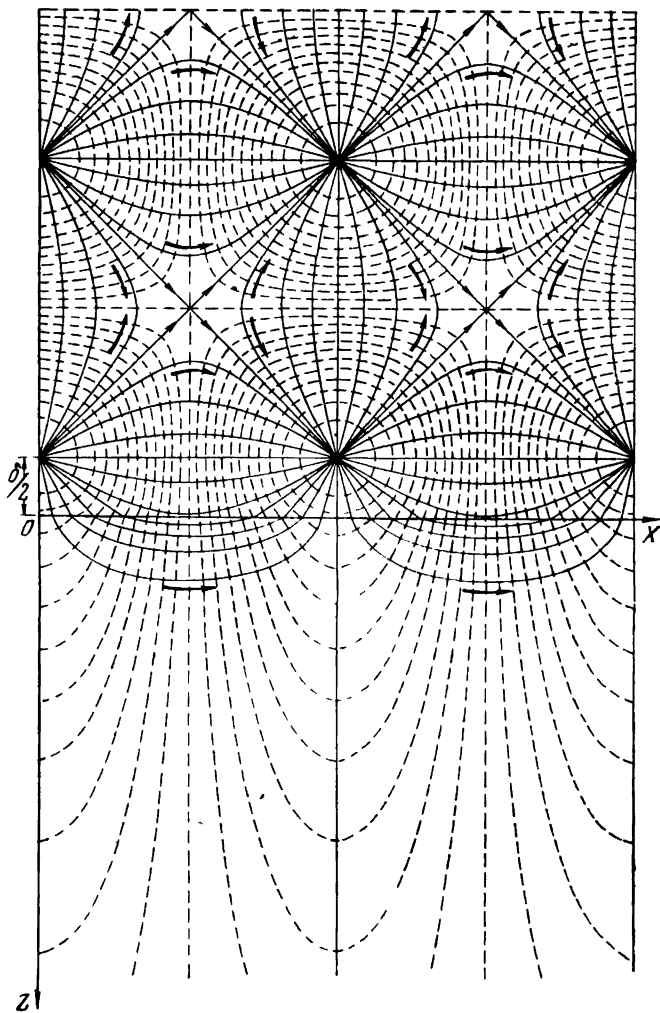


Рис. 6. Полное отражение.

### 5. Поглощающие тела

Пусть вторая среда попрежнему изотропна, но обладает поглощением; тогда в общем случае линии сил плоской волны уже не останутся прямыми. Чтобы начертить поле для этого случая, мы должны сначала вывести уравнение этих линий сил. При этом мы ограничимся тем случаем, когда магнитные линии сил лежат в плоскости падения, т. е. в плоскости нашего рисунка, следовательно, волна света поляризована в плоскости падения. Другой случай, когда в плоскости падения лежат электрические линии сил, можно рассматривать аналогичным образом; кривые получаются такой же формы, только формулы пограничных условий в этом последнем случае несколько сложнее.

Обозначим через  $M_x$ ,  $M_z$ ,  $E_y$  составляющие магнитного и электрического напряжения поля по осям  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  и напишем, как обычно:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= Le^{i\alpha}, & \alpha &= \frac{2\pi}{T}(t - (ax + bz)), \\ M_z &= Ne^{i\alpha}, & a &= \frac{\sin \chi}{c_1} = \frac{\sin \varphi}{c}, \\ E_y &= Be^{i\alpha}, & b &= b_0 - b_1 i = \frac{\cos \chi}{c_1} - \frac{x}{c_1} i. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Величина  $b$  здесь берется комплексной, так как диэлектрическая постоянная  $\epsilon'$  в уравнении Максвелла для поглощающих тел комплексна. В действительной форме нужно написать:

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} &= e^{-\frac{2\pi}{\lambda} x} \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x \sin \chi + z \cos \chi}{c_1} \right) = \\ &= e^{-\frac{2\pi}{\lambda} x} \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{u}{c_1} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $\chi$  — угол, который образует направление  $U$  с осью  $Z$  (угол преломления),  $c_1$  — скорость распространения фаз вдоль  $U$ ,  $\lambda = Tc_1$  — длина волны и  $x$  — показатель поглощения. Величины  $\chi$ ,  $\lambda$ ,  $c_1$  и  $x$  зависят от угла падения  $\varphi$ .

Уравнения Максвелла для этого случая дают:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mu}{c} \frac{\partial M_x}{\partial t} &= \frac{\partial E_y}{\partial z}, & \frac{\mu}{c} L &= -Bb, \\ \frac{\mu}{c} \frac{\partial M_z}{\partial t} &= -\frac{\partial E_y}{\partial x}, & \frac{\mu}{c} N &= +Ba, \\ \frac{\epsilon'}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}, & \frac{\epsilon'}{c} B &= -Lb + Na. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Последнее уравнение дает зависимость показателей преломления и поглощения от угла падения:

$$\frac{\epsilon' \mu}{c^2} = a^2 + b^2. \quad (13a)$$

Из первых двух уравнений мы получаем угол  $\psi$ , образуемый линиями сил с осью  $Z$ :

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{M_x}{M_z} = -\frac{b}{a} = -\operatorname{ctg} \chi + \frac{x}{\sin \chi} i. \quad (14)$$

Комплексная форма этого уравнения означает, что одна часть  $M_x$  имеет одинаковую фазу с  $M_z$ , другая же часть опережает на  $90^\circ$ . Поэтому мы должны в этом уравнении заметить  $i$  через

$$\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{u}{c_1} \right).$$

Из уравнения

$$\operatorname{tg} \psi = -\operatorname{ctg} \chi + \frac{x}{\sin \chi} \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{u}{c_1} \right) \quad (14a)$$

мы видим, что  $\psi$  оказывается меняющимся в зависимости от места и времени, следовательно, и здесь линии сил образуют вращающееся поле (ср. стр. 154).

Положим для  $t = 0$

$$\operatorname{tg} \psi = -\operatorname{ctg} \chi - \frac{x}{\sin \chi} \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{\lambda} u = \frac{dx}{dz} \quad (15)$$

и тогда получаем уравнение линий сил

$$\ln \frac{\cos \frac{2\pi}{\lambda} u}{\cos \frac{2\pi}{\lambda} u_0} = \frac{2\pi}{\lambda} x (z - z_0),$$

или

$$e^{-\frac{2\pi}{\lambda}xz} \cos \frac{2\pi}{\lambda}u = K. \quad (16)$$

Форма этого уравнения нам показывает, что семейство кривых состоит из кривых одинакового вида, которые только смещены друг относительно друга в направлении нормали <sup>1)</sup> к  $u$ .

### 6. Свойства кривых

На рис. 7 начерчена одна такая кривая  $adea_1$ , для которой взято  $\chi = 28,1^\circ$  и  $\kappa = 1,1$ .

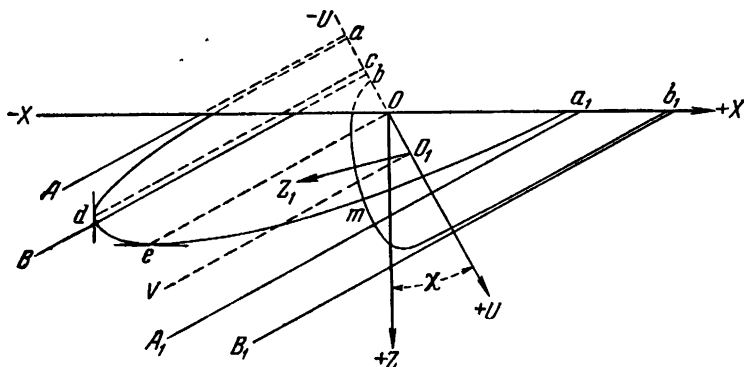


Рис. 7. Плоская волна в поглощающей среде.

Все кривые семейства (16) имеют общие асимптоты, например  $aA$  и  $a_1A_1$ , проходящие через точки

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda}u = 0$$

перпендикулярно к оси  $U$  и образующие с осью  $X$  угол  $\chi$ .

В точке  $e$ , где касательная к кривым параллельна оси  $X$ , составляющая поля вдоль  $Z$  равна нулю; здесь  $u = 0$ . В точке  $d$  равна нулю составляющая поля вдоль оси  $X$ .

<sup>1)</sup> Значение косоугольных координат  $u$  и  $z$  здесь то же, что  $u$  и  $v$  в (4), стр. 151.

Проекции этих двух точек на ось  $U$  дают отрезок  $Oс$ , который по своему смыслу представляет разность фаз  $\alpha$  между  $M_z$  и  $M_x$ . Из уравнения (14) мы видим, что

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{x}{\cos \chi}. \quad (17)$$

Если мы проведем любую прямую линию параллельно асимптотам, то она пересечет все кривые семейства под одним и тем же углом, и все точки пересечения соответствуют одной и той же фазе. Если, наконец, мы поищем точку, в которой касательная к кривой параллельна  $U$ , т. е.  $\psi = \chi$ , то из уравнения (15) найдем

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} w = -x \cos \chi, \quad (18)$$

где  $w$  равно отрезку  $Ob$  на рис. 7. Линия  $bB$  есть общая нормаль всех кривых семейства, расположенных между  $aA$  и  $a_1A_1$ .

Далее, чтобы найти ортогональные траектории к нашему семейству кривых, мы должны (ср. уравнение (15)) интегрировать

$$\frac{dx}{dz} = -\operatorname{ctg} \psi = \frac{1}{\operatorname{ctg} \chi + \frac{x}{\sin \chi} \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{\lambda} u}. \quad (19)$$

После небольшого преобразования получается уравнение этого семейства кривых

$$\ln \frac{\sin \frac{2\pi}{\lambda} (u - w)}{\sin \frac{2\pi}{\lambda} (u_0 - w)} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{x} [-\operatorname{ctg} \chi (x^2 + 1)x + z] + C; \quad (20)$$

если же ввести новые переменные, а именно:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u - w - \frac{\lambda}{4}, & \operatorname{tg} \chi_1 &= \frac{\operatorname{tg} \chi}{x^2 + 1}, \\ z_1 &= -x \cos \chi_1 + z \sin \chi_1, & x_1 &= \frac{1}{x \cos \chi_1}, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

то уравнение (20) можно привести к виду

$$e^{-\frac{2\pi}{\lambda} x_1 z_1} \cos \frac{2\pi}{\lambda} u_1 = K. \quad (22)$$

Отсюда мы видим, что ортогональные траектории наших линий сил принадлежат к тому же типу кривых, что и самые линии сил, и поэтому обладают аналогичными свойствами. Прежние оси координат  $OY$  и  $OZ$  заменены теперь новыми,  $O_1U_1$  и  $O_1Z_1$  (рис. 7), а введенный в (21) угол  $\chi_1$ , очевидно, есть угол, образуемый новой осью  $O_1Z_1$  с  $OX$ . Одна такая кривая  $bmb_1$  представлена на рис. 7.

Из свойств этих кривых непосредственно вытекает, что при любом относительном смещении кривых  $adea_1$  и  $bmb_1$  в направлении асимптот они все время остаются взаимно ортогональными.

### 7. Частный случай — прозрачные тела

Если поглощение во второй среде исчезающе мало, то в уравнениях Максвелла (13) и (13а)  $\epsilon'$  действительно. При этом могут получиться два случая, будет ли  $b$  действительным или чисто мнимым.

В первом случае  $\chi = 0$  и  $\psi$  в уравнении (14) постоянно; мы имеем обычное преломление, причем  $\chi = 90^\circ - \psi$  означает угол преломления выходящего луча.

Во втором случае, при мнимом  $b$ , получается полное внутреннее отражение. Так как теперь  $b_0 = 0$ , то одновременно

$$\left. \begin{aligned} \chi = 90^\circ, \quad \omega = 0, \quad \chi_1 = 90^\circ, \quad c_1 = \frac{c}{\sin \varphi}, \\ u = x, \quad u_1 = u - \frac{\lambda_x}{4}, \quad z_1 = z, \quad \lambda_u = \lambda_x = \frac{\lambda_0}{\sin \varphi}; \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$\lambda_0$  — длина волны в первой среде. Введя еще  $\nu$  — показатель преломления второй среды относительно первой, — из уравнения (13а) получаем:

$$x = \sqrt{1 - \left(\frac{\nu}{\sin \varphi}\right)^2}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{x}. \quad (24)$$

Угол  $\psi$  остается переменным:

$$\operatorname{tg} \psi = x \operatorname{ctg} 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_x} \right).$$

Таким образом, при полном внутреннем отражении поле световых лучей проникает и во вторую среду, но интен-



сильность его быстро убывает с глубиной; при этом во второй среде, как и в первой, возникают вращающиеся поля. В качестве уравнений линий сил и их ортогональных траекторий мы имеем в этом случае:

$$e^{-\frac{2\pi}{\lambda} x} \cos \frac{2\pi}{\lambda} x = K, \quad e^{-\frac{2\pi}{\lambda} x} \sin \frac{2\pi}{\lambda} x = K.$$

Из граничных условий (9) получается разность фаз между падающим и отраженным лучами для двух случаев, когда в плоскости падения лежат электрические или магнитные линии сил:

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{x \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \frac{\delta'}{2} = x \operatorname{tg} \varphi. \quad (25)$$

### 8. Линии потока энергии

Мы уже упомянули выше, что, по Пойнтингу, энергия в наших полях должна течь по ортогональным траекториям к линиям сил. Необходимо, однако, отметить, что значение этих линий не такое же, как линий сил, так как они указывают только направление, но не интенсивность потока энергии [28].

Все изображенные нами поля (например, рис. 5, 6, 8) движутся без деформации параллельно плоскости раздела  $OX$ ; следовательно, в неподвижной точке пространства поток энергии также создает вращающиеся поля. Но и на наших рисунках поток энергии меняет свое направление вдоль одной и той же линии энергии. Очевидно, что вектор Пойнтинга должен менять свой знак тогда и там, где меняет свой знак либо  $E$ , либо  $M$ , но не оба вместе, т. е. когда фазы  $E$  и  $M$  различны. В поглощающих телах (ср. уравнение (13)) это бывает всегда, в прозрачных телах это имеет место при наложении нескольких рядов волн.

В выполненных нами чертежах, как в первой, так и во второй среде, фазы  $E_y$  и  $M_x$  (или  $M_y$  и  $E_x$ ) различны, тогда как составляющие по  $Y$  и  $Z$  по фазе совпадают [29]. Поэтому поток энергии должен менять свое направление вдоль линии энергии, а именно тогда, когда линия сил параллельна  $OX$ , а линия энергии параллельна  $OZ$ . Таким образом, вдоль

плоскости раздела мы имеем все время движение энергии в одном направлении, в перпендикулярном же направлении и в первой и во второй среде (при поглощении и при полном внутреннем отражении) образуется своего рода стоячая

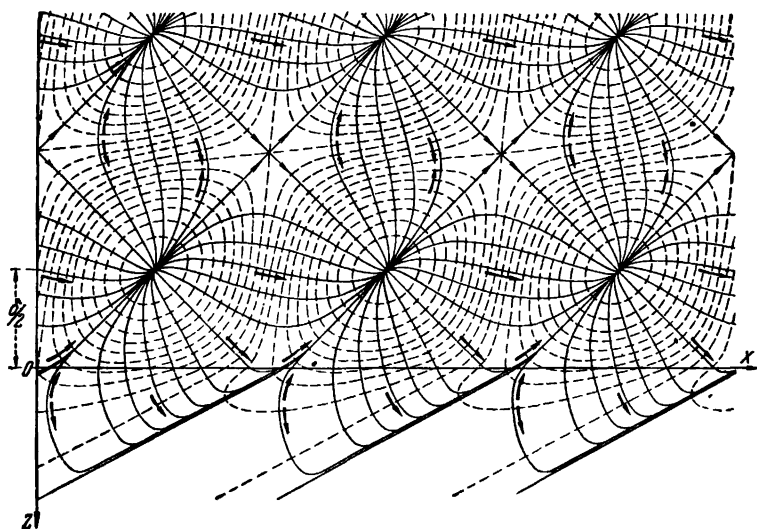


Рис. 8. Отражение и поглощение.

волна, в которой составляющая потока энергии по оси  $Z$  колеблется в ту и другую сторону.

В приведенных рисунках направления потока энергии показаны стрелками.

### 9. Рисунки 5, 6, 8

На всех трех рисунках линии сил изображены пунктиром, линии энергии — сплошными линиями.

Рис. 5 показывает магнитные линии сил при отражении от тела с показателем преломления  $\nu = 1,5$  (воздух — стекло) при угле падения  $\varphi = 45^\circ$ . При этом угол преломления  $\chi = 28,1^\circ$  и отношение  $R : \mathcal{E} = 0,3$ .

На рис. 6 даны электрические линии сил при полном внутреннем отражении<sup>1)</sup> под углом  $\varphi = 45^\circ$  и при  $\nu = \frac{1}{1,5}$  (стекло — воздух); здесь  $\mathcal{E} = R$ ,  $\chi = 0,33$ .

Разность фаз  $\delta$  (уравнение (25)) между падающим и отраженным лучами выявлена на этом рисунке согласно уравнению (6). Для электрических и магнитных линий сил получается:

$$\frac{\delta}{2} = 37^\circ \quad \text{и} \quad \frac{\delta'}{2} = 18,4^\circ.$$

Для второго случая нужно поэтому линии сил в первой среде срезать немного выше; тогда нижние линии сил будут сходиться с верхними без преломления, как это должно быть вследствие  $\mu_1 = \mu_2$ .

На рис. 6 видно, как энергия входит во вторую среду и при полном внутреннем отражении; это происходит в различных местах плоскости раздела в различные времена. Когда энергия в каком-либо месте входит во вторую среду, то она распространяется в ней не прямолинейно, как при обычном преломлении, но описывает кривую линию, чтобы вскоре возвратиться обратно в первую среду, но в другом месте. Таким образом, луч в первой среде оказывается отраженным полностью. Начерченные кривые позволяют нам рассмотреть явление полного внутреннего отражения во всех подробностях.

Рис. 8 содержит снова магнитные линии сил, но вторая среда является поглощающей. Чтобы подойти по возможности ближе к обстоятельствам, имеющим место в металлах, а с другой стороны, не чрезмерно сближать между собой линии сил, я при  $\varphi = 45^\circ$  взял  $\nu = 1,5$  и  $\chi = 1,1$ . Тогда получается (ср. §§ 5 и 6):

$$\chi = 28,1^\circ, \quad \chi_1 = 13,6^\circ, \quad \omega = -44,1^\circ, \quad \alpha = -51^\circ,$$

$$R: \mathcal{E} = 0,9, \quad \frac{\delta}{2} = 74^\circ, \quad \chi_1 = 3,9.$$

<sup>1)</sup> А. А. Эйхенвальд, Изв. Имп. Московского инженерного училища, апрель 1908, стр. 15—41; Журн. русск. физ.-хим. О-ва, 41, физ. часть, стр. 131—154, 1909. Cf. Schaefer u. G. Gross, Ann. d. Phys. 32, стр. 651, 1910.

Как в случае полного внутреннего отражения, так и здесь энергия во второй среде описывает кривые линии; однако теперь они несимметричны относительно нормали к плоскости раздела. Поток энергии и здесь меняет свое направление вдоль линии энергии, но не возвращается полностью в первую среду; часть его поглощается второй средой.

В заключение я хочу еще заметить, что данные здесь рисунки могут давать ориентирующее указание также и в других, более сложных случаях, например для большего числа волн, когда поле при своем движении одновременно деформируется, для явлений интерференции и диффракции; наконец, эти рисунки могут найти себе применение при исследовании поля в проводниках и в магнитных телах, когда вблизи их текут переменные токи, и т. д.

