

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ
РАБОТЫ**





О ДВИЖЕНИИ ЭНЕРГИИ ПРИ ПОЛНОМ ВНУТРЕННЕМ ОТРАЖЕНИИ СВЕТА [12]

1. Введение

После классических работ Френеля¹⁾, который использовал значение мнимых величин, получающихся в формулах полного внутреннего отражения света, вопрос этот подвергался многократной разработке²⁾. Особенный интерес представляет при этом то световое явление, которое имеет место во второй среде, т. е. в той, где обыкновенно бывает преломленный луч. По мнению многих физиков, при полном внутреннем отражении во второй среде получается особый луч, идущий вдоль плоскости раздела и отличающийся от обыкновенных лучей тем, что амплитуда его непостоянная и колебания в нем продольные.

Мы постараемся разъяснить это недоразумение.

Для этого исследуем, во-первых, как распределяются электрические и магнитные напряжения [1⁰], т. е. линии сил, на границе двух сред, а во-вторых, каковы направления движения световой энергии при полном внутреннем отражении. Так как оба эти вопроса находятся в тесной связи друг с другом, то мы и будем рассматривать их одновременно.

Исследование это показывает, что то, что многими авторами принимается за луч света с продольными колебаниями, распространяющийся вдоль плоскости раздела двух сред, есть только проекция лучей на эту плоскость. На самом же

1) Fresnel, Oeuvres I, стр. 758 и след.

2) Позднейшую литературу см. A. Winkelmann, Handbuch der Physik 6 (2), стр. 1275, 1906; статья P. Drude.

деле при полном внутреннем отражении лучи света (т. е. траектории энергии) во второй среде представляют собой кривые линии, направление которых меняется со временем, колебания же света этих лучей строго поперечны.

2. Общие уравнения

Назовем через $E_x, E_y, E_z, M_x, M_y, M_z$ проекции напряжений электрического и магнитного полей на оси координат и через ϵ и μ — диэлектрическую и диамагнитную постоянные данной среды; тогда уравнения Максвелла — Герца для неподвижных тел напишутся так ¹⁾ [14]:

$$\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}, \quad (1)$$

$$\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}, \quad (3)$$

$$-\frac{\mu}{c} \frac{\partial M_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad (4)$$

$$-\frac{\mu}{c} \frac{\partial M_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (5)$$

$$-\frac{\mu}{c} \frac{\partial M_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}. \quad (6)$$

Плотность электромагнитной энергии

$$W = W_e + W_m = \frac{1}{8\pi} (\epsilon E^2 + \mu M^2). \quad (7)$$

Помножим уравнения (1), (2), (3) поочередно на E_x, E_y, E_z , а уравнения (4), (5), (6) соответственно на $-M_x, -M_y, -M_z$ и затем, помножив сумму всех этих уравнений на элемент объема $d\tau$, проинтегрируем ее по некоторому объему τ ; тогда получим, приняв во внимание (7):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int W d\tau = - \int \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) d\tau,$$

1) Оси координат выбраны так, что если ось $+X$ направлена на восток, ось $+Y$ на север, то ось $+Z$ будет направлена в зенит,

где

$$f_x = \frac{1}{4\pi} (E_y M_z - E_z M_y), \quad (8)$$

$$f_y = \frac{1}{4\pi} (E_z M_x - E_x M_z), \quad (9)$$

$$f_z = \frac{1}{4\pi} (E_x M_y - E_y M_x). \quad (10)$$

Объемный интеграл в правой части нашего уравнения можно преобразовать в интеграл, распространенный по поверхности данного объема, и тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} \int W d\tau = - \int f_n ds, \quad (11)$$

где f_n — проекция вектора f на наружную нормаль к элементу поверхности ds .

Уравнение (11) выведено Пойнтингом и использовано им следующим образом [15].

Пусть интеграл (11) распространен по всему бесконечному пространству, тогда в бесконечности, вдали от наэлектризованных, намагниченных и лучеиспускающих тел, E и M , а следовательно, и f равны нулю; поверхностный интеграл правой части обращается в нуль, и мы получаем выражение

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} W d\tau = 0,$$

$$\int_0^{\infty} W d\tau = \text{const},$$

которое означает, что количество энергии всего бесконечного пространства не меняется со временем. Это есть не что иное, как закон сохранения энергии.

Если же применить уравнение (11) к конечному объему, то, вообще говоря, правая его часть не будет равна нулю, и электромагнитная энергия внутри данного объема будет меняться со временем. Предположим, что энергия внутри данного объема увеличивается, тогда в то же время где-нибудь снаружи количество энергии должно на столько же

уменьшиться, ибо общее количество энергии мирового пространства должно оставаться постоянным. Уменьшение количества энергии снаружи и увеличение его внутри рассматриваемого объема мы можем представить себе происходящим вследствие непрерывного движения энергии снаружи внутрь объема сквозь его поверхность. Назовем через f количество энергии, протекающее в единицу времени сквозь единицу поверхности, поставленной нормально к движению энергии, тогда правая часть уравнения (11) даст нам полное количество энергии, втекающее (знак минус означает, что положительный поток энергии направлен противоположно наружной нормали) во всю поверхность данного объема в единицу времени.

Итак, уравнение Пойнтинга (11) говорит, что увеличение или уменьшение количества энергии внутри данного объема происходит вследствие втекания или вытекания энергии сквозь поверхность, ограничивающую данный объем.

Выражения (8), (9), (10) показывают; что плотность потока энергии есть вектор

$$f = \frac{c}{4\pi} EM \sin(E, M) \quad (12)$$

и что f перпендикулярно к E и M , причем относительное положение f , E и M — такое же, как выбранное нами относительное положение осей $+X$, $+Y$, $+Z$ (см. выше).

Как известно, под лучом света мы подразумеваем ту линию (прямую, кривую или ломаную — безразлично), по которой энергия движется от светящегося предмета к освещенному. Следовательно, направление луча есть направление потока электромагнитной энергии и определяется уравнениями (8), (9), (10) и (12); поэтому луч света всегда перпендикулярен к электрическому и магнитному напряжениям в данной точке.

Этим определением понятия «луч» мы ниже воспользуемся.

3. Плоская волна

Примем теперь уравнения Максвелла к частному случаю, когда луч света направлен параллельно плоскости ZX и когда в направлении, перпендикулярном к этой плоскости, величины E и M — те же, что и в плоскости ZX . В таком

случае нужно везде производные по y положить равными нулю; тогда имеем:

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = - \frac{\partial M_y}{\partial z}, \quad (1)$$

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} = + \frac{\partial M_y}{\partial x}, \quad (2)$$

$$- \frac{\mu}{c} \frac{\partial M_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (3)$$

$$- \frac{\mu}{c} \frac{\partial M_x}{\partial t} = - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad (4)$$

$$- \frac{\mu}{c} \frac{\partial M_z}{\partial t} = + \frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad (5)$$

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}. \quad (6)$$

Мы видим, что в данном случае шесть уравнений распадается на две независимые друг от друга системы.

Действительно, уравнения (1), (2), (3) содержат только величины E_x , E_z и M_y , т. е. соответствуют лучу, в котором плоскость электрического поля совпадает с плоскостью ZX ; такой луч называется *лучом, поляризованным перпендикулярно к плоскости падения*.

Уравнения (4), (5), (6), напротив того, упомянутых выше величин не содержат, зато здесь имеются M_x , M_z , E_y , и потому эти уравнения соответствуют *лучу, поляризованному в плоскости падения*.

Оба эти луча, конечно, можно рассматривать независимо друг от друга.

Зададимся следующим решением этих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= A e^{i\alpha}, \\ E_z &= C e^{i\alpha}, \\ M_y &= M e^{i\alpha}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= L e^{i\alpha}, \\ M_z &= N e^{i\alpha}, \\ E_y &= B e^{i\alpha}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{T}(t - ax - bz), \quad (9)$$

$$i = \sqrt{-1}.$$

Как известно,

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha,$$

и решения написаны нами в мнимой форме лишь для удобства вычислений; на самом же деле уравнения эти удовлетворяются и функциями $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ в отдельности. Последние означают, что мы имеем дело с электромагнитными волнами периода T . Волны эти плоские, так как в любой плоскости

$$ax + bz = c$$

мы имеем всюду одинаковые фазы.

Две параллельные плоскости, для которых $c_2 - c_1 = T$, имеют согласно (9) разность фаз 2π , т. е. отстоят друг от друга на длину волны $\lambda = vT$, где v — скорость распространения волн.

Плоская волна, проходившая через начало координат при $t = 0$, будет иметь во время T уравнение

$$ax + bz = T.$$

С другой стороны, если φ есть угол, составляемый нормалью к плоскости с осью Z , и если эта плоскость отошла от начала координат за время T на длину $\lambda = vT$, то ее уравнение будет:

$$\sin \varphi \cdot x + \cos \varphi \cdot z = \lambda = vT.$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\sin \varphi}{v}, \\ b &= \frac{\cos \varphi}{v}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Из этих выражений мы видим, что v есть скорость распространения фаз, считаемая по нормали к плоскости волн, тогда как $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$ суть скорости распространения фаз соответственно по оси X и по оси Z .

Подставив (7), (8), (9) в уравнения (1) — (6), мы получим следующие соотношения между амплитудами:

$$\frac{\epsilon}{c} A = Mb, \quad (11)$$

$$\frac{\epsilon}{c} C = -Ma, \quad (12)$$

$$\frac{\mu}{c} M = -Ab - Ca, \quad (13)$$

$$-\frac{\mu}{c} L = Bb, \quad (14)$$

$$-\frac{\mu}{c} N = -Ba, \quad (15)$$

$$\frac{\epsilon}{c} B = -Lb + Na. \quad (16)$$

Подставляя в (13) и (16) значения A , C , L и N из предыдущих уравнений и имея в виду (10), получим и в том и в другом случае

$$\frac{\epsilon\mu}{c^2} = a^2 + b^2 = \frac{1}{v^2}, \quad (17)$$

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (18)$$

Это — известный закон Максвелла.

Остальные уравнения дают нам:

$$C = -\frac{a}{b} A = -A \operatorname{tg} \varphi, \quad L = -\frac{c}{\mu} bB = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} B \cos \varphi,$$

$$M = \frac{\epsilon}{c} \frac{1}{b} A = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{1}{\cos \varphi} A, \quad N = -\frac{c}{\mu} aB = +\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} B \sin \varphi,$$

после чего, положив $A = E_p \cos \varphi$ и $B = E_s$, решения наши можно написать в таком виде:

$$E_x = +E_p \cos \varphi \sin \alpha, \quad M_x = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_s \cos \varphi \sin \alpha,$$

$$E_z = -E_p \sin \varphi \sin \alpha, \quad M_z = +\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_s \sin \varphi \sin \alpha,$$

$$M_y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_p \sin \alpha; \quad E_y = E_s \sin \alpha.$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{\sin \varphi \cdot x + \cos \varphi \cdot z}{v} \right), \quad v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

Определим угол ψ между линиями сил и осью Z :

$$\operatorname{tg} \psi_e = \frac{E_x}{E_z} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}, \quad \operatorname{tg} \psi_m = \frac{M_r}{M_z} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi};$$

следовательно,

$$\psi_e = \psi_m = \varphi + 90^\circ.$$

Это значит, что линии сил перпендикулярны к нормали волны, т. е. лежат в плоскости волны. Отсюда же следует, что направление потока энергии, которое перпендикулярно к E и M , совпадает с направлением нормали к плоскости волны.

4. Полное внутреннее отражение

Решение предыдущего параграфа имеет лишь тогда определенный физический смысл, когда

$$\frac{\epsilon\mu}{c^2} = a^2 + b^2 = \frac{1}{v^2}, \quad (1)$$

т. е. когда a и b в отдельности меньше $\frac{1}{v}$. Бывают, однако, случаи, когда a задано условиями опыта. Так, например, известно, что если плоскость XU разделяет две различные среды, то углы φ и χ падающего и преломленного лучей должны удовлетворять условию

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \chi} = \frac{v_1}{v_2} = n, \quad (2)$$

где n — показатель преломления, или иначе

$$a_1 = \frac{\sin \varphi}{v_1} = \frac{\sin \chi}{v_2} = a_2, \quad (3)$$

а это означает, что скорости движения фаз по оси X для падающего, отраженного и преломленного лучей должны быть одинаковы. Поэтому, если угол φ , а потому и a_1 в первой среде даны, то может оказаться, что равное ему a_2 для второй среды будет более $\frac{1}{v_2}$.

Конечно, если

$$\frac{\sin \varphi}{v_1} > \frac{1}{v_2},$$

то

$$\sin \varphi > n,$$

а потому этот случай возможен только, когда $n < 1$, т. е. когда вторая среда менее преломляющая, чем первая.

Но если действительно по условию опыта $a > \frac{1}{v_2}$, то $\sin \chi$ делается больше единицы, и следовательно, *нельзя подыскать для преломленного луча такого постоянного направления χ* , при котором условие (2) было бы соблюдено. Как известно, мы получаем при этом так называемое полное внутреннее отражение, т. е. падающий луч целиком отражается, не преломляясь.

Из этого не следует, однако, что при таких условиях на границе распространение света во второй среде делается совершенно невозможным. Как увидим ниже, при этих условиях свет проникает и во вторую среду, но, во-первых, сила света быстро убывает с глубиной под плоскостью раздела, а во-вторых, угол χ делается переменным во времени.

Положим, действительно, $a > \frac{1}{v_2}$, тогда b делается мнимым. Пусть

$$b = -ik. \quad (4)$$

Уравнения (1), (2), (3) дают:

$$a^2 - k^2 = \frac{\epsilon_2 \mu_2}{c^2} = \frac{1}{v_2^2},$$

$$k = \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{v_1^2} - \frac{1}{v_2^2}} = \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{v_1}, \quad (5)$$

$$\frac{k}{a} = \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{\sin \varphi}. \quad (6)$$

При $b = -ik$ решения предыдущего параграфа изменятся, а именно:

$$\begin{aligned} e^{iax} &= e^{-\frac{2\pi}{T} kz} \cdot e^{i \frac{2\pi}{T} (t - ax)} = \\ &= e^{-\frac{2\pi}{T} kz} \left[\cos \frac{2\pi}{T} (t - ax) + i \sin \frac{2\pi}{T} (t - ax) \right], \end{aligned}$$

а это означает, что амплитуды всех напряжений с увеличением z быстро убывают, т. е. свет заметен лишь на небольшой глубине под плоскостью раздела обоих тел.

Далее, соотношения между амплитудами принимают следующий вид:

$$C = + \frac{a}{k} Ai, \quad L = \frac{c}{\mu} kBi,$$

$$M = - \frac{\varepsilon}{c} \frac{1}{k} Ai, \quad N = \frac{c}{\mu} aB.$$

Полученные нами мнимые амплитуды означают лишь, что необходимо изменить фазу на 90° . Действительно, при $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$e^{\pm i\alpha} = \pm i.$$

Приняв все это во внимание, мы можем для этого случая придать окончательным решениям следующий вид:

$$E_x = A e^{-\frac{2\pi}{T} kz} \cos \frac{2\pi}{T} (t - ax),$$

$$E_z = A \frac{a}{k} e^{-\frac{2\pi}{T} kz} \sin \frac{2\pi}{T} (t - ax),$$

$$M_y = -A \frac{\varepsilon}{c} \frac{1}{k} e^{-\frac{2\pi}{T} kz} \sin \frac{2\pi}{T} (t - ax),$$

$$M_x = B \frac{c}{\mu} k e^{-\frac{2\pi}{T} kz} \sin \frac{2\pi}{T} (t - ax),$$

$$M_z = B \frac{c}{\mu} a e^{-\frac{2\pi}{T} kz} \cos \frac{2\pi}{T} (t - ax),$$

$$E_y = B e^{-\frac{2\pi}{T} kz} \cos \frac{2\pi}{T} (t - ax).$$

Угол ψ_2 , образуемый линиями сил с осью Z , получится из соотношения

$$\operatorname{tg} \psi_2 = \frac{E_x}{E_z} = \frac{M_x}{M_z} = \frac{k}{a} \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{T} (t - ax).$$

Как видим, этот угол меняется со временем.

Таким образом, составляющие напряжений E_x и E_z , с одной стороны, и M_x и M_z , с другой, имея разность фаз 90° , дают в плоскости падения вращающиеся электрическое и магнитное поля.

Поток энергии, будучи перпендикулярен к E и M , тоже, следовательно, образует вращающееся в плоскости ZX поле, и направление луча, характеризуемое углом χ , меняется со временем:

$$\operatorname{tg} \chi = -\frac{1}{\operatorname{tg} \psi_2} = \frac{a}{k} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{T} (t - ax).$$

Итак, хотя в случае полного внутреннего отражения, т. е. для $\sin \varphi > n$, и нельзя подыскать такого *постоянного направления* преломленного луча, которое бы удовлетворяло пограничным условиям, тем не менее преломленный луч существует, но имеет *направление, меняющееся со временем* по вышеуказанному закону.

Б. Форма линий сил и лучей во второй среде

Из формулы

$$\operatorname{tg} \psi_2 = \frac{k}{a} \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{T} (t - ax)$$

видно, что угол наклона линий сил не зависит от z и что, кроме того, он меняется со временем, но так, что ψ_2 для некоторого времени t_1 в какой-либо точке x_1 будет иметь то же самое значение, которое он имел в другое время t_2 , но в другой точке x_2 , определяемой уравнением

$$t_1 - ax_1 = t_2 - ax_2$$

или

$$t_1 - t_2 = a(x_1 - x_2).$$

Другими словами, *линии сил, сохраняя свою форму, движутся параллельно оси X со скоростью $\frac{1}{a}$* , т. е. с той именно скоростью, которая предписана пограничными условиями и которая равна скорости движения фаз по оси X в первой среде:

$$\frac{1}{a} = \frac{v_1}{\sin \varphi}.$$

Имея это в виду, мы можем ограничиться определением формы линий сил для одного какого-либо момента времени, например для $t = 0$.

Те же замечания можно сделать и о форме линий потоков энергии, т. е. о форме лучей, которые всегда остаются перпендикулярными к линиям сил.

Приравняв $\operatorname{tg} \psi_2$ производной $\frac{dx}{dz}$ и заметив, что

$$\frac{2\pi}{T} a = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\sin \varphi}{v} = \frac{2\pi}{\lambda_x},$$

где λ_x — расстояние между одинаковыми фазами по оси X , получим:

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{k}{a} \operatorname{ctg} 2\pi \frac{x}{\lambda_x}.$$

Интегрируя от 0 до z при изменении x от x_1 до x , получим уравнение кривых линий сил

$$\int_0^z dz = -\frac{a}{k} \int_{x_1}^x \operatorname{tg} \left(2\pi \frac{x}{\lambda_x} \right) dx,$$

$$z = \frac{a}{k} \frac{\lambda_x}{2\pi} \ln \left[\frac{\cos 2\pi \frac{x}{\lambda_x}}{\cos 2\pi \frac{x_1}{\lambda_x}} \right] \quad (\text{Ie})$$

и уравнение лучей, к ним перпендикулярных:

$$\int_0^z dz = \frac{k}{a} \int_{x_1}^x \operatorname{ctg} \left(2\pi \frac{x}{\lambda_x} \right) dx,$$

$$z = \frac{k}{a} \frac{\lambda_x}{2\pi} \ln \left[\frac{\sin 2\pi \frac{x}{\lambda_x}}{\sin 2\pi \frac{x_1}{\lambda_x}} \right]. \quad (\text{If})$$

Кривые эти показаны на прилагаемом рисунке (рис. 4) и будут нами разобраны ниже.

Составляющие потоков энергии по осям Z и X как для луча, поляризованного в плоскости падения, так и для луча, поляризованного перпендикулярно к этой плоскости, будут совершенно одинаковы, если амплитуды обоих лучей одинаковы. Легко видеть, что если $A = B$, то

$$E_x M_y = -E_y M_x,$$

$$E_y M_z = -E_z M_y.$$

Поэтому мы можем для каждого из этих лучей написать отдельно:

$$f_z = \frac{c}{4\pi} E_x M_y = -A^2 \frac{\epsilon}{4\pi k} e^{-\frac{4\pi k}{T} z} \sin \frac{2\pi}{T} (t - ax) \cos \frac{2\pi}{T} (t - ax),$$

$$f_x = -\frac{c}{4\pi} E_z M_y = A^2 \frac{\epsilon a}{4\pi k^2} e^{-\frac{4\pi k}{T} z} \sin^2 \frac{2\pi}{T} (t - ax),$$

или

$$f_z = -A^2 \frac{c}{8\pi k} e^{-\frac{4\pi k}{T} z} \sin \frac{4\pi}{T} (t - ax),$$

$$f_x = A^2 \frac{\epsilon a}{8\pi k^2} e^{-\frac{4\pi k}{T} z} \left[1 - \cos \frac{4\pi}{T} (t - ax) \right].$$

Выражение f_z показывает, что световая энергия колеблется по направлению Z с периодом $T/2$, т. е. за время полного периода светового колебания T энергия успевает два раза войти из первой среды во вторую и два раза выйти обратно. Количество энергии, вышедшей из первой среды во вторую за время $T/4$, т. е. за одну половину периода колебания энергии, равно количеству энергии, вышедшей обратно из второй среды в первую за время другой половины периода колебания энергии.

Поэтому, понятно, энергия падающего луча целиком возвращается в отраженном луче. Однако выражение f_z , а в особенности наши кривые показывают, что вход и выход энергии в разных местах плоскости раздела (для разных x) совершаются не в одно время, так что, в то время как в одних местах $f_z > 0$, энергия входит из первой среды во вторую, в других местах, отстоящих от первых на длину

$$x_1 = \frac{T}{4a} = \frac{\lambda_x}{4},$$

$f_z < 0$, энергия выходит из второй среды в первую.

Внутри второй среды пути энергии, т. е. лучи света, — кривые и имеют вид гирлянд, расположенных по оси X .

Выражение f_x всегда (для любого t) и везде (для любого x) имеет положительное значение, и это обстоятельство дало повод недоразумению, будто мы имеем здесь дело с самостоятельным лучом света, идущим вдоль плоскости раздела.

Кроме того, этот фиктивный луч f_x обладает особенным свойством: в нем световые колебания происходят по тому же направлению, т. е. *колебания эти продольные*. Хотя П. Друде¹⁾ и полагает, что это обстоятельство не противоречит поперечности световых колебаний, которая будто бы имеет место лишь при волнах постоянной амплитуды, но нам кажется, что и это недоразумение отпадает, если принять во внимание, что f_x нельзя рассматривать как самостоятельный луч света, а лишь как проекцию лучей на ось X ; на самом же деле лучи света во второй среде имеют кривую форму, показанную на рис. 4 (толстыми линиями), и колебания в них строго поперечны.

6. Условия на границе

Посмотрим теперь, что происходит в первой среде, в которой находятся падающий и отраженный лучи. Сначала рассмотрим отдельно тот луч, электрические колебания которого параллельны плоскости падения; явления в другом луче совершенно аналогичны, и разница лишь в том, что E заменяется через M , ϵ — через μ и наоборот.

Пусть амплитуды электрических колебаний падающего и отраженного луча будут \mathcal{E} и R , тогда (рис. 1) составляющие электрического поля по осям X и Z будут:

$$E_x = (\mathcal{E} - R) \cos \varphi,$$

$$E_z = -(\mathcal{E} + R) \sin \varphi,$$

и угол наклона линий сил в первой среде ψ_1 будет:

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{E_x}{E_z} = -\frac{\mathcal{E} - R}{\mathcal{E} + R} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}. \quad (1)$$

На границе двух тел, т. е. в плоскости XY , должны быть соблюдены условия равенства тангенциальных соста-

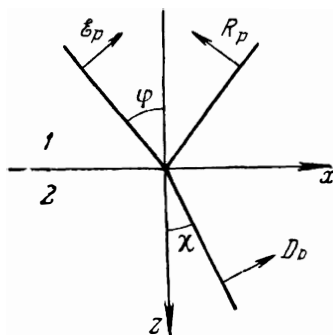


Рис. 1.

¹⁾ P. D r u d e, Lehrbuch der Optik, стр. 286, 1906 [16].

вляющих электрических напряжений и равенства нормальных составляющих электрических индукций, т. е.

$$E_{1x} = E_{2x}, \quad \epsilon_1 E_{1z} = \epsilon_2 E_{2z},$$

откуда

$$\frac{E_{1r}}{E_{1z}} = \frac{\epsilon_1 E_{2r}}{\epsilon_2 E_{2z}},$$

и для ψ_2 , угла наклона электрических линий сил к оси Z во второй среде, имеем:

$$\operatorname{tg} \psi_1 = - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \operatorname{tg} \psi_2;$$

следовательно, пограничные условия требуют:

$$\frac{\mathcal{E} - R}{\mathcal{E} + R} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \chi}.$$

При полном внутреннем отражении $\mathcal{E} = R$, но так как угол ψ_2 , а также и χ перестают быть постоянными, то и угол ψ_1 должен меняться со временем, а это при постоянном φ возможно лишь, когда \mathcal{E} и R имеют разные фазы.

Действительно, пусть колебания R опережают колебания \mathcal{E} на угол δ , тогда получим:

$$\operatorname{tg} \psi_1 = - \frac{\sin \alpha - \sin(\alpha + \delta)}{\sin \alpha + \sin(\alpha + \delta)} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \cdot \operatorname{ctg} \left(\alpha + \frac{\delta}{2} \right)}{\operatorname{tg} \varphi},$$

где

$$\alpha = \frac{2\pi}{T} (t - ax - bz);$$

в то же время согласно § 5 можно положить:

$$\operatorname{tg} \psi_2 = \frac{k}{a} \operatorname{ctg} \left[\frac{2\pi}{T} (t - ax) + \gamma \right],$$

где γ — та фаза, на которую колебания преломленного луча опережают колебания падающего луча. Для удовлетворения пограничных условий необходимо так подобрать δ и γ , чтобы при $z = 0$

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \operatorname{tg} \psi_2$$

или

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg} \varphi} \operatorname{ctg} \left(\alpha + \frac{\delta}{2} \right) = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{k}{a} \operatorname{ctg}(\alpha + \gamma),$$

и так как это условие не должно содержать времени, т. е. α , то ему можно удовлетворить, лишь положив

$$\gamma = \frac{\delta}{2},$$

и тогда

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \cdot \frac{k}{a} \operatorname{tg} \varphi.$$

Для луча, поляризованного в плоскости падения, получим, заменяя ϵ через μ :

$$\operatorname{tg} \frac{\delta'}{2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{k}{a} \operatorname{tg} \varphi.$$

Для большинства прозрачных тел $\mu_1 = \mu_2$, и потому

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = n^2.$$

Пользуясь, кроме того, значением

$$\frac{k}{a} = \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{\sin \varphi},$$

получаем:

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{n^2 \cos \varphi}, \quad \operatorname{tg} \frac{\delta'}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{\cos \varphi},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\delta - \delta'}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{\cos \varphi \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

Последняя формула показывает, что между лучами, поляризованными в плоскости падения и поляризованными перпендикулярно к этой плоскости, образуется при полном внутреннем отражении разность фаз $\delta - \delta'$. Как известно, на этом основано устройство параллелепипеда Френеля, который превращает плоскополяризованный луч в луч, поляризованный по кругу. Для этого необходимо при равных амплитудах обоих, отраженных лучей, чтобы $\delta - \delta' = 90^\circ$.

При $\sin \varphi = n$, т. е. при предельном угле полного внутреннего отражения, а также при $\varphi = 90^\circ$, т. е. при скользющем падении,

$$\delta = \delta' = \gamma = 0,$$

т. е. все фазы равны. Но тогда и

$$\psi_1 = \psi_2 = 0,$$

и, кроме того, E_x и f_z равны нулю, и, следовательно, во вторую среду сквозь плоскость XU никакой энергии не входит ¹⁾.

7. Графическое изображение

Величины, меняющиеся со временем по закону $\sin \frac{2\pi}{T} t$ или $\cos \frac{2\pi}{T} t$, можно изображать графически векторами, наклоненными друг к другу под углом, равным разности фаз данных величин. Применим такую «векторную диаграмму» к тангенциальным и нормальным составляющим электрического и магнитного поля на границе двух сред при полном внутреннем отражении.

Так как

$$E_{1x} = [\mathcal{E} \sin \alpha - R \sin (\alpha + \delta)] \cos \varphi = E_{2x},$$

$$E_{1z} = -[\mathcal{E} \sin \alpha + R \sin (\alpha + \delta)] \sin \varphi = -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} E_{2z} = -n^2 E_{2z},$$

$$M_{1y} = [\mathcal{E} \sin \alpha + R \sin (\alpha + \delta)] \sqrt{\epsilon_1} = M_{2y},$$

то, отложив по горизонтальному направлению (рис. 2) $AB = \mathcal{E}$ и под углом δ $BC = R$, построим параллелограмм $ABCD$,

¹⁾ Оба эти предельных случая не входят в рамки этой статьи. Необходимо, однако, заметить, что их нельзя трактовать как частные случаи разбираемого явления, как это делает, между прочим, W. Voigt, Ann. d. Phys. **67**, стр. 192, 1899. Действительно, при $\sin \varphi = n$, $k = 0$,

$$e^{-\frac{2\pi}{T} kx} = 1;$$

мы получаем, что при предельном угле падения энергия во второй среде не убывает с расстоянием от плоскости раздела, а простирается до бесконечности, что, конечно, не соответствует действительности. Это несоответствие происходит оттого, что и при $\sin \varphi = n$ и при $\varphi = 90^\circ$ мы имеем дело с лучом, ограниченным с одной стороны нулевой плоскостью, а такие случаи должны быть рассматриваемы особо, как явления диффракционные.

который вследствие равенства $\mathcal{E} = R$ обращается в ромб. В этом ромбе

$$DB = AB - AD = \frac{E_{2x}}{\cos \varphi},$$

$$AC = AB + BC = \frac{n^2}{\sin \varphi} E_{2x},$$

$$AC = AB + BC = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} M_{2y}.$$

Вследствие геометрических свойств ромба можно прямо видеть, что:

1) Разность фаз γ между AC и AB , т. е. между падающими и преломленными магнитными колебаниями, вдвое меньше разности фаз между теми же колебаниями в падающем и отраженном луче.

2) Разность фаз между E_z и M_y равна нулю, тогда как

3) разность фаз между E_x и E_z , а также и E_x и M_y равна 90° .

4) Площадь ромба, пропорциональная $AC \cdot BD$, пропорциональна $E_x M_y$, или количеству энергии, входящей из

первой среды во вторую сквозь плоскость XY ; а потому при данном φ наибольший поток энергии будет иметь место при наибольшем δ .

5) С другой стороны, так как AC перпендикулярно к DB , т. е. разность фаз между E_x и M_y равна 90° , то полное количество энергии, прошедшее сквозь XY за целое число периодов, будет равно нулю, ибо

$$\int_0^T \sin \frac{2\pi}{T} t \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \beta \right) dt = \frac{T}{2\pi} \cos \beta,$$

что при $\beta = 90^\circ$ равно нулю.

Следовательно, энергия лишь колеблется по оси Z .

6) Так как E_z и M_y в одной фазе, то составляющая потока энергии по оси X будет всегда положительная,

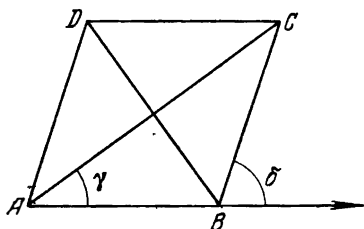


Рис. 2.

7) Из рисунка видно, что

$$AC = 2AB \cos \frac{\delta}{2}, \quad DB = 2AB \sin \frac{\delta}{2},$$

следовательно,

$$E_{2x} = DB \cos \varphi = 2\mathcal{E} \sin \frac{\delta}{2} \cos \varphi,$$

$$E_{2z} = AC \frac{\sin \varphi}{n^2} = 2\mathcal{E} \frac{\cos \frac{\delta}{2}}{n^2} \sin \varphi,$$

$$M_{2y} = AC \sqrt{\epsilon_1} = 2\mathcal{E} \sqrt{\epsilon_1} \cos \frac{\delta}{2}.$$

Для другого луча, поляризованного в плоскости падения, мы получим тоже ромб, но лишь с углом δ' вместо δ . Кроме того, те линии, которые в первом ромбе изображали электрические напряжения, будут во втором ромбе обозначать напряжения магнитные и наоборот.

8. Форма линий сил и лучей в первой среде

Мы выяснили, что происходит в первой среде у плоскости раздела XU ; исследуем теперь, что происходит выше этой плоскости для $z > 0$.

Пусть амплитуды падающего и отраженного лучей равны.

Проведем новую плоскость XU так, чтобы при $z = 0$ фазы обоих лучей были одинаковы, тогда будем иметь:

$$\mathcal{E} = A \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x \sin \varphi + z \cos \varphi}{v} \right),$$

$$R = A \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x \sin \varphi - z \cos \varphi}{v} \right).$$

Эти выражения показывают, что для не равного нулю z между R и \mathcal{E} имеется разность фаз δ , причем

$$\delta = \frac{4\pi}{T} \frac{\cos \varphi}{v} z = 4\pi \frac{z}{\lambda_z}, \quad (1)$$

где λ_z — расстояние между одинаковыми фазами каждого из лучей, считаемое по оси Z .

В тех местах, где δ имеет конечное значение, мы должны получить вращающееся в плоскости ZX электрическое или

магнитное поле, а следовательно, и направление потока энергии будет тоже меняться со временем. Опять

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg} \varphi} \cdot \operatorname{ctg} \left[\frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x \sin \varphi + z \cos \varphi}{v} \right) + \frac{\delta}{2} \right],$$

или, подставляя вышеприведенное значение δ и обозначая $\frac{\sin \varphi}{Tv} = \frac{1}{\lambda_x}$, получаем:

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{\operatorname{tg} \left(2\pi \frac{z}{\lambda_z} \right)}{\operatorname{tg} \varphi} \operatorname{ctg} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_x} \right).$$

Что касается формы кривых линий сил в первой среде, то опять заметим, что форма их со временем не меняется, только они движутся параллельно оси X с постоянной скоростью

$$v_x = \frac{\lambda_x}{T} = \frac{v}{\sin \varphi},$$

поэтому достаточно исследовать форму этих кривых для $t = 0$; положив

$$\frac{dx}{dz} = - \frac{\operatorname{tg} \left(2\pi \frac{z}{\lambda_z} \right)}{\operatorname{tg} \varphi} \operatorname{ctg} \left(2\pi \frac{x}{\lambda_x} \right),$$

имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi \int_{x_1}^x \operatorname{tg} \left(2\pi \frac{x}{\lambda_x} \right) dx &= - \int_{z_1}^z \operatorname{tg} \left(2\pi \frac{z}{\lambda_z} \right) dz, \\ - \operatorname{tg} \varphi \frac{\lambda_x}{2\pi} \ln \frac{\cos \left(2\pi \frac{x}{\lambda_x} \right)}{\cos \left(2\pi \frac{x_1}{\lambda_x} \right)} &= \frac{\lambda_z}{2\pi} \ln \frac{\cos \left(2\pi \frac{z}{\lambda_z} \right)}{\cos \left(2\pi \frac{z_1}{\lambda_z} \right)}, \end{aligned}$$

или, так как

$$\frac{\lambda_z}{\lambda_x} = \frac{Tv}{\sin \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi}{Tv} = \operatorname{ctg} \varphi,$$

то

$$\cos \left(2\pi \frac{x}{\lambda_x} \right) \cos \left(2\pi \frac{z_1}{\lambda_z} \right) = \cos \left(2\pi \frac{x_1}{\lambda_x} \right) \cos \left(2\pi \frac{z}{\lambda_z} \right). \quad (\text{Ie})$$

Для кривых линий потоков энергии получим точно так же:

$$\sin \left(2\pi \frac{x}{\lambda_x} \right) \sin \left(2\pi \frac{z_1}{\lambda_z} \right) = \sin \left(2\pi \frac{x_1}{\lambda_x} \right) \sin \left(2\pi \frac{z}{\lambda_z} \right). \quad (\text{If})$$

На рис. 3 показаны формы этих кривых. Подробное рассмотрение их сделаем ниже (§ 9).

Составляющие потоков энергии по осям Z и X для луча, поляризованного в плоскости падения, и для луча, поляризованного перпендикулярно к этой плоскости, будут одинаковы, а именно

$$f_z = \frac{c}{4\pi} E_x M_y \quad \frac{c}{4\pi} E_y M_x,$$

$$f_x = -\frac{c}{4\pi} E_z M_y - \frac{c}{4\pi} E_y M_z,$$

а так как

$$E_x = (\mathcal{E} - R) \cos \varphi = -2\mathcal{E} \cos \varphi \sin \frac{\delta}{2} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_x} \right),$$

$$E_z = -(\mathcal{E} + R) \sin \varphi = -2\mathcal{E} \sin \varphi \cos \frac{\delta}{2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_x} \right),$$

$$M_y = (\mathcal{E} + R) \sqrt{\varepsilon_1} = 2\mathcal{E} \sqrt{\varepsilon_1} \cos \frac{\delta}{2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_x} \right),$$

то

$$f_z = -\frac{c}{4\pi} \mathcal{E}^2 \sin \delta \cos \varphi \sqrt{\varepsilon_1} \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_x} \right),$$

$$f_x = 4 \frac{c}{4\pi} \mathcal{E}^2 \cos^2 \delta \sin \varphi \sqrt{\varepsilon_1} \sin^2 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_x} \right).$$

Это означает, что по оси Z энергия движется взад и вперед, образуя *стоячую волну* с различными фазами параллельно оси X ; составляющая же потока энергии по X хотя и меняется со временем, но всегда положительная, поэтому по оси X энергия образует *проходящую волну*.

Мы видим, что в первой среде у нас получаются явления, вполне аналогичные тем, которые мы уже разобрали для второй среды при полном внутреннем отражении (см. § 5).

Как там, так и здесь f_x нельзя считать за самостоятельный луч света, идущий параллельно плоскости раздела, иначе мы и здесь должны будем допустить существование продольных световых колебаний. Более того, здесь нам нельзя уже будет для объяснения такой аномалии сослаться на «колебания с переменной амплитудой», ибо амплитуда в первой среде, несомненно, постоянная,

При нормальном падении $\sin \varphi = 0$, $f_x = 0$, $\lambda_x = \infty$, и мы получаем только стоячие волны:

$$f_z = -\frac{c}{8\pi} \mathcal{E}^2 \sin\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) \sin\left(4\pi \frac{t}{T}\right).$$

Как известно, стоячие волны при $\varphi = 45^\circ$ и при $\varphi = 0$ были обнаружены на опыте О. Wiener'ом.

9. Объяснение рисунков

В обоих рисунках 3 и 4 линии сил обозначены пунктирными линиями, а перпендикулярные к ним траектории энергии, или лучи, — сплошными линиями.

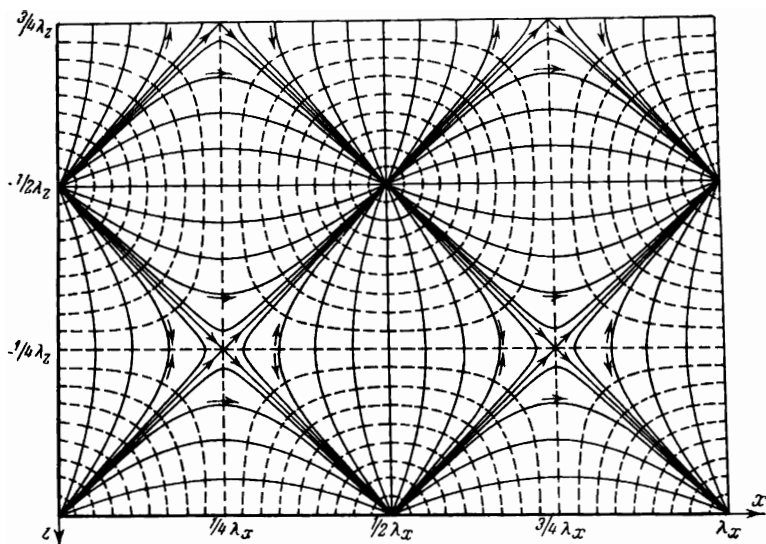


Рис. 3.

Угол падения φ принят для простоты в 45° , при этом $\lambda_x = \lambda_z$. Рис. 3 изображает поле падающего и отраженного лучей при разности фаз $\delta = 0$ (формула (1e), § 8). Это будет случай отражения от идеального зеркала, или случай предельного полного внутреннего отражения $\sin \varphi = n$.

Следовательно, при $\varphi = 45^\circ$ для этого случая необходимо, чтобы вещество первой среды имело $n = 1,41$.

При другом n наш рисунок немного изменится, а именно, λ_x не будет равно λ_z ; но это изменение для нас пока несущественно.

Мы видим, что все поле распределено на отдельные квадраты, внутри которых находятся замкнутые линии сил. Эти линии сил — электрические для луча, поляризованного перпендикулярно к плоскости падения; они же представляют собой магнитные линии сил для луча, поляризованного в плоскости падения. Разница лишь в том, что для второго случая нужно себе представить плоскость раздела перемещенной на $\lambda_z/4$ выше, т. е. по направлению — Z .

Упомянутые выше квадраты, параллельные осям X и Z , представляют собой тоже линии сил. В тех местах, где в данный момент времени $t = 0$, угол $\psi = 0$, или 180° , т. е. где

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{-1}{\operatorname{tg} \varphi} \operatorname{tg} \left(2\pi \frac{z}{\lambda_z} \right) \operatorname{ctg} \left(2\pi \frac{x}{\lambda_x} \right) = 0,$$

а именно, где $2\pi \frac{x}{\lambda_x}$ равно нечетному числу $\pi/2$ или

$$x = (2\nu + 1) \frac{\lambda_x}{4},$$

причем ν — какое-либо целое число, — там мы будем иметь прямую линию сил, параллельную оси Z . Где $\psi = 90^\circ$, а именно, для

$$z = (2\nu + 1) \frac{\lambda_z}{4},$$

линии сил параллельны оси X .

Между $z = 0$ и $z = -\frac{\lambda_z}{4}$ значение $\operatorname{tg} \left(2\pi \frac{z}{\lambda_z} \right)$ отрицательно; в то же время между $x = 0$ и $x = +\frac{\lambda_x}{4}$ значение $\operatorname{ctg} \left(2\pi \frac{x}{\lambda_x} \right)$ положительно; следовательно, в малом квадрате $0, -\frac{\lambda_x}{4}, +\frac{\lambda_x}{4}, 0$ значение $\operatorname{tg} \psi_1$ положительно, и линии идут слева направо, понижаясь. Легко также сообра-

зять, что в большом квадрате $+\frac{\lambda_x}{4}$, $+\frac{3\lambda_x}{4}$, $-\frac{\lambda_x}{4}$, $-\frac{3\lambda_x}{4}$ все замкнутые линии сил имеют направление по стрелке часов. В смежных же квадратах направления линий сил взаимно противоположны.

Линии потоков энергии (формула (If), см. выше) направлены все слева направо, т. е. по направлению $+X$. Только иногда они при этом повышаются, иногда понижаются.

С течением времени t весь рисунок нужно себе представить движущимся равномерно по оси $+X$ со скоростью $\frac{v_1}{\sin \varphi}$.

Фиксируем какую-либо неподвижную линию $x = x_1$, тогда увидим, что при движении всех линий по направлению $+Z$ энергия будет колебаться параллельно Z , причем, в то время как между $z = 0$ и $z = -\frac{1}{4}\lambda_z$ энергия будет колебаться вверх и вниз, в местах $z = -\frac{1}{4}\lambda_z$ и $z = -\frac{1}{2}\lambda_z$ колебания энергии будут происходить в противоположном направлении, т. е. вниз и вверх. Энергия, а также и линии сил дадут по оси Z *стоячую волну*, с пучностями для

$$Z = (2\nu + 1) \frac{\lambda_x}{4}.$$

По оси X мы получим, наоборот, *проходящую волну*.

Если угол падения φ не равен 45° , но все же $\mathcal{E} = R$, то все рассуждения останутся прежними, только квадраты линий сил удлинятся по X или по Z в прямоугольные четырехугольники. Наконец, если \mathcal{E} не равно R , а больше R , что имеет место при простом отражении с преломлением, то весь рисунок скосится так, что вместо вертикальных линий получатся наклонные под углом

$$\operatorname{tg} \psi_1 = -\frac{\mathcal{E} - R}{\mathcal{E} + R} \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi},$$

и прямоугольники обратятся в параллелограммы [17].

Рис. 4 изображает поле лучей у плоскости раздела двух сред при полном внутреннем отражении. Здесь плоскость раздела помещена ниже, чем на чертеже 3, на величину

$$z = \frac{\lambda_z}{2\pi} \cdot \frac{\delta}{2}$$

согласно формуле (1) § 8. Для полноты картины нужно себе представить рис. 3 надставленным на рис. 4 и все вместе движущимся по оси $+X$ с постоянной скоростью $\frac{v}{\sin \varphi}$.

Мы видим здесь, что линии сил во второй среде, построенные по формуле (IIe) § 5, представляют собой продолжение линий сил в первой среде с переломом на границе, как того требуют пограничные условия.

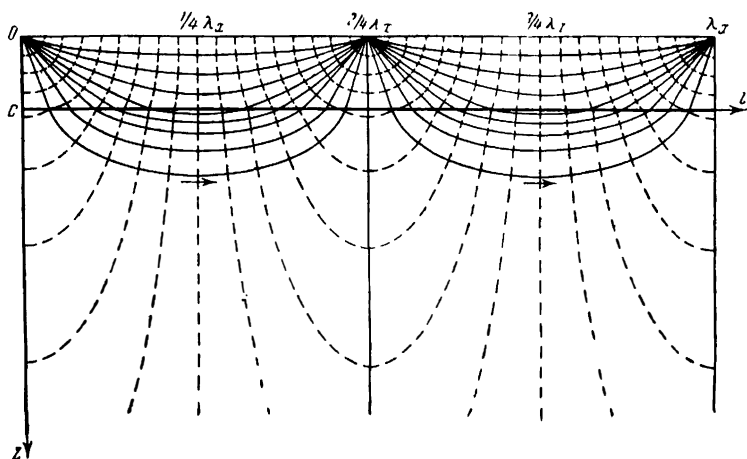


Рис. 4.

Для магнитных линий сил при $\mu_1 = \mu_2$ такого перелома не будет, и кроме того, или вернее именно вследствие этого, δ будет другое.

То же самое можно сказать и про линии потоков энергии (формула (IIf) § 5). Энергия падающего луча как бы ныряет во вторую среду, чтобы затем вновь появиться в первой среде в луче отраженном. Но вход и выход энергии происходят для разных мест в разное время, а для данного времени вход энергии во вторую среду происходит в местах, отстоящих друг от друга на половине расстояния между одинаковыми фазами по оси X .

Итак, общая картина такова:

1) При угле φ , меньшем предельного $\sin \varphi < n$, мы имеем преломленный луч постоянного направления χ ; энергия частью входит во вторую среду.

2) При предельном угле $\sin \varphi = n$, $\chi = 90^\circ$, но интенсивность преломленного луча равна нулю, энергия не входит во вторую среду вовсе.

3) При дальнейшем увеличении φ преломленный луч хотя и не имеет постоянного направления, но все же энергия входит во вторую среду на некоторое время и на некоторую глубину. При этом разности фаз δ и γ падающего, отраженного и преломленного лучей растут непрерывно, разность же $\delta - \delta'$ имеет максимум и затем вновь уменьшается до нуля при $\varphi = 90^\circ$.

4) Наконец, при $\varphi = 90^\circ$ луч скользит по поверхности раздела и во вторую среду не входит.

