



Квантование энергии электронов в магнитном бета-спектрометре

Quantization of energy of electrons in a magnetic beta- spectrometer

А. П. Трунев (Toronto, Canada)

Alexander P. Trunev

На основе квантовой механики сделан анализ движения электронов в магнитном бета-спектрометре. Показано, что это движение характеризуется наличием дополнительного квантового числа и большим значением механического момента, что существенно влияет на спектры бета-электронов.

Ключевые слова: Бета-распад, квантовая механика, магнитный бета-спектрометр, магнитное поле, нейтрино, электрон

The motion of electrons in a magnetic beta-spectrometer has been analyzed on the basis of quantum mechanics. It is shown that this movement is characterized by an additional quantum number, and a large mechanical moment, which significantly affects the spectra of beta-electrons.

Keywords: Beta decay, quantum mechanics, magnetic beta-spectrometer, magnetic field, electron

Введение

Основы классической теории движения заряженных частиц в электрических и магнитных полях были заложены в трудах Лоренца /1-2/. В 1987 году, исследуя катодные лучи, Томсон /3/ открыл элементарные носители негативного электричества, которые позже получили название электроны. Томсон измерил отношение заряда к массе электрона, предполагая, что динамика этих частиц описывается классическими уравнениями. Но уже в 1901 г, исследуя бета-лучи, Кауфман /4-5/ обнаружил, что закон отклонения бета-электронов в электрическом и в магнитном поле отличается от классических законов. Используя результаты ранних опытов Кауфмана /4/, Абрагам /6/, Бухерер /7/ и Эйнштейна /8-9/ развили теории движения электронов, движущихся со скоростью, близкой к скорости света. Однако, точность ранних опытов Кауфмана /4/ не была достаточной, что бы решить, какая из моделей правильно описывает динамику электрона. В 1905-1906 г

Кауфман повторил свои эксперименты /5/, а также сделал анализ движения электрона на основе теорий Абрагама /6/, Лоренца /2/ и новой теории Эйнштейна /8/, доказав идентичность последних двух, но данные его экспериментов совпали с теорией Абрагама /6/.

Эйнштейн в 1906 г в своей работе "Определения соотношения между поперечной и продольной массами" /9/, показал что теории Лоренца и Эйнштейна действительно дают одинаковый результат, а теории Абрагама и Бухерера дают более низкое значение отношения поперечной массы к продольной. Он предложил свою схему эксперимента по определению этого соотношения в электростатическом поле. Планк /10/ выполнил анализ данных /4/ и показал их близкое соответствие теории Лоренца-Эйнштейна. Нейман выполнил ряд экспериментов /11/ с бета-лучами, в которых скорость бета-электронов определялась с высокой точностью, а также сравнил теории /2, 6-8/. Он подтвердил теорию Лоренца-Эйнштейна, однако сомнения в правильности этой теории все еще оставались, поэтому было выполнено множество экспериментов с катодными лучами /12/, которые, казалось, окончательно подтверждали теорию Лоренца-Эйнштейна. Но реально эксперимент с необходимой точностью был поставлен только в 1940 г, когда Роджерс и другие измерили параметры движения бета-электронов в электростатическом анализаторе /13/. И только после этого теория Лоренца была признана верной, а теория Абрагама была отвергнута как несостоятельная.

Развитие релятивистской теории движения электронов и совершенствование методов измерения траекторий в магнитных и электрических полях привели к открытию бета-спектров, анализ которых, казалось, свидетельствовал о нарушении законов сохранения энергии в бета-распадах /14/. Паули /15/ предположил, что в бета-распаде, кроме ядра и электрона, участвует третья частица, которую Ферми /16/ назвал нейтрино. Общими усилиями Дирака /17/ и Ферми были заложены основы теории слабых взаимодействий, что

позволило объяснить многие особенности бета-спектров электронов /18-19/. Поиски гипотетической частицы, отвечающей за выполнение законов сохранения энергии, импульса и момента импульса в бета-распаде, затянулись на 25 лет /20/. Было установлено, что нейтрино действительно является нейтральной частицей с малой величиной массы /21/.

Следует заметить, что идея измерения распределения бета-электронов по энергиям восходит к Томсону /3/, создавшему магнитный спектрометр, принцип действия которого основан на анализе классических траекторий электронов в магнитном поле. В последующие десятилетия была создана квантовая механика /22/, описывающая, в том числе, движение электронов в магнитном поле /23/. Однако движение частиц в магнитном анализаторе все еще описывается классическими уравнениями, без какой-либо оценки влияния квантового поведения электронов на результаты измерений.

В настоящей работе, на основе уравнения Шредингера /22-23/, сделан анализ движения электронов в экспериментальных установках /4-5,11, 13/. Показано, что в экспериментах с электронами в постоянных электрических и магнитных полях классическая траектория квантуется, поэтому точность измерений всегда ограничена шириной функции распределения. Отсюда следует, что формулы классической электродинамики Лоренца нельзя подтвердить точнее, чем позволяет квантовая природа движения электрона. Сделана оценка влияния конечной ширины функции распределения электронов на бета-спектры электронов, измеренные в магнитном анализаторе. На основе прямого анализа данных /5, 11/ показано, что бета-спектры можно описать на основе квантовой механики, не привлекая гипотезу Паули о трехчастичном распаде.

Движение электрона в магнитном поле

Рассмотрим однородное магнитное поле, направленное вдоль оси Oz системы. В цилиндрической системе координат однородному магнитному полю соответствует векторный потенциал вида /23/

$$\mathbf{A} = (0, A_\varphi, 0), \quad A_\varphi = \frac{rB_z}{2} \quad (1)$$

Отметим, что функция (1) удовлетворяет условию калибровки $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ и является решением уравнения Лапласа

$$\Delta \mathbf{A} = 0.$$

В постоянном магнитном поле в классическом случае электроны движутся по круговым орбитам, радиус которых определяется из условия равновесия в форме уравнения

$$\frac{m v^2}{\rho} = e v H \quad (2)$$

Согласно теории Лоренца /2/ и Эйнштейна /8-9/, при повышении скорости поперечная масса электрона изменяется на релятивистский фактор:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (3)$$

Предположим, что выполняется гипотеза Лоренца в форме уравнения (3), тогда подставляя (3) в (4) и разрешая уравнение (2) относительно скорости, находим

$$v(H) = \frac{eH\rho / m_0}{\sqrt{1 + (eH\rho / m_0 c)^2}} \quad (4)$$

Следовательно, можно определить скорость электронов, используя только данные по магнитному полю. Зная скорость, можно определить

кинетическую энергию электронов, а затем, измерив число электронов с помощью счетчика Гейгера, построить бета-спектр данного изотопа. На практике применяются более сложные методики [18], однако во всех существующих методиках траектории электронов определяются по уравнениям классической динамики с учетом силы Лоренца и релятивистских поправок, что приводит к выражению типа (4). Рассмотрим вопрос о правомерности такого подхода с учетом волновой природы электрона.

Уравнение Шредингера, описывающее движение электрона в магнитном поле имеет вид [23]:

$$\frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})^2 \Psi_n = E_n \Psi_n \quad (5)$$

Здесь $\hat{\mathbf{p}}$, \mathbf{A} - оператор импульса и векторный потенциал соответственно.

Подставим выражение (1) в уравнение (5), в результате, с учетом выражения оператора импульса в цилиндрической системе координат, находим

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\Psi_{rr} + \frac{1}{r} \Psi_r + \frac{1}{r^2} \Psi_{\varphi\varphi} + \Psi_{zz} \right) + \frac{e^2 B_z^2 r^2}{8m} \Psi + \frac{i\hbar e B_z}{4m} \Psi_{\varphi} = E \Psi \quad (6)$$

Будем искать решение уравнения (6) в виде функции

$$\Psi = \frac{\chi(r)}{r^{1/2}} \exp(iM\varphi + ik_z z) \quad (7)$$

Подставляя выражение (7) в уравнение (6) и разделяя переменные, находим

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\chi'' - \frac{M_0^2}{r^2} \chi - k_z^2 \chi \right) + \frac{e^2 B_z^2 r^2}{8m} \chi - \frac{\hbar M e B_z}{4m} \chi = E \chi \quad (8)$$

Внешне уравнение (8) мало отличается от исследованного ранее в задаче о квантовых осцилляциях электрона в магнитном поле [23]. Нас интересуют

решения, для которых справедливо классическое уравнение (2). Метод получения этих решений был рассмотрен в работе /24/.

Введем новую переменную, описывающую отклонение электрона от классической траектории согласно $r = R + \xi$. Будем считать, что в своем движении электрон слабо отклоняется от классической траектории, т.е. справедливо соотношение $\xi / R \ll 1$. Разложим коэффициент уравнения (25) по степеням малого параметра ξ / R . Удерживая только линейные и квадратичные слагаемые, находим условие симметрии волновой функции относительно классической траектории

$$\frac{\hbar^2 M_0^2}{2mR^3} 2\xi - \frac{e^2 B_z^2}{8m} 2R\xi = 0 \quad (9)$$

Подставляя классическое условие равновесия сил (2) в уравнение (9), находим

$$\hbar^2 M_0^2 = \frac{(m v R)^2}{4} \quad (10)$$

Следовательно, при движении в магнитном поле классический момент в два раза больше квантового механического момента. При выполнении условия (10), уравнение (8) принимает вид, как в модели квантового гармонического осциллятора /23/

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \chi'' + \frac{m\omega^2}{2} \xi^2 \chi = \tilde{E} \chi, \quad \omega^2 = \frac{e^2 B_z^2}{4m^2} + \frac{3\hbar^2 M_0^2}{m^2 R^4} \quad (11)$$

$$\tilde{E} = E - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{M_0^2}{R^2} + k_z^2 \right) - \frac{(eB_z R)^2}{8m} + \frac{\hbar M e B_z}{4m}$$

Интересно, что с учетом условия равновесия (9) частота квантовых осцилляций совпадает с ее значением в задаче Ландау /23/

$$\omega^2 = \frac{e^2 B_z^2}{m^2} \quad (12)$$

Собственные функции уравнения (11) имеют стандартный вид /23/

$$\chi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega \xi^2}{2\hbar}\right) H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \xi\right) \quad (13)$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

Условие квантования уровней энергии можно представить в форме

$$E = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{M_0^2}{R^2} + k_z^2 \right) + \frac{(eB_z R)^2}{8m} - \frac{\hbar M e B_z}{4m} \quad (14)$$

Из выражения (14) следует, что электрон может изменять свою энергию при движении в магнитном поле, путем возбуждения дискретных уровней энергии с частотой (12). Эти переходы, известные как уровни Ландау, были обнаружены в двумерном электронном газе /24/. Следовательно, они могут быть обнаружены и при движении электронов в окрестности классических орбит.

Движение электронов в магнитном бета-спектрометре

Электроны, возникающие при бета-распаде, обладают начальной кинетической энергией $E = E_k$, величина которой анализируется в магнитном поле согласно классическим уравнениям (2-4). Очевидно, что уравнение (14) также может быть использовано для определения кинетической энергии электрона. Рассмотрим прототип магнитного бета-спектрометра из работы /11/. В методе Неймана используется комбинация

электрического и магнитного поля для отклонения бета-электронов, с дальнейшей фиксацией их треков на фотопластинке — рис. 1. Магнитное и электрическое поле в конденсаторе ортогональны и подобраны так, что сила Лоренца, действующая на бета-электроны, равна нулю, следовательно (в обозначениях работы /11/)

$$v/c = \beta = E / Hc \quad (15)$$

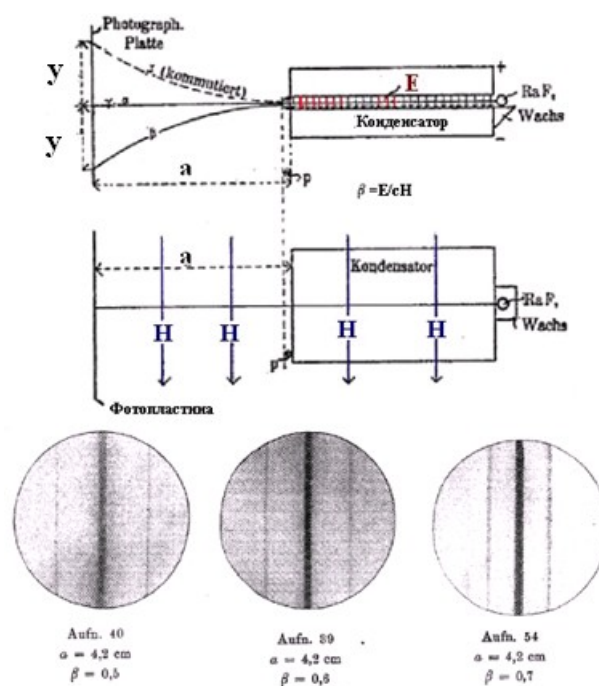


Рис. 1. Схема установки из работы /11/: электроны оставляют на фотопластинке узкие вертикальные полосы, соответствующие прямой или противоположной ориентации магнитного поля; гамма лучи и альфа частицы оставляют жирную среднюю полосу. Размеры конденсатора - 5х3х0,5 см, зазор — 0,2511 мм.

Координата электрона на фотопластинке, радиус орбиты и динамические параметры связаны соотношениями

$$R = \frac{mc}{eH} \beta = \frac{mE}{eH^2} = \frac{a^2 + y^2}{2y} \quad (16)$$

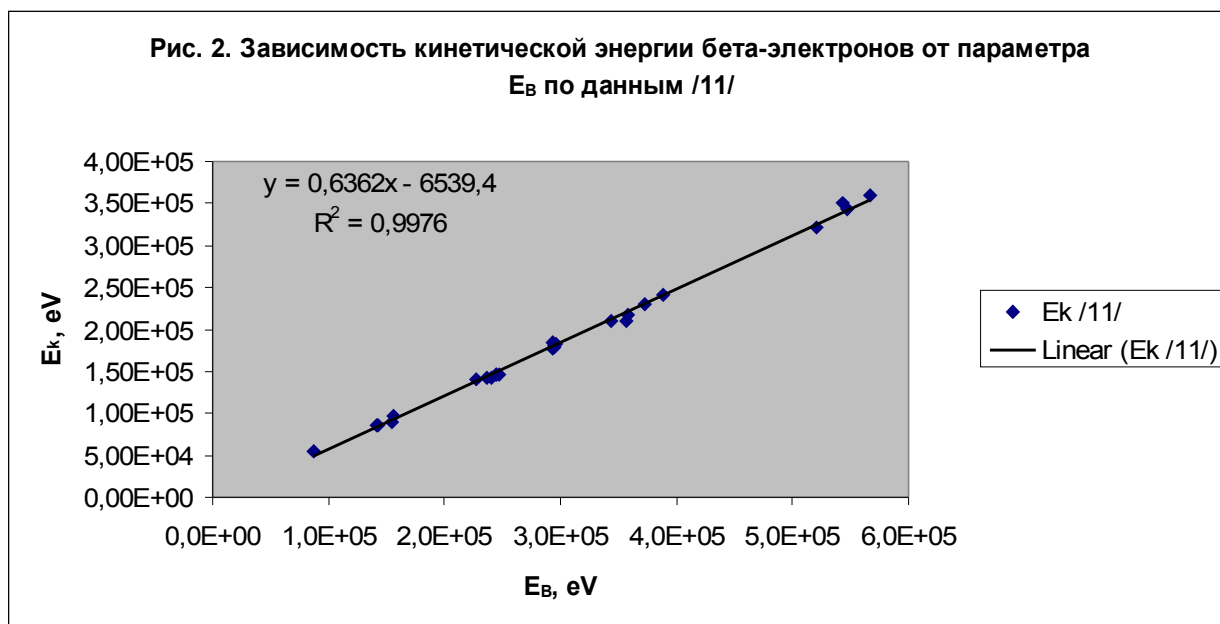
Отсюда можно вычислить поперечную массу электрона, а также кинетическую энергию, используя *релятивистскую* формулу /8-9/:

$$E_k = (m - m_0)c^2 \quad (17)$$

Анализ уравнения (14), с учетом (9) и (12), показывает, что кинетическая энергия электронов зависит от параметра

$$E_B = e^2 B_z^2 R^2 / m \quad (18)$$

В таблице 1 и на рис. 2 представлены данные /11/, обработанные по уравнениям (15-18). Согласно данным, приведенным на рис. 2, кинетическая энергия электронов линейно зависит от параметра (18).



Отметим, что параметр (18) с учетом уравнений (16), можно представить в форме

$$E_B = PR/d, \quad eV \quad (19)$$

Здесь P , d – напряжение на конденсаторе и расстояние между пластинами соответственно.

Таблица 1. Кинетическая энергия бета-электронов по данным [11]: параметры массы и энергии вычислены с использованием современных значений физических констант

B, Gauss	P, Volt	a, cm	z, cm	R, cm	v/c	m/m ₀	Lorentz	M	E _B , eV	E _K , eV
133,19	593,1	4,1035	0,9173	9,6371	0,591546	1,272999	1,240278	9,40E+10	2,28E+05	1,40E+05
110,97	423,14	4,1028	0,9603	9,2446	0,506537	1,18818	1,159799	7,20E+10	1,56E+05	9,62E+04
133,19	656,04	4,1026	0,7672	11,3529	0,654322	1,355778	1,322373	1,30E+11	2,97E+05	1,82E+05
133,19	655,69	4,8078	1,0734	11,3039	0,653973	1,35064	1,321845	1,29E+11	2,95E+05	1,79E+05
110,97	592,28	5,1785	0,8726	15,8024	0,709013	1,451023	1,418046	2,11E+11	3,73E+05	2,30E+05
133,19	654,84	4,1682	0,8	11,2587	0,653125	1,346988	1,320567	1,28E+11	2,94E+05	1,77E+05
110,97	506,47	5,1496	1,172	11,8993	0,60629	1,277753	1,257477	1,19E+11	2,40E+05	1,42E+05
133,19	654,85	4,6183	0,9854	11,3151	0,653135	1,353711	1,320582	1,30E+11	2,95E+05	1,81E+05
133,9	654,84	4,1689	0,8	11,2623	0,649662	1,361828	1,315403	1,29E+11	2,94E+05	1,85E+05
128,19	772,85	4,1905	0,5004	17,7965	0,800891	1,671147	1,66998	3,08E+11	5,48E+05	3,43E+05
128,19	665,87	4,1905	0,6966	12,95259	0,69003	1,411703	1,381634	1,63E+11	3,43E+05	2,10E+05
128,19	580,75	4,1905	0,8961	10,24623	0,601821	1,280416	1,252143	1,02E+11	2,37E+05	1,43E+05
106,8	407,9	4,1905	0,9714	9,524351	0,507359	1,17623	1,16045	7,36E+10	1,55E+05	9,01E+04
128,19	766,64	4,6453	0,6165	17,80931	0,794456	1,685901	1,646574	3,09E+11	5,44E+05	3,50E+05
128,19	678,87	4,6453	0,8451	13,18957	0,703502	1,410004	1,407076	1,69E+11	3,57E+05	2,10E+05
128,19	591,59	4,6453	1,0852	10,48492	0,613055	1,286236	1,265758	1,07E+11	2,47E+05	1,46E+05
106,8	393,28	4,6453	1,2723	9,116387	0,489174	1,1677	1,146544	6,74E+10	1,43E+05	8,57E+04
96,328	284,11	4,6453	1,5657	7,673957	0,391802	1,106894	1,086898	4,31E+10	8,68E+04	5,46E+04
96,328	283,92	4,2013	1,2523	7,673551	0,39154	1,107576	1,086766	4,31E+10	8,68E+04	5,50E+04
128,19	762,96	5,1567	0,7939	17,14437	0,790643	1,630783	1,633245	2,86E+11	5,21E+05	3,22E+05
128,19	676,15	5,1567	1,0409	13,2938	0,700683	1,426863	1,401595	1,72E+11	3,58E+05	2,18E+05
128,19	589,05	5,1567	1,3635	10,43296	0,610423	1,285381	1,262505	1,06E+11	2,45E+05	1,46E+05
106,8	391,66	4,2013	1,0319	9,068582	0,487159	1,166382	1,145064	6,67E+10	1,41E+05	8,50E+04
128,19	588,48	4,2013	0,8825	10,44177	0,609832	1,287712	1,261781	1,06E+11	2,45E+05	1,47E+05
128,19	693,2	4,2013	0,6427	14,0532	0,718351	1,471272	1,437442	1,92E+11	3,88E+05	2,41E+05
128,19	779,08	4,2013	0,4892	18,2852	0,807347	1,703311	1,694696	3,26E+11	5,67E+05	3,59E+05

Уравнение (14) можно использовать для оценки квантового числа возбуждения осцилляций электронов n при заданной начальной энергии бета-электронов. Условие равновесия в форме (9) служит для определения квантового углового момента, величина которого, согласно данным [11], приведенным в таблице 1, достигает значения $M_0 \approx M \approx 10^{11}$. При этом

проекция квантового механического момента на направление магнитного поля может принимать как положительное, так и отрицательное значение, что описывается последним слагаемым в правой части уравнения (14). Классическому движению соответствует положительное значение проекции момента (электрон вращается против часовой стрелки в плоскости, перпендикулярной вектору индукции магнитного поля), следовательно, из уравнения (9), имеем

$$\hbar M \approx \hbar M_0 = - \frac{eB_z R^2}{2}, \quad e < 0 \quad (20)$$

Подставляя это выражение в уравнение (14) и учитывая зависимость момента от индукции магнитного поля в форме уравнения равновесия (9), находим

$$E_k = \frac{3(eB_z R)^2}{8m} + \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \quad (21)$$

С другой стороны, согласно данным, приведенным на рис. 2, кинетическая энергия электронов в магнитном поле линейно зависит от параметра (18), следовательно

$$\hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} = 0,2612E_B - 6539,4 \quad (22)$$

Отсюда, используя выражения (12) и (20), находим оценку квантового числа осцилляций в магнитном поле

$$\hbar n \approx 0,2612eB_z R^2 \approx - \frac{\hbar M}{2} \quad (23)$$

Таким образом, движение бета-электронов в магнитном поле анализатора бета-спектров типа /11/ характеризуется большим средним числом квантового механического момента $M \cong 10^{11}$ и таким же по величине средним квантовым числом осцилляций $n \approx 10^{10} \div 10^{11}$.

Эксперименты Кауфмана

Зависимость поперечной массы от скорости электрона впервые была обнаружена в опытах /4-5/, которые наиболее трудны для анализа, поскольку движение электрона в установке Кауфмана не обладает симметрией. На рис.2 представлена схема эксперимента Кауфмана по определению зависимости массы от скорости электрона, в обозначениях, взятых из оригинальных работ /3-4/. Электроны, возникающие в результате бета-распада бромида радия, покидают источник, расположенный в центре одной из открытых граней высоковольтного плоского конденсатора высотой h . Координаты источника обозначим $(0,0,0)$. Направим оси прямоугольной системы координат Ox , Oy параллельно плоскостям обкладок конденсатора, ось Oz — перпендикулярно плоскостям. На противоположной источнику грани конденсатора, в центре установлена диафрагма с малым отверстием ($0,2$ мм в диаметре), координаты которого обозначим $(x_1,0,0)$. Выше по оси Ox , параллельно граням с источником и отверстием, располагается фотографическая пластинка, плоскость которой пересекается с осью Ox в точке с координатами $(x_2,0,0)$. Установка находится в постоянном однородном магнитном поле $\mathbf{B} = (0,0, B_z)$.

Электрон, покидая источник, ускоряется в поле конденсатора и проходит сквозь отверстие диафрагмы со скоростью, которая определяется напряженностью электрического поля и временем пребывания в конденсаторе. При этом электрон движется в магнитном поле по некоторой круговой траектории, в соответствии с уравнением (2). Подавая на конденсатор постоянное напряжение, можно изменять траекторию при заданных начальных данных. Поскольку электроны в начальном состоянии имеют спектр энергии, на фотографической пластинке образуется трек, анализируя который, можно восстановить динамические параметры электрона.

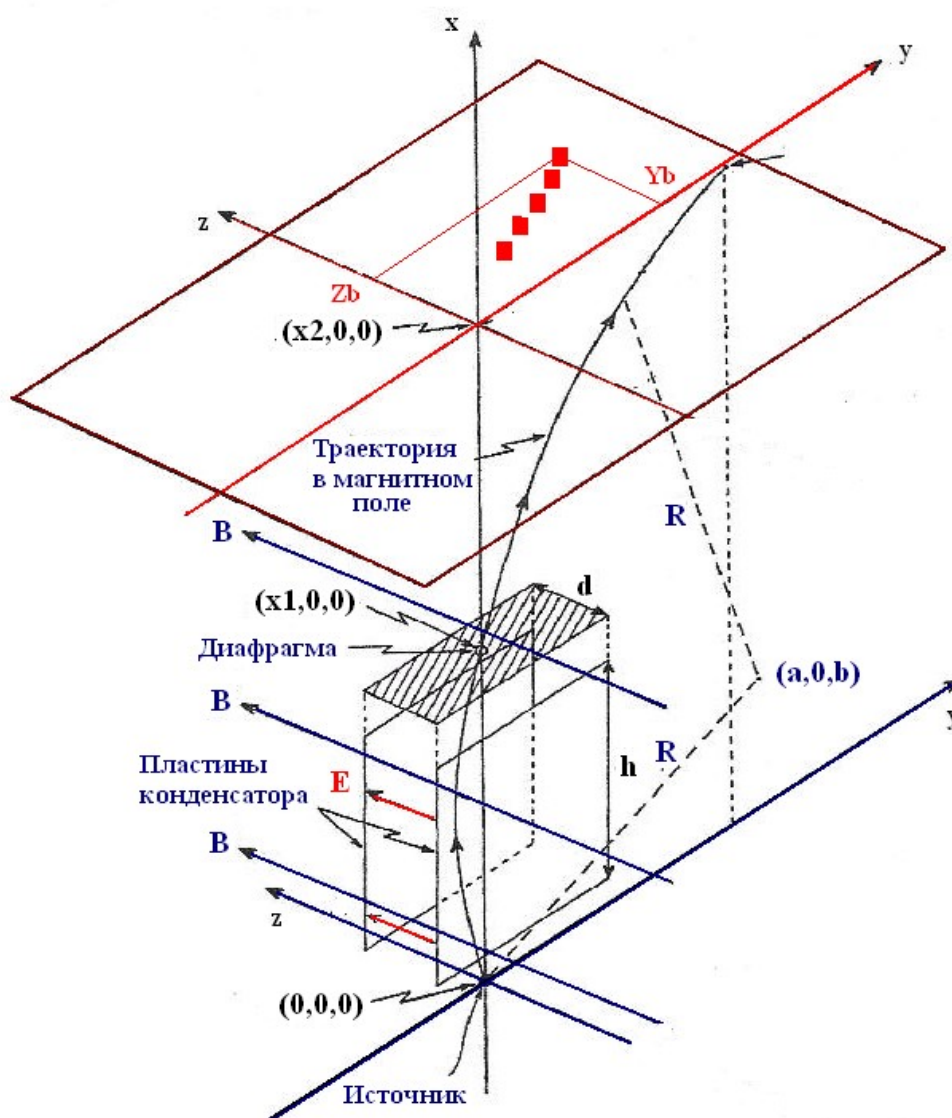


Рис. 3. Схема движения электрона в экспериментах Кауфмана /4-5/. Красными квадратами обозначен трек электронов.

Для этого координаты точек, оставленных электронами на фотографической пластинке, определяются экспериментально – таблица 2, и вычисляются из уравнений классической динамики, согласно /4-5/, имеем

$$v_x = \frac{E_z s_1 s_2}{z_b R H}, \quad \frac{e}{m} = \frac{v_x}{R H}$$

$$R^2 = \left(\frac{x_1 - x_0}{2} + x_2 - x_1 \right)^2 + \left(\sqrt{R^2 - (x_1 - x_0)^2 / 4} - y_b \right)^2 \quad (24)$$

$$s_1 = R \arcsin \frac{h}{2R}, \quad s_2 = 2R \arcsin \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + y_b^2}}{2R}$$

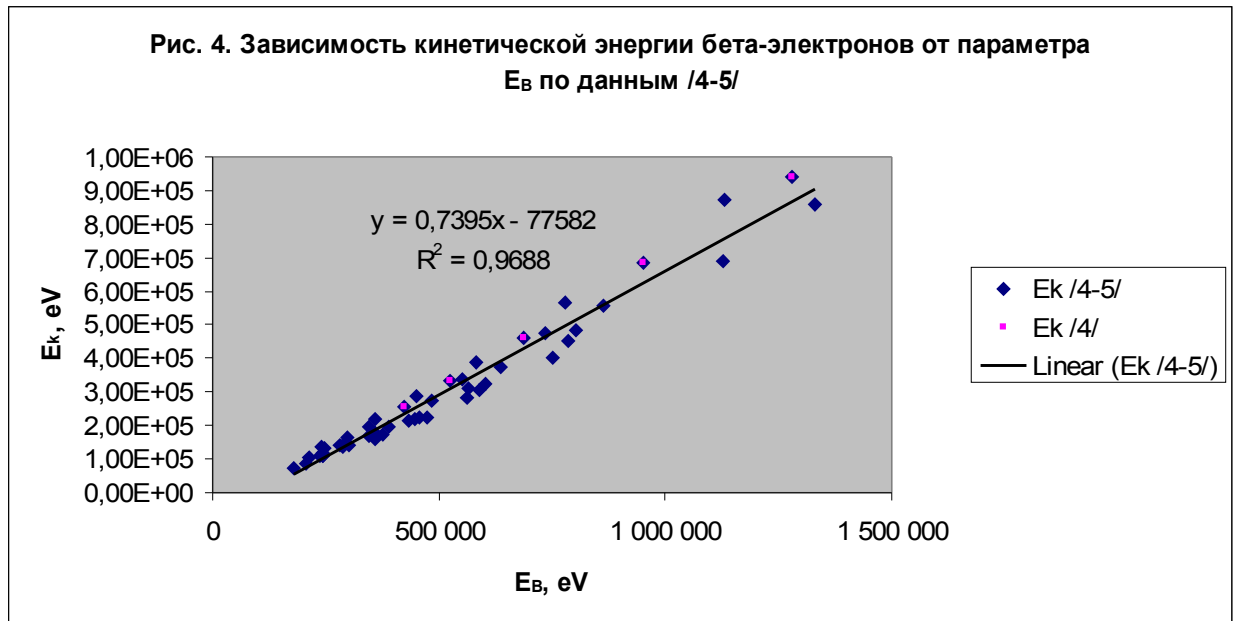
Отметим, что хотя второе из этих уравнений легко разрешается относительно R , Кауфман упростил выражение радиуса орбиты электрона в магнитном поле. В результате этого упрощения его результаты получили систематическую ошибку величиной в 3,7%. Без этих упрощений данные /4/ хорошо согласуются с теорией Лоренца, на что впервые указал Планк /10/, однако данные /5/ согласуются с теорией Лоренца лишь при малой скорости электронов — см. таблицу 2.

В таблице 2 представлены оригинальные данные /4-5/, полученные в фиксированном магнитном поле $B_z=299$ Гаусс /4/ и 144 Гаусс /5/ соответственно, при различном напряжении на конденсаторе. Отметим, что расчетные формулы Кауфмана весьма чувствительны к точности определения величины отклонения траектории электрона в поле электрического конденсатора. Поэтому при малой величине отклонения, что соответствует большой величине скорости, рассеяние данных весьма велико — рис. 3, а отклонение от теории Лоренца достигает 100% .

Таблица 2. Кинетическая энергия бета-электронов по данным /4-5/: параметры массы и энергии вычислены с использованием современных значений физических констант

B, Gauss	P Volt	z _b , cm	y _b , cm	R, cm	v/c	m/m ₀ Lorentz	m/m ₀	EB, eV	E _k , eV /4-5/	M(v)
144	2605	0,0357	0,1771	22,2066	0,89946	2,28835	2,08575	8,62E+05	5,55E+05	5,39E+11
144	2605	0,0486	0,2271	17,37322	0,84699	1,88111	1,73286	6,35E+05	3,74E+05	3,30E+11
144	2605	0,0639	0,2771	14,29535	0,78572	1,6166	1,53706	4,85E+05	2,74E+05	2,24E+11
144	2605	0,0797	0,3271	12,16791	0,74328	1,49482	1,38301	3,90E+05	1,96E+05	1,62E+11

144	2603	0,042	0,2	19,69102	0,86263	1,97691	1,92845	7,33E+05	4,74E+05	4,24E+11
144	2603	0,0546	0,25	15,8092	0,82916	1,7889	1,61076	5,66E+05	3,12E+05	2,73E+11
144	2603	0,0695	0,3	13,23168	0,78135	1,60233	1,43064	4,46E+05	2,20E+05	1,92E+11
144	2603	0,0866	0,35	11,39944	0,73121	1,46596	1,31705	3,60E+05	1,62E+05	1,42E+11
144	2603	0,1083	0,4	10,03294	0,66784	1,34354	1,26916	2,89E+05	1,38E+05	1,10E+11
144	2603	0,13	0,45	8,97691	0,6255	1,28168	1,21245	2,42E+05	1,09E+05	8,81E+10
144	2603	0,154	0,5	8,13817	0,58625	1,23437	1,17275	2,06E+05	8,83E+04	7,24E+10
144	2603	0,0384	0,1903	20,68224	0,89779	2,27055	1,94619	8,02E+05	4,84E+05	4,68E+11
144	2603	0,0512	0,2403	16,43497	0,84998	1,8982	1,63351	6,03E+05	3,24E+05	2,95E+11
144	2603	0,0655	0,2903	13,66147	0,80233	1,67539	1,43849	4,73E+05	2,24E+05	2,04E+11
144	2603	0,0831	0,3403	11,71209	0,74097	1,48911	1,33536	3,75E+05	1,71E+05	1,50E+11
144	2603	0,1036	0,3903	10,27006	0,68129	1,3661	1,27351	3,02E+05	1,40E+05	1,15E+11
144	2603	0,1302	0,4403	9,16249	0,61116	1,26341	1,26656	2,42E+05	1,36E+05	9,18E+10
144	2601	0,0271	0,1353	29,00661	0,90402	2,33929	2,71069	1,13E+06	8,74E+05	9,20E+11
144	2601	0,0395	0,1853	21,23396	0,84923	1,89385	2,11237	7,78E+05	5,68E+05	4,93E+11
144	2601	0,0529	0,2353	16,77787	0,80496	1,6854	1,76087	5,83E+05	3,89E+05	3,08E+11
144	2601	0,0688	0,2853	13,89458	0,75015	1,51224	1,56481	4,50E+05	2,89E+05	2,11E+11
144	2601	0,0863	0,3353	11,88045	0,70251	1,40513	1,42872	3,60E+05	2,19E+05	1,54E+11
144	2601	0,1051	0,3853	10,39706	0,66249	1,33499	1,32584	2,97E+05	1,67E+05	1,18E+11
144	2601	0,1263	0,4353	9,26148	0,62244	1,27768	1,25704	2,49E+05	1,31E+05	9,38E+10
144	2601	0,1493	0,4853	8,36617	0,58661	1,23477	1,20487	2,12E+05	1,05E+05	7,66E+10
144	3250	0,0288	0,1254	31,28369	0,98518	5,83065	2,68265	1,33E+06	8,60E+05	1,07E+12
144	3250	0,0511	0,2054	19,18002	0,90911	2,40065	1,78236	7,53E+05	4,00E+05	4,02E+11
144	3250	0,0688	0,2554	15,48163	0,8393	1,83935	1,55834	5,61E+05	2,85E+05	2,62E+11
144	3250	0,0894	0,3054	13,00441	0,77202	1,57333	1,42306	4,33E+05	2,16E+05	1,85E+11
144	3250	0,1123	0,3554	11,23292	0,71485	1,43005	1,32752	3,47E+05	1,67E+05	1,38E+11
144	3250	0,1392	0,4054	9,90598	0,65746	1,32715	1,2729	2,81E+05	1,39E+05	1,07E+11
144	3250	0,1664	0,4554	8,87714	0,61741	1,27122	1,21469	2,37E+05	1,10E+05	8,62E+10
144	3250	0,034	0,1456	26,96711	0,96885	4,03822	2,35147	1,13E+06	6,91E+05	7,95E+11
144	3250	0,049	0,1956	20,12839	0,90289	2,3263	1,88337	7,85E+05	4,51E+05	4,43E+11
144	3250	0,0655	0,2456	16,08687	0,84782	1,88579	1,60299	5,89E+05	3,08E+05	2,83E+11
144	3250	0,0845	0,2956	13,42309	0,79065	1,63328	1,43427	4,58E+05	2,22E+05	1,97E+11
144	3250	0,1081	0,3456	11,53904	0,72222	1,4458	1,34977	3,60E+05	1,79E+05	1,46E+11
144	3250	0,1341	0,3956	10,13902	0,66604	1,34064	1,28605	2,92E+05	1,46E+05	1,12E+11
144	3250	0,1616	0,4456	9,06006	0,62215	1,27731	1,23027	2,43E+05	1,18E+05	8,98E+10
144	1632	0,035	0,2487	15,89021	0,80653	1,69148	1,66446	5,53E+05	3,40E+05	2,76E+11
144	1632	0,0568	0,3487	11,44031	0,69617	1,393	1,3883	3,44E+05	1,98E+05	1,43E+11
144	1632	0,0814	0,4487	9,0013	0,62432	1,28013	1,21804	2,43E+05	1,11E+05	8,86E+10
144	1632	0,1119	0,5487	7,47346	0,5545	1,20166	1,13863	1,79E+05	7,08E+04	6,11E+10
299	6750	0,0621	0,271	15,18925	0,93892	2,90593	2,83777	1,28E+06	9,39E+05	5,24E+11
299	6750	0,0839	0,348	11,91444	0,89189	2,21114	2,34334	9,53E+05	6,86E+05	3,22E+11
299	6750	0,1175	0,461	9,11807	0,84266	1,85717	1,89812	6,89E+05	4,59E+05	1,89E+11
299	6750	0,1565	0,576	7,42645	0,78926	1,6285	1,65057	5,25E+05	3,32E+05	1,25E+11
299	6750	0,198	0,688	6,34469	0,74372	1,49591	1,49649	4,23E+05	2,54E+05	9,14E+10



Траектория, по которой движется электрон от диафрагмы до столкновения с фотопластинкой, представляет собой отрезок винтовой линии. Уравнение винтовой линии определяется начальной скоростью электрона. В полярной системе координат, связанной с центром вращения, уравнение имеет вид

$$r = R, \quad \varphi = \omega t, \quad z = \frac{V_z}{\omega} \varphi.$$

Здесь угловая частота вращения определяется согласно (12), а радиус и скорость из уравнений (24).

В классической механике электрон движется по круговой траектории, для которой выполняются уравнения (9-10), а движение вдоль оси Oz является свободным. В квантовой механике в полярной системе координат выполняется уравнение (6), а движение вдоль классической траектории можно смоделировать путем замены переменных

$$\zeta = z - \frac{V_z}{\omega} \varphi \quad (25)$$

При движении по винтовой траектории также выполняется уравнение равновесия сил в магнитном поле (9) и уравнение (11), в которых следует выполнить замену:

$$M \rightarrow M - \frac{V_z}{\omega} k_z \quad (26)$$

Волновое число k_z определяется из условия прохождения электрона через отверстие диафрагмы.

Результаты экспериментов /4-5/ оказали огромное влияние на развитие релятивистской теории. Их интерпретация привязана к анализу классической траектории электрона в форме уравнений /24/. Данные /4-5/ хорошо подтверждают теорию Абрагама /6/, однако при некоторой их коррекции, осуществленной Планком /10/, эти данные столь же хорошо подтверждают теорию Лоренца /1-2/ - см. Таблицу 2.

Кинетическая энергия электронов в магнитном поле анализатора бета-спектров /4-5/ линейно зависит от параметра (18), согласно данным, приведенным на рис. 4, отсюда находим квантовое число осцилляций

$$\hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} = 0,3645E_B - 77582 \quad (27)$$

Используя выражения (12) и (20), получим окончательно

$$\hbar n \approx 0,3645eB_z R^2 \approx -0,73\hbar M \quad (28)$$

Таким образом, движение бета-электронов в магнитном поле анализатора бета-спектров типа /4-5/ характеризуется большим числом квантового механического момента $M \cong 10^{11}$ и практически таким же по величине квантовым числом осцилляций $n \cong 10^{11}$.

Следовательно, установлено, что в классических экспериментах /4-5, 11/ и других, в которых анализировалось движение бета-электронов в магнитных и электростатических полях, величина квантовых чисел углового момента составляет не менее $M \cong 10^{11}$. Примерно таков же порядок квантового

числа n в экспериментах Кауфмана /4-5/, Неймана /11/ и других экспериментах с бета-электронами в магнитном поле.

Бета-спектр

Измерение бета-спектров началось, видимо, еще в 1908 году, когда Отто Ганн и Лиза Мейтнер /26/ сделали фотографии бета-спектров изотопа Ra E в магнитном спектрометре и обнаружили сплошной спектр в диапазоне $1500 \leq H\rho \leq 5000$ с наиболее интенсивной линией при $H\rho = 2100$. В работе /14/ обсуждается бета-спектр изотопа Ra E – рис. 5, полученный путем прямого измерения числа частиц с помощью электрического счетчика Гейгера. Кинетическая энергия бета-электронов в работе /14/ и во всех современных методиках вычисляется по формулам типа (16-17), т.е. считается, что частицы движутся в магнитном поле по законам релятивистской механики. Никакие квантовые эффекты в расчет не принимаются.

Определим число частиц, проходящих через окно счетчика Гейгера-Мюллера в единицу времени в магнитном бета-спектрометре типа /4-5, 11/, используя полученные выше решения (7). Согласно /23/, число частиц, проходящих через заданную площадку, определяется как интеграл от потока

$$\dot{N} = \frac{1}{2m} \sum_{M,n} \int (\Psi_{Mn} \hat{\mathbf{p}}^* \Psi_{Mn}^* + \Psi_{Mn}^* \hat{\mathbf{p}} \Psi_{Mn}) d\mathbf{S} \quad (29)$$

Будем считать, что размер окна счетчика много меньше, чем классический радиус движения электронов в магнитном поле (16). Приведем лишь главные члены разложения выражения (29) по параметру отношения диаметра окна к радиусу орбиты

$$\dot{N} = \frac{C_N \hbar}{m} \sum_{M,n} \left(\frac{2\pi}{R^2} M \sin \vartheta + \frac{\pi}{R} \chi_n^2(0) \cos \vartheta \right), \quad \cos \vartheta = \frac{a}{R} \quad (30)$$

Здесь C_N – нормировочный множитель, зависящий от источника бета-частиц.

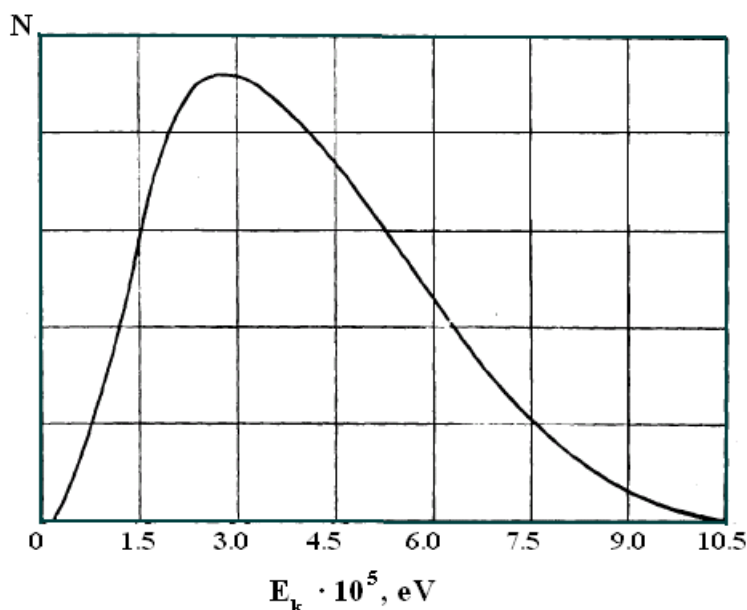


Рис. 5. Кривая распределения числа бета-частиц в зависимости от кинетической энергии при распаде изотопа Ra E по данным /14/

Предположим, что электроны заполняют все уровни энергии, в соответствии с уравнением (14) в пределах, задаваемых уравнением равновесия (9). Заменяя в правой части уравнения (30) операцию суммирования на операцию интегрирования, что справедливо для больших значений квантовых чисел, находим

$$\dot{N} = \frac{C_N \hbar}{m} \left(\frac{\pi}{R^2} M^2 n \sin \vartheta + \frac{2\sqrt{2\pi}}{R} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi \hbar}} M \sqrt{n} \cos \vartheta \right) \quad (31)$$

Выражение (31) можно упростить, используя уравнения (9), (10) и (12). Используем также выражение энергии (21), которое преобразуем к специальному виду, тогда получим

$$\dot{N} = \frac{C_N v}{R} \left(\frac{\pi}{2} M n \sin \vartheta + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{M n} \cos \vartheta \right) \quad (32)$$

$$2M(n + 1/2) = \frac{mR^2}{\hbar^2} \left(E - \frac{3}{8} E_B - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \right)$$

Система уравнений (32) показывает, что между числом бета-частиц и их начальной энергией нет однозначной связи, а распределение типа кривой, приведенной на рис. 5, является результатом измерения всех возможных состояний электрона в магнитном поле. Действительно, выразим произведение квантовых чисел из второго уравнения (32) и подставим в первое уравнение. При этом отбросим малую величину $1/2$ по сравнению с n в круглой скобке в левой части второго уравнения (32), в результате находим

$$\frac{\dot{N}}{C_N} = \frac{M\pi \sin \vartheta}{2\hbar} \left(\tilde{E} - \frac{3}{8} E_B \right) + \frac{2^{3/2} M \cos \vartheta}{R\sqrt{m\pi}} \left(\tilde{E} - \frac{3}{8} E_B \right)^{1/2} \quad (33)$$

Из выражения (33) следует, что при измерении в магнитном бета-

спектретре числа частиц с заданной энергией $\tilde{E} = E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$, будет

наблюдаться два минимума, один из которых соответствует низким значениям механического момента, $M \rightarrow 0$, а другой - предельному

значению параметра энергии $E_B = 8\tilde{E}/3$. На рис. 6 представлена

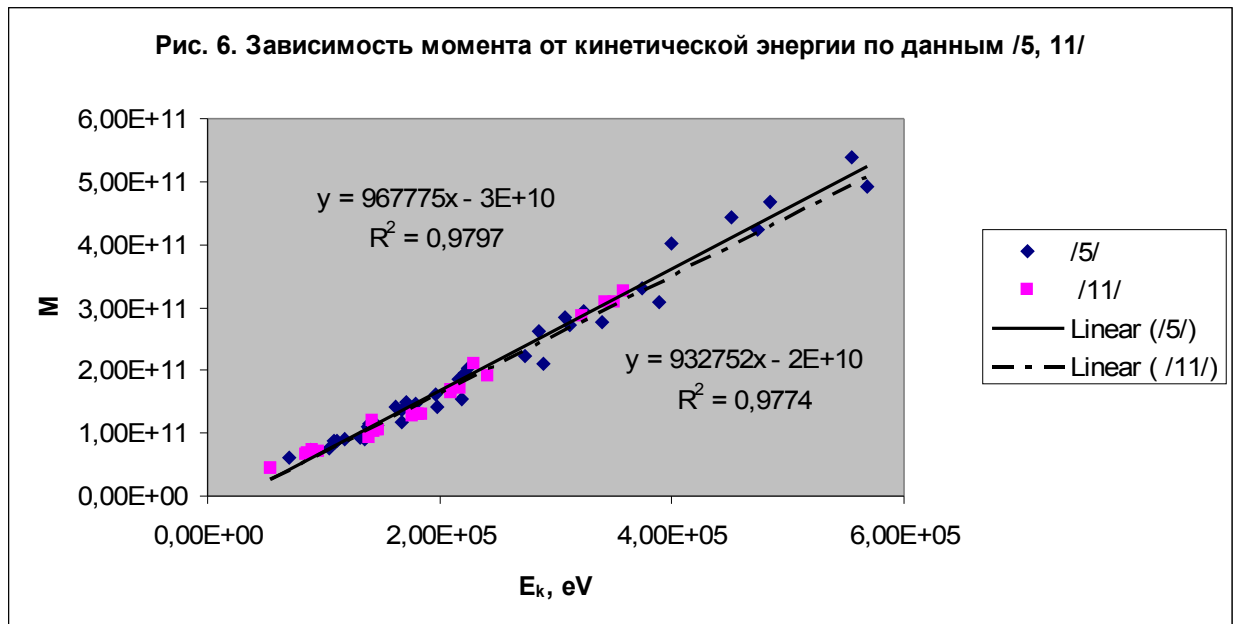
зависимость механического момента электрона от кинетической энергии по данным [5, 11]. Учитывая линейную связь кинетической энергии и с

параметром E_B , установленную выше – см. рис. 2, 4, представим

теоретическую зависимость (33) в виде формулы, легко проверяемой экспериментально

$$\dot{N} = C_1(E_k - E_1)(E_0 - E_k) \sin \vartheta + \frac{C_0 \cos \vartheta}{R\sqrt{m}} \sqrt{(E_k - E_1)(E_0 - E_k)} \quad (34)$$

Здесь C_0, C_1 - константы распределения, E_0, E_1 - максимальная и минимальная кинетическая энергия, которую можно определить по данным на рис. 2, 4, 6.



Выражение (34) позволяет описать все особенности кривой распределения, представленной на рис. 5, не прибегая к гипотезе о существовании нейтрино. Заметим, что выражение (31) (и следующее из него выражение (34)) было получено в предположении, что исходный спектр электронов является равномерным по квантовым числам. При бета-распаде спектр электронов имеет вид /16, 18-19/:

$$dN / dE_k = C(Z)(E_k + m_0c^2)(E_0 - E_k)^\nu \sqrt{(E_k^2 + 2m_0c^2E_k)} \quad (35)$$

Здесь $C(Z)$ - функция, зависящая от атомного номера элемента и от параметров слабого взаимодействия, $\nu = 2$ если в бета-распаде участвует

нейтрино – частица с нулевой массой, $\nu = 0$ если нейтрино не принимает участие в бета-распаде.

Сравнивая выражения (34) и (35), находим, что квантование энергии электронов в магнитном бета-спектрометре играет роль частицы с нулевой массой в полном соответствии с гипотезой Паули и теорией Ферми.

При анализе выражения (34), с учетом приведенных выше в таблицах 1-2 и на рис. 2, 4, 6-7 данных, и оценок (20), (23) и (28), возникают следующие вопросы:

- 1) Можно ли по виду бета-спектров, измеренных в магнитных бета-спектрометрах, определить, что в актах бета-распадов не сохраняется импульс, момент импульса и энергия?
- 2) К какому случаю относится гипотеза Паули о существовании нейтрино, которая затем переросла в теорию слабых взаимодействий / 25/?
- 3) Можно ли применить гипотезу Паули к описанию движения бета-электронов в магнитном бета-спектрометре?

1. Чтобы ответить на первый вопрос, достаточно обратить внимание на данные на рис. 2, 4 и 6, которые свидетельствуют, что диапазон изменения кинетической энергии бета-электронов в магнитном анализаторе типа /11/ или /4-5/, связан с изменением параметра магнитного поля E_B , т.е. является функцией классического прибора. Эта функция не имеет отношения к спектру бета-электронов, который описывается квантовыми числами M, n .

Ни в каких экспериментальных исследованиях квантовые числа M, n никогда не измерялись, что видно уже хотя бы из того, что моменту электрона в бета-распаде приписывается значение $\frac{1}{2}$, которое на 11 порядков меньше реальных средних значений, приведенных в таблицах 1-2.

Следовательно, по виду бета-спектров нельзя установить точность выполнения законов сохранения в бета-распаде.

2. Гипотеза Паули о существовании нейтрино относится к гипотетическому случаю бета-распада свободных ядер, при котором энергия и импульс электрона целиком определяются условиями распада. Случай свободного бета-распада никак не соотносится с движением электронов в магнитном анализаторе. Спектры электронов, измеренные в магнитном бета-спектрометре, характеризуют квантовомеханическое движение электронов в классическом приборе, а также условия, возникающие при бета-распаде. Единственная величина, которая достоверно определяется из вида бета-спектров – это максимальная кинетическая энергия электронов, которая так же определяется из независимых измерений методом поглощения.

3. Гипотезу Паули, как и теорию слабых взаимодействий Ферми /16/, нельзя применить к описанию движения электронов в магнитном бета-спектрометре, поскольку в этой теории предполагается, что электрон излучается с механическим моментом $\frac{1}{2}$ и движется по классической траектории с заданным импульсом, который определяется только условиями распада, тогда как в реальном случае механический момент бета-электронов изменяется в широких пределах, которые определяются условиями движения в магнитном поле в соответствии с уравнениями квантовой механики.

Развитая выше теория квантовых осцилляций в окрестности классических орбит и полученные соотношения позволяют использовать многочисленные экспериментальные данные для уточнения квантовых параметров движения заряженных частиц в экспериментальных установках, включая современные ускорители.

Литература

1. Lorentz, Hendrik Antoon. [La Théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants](#)// at the [Internet Archive](#), *Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles*, **25**, 1892, 63–552.

2. Г.А. Лорентц. Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения. Москва, ГИТТЛ, 1953, 471 с.
3. J.J. Thomson. Carriers of Negative Electricity/Nobel Lecture, December 11, 1906, http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1906/thomson-lecture.pdf
4. Kaufmann, W. [Die magnetische und elektrische Ablenkbarkeit der Bequerelstrahlen und die scheinbare Masse der Elektronen](#)// *Göttinger Nachrichten* (2), 1901, 143–168.
5. Kaufmann, W. [Über die Konstitution des Elektrons](#)// *Annalen der Physik*, **19**, 1906, 487–553.
6. Max Abraham. [Prinzipien der Dynamik des Elektrons](#)// *Annalen der Physik*, **315** (1), 1903, 105–179.
7. Bucherer A. H. [Über den Einfluß der Erdbewegung auf die Intensität des Lichtes](#)// *Annalen der Physik*, **316** (6), 1903, 270–283.
8. Albert Einstein. [Zur Elektrodynamik bewegter Körper](#)// *Annalen der Physik*, **322** (10), 1905, 891–921.
9. Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов в четырех томах. Т.1. – М., Наука, 1965.
10. Max Planck. Die Kaufmannschen Messungen der Ablenkbarkeit der β -Strahlen in ihrer Bedeutung für die Dynamik der Elektronen// *Physikalische Zeitschrift*, 7, 1906, 753–761.
11. Neumann, Günther. Die träge Masse schnell bewegter Elektronen//*Annalen der Physik* 350 (20): 1914, 529–579. <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k153486.image.f542.pagination>
12. Ch. E. Guye et L a v a n c h y , Verification experimentale de la forraule de L o g e t z - E i n s t e i n par les rayons cathodiques de grande vitesse. *Arch. desSc Phys et Nat.* XLII, pp. 287, 353, 441; 1916.
13. Rogers, M. M. et al. A Determination of the Masses and Velocities of Three Radium B Beta-Particles, *Physical Review*, 57, 1940, 379–383.
14. Ellis C. D., Wooster W. A. The average energy of disintegration of Radium E // *Proc. Roy. Soc.*, v. 117, 1927, 109 – 123.
15. Wolfgang Pauli. Exclusion Principle and Quantum Mechanics/Nobel Lecture, December 13, 1946, http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1945/pauli-lecture.pdf
16. Энрико Ферми. Элементарные частицы. Москва, ИЛ, 1953. 102 с.
17. Paul A.M. Dirac. Theory of Electrons and Positrons/Nobel Lecture, December 12, 1933, http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1933/dirac-lecture.pdf
18. Чиен-Шиунг Ву. СОВРЕМЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ФОРМЫ БЕТА-СПЕКТРОВ//УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК, Т. XL/V, вып. 4, 1951.
19. Смородинский Я. А. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕОРИИ β -РАСПАДА//УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК, Т. LXVII, вып. 1, 1959.
20. Frederick Reines. The Neutrino: From Poltergeist to Particle/Nobel Lecture, December 8, 1995, http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1995/reines-lecture.pdf
21. The Reines-Cowan Experiments: Detecting the Poltergeist. *Los Alamos Science* 25: (page 3). 1997. <http://library.lanl.gov/cgi-bin/getfile?25-02.pdf>
22. Erwin Schrödinger. The Fundamental Idea of Wave Mechanics/Nobel Lecture, December 12, 1933, http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1933/schrodinger-lecture.pdf
23. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 5. Квантовая механика. Ч. 1. Нерелятивистская теория. – М., ОГИЗ, 1948, - 567 с.
24. David L. Miller, Kevin D. Kubista, Gregory M. Rutter, Ming Ruan, Walt A. de Heer, Phillip N. First, Joseph A. Stroscio. Observing the Quantization of Zero Mass Carriers in Graphene//*Science*, 15 May 2009, Vol. 324. no. 5929, pp. 924 – 927.

25. Steven Weinberg. Conceptual Foundations of the Unified Theory of Weak and Electromagnetic Interactions/Nobel Lecture, December 8, 1979, http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1979/weinberg-lecture.pdf
26. Otto Hahn, Lisa Meitner// Phys. Z. 9, 321, 697, 1908.