



**Существует ли экспериментальное подтверждение релятивистской теории Лоренца?**

**Is there an experimental verification of the relativistic Lorentz's theory?**

**Alexander P. Trunev (Toronto, Canada)**

**Alexander P. Trunev**

На основе квантовой механики сделан анализ известных экспериментов, подтверждающих теорию Лоренца. Разработан новый метод описания квантовых осцилляций электронов в постоянных магнитных и электрических полях при движении частиц в окрестности классических орбит.

Famous experiments confirming the relativistic Lorentz's theory have been analyzed on the basis of quantum mechanics. A new theory of electron quantum oscillations in a static magnetic and electric field for the particle moving around the classical orbit is proposed.

Ключевые слова: Релятивистская теория, квантовая механика, теория Лоренца, электрон, электромагнитное поле.

Keywords: Relativistic Theory, Quantum Mechanics, Lorentz's Theory, Electron, Electromagnetic Field

## **Введение**

Лоренц в своей теории электронов /1-2/ предположил, что система уравнений электродинамики Максвелла-Лоренца инвариантна относительно преобразования Лоренца. Одним из следствий этой гипотезы является то, что масса электрона должна изменяться в зависимости от скорости движения. Кауфман /3-4/ предпринял ряд попыток определить эту зависимость экспериментальным путем. Его ранние опыты свидетельствовали, что масса электрона действительно изменяется при движении электронов в скрещенных электрических и магнитных полях.

Абрагам /5/ и Бухерер /6/, используя результаты ранних экспериментов Кауфмана /3/, развили собственные теории движения электрона в скрещенных полях, которые отличаются от теории Лоренца /1-2/.

Однако, точность ранних опытов Кауфмана /3/ не была достаточной, что бы решить, какая из моделей - Лоренца или Абрагама, правильно описывает динамику электрона. В 1905 г Кауфман повторил свои эксперименты /4/, а [http://chaosandcorrelation.org/Chaos/CR5\\_2010.pdf](http://chaosandcorrelation.org/Chaos/CR5_2010.pdf)

также сделал анализ движения электрона на основе теорий Абрагама, Лоренца и новой теории Эйнштейна /7/, доказав идентичность последних двух, но данные его экспериментов совпали с теорией Абрагама /5/.

Эйнштейн в 1906 г в своей работе "Определения соотношения между поперечной и продольной массами" /8/, показал что теории Лоренца и Эйнштейна действительно дают одинаковый результат, а теории Абрагама и Бухерера дают более низкое значение отношения поперечной массы к продольной. Он предложил свою схему эксперимента по определению этого соотношения в электростатическом поле. Планк /9/ выполнил анализ данных /3-4/ и показал их близкое соответствие теории Лоренца-Эйнштейна. Нейман выполнил ряд экспериментов /10/ с бета-лучами, в которых скорость бета-электронов определялась с высокой точностью, а также сравнил три теории /2, 5, 6/. Он подтвердил теорию Лоренца-Эйнштейна, однако сомнения в правильности этой теории все еще оставались, поэтому было выполнено множество экспериментов с катодными лучами /11/, которые, казалось, окончательно подтверждали теорию Лоренца-Эйнштейна. Но реально эксперимент с необходимой точностью был поставлен только в 1940 г, когда Роджерс и другие измерили параметры движения бета-электронов в электростатическом анализаторе /12/. И только после этого теория Лоренца была признана верной, а теория Абрагама была отвергнута как несостоятельная. Подробный обзор многочисленных ранних исследований по определению зависимости поперечной массы электрона от скорости, содержится в работе /13/.

В настоящей работе на основе уравнения Шредингера сделан анализ движения электронов в экспериментальных установках /3-4,10, 12/. Развита новый метод описания квантовых осцилляций электронов в постоянных магнитных и электрических полях при движении частиц в окрестности классических орбит.

## Движение электронов в электростатическом анализаторе

На рис. 1. показана схема анализатора из работы /12/. Прибор представляет собой два соосных цилиндра, образующих конденсатор, к обкладкам которого приложен потенциал, такой величины, что электрического поле точно уравновешивает ускорение электрона, движущегося по окружности радиуса  $R$ , следовательно

$$\frac{m v^2}{R} = eX \quad (1)$$

Здесь обозначено  $m, v, e$  - масса, скорость и заряд электрона соответственно,  $X$  – напряженность электрического поля в конденсаторе, которая определяется геометрией и разностью потенциалов согласно

$$XR = P / \ln(r_2 / r_1) - \text{см. /12/} .$$

Одного уравнения (1) недостаточно, чтобы сделать выводы об изменении массы в зависимости от скорости. Второе соотношение, которое использовали авторы /12/, возникает в задаче о движении электрона с заданной скоростью в поперечном магнитном поле напряженностью  $H$ , тогда скорость электрона и радиус орбиты связаны уравнением

$$\frac{m v^2}{\rho} = e v H \quad (2)$$

Отметим, что авторы /12/ не проводили измерения параметров орбиты электрона в магнитном поле, согласно (2), но использовали данные других экспериментов. Это оказалось возможным, поскольку в эксперименте /12/ использовался источник электронов, возникающих при бета-распаде изотопа Ra В, для которого спектры излучения были измерены в то время с достаточной точностью, а один из методов измерения как раз основан на уравнении (2).

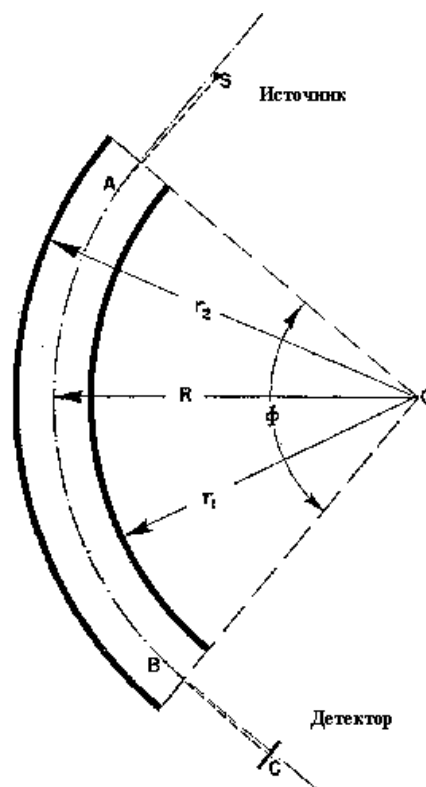


Рис. 1. Схема электростатического анализатора из работы /15/:

$$R = 16.05 \pm 0.007 \text{ см}; r_2 - r_1 = 0.5989 \pm 0.0032 \text{ см}$$

Уравнения (1-2) можно разрешить относительно скорости и удельного заряда, в результате находим

$$v = XR / H\rho, \quad m/e = (H\rho)^2 / (XR) \quad (3)$$

Второе уравнение (3) позволяет определить изменение массы электрона, при условии, что его заряд не меняется. Выполнив измерение скорости и массы для трех линий бета-распада, авторы /12/ пришли к выводу, что выполняется теория Лоренца /1-2/.

Возникает вопрос, как интерпретировать результаты экспериментов /12/ если движение электронов описывается не классической, а квантовой механикой? Рассмотрим задачу о движении электрона в цилиндрическом конденсаторе при тех условиях, которые описаны в работе /12/. Уравнение Шредингера,

описывающее стационарные состояния электрона с энергией  $E$  во внешнем потенциальном поле  $U$  в цилиндрической системе координат имеет вид [14]:

$$\Psi_{rr} + \frac{1}{r} \Psi_r + \frac{1}{r^2} \Psi_{\phi\phi} + \Psi_{zz} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \Psi = 0 \quad (4)$$

Будем искать решение уравнения (4) в виде

$$\Psi = \frac{\chi(r)}{r^{1/2}} \exp(iM\phi + ik_z z) \quad (5)$$

Подставляя выражение (4) в уравнение (5), находим

$$\chi'' - \frac{M_0^2}{r^2} \chi - k_z^2 \chi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \chi = 0 \quad (6)$$

Здесь  $M_0^2 = M^2 - 1/4$ .

Введем новую переменную, описывающую отклонение электрона от классической траектории согласно  $r = R + \xi$ . В этих обозначениях уравнение (6) имеет вид

$$\chi'' - \frac{M_0^2}{(R + \xi)^2} \chi - k_z^2 \chi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U(\xi)) \chi = 0 \quad (7)$$

Будем считать, что при своем движении электрон слабо отклоняется от классической траектории, что равносильно условию  $\xi / R \ll 1$ . Разложим коэффициент у второго слагаемого в уравнении (6) и потенциал по степеням малого параметра  $\xi / R$ . Удерживая только линейные и квадратичные слагаемые, находим

$$\chi'' - \frac{M_0^2}{R^2} \chi + \frac{M_0^2}{R^3} 2\xi \chi - \frac{M_0^2}{R^4} 3\xi^2 \chi - k_z^2 \chi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - eX\xi) \chi = 0 \quad (8)$$

Здесь использовано абсолютное значение заряда электрона, как и в уравнениях (1-3). С точки зрения квантовой механики уравнение (1) равносильно требованию симметрии плотности распределения электронов относительно классической траектории. Такие симметричные решения уравнения (8) возможны в том и только в том случае, если выполняется условие

$$\frac{M_0^2}{R^3} 2\xi - \frac{2m}{\hbar^2} eX\xi = 0 \quad (9)$$

Действительно, если выполняется условие (9), уравнение (8) принимает вид, как в модели квантового гармонического осциллятора /16/

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \chi'' + \frac{m\omega^2}{2} \xi^2 \chi = \tilde{E} \chi, \quad \omega^2 = \frac{3\hbar^2 M_0^2}{m^2 R^4} \quad (10)$$

$$\tilde{E} = E - \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{M_0^2}{R^2} + k_z^2 \right)$$

Решением этого уравнения является функция

$$\chi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left( \frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega \xi^2}{2\hbar}\right) H_n \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \xi \right) \quad (11)$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

Следовательно, в этом случае плотность электронов распределена симметрично относительно линии  $\xi = 0$ . Если же условие (9) не выполняется, тогда решением уравнения (8) также является функция (11), но сдвинутая относительно линии  $\xi = 0$  на величину

$$\delta\xi = \frac{R}{3} \left( 1 - \frac{meXR^3}{\hbar^2 M_0^2} \right)$$

Отметим, что в опытах /12/ удалось экспериментально измерить ширину функции распределения (11), плавно изменяя напряжение на пластинах конденсатора. В результате происходил сдвиг классической траектории электрона относительно окна счетчика. Подсчитывая число электронов, попадающих на счетчик в зависимости от приложенного напряжения, авторы /12/ обнаружили, что это число имеет острый пик в момент выполнения равенства (9). Поскольку число электронов пропорционально плотности функции распределения, можно определить зависимость числа электронов от приложенного напряжения в виде

$$\frac{N(X)}{N(X_0)} \approx \exp\left( - \frac{m\omega}{\hbar} (\delta\xi)^2 \right) = \exp\left( - \frac{\sqrt{3}M_0}{X_0^2} (\delta X)^2 \right)$$

Здесь  $X_0$  – напряженность электрического поля соответствующая условию (9);  $\delta X = X - X_0$  – изменение напряженности электрического поля, которое в первом приближении пропорционально изменению напряжения на конденсаторе, т.е.  $(\delta X / X_0)^2 = (\delta P / P_0)^2$ , следовательно

$$\frac{N(P)}{N(P_0)} \approx \exp\left( - \frac{\sqrt{3}M_0}{P_0^2} (\delta P)^2 \right) \quad (12)$$

Таким образом, теория предсказывает, что число регистрируемых электронов при изменении потенциала подчиняется нормальному распределению, причем ширина функции распределения возрастает пропорционально приложенному потенциалу.

Используя спектр значений энергии квантового гармонического осциллятора и второе уравнение (10), находим с учетом (9)

[http://chaosandcorrelation.org/Chaos/CR5\\_2010.pdf](http://chaosandcorrelation.org/Chaos/CR5_2010.pdf)

$$E = \frac{eXR}{2} + \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \quad (13)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (13) описывает эффект, обусловленные приложением внешнего поля. Второе слагаемое описывает квантовый эффект, связанный с ограниченным движением электрона относительно классической траектории. Третье слагаемое описывает квантовый эффект, связанный с конечными размерами системы. Спектр для вертикальной составляющей волнового вектора можно получить, используя симметрию волновой функции и краевые условия  $\Psi = 0$  на торцах анализатора, имеем

$$k_z = \frac{\pi}{L} (1 + 2n_z), \quad n_z = 0; \pm 1; \pm 2 \dots$$

Здесь  $L = 7.16 \text{ см}$  - высота установки.

Выражая энергию электронов из второго уравнения (10) и, учитывая уравнение (9), находим

Покажем, что условие (9) эквивалентно классическому выражению равенства сил (1). Запишем его в виде

$$\frac{\hbar^2 (M^2 - 1/4)}{mR^3} = eX \quad (14)$$

Заметим, что произведение  $\hbar M$  равно проекции момента импульса электрона на ось Oz системы, т.е.  $\hbar M = M_z$ . В классической же

механике справедливо выражение  $M_z = m v R$ . Таким образом, выражение (14) можно записать в виде

$$\frac{\hbar^2 M^2 - \hbar^2 / 4}{mR^3} = \frac{M_z^2}{mR^3} - \frac{\hbar^2}{4mR^3} = \frac{m v^2}{R} - \frac{\hbar^2}{4mR^3} = eX \quad (15)$$



что в пределе  $\hbar \rightarrow 0$  совпадает с уравнением (1). Различие между уравнениями (1) и (14) заключается в том, что при описании движения электронов уравнение (1) является гипотезой, которая, как будет показано ниже, выполняется в экспериментах /12/, тогда как уравнение (14), выполняется и в классической, и в квантовой механике.

Согласно теории Лоренца /1-2/, при повышении скорости поперечная масса электрона изменяется на релятивистский фактор:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (16)$$

Поэтому, согласно (1), для выполнения условия равенства сил надо прикладывать больший потенциал к пластинам конденсатора. Однако, согласно уравнению (14), при повышении массы, напротив, надо прикладывать меньший потенциал. Альтернативной гипотезой является утверждение о зависимости квантового углового момента от скорости при неизменной массе. Действительно, в таком случае гипотеза Лоренца (16) является излишней, так как изменение углового момента уже позволяет объяснить результаты экспериментов /12/ и других. Наконец, можно рассмотреть комбинированную гипотезу, согласно которой, квантовый угловой момент определяется согласно (14), но с использованием релятивистской массы. Таким образом, используя данные /12/, можно сравнить три величины

$$\begin{aligned} M_q(0) &= (eXm_0R^3 / \hbar^2 + 1/4)^{1/2} \\ M_q(v) &= (eXmR^3 / \hbar^2 + 1/4)^{1/2} \\ M_c(v) &= m v R / \hbar \end{aligned} \quad (17)$$

Оценим величину квантового числа  $M$  по данным /12/, используя классический и квантовый угловой момент согласно (17) - таблица 1.

Таблица 1. Квантовые числа углового момента по данным /12/

HR	P, VOLTS	XR	Mq(0)10 <sup>-7</sup>	v/c	v, m/s	m/m0	Mc(v)10 <sup>-7</sup>	Mq(v)10 <sup>-7</sup>	Mc(v)/Mq(v)
1406	9970	267156	30053	0,6337	189980000	1,2980	34189	34239	0,99855
1671,1	13017	348804	34339	0,6961	208680000	1,4040	40621	40689	0,99834
1931,5	16200	434096	38308	0,7496	224700000	1,5070	46948	47027	0,99833

Полученные результаты свидетельствуют, что квантовый угловой момент в единицах постоянной Планка составляет в экспериментах /12/ порядка  $10^{11}$ , что свидетельствует о классическом поведении электронов в этой системе — см. /14/. Классический угловой момент практически совпадает с квантовым угловым моментом, вычисленным с учетом релятивистской поправки (16), причем их отношение слабо зависит от скорости и составляет по данным /12/ приблизительно 0,998.

Заметим, что данные по движению электронов в магнитном поле можно непосредственно использовать для определения импульса частиц, минуя вычисление скорости по формулам (3). Действительно, разрешая уравнение (2) относительно импульса частиц, находим:

$$m v = eH\rho$$

Это выражение можно использовать для вычисления классического момента импульса, минуя вычисление скорости, имеем

$$M_c(v) = m v R / \hbar = eH\rho R / \hbar \quad (18)$$

Следовательно, классический момент импульс электрона полностью определяется по его движению в магнитном поле. С другой стороны, квантовый момент импульса описывается первым или вторым уравнением (17), т.е. определяется движением электрона в электростатическом поле. Составим отношение

$$\frac{M_c(v)}{M_q(v)} = \frac{eH\rho R / \hbar}{\sqrt{emXR^3 / \hbar^2 + 2^{-2}}} \approx \frac{H\rho R}{\sqrt{mXR^3 / e}} \quad (19)$$

Если в правую часть уравнения (19) формально подставить отношение массы к заряду электрона из второго уравнения (3), тогда получим, что отношение классического момента импульса к его квантовому значению в экспериментах /12/ с большой степенью точности ( порядка  $10^{-11}$ ) равно единице, в полном соответствии с уравнением (15).

Предположим, что выполняется гипотеза Лоренца в форме уравнения (16), тогда подставляя (16) в (18) и разрешая уравнение (18) относительно скорости, находим

$$v(H) = \frac{eH\rho / m_0}{\sqrt{1 + (eH\rho / m_0 c)^2}} \quad (20)$$

Следовательно, можно определить скорость электронов, используя только данные по магнитному полю. Зная скорость, можно вычислить массу по формуле (15), а затем определить отношение моментов по формуле (19) — таблица 2. При таком методе расчета отношение моментов получается на тысячные доли больше единицы, что укладывается в точность данных /15/. Таким образом, показано, что квантовая нерелятивистская теория движения электронов в форме уравнения Шредингера согласуется с экспериментальными данными /12/, при условии, что зависимость массы электрона от скорости описывается теорией Лоренца.

Данные, полученные в электростатическом анализаторе, можно использовать для вычисления скорости в экспериментах /12/. Предположим, что выполняется уравнение (15). Разрешая уравнение (1) относительно скорости, находим:

$$v(X) = c \sqrt{-\frac{a^2}{2} + \sqrt{\frac{a^4}{4} + a^2}}, \quad a = \frac{eXR}{m_0 c^2} \quad (21)$$

Скорость электронов, вычисленная по уравнению (21), совпадает со скоростью, вычисленной по формуле (20) и по формуле (3) с экспериментальной точностью — таблица 2.

Таблица 2. Параметры задачи, рассчитанные по теории Лоренца

HR	P, VOLTS	XR	v(H), m/s	Mc(v)	m/m0	Mc(v)/Mq(v)	v(X), m/s	v(X)/v(H)
1406	9970	267156,3	190764427	264473492835	1,296304	1,001981	190483419	0,998527
1671,1	13017	348803,8	209876107	290969978347	1,400417	1,002751	209487445	0,998148
1931,5	16200	434095,5	224780597	311633660491	1,511307	1,000082	224770546	0,999955

Отметим, что ширина функции распределения регистрируемых электронов, измеренная в эксперименте [12], составляет около  $\delta P / P_0 \approx 2 \cdot 10^{-2}$  при потенциале на конденсаторе  $P_0=16200$  вольт, тогда как по формуле (12) ширина должна быть на четыре порядка меньше,

$$\delta P / P_0 \approx 1 / \sqrt{M_0 \sqrt{3}} = 1,36 \cdot 10^{-6}.$$

Это означает, что либо нарушение симметрии вызывает резкое понижение квантового углового момента на 8 порядков по сравнению с симметричным случаем, для которого выполняется уравнение (1), либо плотность электронов определяется не основным состоянием, для которого справедливо выражение (12), а некоторым состоянием с квантовым числом  $n > 0$ .

Действительно, в таком случае ширина функции распределения определяется положением первого максимума. Используем основное свойство полиномов Эрмита, которые содержат наибольшую степень  $x^n$ . Для функции

$x^n e^{-x^2/2}$  положение максимума определяется условием  $x = \sqrt{n}$ . В этом случае ширина функции распределения регистрируемых электронов определяется согласно

$$\delta P / P_0 \approx \sqrt{n / M_0 \sqrt{3}}$$

Отсюда можно оценить квантовое число при потенциале на конденсаторе  $P_0=16200$  вольт, имеем

$$n \approx M_0 \sqrt{3} (\delta P / P_0)^2 = 2,16 \cdot 10^8$$

Интересно, что авторы /12/ специально указывают на тот факт, что функция распределения электронов на счетчике в зависимости от приложенного потенциала имеет острый пик. Однако полученное квантовое число напротив свидетельствует, что функция распределения электронов является размытой, что предопределило успех этого эксперимента.

Для симметричного случая выполняется уравнение (1), поэтому уравнение (13) с большой степенью точности указывает на закон сохранения энергии

$$E = \frac{m v^2}{2} + \hbar \omega \left( n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \approx \frac{m v^2}{2}$$

т.е. энергия квантовых осцилляций мала, поэтому можно пренебречь ее вкладом в динамику электрона. Действительно, энергия возбужденного состояния определяется как

$$E_n = \hbar \omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \approx 3 \frac{\hbar^2 M_0^2}{m R^2} \left( \frac{\delta P}{P_0} \right)^2 = 3 m v^2 \left( \frac{\delta P}{P_0} \right)^2 \ll \frac{m v^2}{2}$$

Следовательно, движение электронов в опытах /15/ можно описывать классическими соотношениям (1-2). Однако нельзя утверждать, что это движение сопоставимо с движением в магнитном поле, что эквивалентно выполнению уравнений (3). В этой связи возникает вопрос о параметрах движения электрона в магнитном поле: соответствует ли квантовая теория классической теории в этом случае?

### **Движение электрона в магнитном поле**

Уравнение Шредингера, описывающее движение электрона в магнитном поле имеет вид /14/:

$$\frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})^2 \Psi_n = E_n \Psi_n \quad (22)$$

Здесь  $\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{A}$  - оператор импульса и векторный потенциал соответственно.

Рассмотрим однородное магнитное поле, направленное вдоль оси Oz системы. В таком поле в классическом случае электроны движутся по круговым орбитам, радиус которых определяется из условия равновесия в форме уравнения (2). В цилиндрической системе координат однородному магнитному полю соответствует векторный потенциал вида /14/

$$\mathbf{A} = (0, A_\varphi, 0), \quad A_\varphi = \frac{rB_z}{2} \quad (23)$$

Отметим, что функция (23) удовлетворяет условию калибровки  $\text{div } \mathbf{A} = 0$

и является решением уравнения Лапласа  $\Delta \mathbf{A} = \nabla^2 \mathbf{A} = 0$ .

Подставим выражение (23) в уравнение (22), в результате, с учетом выражения оператора импульса в цилиндрической системе координат, находим

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \Psi_{rr} + \frac{1}{r} \Psi_r + \frac{1}{r^2} \Psi_{\varphi\varphi} + \Psi_{zz} \right) + \frac{e^2 B_z^2 r^2}{8m} \Psi + \frac{i\hbar e B_z}{4m} \Psi_\varphi = E \Psi \quad (24)$$

Будем искать решение уравнения в виде функции (5). Подставляя выражение (5) в уравнение (24) и разделяя переменные, находим

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \chi'' - \frac{M_0^2}{r^2} \chi - k_z^2 \chi \right) + \frac{e^2 B_z^2 r^2}{8m} \chi - \frac{\hbar M e B_z}{4m} \chi = E \chi \quad (25)$$

Внешне уравнение (25) мало отличается от исследованного ранее в задаче о квантовых осцилляциях электрона в магнитном поле /14/. Нас интересуют решения, для которых справедливо классическое уравнение (2). Метод

получения этих решений вполне аналогичен тому, что был рассмотрен выше для случая движения электрона в электростатическом поле.

Введем новую переменную, описывающую отклонение электрона от классической траектории согласно  $r = R + \xi$ . Будем считать, что при своем движении электрон слабо отклоняется от классической траектории, т.е. справедливо соотношение  $\xi / R \ll 1$ . Разложим коэффициент уравнения (25) по степеням малого параметра  $\xi / R$ . Удерживая только линейные и квадратичные слагаемые, находим условие симметрии волновой функции относительно классической траектории

$$\frac{\hbar^2 M_0^2}{2mR^3} 2\xi - \frac{e^2 B_z^2}{8m} 2R\xi = 0 \quad (26)$$

Подставляя классическое условие равновесия сил (2) в уравнение (26), находим

$$\hbar^2 M_0^2 = \frac{(m v R)^2}{4} \quad (27)$$

Следовательно, при движении в магнитном поле классический момент в два раза больше квантового механического момента. При выполнении условия (26), уравнение (25) принимает вид, как в модели квантового гармонического осциллятора

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \chi'' + \frac{m\omega^2}{2} \xi^2 \chi = \tilde{E} \chi, \quad \omega^2 = \frac{e^2 B_z^2}{4m^2} + \frac{3\hbar^2 M_0^2}{m^2 R^4} \quad (28)$$

$$\tilde{E} = E - \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{M_0^2}{R^2} + k_z^2 \right) - \frac{(eB_z R)^2}{8m} + \frac{\hbar M e B_z}{4m}$$

Интересно, что с учетом условия равновесия (26) частота квантовых осцилляций совпадает с ее значением в задаче Ландау /14/

$$\omega^2 = \frac{e^2 B_z^2}{m^2} \quad (29)$$

Собственные функции уравнения (28) совпадают с (11), а условие квантования уровней энергии можно представить в виде

$$E = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{M_0^2}{R^2} + k_z^2 \right) + \frac{(eB_z R)^2}{8m} - \frac{\hbar M e B_z}{4m} \quad (30)$$

Отметим, что уравнение (30) можно использовать для оценки квантового числа возбуждения осцилляций электронов  $n$  при заданной начальной энергии бета-электронов. Условие же равновесия в форме (26) служит для определения квантового углового момента, величина которого, согласно данным, приведенным в таблицах 1-2, достигает значения  $M_0 \approx M \cong 10^{11}$ .

При этом проекция квантового механического момента на направление магнитного поля может принимать как положительное, так и отрицательное значение, что описывается последним слагаемым в правой части уравнения (30). Классическому движению соответствует отрицательное значение проекции момента (электрон вращается против часовой стрелки в плоскости, перпендикулярной вектору индукции магнитного поля), следовательно, из уравнения (26), имеем

$$\hbar M \approx \hbar M_0 = \frac{e B_z R^2}{2}, \quad e < 0$$

Подставляя это выражение в уравнение (14) и учитывая зависимость момента от индукции магнитного поля в форме уравнения равновесия (26), находим

$$E = \frac{3(eB_z R)^2}{8m} + \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \quad (31)$$

Из полученного выражения следует, что электрон может изменять свою энергию при движении в магнитном поле, путем возбуждения дискретных



уровней энергии с частотой (29). Эти переходы, известные как уровни Ландау, были обнаружены в двумерном электронном газе /15/. Следовательно, они могут быть обнаружены и при движении электронов в окрестности классических орбит.

Электроны, возникающие при бета-распаде, обладают начальной кинетической энергией, величина которой анализируется отдельно в электростатическом и магнитном поле. Составим два уравнения, отражающие баланс энергии бета-электронов в магнитном и электростатическом поле, используя полученные выражения (13) и (31), имеем (в этих уравнениях используется абсолютное значение заряда электрона):

1) в электростатическом поле

$$E_X = \frac{eXR}{2} + \hbar \sqrt{\frac{3eX}{Rm}} \left( n_e + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \quad (32)$$

2) в магнитном поле

$$E_H = \frac{3(eB_z R)^2}{8m} + \hbar \frac{eB_z}{m} \left( n_B + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \quad (33)$$

Полученные уравнения могут служить для определения квантовых чисел возбуждения осцилляций электронов  $n_e, n_B$ . Условия равновесия в форме (9) и (26) служат для определения квантового углового момента в этих задачах.

Чтобы выяснить, какое влияние оказывают квантовые осцилляции электронов на их движение вдоль классических траекторий, рассмотрим известные эксперименты /3-4, 10/, в которых определялось увеличение поперечной массы электрона в зависимости от их скорости.

## Эксперименты Кауфмана

Зависимость поперечной массы от скорости электрона впервые была обнаружена в опытах /3-4/, которые наиболее трудны для анализа, поскольку движение электрона в установке Кауфмана не обладает симметрией. На рис.2 представлена схема эксперимента Кауфмана по определению зависимости массы от скорости электрона, в обозначениях, взятых из оригинальных работ /3-4/. Электроны, возникающие в результате бета-распада бромида радия, покидают источник, расположенный в центре одной из открытых граней высоковольтного плоского конденсатора высотой  $h$ . Координаты источника обозначим  $(0,0,0)$ . Направим оси прямоугольной системы координат  $Ox$ ,  $Oy$  параллельно плоскостям обкладок конденсатора, ось  $Oz$  — перпендикулярно плоскостям. На противоположной источнику грани конденсатора, в центре установлена диафрагма с малым отверстием ( $0,2$  мм в диаметре), координаты которого обозначим  $(x_1,0,0)$ . Выше по оси  $Ox$ , параллельно граням с источником и отверстием, располагается фотографическая пластинка, плоскость которой пересекается с осью  $Ox$  в точке с координатами  $(x_2,0,0)$ . Установка находится в постоянном однородном магнитном поле  $\mathbf{B} = (0,0, B_z)$  .

Электрон, покидая источник, ускоряется в поле конденсатора и проходит сквозь отверстие диафрагмы со скоростью, которая определяется напряженностью электрического поля и временем пребывания в конденсаторе. При этом электрон движется в магнитном поле по некоторой круговой траектории, в соответствии с уравнением (2). Подавая на конденсатор постоянное напряжение, можно изменять траекторию при заданных начальных данных.

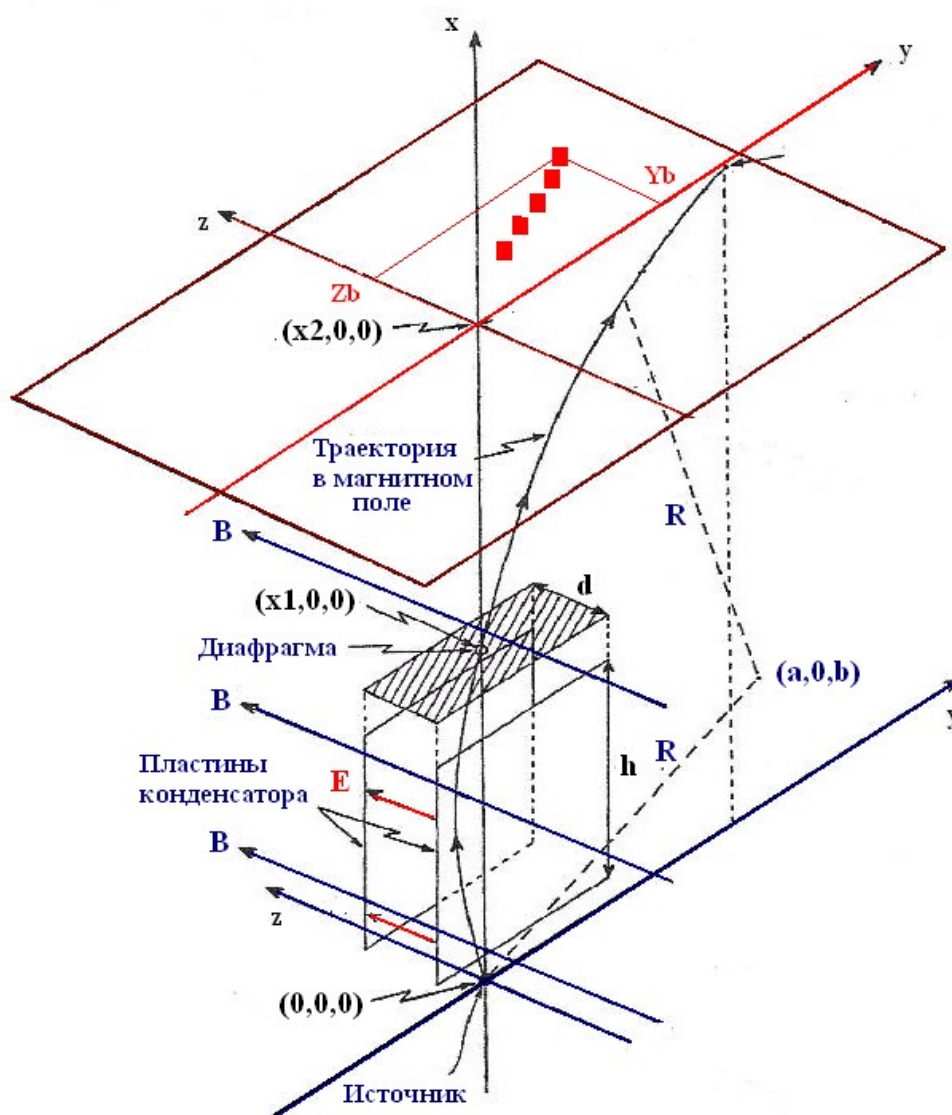


Рис. 2. Схема движения электрона в экспериментах Кауфмана /3-4/. Красными квадратами обозначен трек электронов.

Поскольку электроны в начальном состоянии имеют спектр энергии, на фотографической пластинке образуется трек, анализируя который, можно восстановить динамические параметры электрона. Для этого координаты точек, оставленных электронами на фотографической пластинке, определяются экспериментально – таблица 3, и вычисляются из уравнений классической динамики, согласно /3-4/, имеем

$$v_x = \frac{E_z s_1 s_2}{z_b R H}, \quad \frac{e}{m} = \frac{v_x}{R H}$$

$$R^2 = \left( \frac{x_1 - x_0}{2} + x_2 - x_1 \right)^2 + \left( \sqrt{R^2 - (x_1 - x_0)^2 / 4} - y_b \right)^2 \quad (34)$$

$$s_1 = R \arcsin \frac{h}{2R}, \quad s_2 = 2R \arcsin \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + y_b^2}}{2R}$$

Отметим, что хотя второе из этих уравнений легко разрешается относительно  $R$ , Кауфман упростил выражение радиуса орбиты электрона в магнитном поле. В результате этого упрощения его результаты получили систематическую ошибку величиной в 3,7%. Без этих упрощений данные /3/ хорошо согласуются с теорией Лоренца, на что впервые указал Планк /9/, однако данные /4/ согласуются с теорией Лоренца лишь при малой скорости электрона — рис. 3.

В таблице 3 представлены оригинальные данные /3-4/, полученные в фиксированном магнитном поле  $V_z=299$  Гаусс /3/ и 144 Гаусс /4/ соответственно, при различном напряжении на конденсаторе.

Расчетные формулы Кауфмана весьма чувствительны к точности определения величины отклонения траектории электрона в поле электрического конденсатора. Поэтому при малой величине отклонения, что соответствует большой величине скорости, рассеяние данных весьма велико — рис. 3, а отклонение от теории Лоренца достигает 100% .

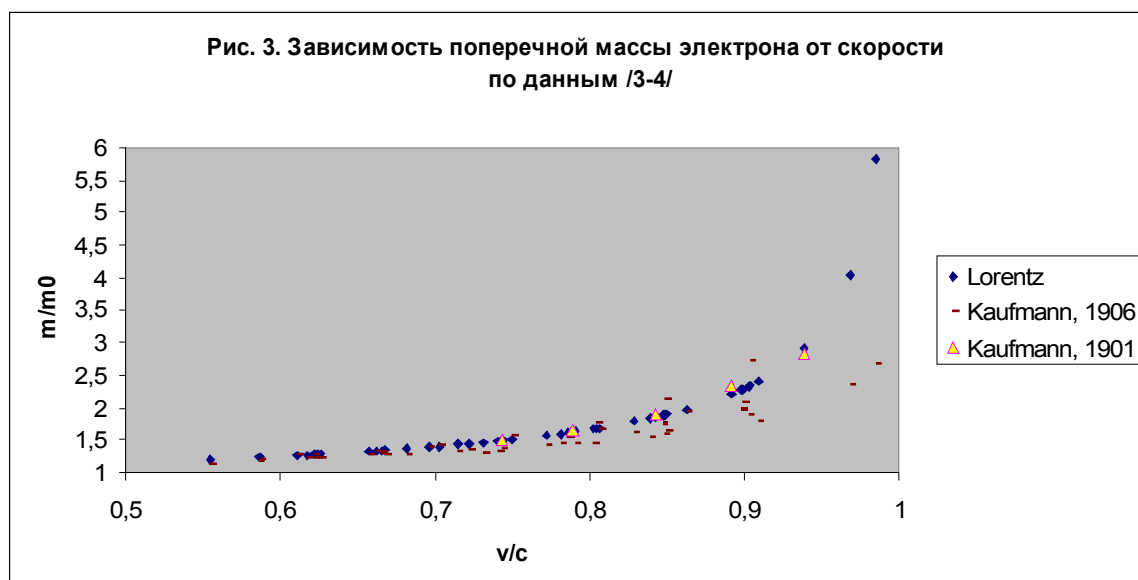
Траектория, по которой движется электрон от диафрагмы до столкновения с фотопластинкой, представляет собой отрезок винтовой линии. Уравнение винтовой линии определяется начальной скоростью электрона. В полярной системе координат, связанной с центром вращения, уравнение имеет вид

$$r = R, \quad \varphi = \omega t, \quad z = \frac{V_z}{\omega} \varphi. \quad (35)$$

Здесь угловая частота вращения определяется согласно (29), а радиус из уравнения (2).

Таблица 3. Сравнение теории Лоренца с данными /3-4/

B, Gauss	P Volt	zb (cm)	yb (cm)	R /3-4/	R	v/c	m/m <sub>0</sub> Lorentz	m/m <sub>0</sub> Kaufmann
144	2605,0	0,0357	0,1771	22,26890	22,20660	0,89946	2,28835	2,08575
144	2605,0	0,0486	0,2271	17,36701	17,37322	0,84699	1,88111	1,73286
144	2605,0	0,0639	0,2771	14,23531	14,29535	0,78572	1,6166	1,53706
144	2605,0	0,0797	0,3271	12,06253	12,16791	0,74328	1,49482	1,38301
144	2603,0	0,0420	0,2000	19,71947	19,69102	0,86263	1,97691	1,92845
144	2603,0	0,0546	0,2500	15,77701	15,80920	0,82916	1,7889	1,61076
144	2603,0	0,0695	0,3000	13,15004	13,23168	0,78135	1,60233	1,43064
144	2603,0	0,0866	0,3500	11,27529	11,39944	0,73121	1,46596	1,31705
144	2603,0	0,1083	0,4000	9,87115	10,03294	0,66784	1,34354	1,26916
144	2603,0	0,1300	0,4500	8,78121	8,97691	0,6255	1,28168	1,21245
144	2603,0	0,1540	0,5000	7,91163	8,13817	0,58625	1,23437	1,17275
144	2603,0	0,0384	0,1903	20,72442	20,68224	0,89779	2,27055	1,94619
144	2603,0	0,0512	0,2403	16,41347	16,43497	0,84998	1,8982	1,63351
144	2603,0	0,0655	0,2903	13,58879	13,66147	0,80233	1,67539	1,43849
144	2603,0	0,0831	0,3403	11,59576	11,71209	0,74097	1,48911	1,33536
144	2603,0	0,1036	0,3903	10,11525	10,27006	0,68129	1,3661	1,27351
144	2603,0	0,1302	0,4403	8,97311	9,16249	0,61116	1,26341	1,26656
144	2601,0	0,0271	0,1353	29,14843	29,00661	0,90402	2,33929	2,71069
144	2601,0	0,0395	0,1853	21,28355	21,23396	0,84923	1,89385	2,11237
144	2601,0	0,0529	0,2353	16,76206	16,77787	0,80496	1,6854	1,76087
144	2601,0	0,0688	0,2853	13,82663	13,89458	0,75015	1,51224	1,56481
144	2601,0	0,0863	0,3353	11,76823	11,88045	0,70251	1,40513	1,42872
144	2601,0	0,1051	0,3853	10,24591	10,39706	0,66249	1,33499	1,32584
144	2601,0	0,1263	0,4353	9,07541	9,26148	0,62244	1,27768	1,25704
144	2601,0	0,1493	0,4853	8,14841	8,36617	0,58661	1,23477	1,20487
144	3250,0	0,0288	0,1254	31,44964	31,28369	0,98518	5,83065	2,68265
144	3250,0	0,0511	0,2054	19,20116	19,18002	0,90911	2,40065	1,78236
144	3250,0	0,0688	0,2554	15,44367	15,48163	0,8393	1,83935	1,55834
144	3250,0	0,0894	0,3054	12,91790	13,00441	0,77202	1,57333	1,42306
144	3250,0	0,1123	0,3554	11,10450	11,23292	0,71485	1,43005	1,32752
144	3250,0	0,1392	0,4054	9,74036	9,90598	0,65746	1,32715	1,2729
144	3250,0	0,1664	0,4554	8,67797	8,87714	0,61741	1,27122	1,21469
144	3250,0	0,0340	0,1456	27,08643	26,96711	0,96885	4,03822	2,35147
144	3250,0	0,0490	0,1956	20,16297	20,12839	0,90289	2,3263	1,88337
144	3250,0	0,0655	0,2456	16,05948	16,08687	0,84782	1,88579	1,60299
144	3250,0	0,0845	0,2956	13,34549	13,42309	0,79065	1,63328	1,43427
144	3250,0	0,1081	0,3456	11,41842	11,53904	0,72222	1,4458	1,34977
144	3250,0	0,1341	0,3956	9,98038	10,13902	0,66604	1,34064	1,28605
144	3250,0	0,1616	0,4456	8,86721	9,06006	0,62215	1,27731	1,23027
144	1631,5	0,0350	0,2487	15,85942	15,89021	0,80653	1,69148	1,66446
144	1631,5	0,0568	0,3487	11,31720	11,44031	0,69617	1,393	1,3883
144	1631,5	0,0814	0,4487	8,80644	9,00130	0,62432	1,28013	1,21804
144	1631,5	0,1119	0,5487	7,21946	7,47346	0,5545	1,20166	1,13863
299	6750,0	0,0621	0,2710	15,01626	15,18925	0,93892	2,90593	2,83777
299	6750,0	0,0839	0,3480	11,69650	11,91444	0,89189	2,21114	2,34334
299	6750,0	0,1175	0,4610	8,83941	9,11807	0,84266	1,85717	1,89812
299	6750,0	0,1565	0,5760	7,09327	7,42645	0,78926	1,6285	1,65057
299	6750,0	0,1980	0,6880	5,96588	6,34469	0,74372	1,49591	1,49649



В полярной системе координат выполняется уравнение (24). В классической механике электрон движется по круговой траектории, для которой выполняются уравнения (26) и (27), а движение вдоль оси Oz является свободным. В квантовой механике движение вдоль классической траектории можно смоделировать путем замены переменных

$$\zeta = z - \frac{V_z}{\omega} \varphi \quad (36)$$

При движении по винтовой траектории также выполняется уравнение равновесия сил в магнитном поле (26) и уравнение (27), в которых следует выполнить замену:

$$M \rightarrow M - \frac{V_z}{\omega} k_z$$

Волновое число  $k_z$  определяется из условия прохождения электрона через отверстие диафрагмы. Симметричное распределение вдоль координаты (36) можно смоделировать, задавая функцию  $\Psi(\zeta)$  в виде, например, распределения Гаусса.

Данные /3-4/ хорошо подтверждают теорию Абрагама /5/, однако при некоторой их коррекции, осуществленной Планком /9/, эти данные столь же хорошо подтверждают теорию Лоренца /1-2/ - см. рис. 3.

### Эксперимент Неймана

Нейман /10/ осуществил эксперимент с бета-лучами, в котором скорость бета-электронов определялась с высокой точностью. В методе Неймана используется комбинация электрического и магнитного поля для отклонения бета-электронов, с дальнейшей фиксацией их треков на фотопластинке — рис. 4. Магнитное и электрическое поле в конденсаторе подбирались так, что сила, действующая на бета-электроны, равна нулю, следовательно  $\beta = E / Hc$  (в обозначениях работы /10/). Координата электрона на фотопластинке, радиус орбиты и динамические параметры связаны соотношениями

$$R = \frac{mc}{eH} \beta = \frac{mE}{eH^2} = \frac{a^2 + z^2}{2z} \quad (37)$$

Отсюда можно вычислить поперечную массу электрона и сравнить с теорией Лоренца — таблица 4. Нейман показал, что его данные согласуются с теорией Лоренца и Эйнштейна, однако в дальнейшем было установлено /13/, что точность данных /3-4, 10/ и других не является достаточной, чтобы подтвердить или опровергнуть одну из этих теорий.

Из данных таблицы 4 следует, что точность определения параметра  $\beta = E / Hc$  в экспериментах /10/ достаточно велика, а параметр относительной массы превышает расчеты по теории Лоренца на 1-3%. Тем не менее, метод определения удельного заряда электрона, развитый Нейманом /10/, подвергся в дальнейшем критике /13/. Задача о движении электрона в опытах Неймана решается в рамках квантовой механики методом, изложенным выше. Траектория электрона в этом случае лежит в плоскости

симметрии, поэтому без всяких изменений справедливы уравнения (26) и (28), а также вытекающее из них уравнение (33).

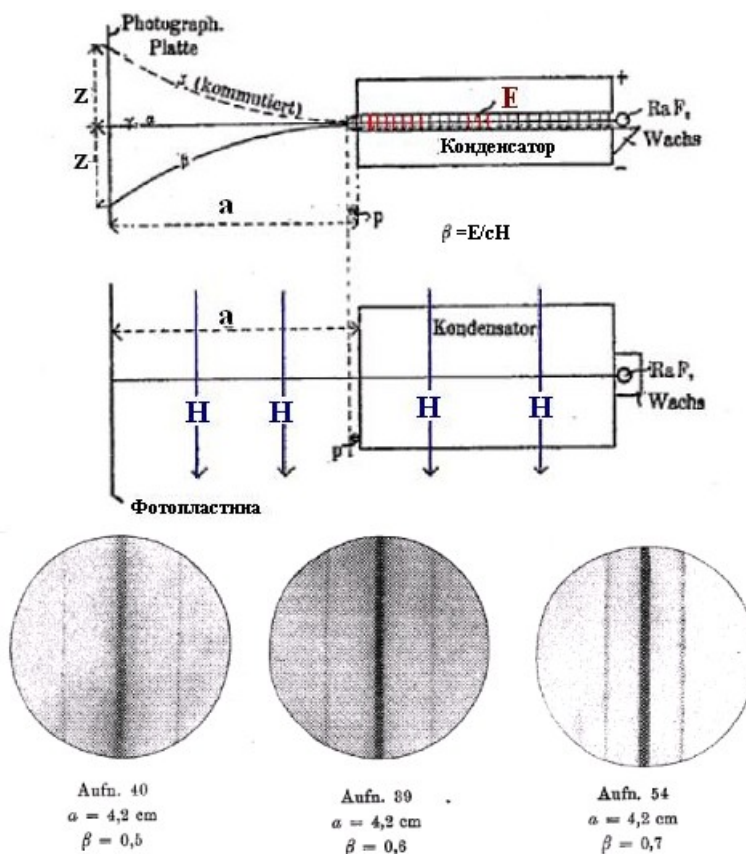


Рис. 4. Схема установки из работы /10/: электроны оставляют на фотопластинке узкие вертикальные полосы, соответствующие прямой или противоположной ориентации магнитного поля; гамма лучи и альфа частицы оставляют жирную среднюю полосу. Размеры конденсатора -  $5 \times 3 \times 0,5$  см, зазор —  $0,2511$  мм.

Возникает вопрос, каков порядок квантового числа  $n_B$  в экспериментах Кауфмана /3-4/, Неймана /10/ и других экспериментах с магнитным полем, на которых, в частности, основаны результаты /12/.

Ширина функции плотности вероятности связана с искомым квантовым числом соотношением



$$\frac{m\omega}{\hbar} (\delta\xi)^2 \approx n_B$$

Подставляя в это уравнение частоту движения электрона (29), находим

$$n_B \approx \frac{eB_z}{\hbar} (\delta\xi)^2 \quad (38)$$

Данные /3-4/ и /10/ приведены в сантиметрах с точностью до 4 знака, т.е. ширина функции распределения составляет около 1 мк. Величина индукции магнитного поля в экспериментах Кауфмана составляла 144 Гаусс, следовательно в этом случае  $n_B \approx 2 \cdot 10^{11}$ , что близко к величине числа квантового углового момента по данным /3-4, 10, 12/  $M \cong 10^{11}$  - см. таблицы 1-4.

В экспериментах Неймана /10/ величина индукции изменялась в пределах от 96 до 133 Гаусс, т.е. квантовое число осцилляций было чуть меньше, чем в экспериментах Кауфмана, но все еще порядка числа углового момента — см. таблицу 4.

Следовательно, бета-электроны движутся в магнитном поле таким образом, что средние значения квантовых чисел углового и колебательного движения практически совпадают.

Определим кинетическую энергию бета-электронов согласно формулам релятивистской механики /7-8/:

$$E_k = (m - m_0)c^2 \quad (39)$$

Согласно уравнению квантовой механики (33), кинетическая энергия бета-электронов линейно зависит от параметра

$$E_B = \frac{(eB_z R)^2}{m} \quad (40)$$

На рис. 5 представлены данные /3-4, 10, 12/, которые обобщаются линейной зависимостью

$$E_k = 0,7002E_B - 45756, \quad eV \quad (41)$$

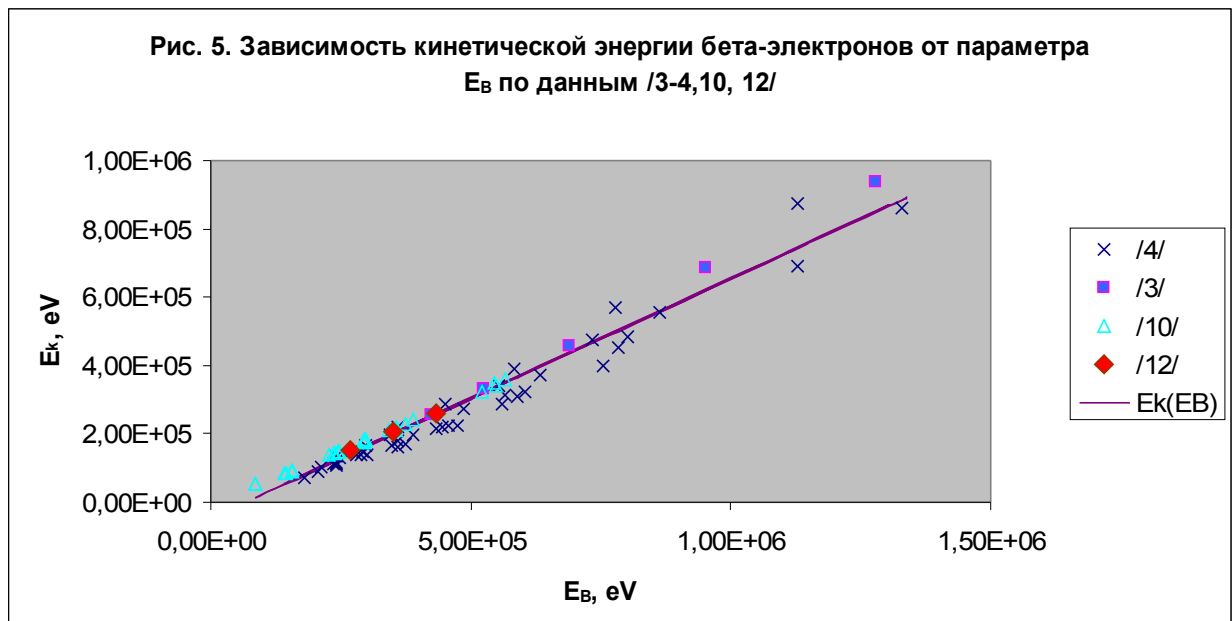
Следовательно, релятивистская гипотеза (39) подтверждается в этом случае для всей совокупности данных /3-4, 10, 12/, не смотря на то, что, например, данные /3-4/ имеют большое рассеяние относительно кривой Лоренца – см. рис. 3.

*Таблица 4. Сравнение теории Лоренца с данными /10/: параметры массы вычислены с использованием современных значений физических констант*

B, Gauss	P, Volt	a, cm	z, cm	R, cm	v/c	m/m <sub>0</sub>	Lorentz	M	E <sub>B</sub> , eV	E <sub>k</sub> , eV
133,19	593,1	4,1035	0,9173	9,6371	0,591546	1,272999	1,240278	9,40E+10	2,28E+05	1,40E+05
110,97	423,14	4,1028	0,9603	9,2446	0,506537	1,18818	1,159799	7,20E+10	1,56E+05	9,62E+04
133,19	656,04	4,1026	0,7672	11,3529	0,654322	1,355778	1,322373	1,30E+11	2,97E+05	1,82E+05
133,19	655,69	4,8078	1,0734	11,3039	0,653973	1,35064	1,321845	1,29E+11	2,95E+05	1,79E+05
110,97	592,28	5,1785	0,8726	15,8024	0,709013	1,451023	1,418046	2,11E+11	3,73E+05	2,30E+05
133,19	654,84	4,1682	0,8	11,2587	0,653125	1,346988	1,320567	1,28E+11	2,94E+05	1,77E+05
110,97	506,47	5,1496	1,172	11,8993	0,60629	1,277753	1,257477	1,19E+11	2,40E+05	1,42E+05
133,19	654,85	4,6183	0,9854	11,3151	0,653135	1,353711	1,320582	1,30E+11	2,95E+05	1,81E+05
133,9	654,84	4,1689	0,8	11,2623	0,649662	1,361828	1,315403	1,29E+11	2,94E+05	1,85E+05
128,19	772,85	4,1905	0,5004	17,7965	0,800891	1,671147	1,66998	3,08E+11	5,48E+05	3,43E+05
128,19	665,87	4,1905	0,6966	12,95259	0,69003	1,411703	1,381634	1,63E+11	3,43E+05	2,10E+05
128,19	580,75	4,1905	0,8961	10,24623	0,601821	1,280416	1,252143	1,02E+11	2,37E+05	1,43E+05
106,8	407,9	4,1905	0,9714	9,524351	0,507359	1,17623	1,16045	7,36E+10	1,55E+05	9,01E+04
128,19	766,64	4,6453	0,6165	17,80931	0,794456	1,685901	1,646574	3,09E+11	5,44E+05	3,50E+05
128,19	678,87	4,6453	0,8451	13,18957	0,703502	1,410004	1,407076	1,69E+11	3,57E+05	2,10E+05
128,19	591,59	4,6453	1,0852	10,48492	0,613055	1,286236	1,265758	1,07E+11	2,47E+05	1,46E+05
106,8	393,28	4,6453	1,2723	9,116387	0,489174	1,1677	1,146544	6,74E+10	1,43E+05	8,57E+04
96,328	284,11	4,6453	1,5657	7,673957	0,391802	1,106894	1,086898	4,31E+10	8,68E+04	5,46E+04
96,328	283,92	4,2013	1,2523	7,673551	0,39154	1,107576	1,086766	4,31E+10	8,68E+04	5,50E+04
128,19	762,96	5,1567	0,7939	17,14437	0,790643	1,630783	1,633245	2,86E+11	5,21E+05	3,22E+05
128,19	676,15	5,1567	1,0409	13,2938	0,700683	1,426863	1,401595	1,72E+11	3,58E+05	2,18E+05
128,19	589,05	5,1567	1,3635	10,43296	0,610423	1,285381	1,262505	1,06E+11	2,45E+05	1,46E+05
106,8	391,66	4,2013	1,0319	9,068582	0,487159	1,166382	1,145064	6,67E+10	1,41E+05	8,50E+04
128,19	588,48	4,2013	0,8825	10,44177	0,609832	1,287712	1,261781	1,06E+11	2,45E+05	1,47E+05
128,19	693,2	4,2013	0,6427	14,0532	0,718351	1,471272	1,437442	1,92E+11	3,88E+05	2,41E+05
128,19	779,08	4,2013	0,4892	18,2852	0,807347	1,703311	1,694696	3,26E+11	5,67E+05	3,59E+05

Сравнивая выражение (41) с уравнениями (30) и (31), находим, что на долю энергии движения вдоль классической траектории приходится в

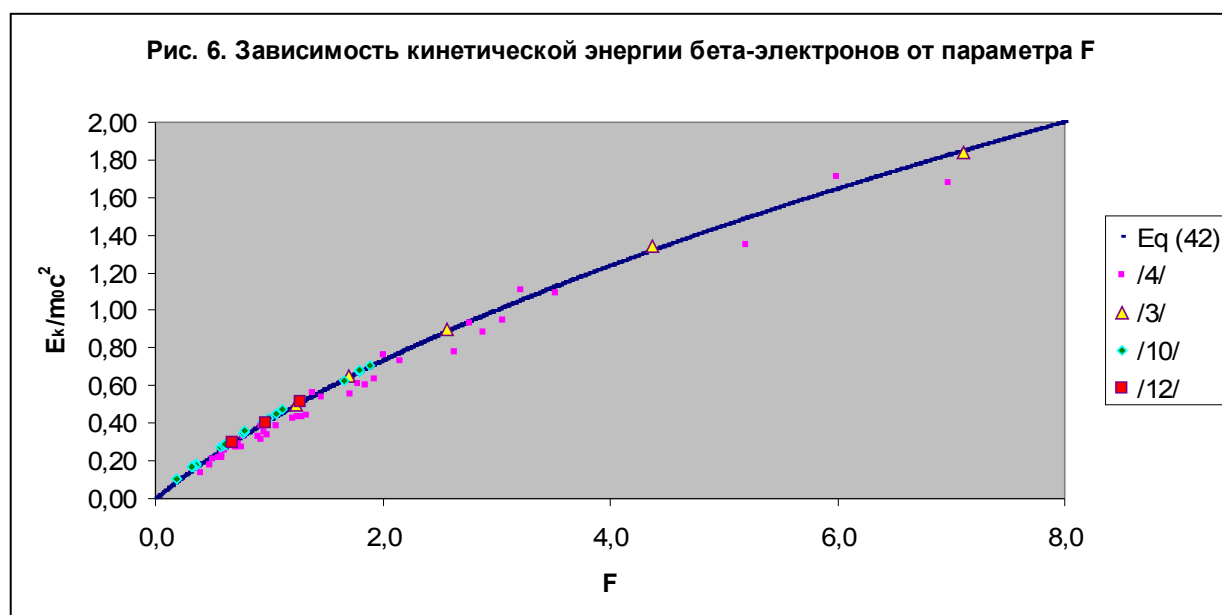
совокупности  $3E_B / 8$ , тогда как на долю энергии квантовых осцилляций относительно классической траектории приходится приблизительно  $E_B / 3$ . Т.е. движение бета-электронов в магнитном поле не является классическим. Этим, в частности, объясняется значительный разброс данных на рис. 3 и 5. Действительно, хотя точность определения исходных данных по магнитному и электрическому полю, и по геометрическим параметрам траекторий в работах [3-4, 10] достаточно велика — см. таблицы 3-4, окончательный результат содержит значительную ошибку.



Используя выражение скорости (20), содержащее только классические параметры, представим кинетическую энергию бета-электронов в виде

$$E_k / m_0 c^2 = \sqrt{1 + F} - 1, \quad F = (eH\rho / m_0 c)^2 \quad (42)$$

На рис. 6 дано сравнение данных [3-4, 10, 12/ с теоретической зависимостью (42), вытекающей из теории Лоренца. Данные, полученные на четырех различных установках (установки /3/ и /4/ различаются геометрическими параметрами и величиной индукции магнитного поля), довольно точно соответствуют теории Лоренца, хотя исходные уравнения для вычисления массы электроны – (3), (34) и (37) сильно различаются между собой.



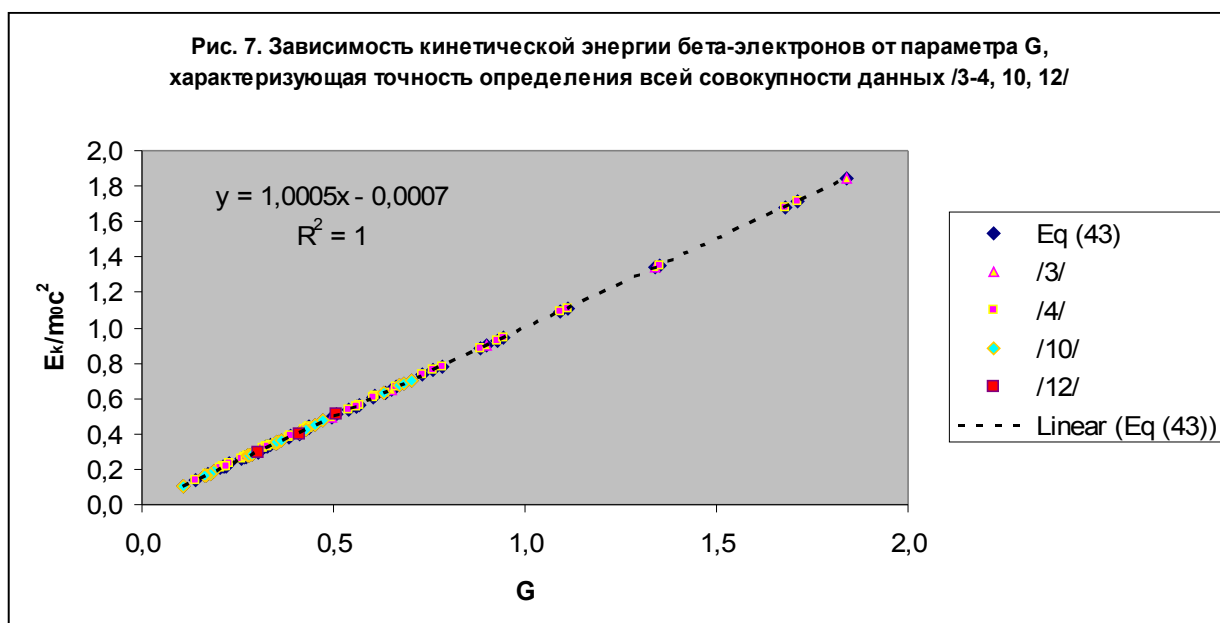
Используя уравнение (2), представим формулу кинетической энергии в форме

$$\frac{E_k}{m_0 c^2} = G = \frac{eH\rho}{m_0 v} - 1 \quad (43)$$

На рис 7. представлена зависимость (43), характеризующая точность представления всей совокупности данных /3-4, 10, 12/. Отметим, что хотя для вычисления скорости и массы использовались различные уравнения (3), (34) и (37), совокупность данных /3-4, 10, 12/ соответствует уравнению (43) с точностью не ниже 0,07%. Следовательно, данные /4/ определены именно с такой точностью, а их несоответствие теории Лоренца объясняется, видимо, квантовыми эффектами.

Уравнение (43) не содержит никакой особенности при  $v \rightarrow c$ . Оно показывает, что в предельном случае при  $v \rightarrow c$  кинетическая энергия и радиус орбиты линейно связаны между собой, т.е. кинетическая энергия не зависит от скорости. То же самое следует из уравнения (42). Уравнение (41) показывает, что в этом случае кинетическая энергия и масса связаны между собой линейной зависимостью. Уравнение (16) содержит неопределенность при  $v \rightarrow c$ , поэтому оно не может быть использовано для проверки

теории, а все другие формулы классической электродинамики Лоренца нельзя подтвердить точнее, чем позволяет квантовая природа движения электрона. Результаты классических экспериментов по определению зависимости поперечной массы электрона от скорости зависят от параметра энергии квантовых осцилляций, который, в свою очередь, связан с конструктивными особенностями экспериментальных установок.



Наконец, заметим, что данные /12/, послужившие основанием для признания теории Лоренца, содержат всего три точки. Но можно ли подтвердить формулу (16), да и вообще любую теорию такого типа по трем точкам, даже если они хорошо ложатся на теоретическую зависимость? Ведь результаты множества экспериментальных работ, включая /3-4, 10-11/, были отвергнуты по разным причинам, хотя они опирались на большие ряды данных. Развитая выше теория квантовых осцилляций в окрестности классических орбит позволяет использовать многочисленные данные указанных работ для уточнения квантовых параметров движения заряженных частиц в экспериментальных установках, включая современные ускорители.

## Литература

1. Lorentz, Hendrik Antoon (1892a), "[La Théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants](#) at the [Internet Archive](#)", *Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles* **25**: 363–552
2. Г.А. Лорентц. Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения. Москва, ГИТТЛ, 1953, 471 с.
3. Kaufmann, W. (1901), "[Die magnetische und elektrische Ablenkbarkeit der Bequerelstrahlen und die scheinbare Masse der Elektronen](#)", *Göttinger Nachrichten* (2): 143–168
4. Kaufmann, W. (1906), "[Über die Konstitution des Elektrons](#)", *Annalen der Physik* **19**: 487–553
5. Abraham, Max (1903), "[Prinzipien der Dynamik des Elektrons](#)", *Annalen der Physik* **315** (1): 105–179
6. Bucherer, A. H. (1903), "[Über den Einfluß der Erdbewegung auf die Intensität des Lichtes](#)", *Annalen der Physik* **316** (6): 270–283
7. Einstein, Albert (1905a), "[Zur Elektrodynamik bewegter Körper](#)", *Annalen der Physik* **322** (10): 891–921.
8. Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов в четырех томах. Т.1. – М., Наука, 1965.
9. Planck, Max (1906b). Die Kaufmannschen Messungen der Ablenkbarkeit der  $\beta$ -Strahlen in ihrer Bedeutung für die Dynamik der Elektronen//*Physikalische Zeitschrift* 7: 753–761
10. Neumann, Günther (1914). Die träge Masse schnell bewegter Elektronen//*Annalen der Physik* 350 (20): 529–579.  
<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k153486.image.f542.pagination>
11. Ch. E. Guye et L a v a n c h y , Verification expérimentale de la forraule de L o r e n t z - E i n s t e i n par les rayons cathodiques de grande vitesse. *Arch, desSc Phys et Nat.* XLII, pp. 287, 353, 441; 1916.
12. Rogers, M. M. et al. (1940), "A Determination of the Masses and Velocities of Three Radium B Beta-Particles", *Physical Review* 57: 379–383
13. С.Э. Фриш. [Опытное подтверждение формул Лорентца-Эйнштейна](#)// УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК. Том III, вып. 1,1922.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 5. Квантовая механика. Ч. 1. Нерелятивистская теория. – М., ОГИЗ, 1948, - 567 с.
15. David L. Miller, Kevin D. Kubista, Gregory M. Rutter, Ming Ruan, Walt A. de Heer, Phillip N. First, Joseph A. Stroscio. Observing the Quantization of Zero Mass Carriers in Graphene//*Science*, 15 May 2009, Vol. 324. no. 5929, pp. 924 – 927.